

Л. О. Соколенко

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для здобувачів вищої освіти
другого магістерського рівня спеціальності
А4 Середня освіта (Математика)

Частина 2

Чернігів
Видавництво «Десна Поліграф»
2025

Рецензенти:

Ботузова Ю. В. – доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка;

Швець В. О. – кандидат педагогічних наук, професор, професор кафедри методики навчання математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.

Соколенко Л. О.

С 59 Наукові основи шкільного курсу математики :
Навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня спеціальності А4 Середня освіта (Математика). Частина 2. Чернігів : Десна Поліграф, 2025. 92 с.

ISBN 978-617-8145-48-4

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольні-сміслові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 2 містить матеріал по змістовому модулю № 3.

Посібник призначений для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня, спеціальності А4 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

УДК 373.5.016:51]:001(075.8)

*Рекомендовано до друку вченою радою Національного
університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка
(Протокол № 9 від 26 березня 2025 року)*

ISBN 978-617-8145-48-4

© Соколенко Л. О., 2025

ПЕРЕДМОВА	4
------------------------	----------

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ	6
---------------------------------------	----------

МОДУЛЬ 2.

Наукові основи шкільного курсу геометрії

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3.

Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання.....	10
---	----

Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.....	10
---	----

Тема 12. Координати і вектори у просторі.....	27
--	----

Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.....	50
---	----

Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінації геометричних тіл	59
--	----

Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.....	72
--	----

КОМПЛЕКСИ ЗАВДАНЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	84
--	-----------

ЛІТЕРАТУРА.....	85
------------------------	-----------

Проблема професійної підготовки вчителя математики на даному етапі залишається досить актуальною, оскільки математична освіта має особливе значення у системі загальної освіти.

Навчальна дисципліна «Наукові основи шкільного курсу математики (НОШКМ)», яка належить до дисциплін професійної і практичної підготовки здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня галузі знань А Освіта, спеціальності А4 Середня освіта (Математика), призначена для одержання ними дієвих знань та оволодіння професійними компетентностями, які виходять за межі шкільного курсу математики.

Вивчаючи «НОШКМ», здобувачі вищої освіти другого магістерського рівня оволодівають *спеціальними, методологічною, логічною, процедурною* компетентностями. Детально про ці компетентності згадується у передмові до частини 1 навчально-методичного посібника «**Наукові основи шкільного курсу математики**» [1.13].

Предмет навчальної дисципліни «НОШКМ» – шкільна математика, яка розглядається з позицій загальних ідей та понять математики, логіки та дидактики математики, що складають її основу.

Курс «НОШКМ» має надати можливість здобувачам вищої освіти – майбутнім учителям математики усвідомити свій предмет з точки зору вищої математики, об'єднати розрізнені факти, систематизувати їх на основі загальних ідей математики, логіки та дидактики математики.

Мета курсу – систематизація знань здобувачів вищої освіти на основі загальних математичних, логічних та дидактичних ідей, які покладено в основу сучасного шкільного курсу математики.

Основні завдання курсу, міждисциплінарні зв'язки, знання та вміння, якими мають оволодіти здобувачі вищої освіти під час навчання курсу «НОШКМ», також викладені у передмові до частини 1 навчально-методичного посібника «**Наукові основи шкільного курсу математики**» [1.13].

Курс «Наукові основи шкільного курсу математики» (НОШКМ) складається з двох частин: 1. «Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу»; 2. «Наукові основи шкільного курсу геометрії».

До другої частини курсу «Наукові основи шкільного курсу геометрії» відноситься **змістовий модуль № 3** Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання.

В цілому курс складається з 15-ти тем. Опрацювання цих тем відбувається під час проведення лекційних та практичних занять. Частина матеріалу виноситься на самостійне опрацювання здобувачів вищої освіти.

Навчально-методичний посібник «Наукові основи шкільного курсу математики» складається з двох частин. У частині 2 викладено матеріал, пов'язаний з науковими основами шкільного курсу «Геометрія».

Розглянуті у посібнику теми містять: мету навчання, завдання, змістову структуру теми, **контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичні завдання реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи), відповіді та вказівки до контрольно-сміслових запитань та завдань репродуктивного характеру, зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру, список літератури до кожної з тем курсу.

Після розглянутих тем 11-15 у другій частині посібника представлені **комплекси завдань самостійної роботи** по змістовому модулю №3.

В кінці посібника представлено **список літератури**, який містить науково-методичні роботи, що мають безпосереднє відношення до кожної з тем курсу та статті присвячені методиці та технології організації і проведення окремих занять курсу.

До цього списку літератури також включені чинні навчальні програми з математики для закладів загальної середньої освіти та шкільні підручники, які використовуються під час опрацювання окремих тем курсу.

Серед **контрольно-сміслових запитань і завдань репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичних завдань реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи) є такі, що опрацьовуються в аудиторії, використовуючи певні вказівки, та запитання і завдання, призначені для самостійної роботи студентів. Запитання та завдання, призначені для самостійної роботи студентів мають відповідні позначення біля їх номерів (°).

Використання цього посібника надасть можливість майбутньому вчителю продовжити вивчення окремих тем курсу «Методика навчання математики» на більш ґрунтовному рівні.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Швецю В. О. та доктору педагогічних наук, доценту Ботузовій Ю. В. за цінні поради під час підготовки рукопису посібника до друку.

Л. О. Соколенко.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

Модуль 2. НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3.

*Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури»
та «Геометричні величини» курсу геометрії
загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання*

Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників. Місце теми в програмі курсу геометрії 10 класу та в курсі проєктивної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Суть способу паралельного проєктування. Основні властивості паралельного проєктування та наслідки з них. Побудова зображення плоских фігур (кола, трикутника та його комбінацій з колом, квадрата, ромба та їх комбінацій з колом та ін.). Побудова зображень просторових фігур (многогранників, тіл обертання). Переріз многогранників площинами. Метод слідів січних площин. Метод внутрішнього проєктування. Метричні задачі на побудову. Метрично визначені зображення. Розв'язування задач.

Тема 12. Координати і вектори у просторі. Місце теми в програмі курсу геометрії 11 класу та курсу аналітичної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Методика вивчення координат у просторі: відстань між точками, поділ відрізка у даному відношенні, координати середини відрізка. Методика вивчення векторів у просторі. Дії над векторами. Скалярний добуток. Векторний та мішаний добуток, їх геометричні інтерпретації. Застосування методу координат і векторів до розв'язування геометричних задач. Застосування векторів до доведення нерівностей.

Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.

Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин. Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин). Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими. Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Площина у просторі. Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

Опорні задачі шкільного курсу геометрії 10 класу, пов'язані з теорією прямої та площини у просторі, та їх використання під час розв'язування окремих типів стереометричних задач.

Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінації геометричних тіл. Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення многогранників та тіл обертання у стереометрії. Методика формування основних понять тем «Многогранники», «Тіла обертання» в шкільному курсі стереометрії. Співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника. Теорема Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника та її застосування до класифікації правильних многогранників. Сфера, циліндр та конус як простіші поверхні обертання. Перерізи тіл обертання площинами та дотичні площини до тіл обертання. Зображення комбінацій просторових фігур. *Методика навчання учнів розв'язування задач на знаходження елементів многогранників та тіл обертання. Методика навчання учнів розв'язування задач на комбінації геометричних тіл.*

Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії. Аналіз діючих програм шкільного курсу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії. Виділення геометричних величин, які розглядають у курсі геометрії 10-11 класів. Розгляд поняття «об'єм тіла» та його основних властивостей. Формування понять «рівноскладені тіла» та «рівновеликі тіла», встановлення взаємозв'язку між цими поняттями. Різні математичні та методичні підходи до виведення формул об'ємів та площ поверхонь: а) об'єму прямокутного паралелепіпеда; б) об'єму трикутної піраміди; в) площ поверхонь тіл обертання. Класифікація задач за рівнем складності залежно від профільної диференціації: на обчислення відстаней, величини кутів, площі поверхні, об'єму. Методика навчання учнів розв'язування задач на визначення об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Структура навчальної дисципліни (з робочої програми 2024-2025 н.р.)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		лекції	практ	лаб	інд	С.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 2. Наукові основи шкільного курсу геометрії						
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3. Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання						
Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.	4					4
Тема 12. Координати і вектори у просторі.	6	1	1			4
Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.	6	1	1			4
Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінацій геометричних тіл.	6	1	1			4
Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.	7	1	2			4
Разом за змістовим модулем 3	29	4	5			20
Усього годин за модуль 2	29	4	5			20
Всього:	90	12	12			66

Модуль 2.

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3.

Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури»
та «Геометричні величини» курсу геометрії
загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання

Тема 11.

ЗОБРАЖЕННЯ ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ. МЕТОДИ ПОБУДОВ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Мета заняття: з'ясувати вимоги, які ставляться до зображень на площині просторових фігур; розкрити суть методу паралельного проєкціювання (проєктування) та розглянути його властивості, сформулювати алгоритми побудови зображень плоских фігур та їх комбінацій з колом; повторити алгоритми побудови просторових фігур; розкрити суть методу слідів, методу внутрішнього проєкціювання (проєктування) та розглянути методику навчання учнів застосування цих методів до розв'язування задач зі шкільного курсу стереометрії.

Завдання.

1) Аналіз програм шкільного курсу геометрії 10-11 класів на предмет вивчення зображень плоских і просторових фігур у стереометрії.

2) Розкриття суті наукових засад теорії зображення просторових фігур з використанням проєкційних методів зображень у курсі стереометрії.

3) З'ясування вимог, які ставляться до зображень на площині просторових фігур.

4) Розкриття суті методу паралельного проєкціювання (проєктування) та розгляд його властивостей.

5) Розгляд алгоритмів побудови зображень кола та його елементів, трикутника, чотирикутників, п'ятикутника, шестикутника та їх комбінацій з колом.

6) Розгляд алгоритмів побудови просторових фігур.

7) Розкриття суті методу слідів.

8) Розгляд методики навчання учнів розв'язування задач на побудову перерізів многогранників методом слідів, методом внутрішнього проєкціювання (проектування).

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення зображень плоских і просторових фігур у стереометрії.	[2.9]
2	Наукові засади теорії зображення просторових фігур.	[11], [12] Л3.2, 3.4, 3.5, [13], [14]. [1], [4], [5] та ін.
3	Вимоги, які ставляться до зображень на площині просторових фігур.	[1], [5]
4	Суть методу паралельного проєкціювання (проектування) та його властивості.	[1], [2], [5], шкільні підручники [8], [9] та ін.
5	Алгоритми побудови зображень кола та його елементів, трикутника, чотирикутників, п'ятикутника, шестикутника та їх комбінацій з колом.	[1], [2], [5], шкільні підручники [8], [9] та ін.
6	Алгоритми побудови просторових фігур. Повні та неповні зображення.	[1], [2], [5], шкільні підручники [8], [9] та ін.
7	Позиційні задачі. Найпростіші позиційні задачі.	[1], [2], [4]
8	Суть <i>методу слідів</i> . Суть <i>методу внутрішнього проєкціювання (проектування)</i> . Методика навчання учнів розв'язування задач на побудову перерізів многогранників методом слідів, методом внутрішнього проєкціювання (проектування).	[1]-[6], шкільні підручники [8], [9] та ін.
9	Метричні задачі на побудову. Метрично визначені зображення. Розв'язування задач.	[1], [2], шкільні підручники [8], [9] та ін.



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення зображень плоских і просторових фігур у стереометрії. Визначте місце теми в програмі, вимоги до знань і вмінь учнів.

2. З'ясуйте, в чому полягає суть наукових засад **теорії зображення просторових фігур**. Хто з вчених вважається її основоположником та розробником в умовах педагогічного процесу? В яких роботах популяризовані та деталізовані дані ідеї?

3. З'ясуйте, які **вимоги** ставляться до зображень на площині просторових фігур.

4°. Розкрийте суть **методу паралельного проєкціювання (проектування)** та розгляньте його властивості. З'ясуйте, які з них розглядаються у шкільному курсі стереометрії.

5°. Розгляньте алгоритми побудови кола та його елементів, трикутника, чотирикутників, п'ятикутника, шестикутника та їх комбінацій з колом, відомі з курсу проєктивної геометрії та методів зображень:

5.1. Побудувати зображення кола та його спряжених діаметрів.

5.2. Побудувати зображення правильного трикутника:
а) описаного навколо кола; б) вписаного в коло.

5.3. Побудувати зображення квадрата: а) описаного навколо кола; б) вписаного в коло.

5.4. Побудувати зображення ромба описаного навколо кола.

5.5. Побудувати зображення правильного п'ятикутника.

5.6. Побудувати зображення правильного п'ятикутника вписаного в коло.

5.7. Побудувати зображення правильного шестикутника.

5.8. Побудувати зображення правильного шестикутника вписаного в коло.

5.9. Побудувати зображення правильного шестикутника описаного навколо кола.

6°. Повторіть алгоритми побудови многогранників та тіл обертання:

6.1. Побудувати зображення многогранників (призми, піраміди, правильної піраміди, зрізаної піраміди).

6.2. Побудувати зображення тіл обертання (циліндра, кругового конуса, зрізаного конуса, кулі).

7. Яке зображення називають *повним*? Наведіть приклади повних зображень. Наведіть приклади неповних зображень.

8. Дайте означення *позиційної задачі*. До яких простіших задач зводяться позиційні задачі?

9°. Згадайте *суть методу слідів*. Розгляньте приклади розв'язування задач цим методом.

10. Розкрийте *суть методу внутрішнього проектування*. Розгляньте приклади розв'язування задач цим методом.

11. Згадайте, які задачі відносять до *метричних задач* на побудову. Яке зображення називають *метрично визначеним*?

12. Які достатні умови визначення форми: а) плоскої фігури; б) просторової фігури?



Відповіді та вказівки до контрольно-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. [2.9, профільний рівень, 10 клас].

Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ (15 годин)

Зміст навчального матеріалу (складова теми).

Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів: розв'язує **вправи, що передбачають:** виконання найпростіших побудов перерізів пірамідах та призмах.

Тема 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ (24 години)

Зміст навчального матеріалу (складова теми).

Паралельне проектування, його властивості. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії.

Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів: розв'язує **вправи, що передбачають:** застосування методу слідів та властивостей проектування; виконання побудови перерізів многогранників.

2. [10], [11], [12], [13], [14].

Професор М. Ф. Четверухін вважається основоположником і розробником **теорії зображень в умовах педагогічного процесу** [14, с. 89]. У посібнику для вчителів «Изображение фигур в курсе геометрии» автор порушує проблему зображення фігур і використання цих зображень в умовах педагогічного процесу шляхом поділу їх на два види.

З одного боку зображення геометричних фігур та закономірностей дають можливість унаочнити матеріал. У такому випадку роль геометричних зображень *ілюстративна* і автор називає їх «*иллюстрирующими чертежами*». З іншого – зображення фігур використовуються як засіб розв’язання геометричної задачі. Такі зображення М. Ф. Четверухін називає «*решающими чертежами*».

У обох випадках для зображення геометричних фігур використовується **метод проєкціювання** і отримані рисунки автор називає «*проекционными чертежами*». Однак різне призначення і застосування проєкційних рисунків вимагає дотримання різних вимог щодо їх виконання. Для «*иллюстрирующих чертежей*» важливим є наочність і простота у виконанні, а для «*решающего чертежа*» необхідна достатня повнота та точність відповідного зображення, що дозволяє реалізувати розв’язання задачі. У своєму посібнику «Изображение фигур в курсе геометрии» М. Ф. Четверухін розглядає способи побудови і застосування ілюстративних рисунків у практичній діяльності вчителя.

Під час виконання зображень виникає потреба дослідити зображення з точки зору його **повноти (чи неповноти)**, виразивши результат у числовому вигляді (коефіцієнт неповноти). Разом із позиційними властивостями М. Ф. Четверухін розглядає *метричну повноту чи неповноту* зображень і досліджує повні зображення з точки зору їх **метричної визначеності**. Відповідний коефіцієнт називається **параметричним числом**, яке показує, що дане зображення не зовсім визначає *метричні властивості об’єкта* і існує деякий запас параметрів, які можливо використати в подальшому виконанні зображення.

Таким чином, під час виконання ілюстративних рисунків варто користуватися *неповними зображеннями*, оскільки вони мають великий запас вільних параметрів, які використовуються при побудові зображень [13, с. 90].

Стосовно «*решающих чертежей*» та їх застосування у навчанні геометрії, то ці питання висвітлені в роботі «Стереометричні задачі на проєкційному рисунку» [11].

Результатом тривалої роботи Л. М. Лоповка в галузі методики зображення тіл обертання є посібник для вчителів «Зображення круглих тіл» [7]. Вміщені в ньому рисунки демонструють не тільки правильні зображення, а й найпростіші прийоми їх виконання. Автор не обґрунтовує правильність побудов, а лише описує послідовність виконання зображень.

У праці Савченка В. М. «Изображение фигур в математике»[10] у перших трьох розділах розглядаються питання елементарної математики: основні положення теорії, такі як *властивості паралельного проєкціювання*, поняття **повноти і метричної визначеності зображень**; побудова зображень многокутників і многогранників; кола, циліндра, конуса і сфери, а також зображення вписаних і описаних многокутників і многогранників; розв'язування позиційних і метричних задач.

У посібнику для вчителів [3] «С чего начинается решение стереометрической задачи» Гольдберг Я. Е. розглядає побудову зображень на площині стереометричних фігур і їх елементів під час розв'язування задач.

Ці ж питання розглядаються у посібниках [1], [4], [5] та ін.

3. [5, с. 331]. Зображення повинно бути:

1) **правильним**, тобто виконаним певним методом проєктування (проєкціювання). Це означає що фігури та їх частини на рисунку зображуються за одними й тими самими правилами, які визначаються обраним методом.

2) **наочним**, тобто повинна існувати можливість діставати за допомогою рисунка правильне уявлення про оригінал.

3) **простим**, тобто на виконання рисунка повинно витрачатись небагато часу.

Найбільш всім 3-м вимогам для розв'язування задач задовольняє **паралельне проєктування (проєкціювання)**.

4°. [1, Р1, §1, п. 1.1, с. 5-6] або [5, с. 331]; [3.39, Р1, §7], [8, Р2, §7] або [12] Л 3.5 с.360-361.

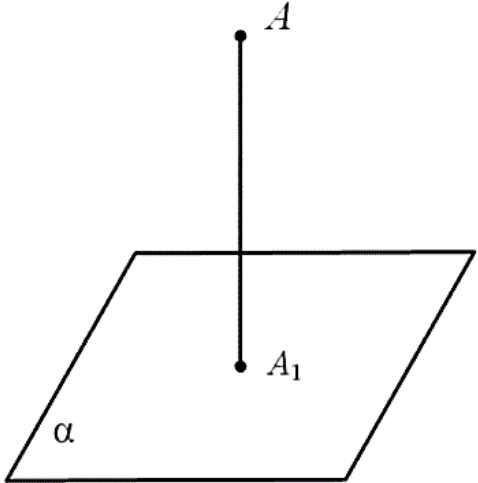
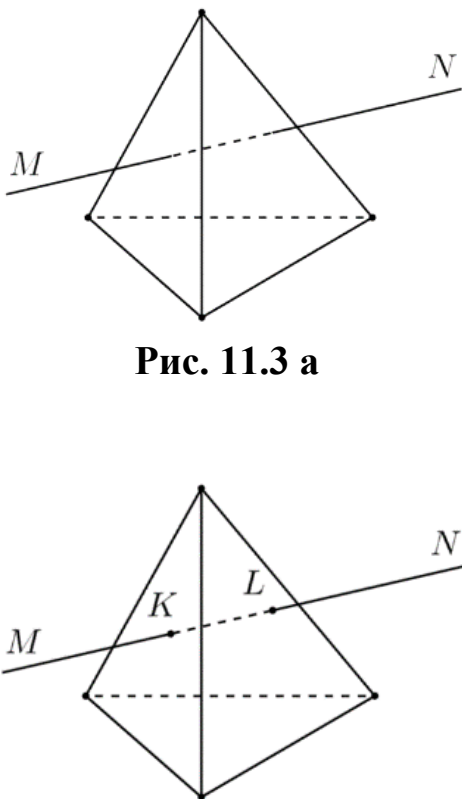
5°. [1, Р1, §2, с. 7-16] або [5, § 6.3.5, с. 331-336] або [12] Л 3.5 с. 361-365.

6°. [1, Р1, §3, с. 17-24] або [5, § 6.3.5, с. 336-337, § 6.4.2, с. 344-347].

7. Задача на побудову може бути розв'язаною тоді і тільки тоді коли зображення даних фігур є **повним**.

Означення [1, с. 25]. Зображення називається **повним**, якщо для кожної його точки задана або може бути побудована її проекція на деяку площину, яка називається основною.

Приклади повних та неповних зображень

Повні зображення	Неповні зображення
1. Нехай точка A є паралельна проекція точки A' і площина α – площини α' на площину рисунка (Рис.11.1).  Рис. 11.1 Побудуємо точку A_1 – проекцію точки A на площину α. За означенням повноти зображення можна стверджувати, що зображення точки A' на рис. 1 є повним. Площина α називається <i>основною площиною</i>, а точка A_1 – <i>вторинною проекцією</i> точки A', тоді точка A – <i>первинна проекція</i> точки A'. Проектування, за допомогою якого знаходять вторинну проекцію, називають <i>внутрішнім</i>, а первинну – <i>зовнішнім</i>.	Зображення на рис. 11.3 а є неповним, бо на ньому неможливо побудувати точки перетину прямої MN з поверхнею піраміди $SABC$. Щоб це зображення стало повним, потрібно задати додатково дві точки. (Рис.11.3 б).  Рис. 11.3 а Рис. 11.3 б

2. Зображення прямої буде повним, якщо задана її проекція на деяку основну площину (**Рис.11.2**).

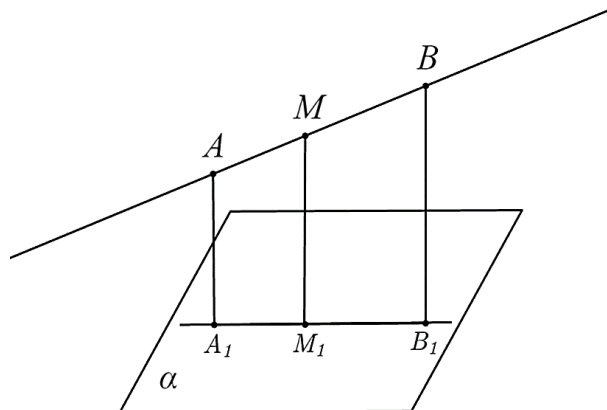


Рис. 11.2

3. Зображення площини буде повним, якщо воно задано повним зображення трьох точок (двох прямих, що перетинаються; двох паралельних прямих; прямої та точки поза нею).

8. Означення [1, Р1, §4 п. 4.2, с. 28]. *Задачі на побудову точок або ліній перетину двох фігур чи взаємне розміщення їх називаються позиційними.*

Встановлено, що для того, щоб позиційна задача була розв'язана, потрібно, щоб зображення було повним.

Позиційні задачі зводяться до таких *простіших задач*:

- 1) побудови лінії перетину двох площин;
- 2) побудови точки перетину прямої з площиною.

9°. Скористайтесь літературою: 1) [2, Р5, §36 п. 36.2, с. 393-398]; 2) [15]; 3) [3.36, §2.3]; 4) [8, Р2, §8] та ін.

Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення на перших уроках стереометрії [15, с. 142].

Вивченню перерізів многогранників передують вироблення в учнів вмінь зображати многогранники встановленого виду й вказувати точки, прямі та площини на їх зображеннях. Оскільки вміння учнями виокремлювати точки, прямі та площини на зображеннях многогранників є необхідним для подальшого вивчення перерізів многогранників. Крім того, починаючи вивчати перерізи

многогранників слід зауважити учням, що перерізом прямої та площини є слід їх перетину, тобто **точка**, а перерізом двох площин – **пряма**. Тому доцільно вивчення задач на побудову перерізів многогранників почати з такої, наприклад, задачі [15, с. 142].

Завдання 1. Розв'яжіть задачу [15, с. 142]. Побудуйте точку перетину прямої MN з площинами (ASB) та (BSC) . Як розміщені пряма MN та площина (ASC) ? (рис. 11.4.а).

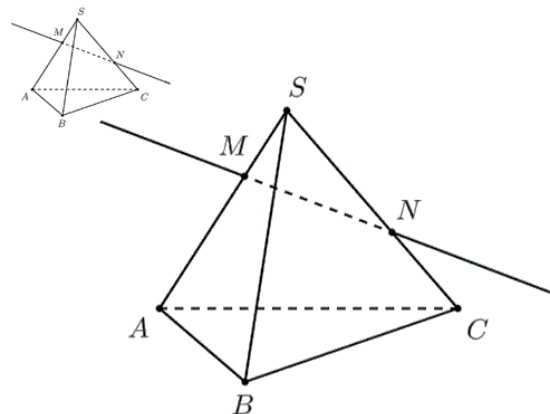


Рис. 11.4 а

Розв'язання.

1. Побудуємо площини $\alpha(ABC)$ та $\beta(ASC)$ (рис. 11.4 б).

2. $\alpha \cap \beta = AC$.

3. Точка D спільна для площин α і β . Отже, $D \in AC$.

4. $M = (ASB) \cap MN$,
 $N = (BSC) \cap MN$.

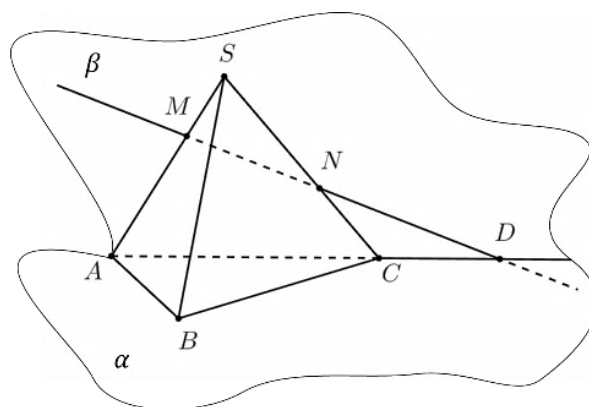


Рис. 11.4 б
 $MN \subset (ASC)$

БАЗОВІ ЗАДАЧІ

Завдання 2. Розв'яжіть задачі №1-3 за наступною схемою.

Схема розв'язування базових задач [15, с.143]

1. Аналіз умови задачі: визначення якого виду многогранник і створення графічного образу.
2. Побудова зображення просторового образу.
3. Позначення на рисунку даних в умові задачі елементів.
4. Побудова слідів перерізу площини (перерізу з гранями многогранника за даними задачі).
5. Знаходження точок перетину сліду з площинами (гранями многогранника).
6. Побудова шуканого перерізу.

Задача 1. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною, що проходить через три точки M, N, K , які лежать відповідно на ребрах AS, SC, BC (рис.11.5).

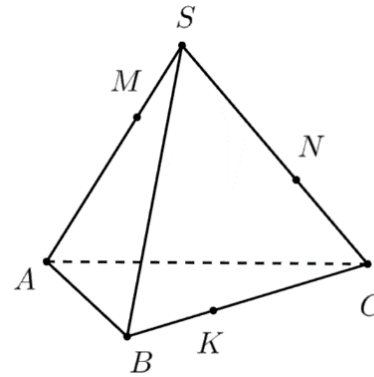


Рис. 11.5

Розв'язання.

1. Трикутна піраміда.
2. Побудова піраміди.
3. Побудова точок M, N, K .
4. Побудова прямих MN та NK (рис. 11.6а).

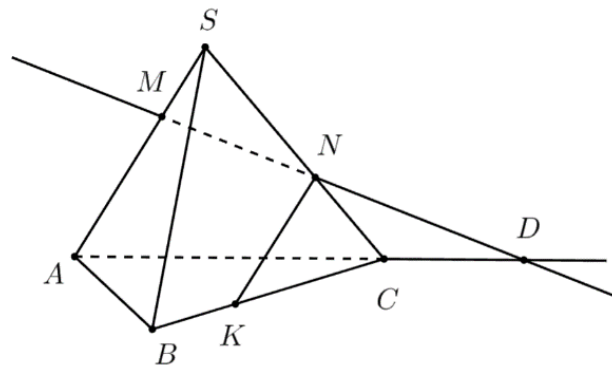


Рис. 11.6 а

5. $D = MN \cap (ABC)$,

$L = KD \cap (ASB)$ (рис. 11.6б).

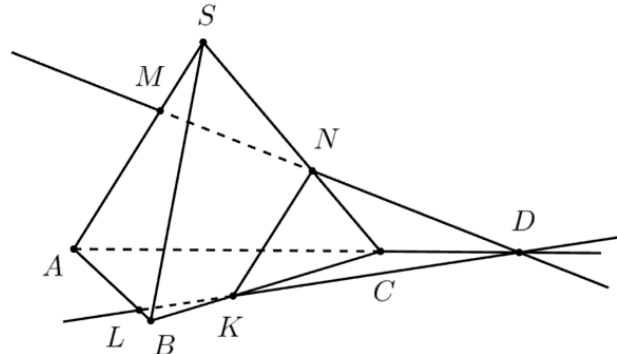


Рис. 11.6 б

6. Побудова ML (рис. 11.6в).

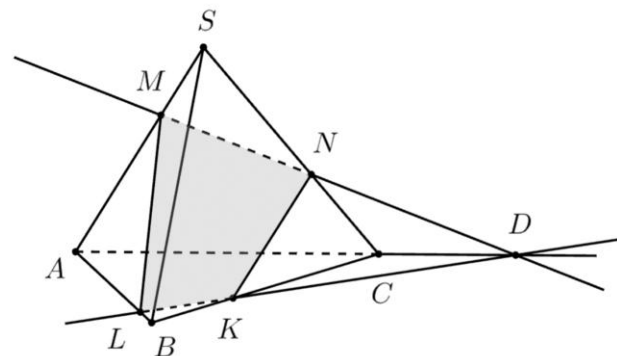


Рис. 11.6 в

Задача 2. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K , які належать відповідно ребрам AB, AD, CC_1 (рис.11.7).

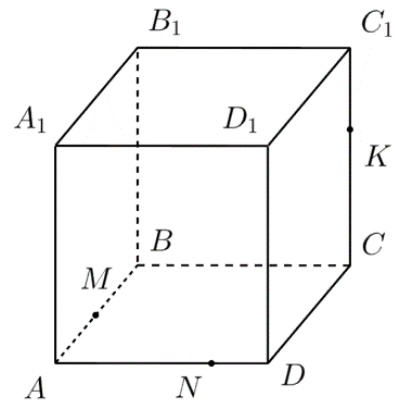


Рис. 11.7

Розв'язання.

1. Куб.
2. Побудова куба.
3. Побудова точок M, N, K .
4. Побудова прямої MN .
5. Побудова точок перетину прямої MN з площинами $(DC_1 D_1)$ та $(BB_1 C_1)$ (рис.11.7а).

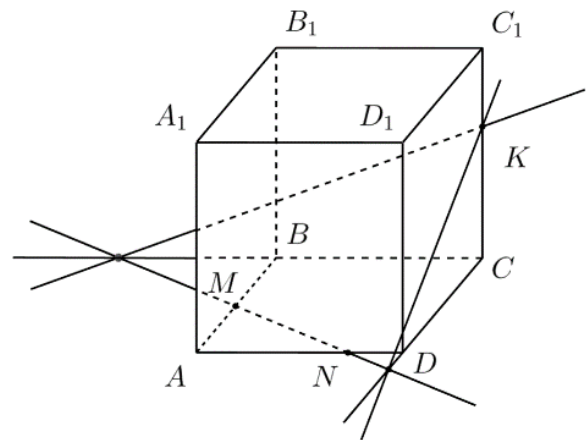


Рис. 11.7 а

6. Побудова слідів перерізу (рис.11.7б, 11.7в).

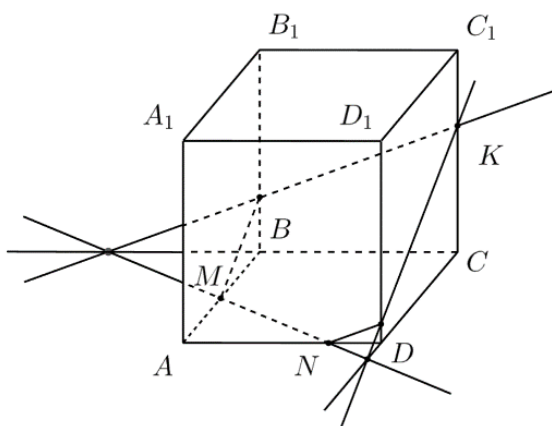


Рис. 11.7 б

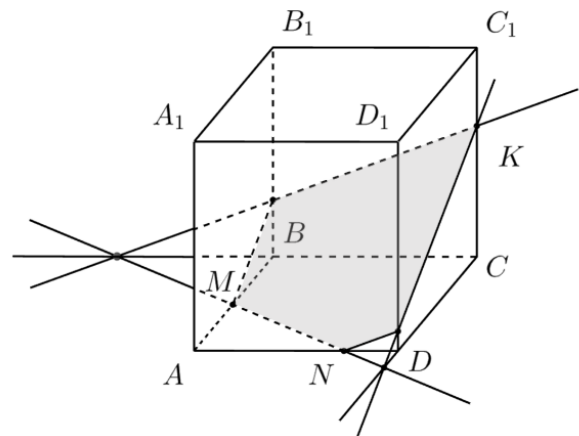


Рис. 11.7 в

10. Скористатись літературою: [2, Р5, §36 п. 36.3, с. 398-404], [8, Р2, §8].

11. [1, Р1, §5, с. 40]. До **метричних задач** відносяться задачі на побудову зображення відрізка певної довжини, кутів певної величини, фігур певної форми, перпендикулярних прямих і площин, спільного перпендикуляра прямих, вписаних фігур певної форми. За зображенням визначають довжину відрізка, величину кута, форму фігури, площу, об'єм і т.п.

Означення [1, Р1, §5, с. 40]. Зображення називається **метрично визначеним**, якщо за цим зображенням можна встановити форму фігури, яку зображено.

12. а) Для визначення **форми плоскої фігури** досить встановити умови, при яких буде відома форма якого небудь її трикутника. Але форма трикутника визначається двома незалежними величинами (двома кутами, двома відношеннями його сторін, відношеннями двох сторін і кутом між ними і т.д.).

12. б) Для визначення **форми просторової фігури** досить встановити умови, при яких буде відома форма якого небудь її тетраедра аналогічно тому, як це було зроблено для плоскої фігури. Форма тетраедра визначається формою його граней і умовою, яка фіксує ці грані (двогранний кут між цими гранями, основа висоти тетраедра на цих гранях і ін.). Оскільки форма грані визначається двома умовами, то форма тетраедра визначається **п'ятьма величинами**.

Зауваження. Метрично визначене зображення визначає оригінал з точністю до подібності.



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1°. Використовуючи **суть та властивості паралельного проектування** розв'яжіть задачі:

№1.1. Як розміщені три точки в просторі відносно площини проекції та напрямку проектування, якщо їхніми паралельними проекціями є: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки однієї прямої? Для кожного випадку виконайте рисунок.

№1.2. Дано точки A' ; B' ; C' – проекції вершин A , B , C паралелограма $ABCD$. Побудуйте проекцію вершини D . Побудову опишіть.

№1.3. Дано паралельну проекцію кола з центром O і хордою AB . Побудуйте проекцію діаметра кола, перпендикулярного до даної хорди. Побудову опишіть.

№1.4. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція трикутника ABC , в якому $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Побудуйте проекцію бісектриси BD . Побудову опишіть.

2°. Згадайте як розв'язуються **простіші позиційні задачі**.

№2.1. Побудуйте лінію перетину площини β , заданої точками A, B, C , з площиною α .

№2.2. Побудуйте точку перетину прямої і площини.

3. Розв'яжіть базову задачу
№3 [15, с.145]:

Задача 3. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K , які належать відповідно ребрам $B_1 C_1, DD_1, D_1 C_1$ (**рис. 11.8**).

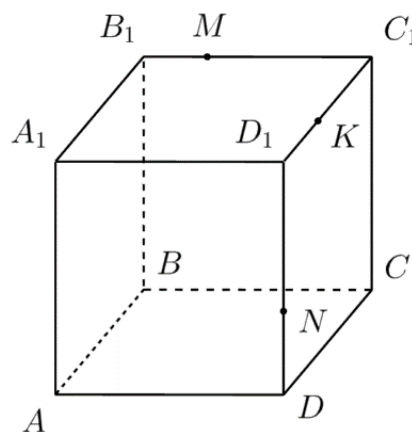


Рис. 11.8

4°. Повторіть як, використовуючи **метод слідів**, побудувати:

№4.1. Переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних ребрах.

№4.2. Переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних гранях.

№4.3. Переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних ребрах.

№4.4. Переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних гранях.

5. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач **методом слідів** :

№5.1. Побудуйте переріз п'ятикутної призми $ABCD A' B' C' D'$ площиною, яка проходить через точки, що лежать на її ребрах AA', CC', EE' .

№5.2. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через точки M, N, P , якщо $M \in SA, N \in SC, P \in (DSE)$.

6°. Повторіть суть **методу внутрішнього проектування (проекціювання)**. Згадайте, як використовуючи **метод внутрішнього проектування (проекціювання)** побудувати:

№6.1. Переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних ребрах.

№6.2. Переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три дані точки M, P, K на її різних бічних гранях.

7. Розв'яжіть наступні **метричні задачі**.

№7.1. Трикутник ABC є зображенням трикутника $A'B'C'$ відомої форми. Побудувати зображення O ортоцентра O' трикутника-оригіналу $A'B'C'$.

№7.2. Побудувати зображення висоти ромба, якщо дано зображення ромба і відомо, що гострий кут ромба дорівнює 60° .

№7.3. Трикутник $A'B'C'$ – проекція рівностороннього трикутника. Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M' до сторони $A'C'$.

№7.4. Трикутник ABC зображує правильний трикутник. Довільна пряма перетинає його сторони AB і AC у точках M і N . Побудуйте зображення перпендикуляра, який опущено з вершини A на пряму MN .

№7.5. Побудувати на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює 45° .

№7.6. У правильному тетраедрі $SABC$ з точки M на грані ABS опустіть перпендикуляр на грань BCS .

8°. **Продемонструйте** як виконується зображення **комбінацій просторових фігур (виконайте рисунки та опишіть алгоритми їх виконання)**:

№8.1. Побудувати зображення конуса вписаного в правильну трикутну піраміду.

№8.2. Побудувати зображення циліндра, вписаного в правильну трикутну піраміду, якщо його висота дорівнює $\frac{1}{2}$ висоти піраміди.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

2°. [1, Р1, §4 п. 4.2, с. 28-30]. Задача 1.1. (с. 28). Задача 1.2. (с. 28-29).

6°. [2, Р5, §36 п. 36.3, с. 398-404].

7. [1, Р1, §5 с. 41-43, 49-51], [3.37] Р1, §7.

7.1. Розв'язання.

Нехай дано трикутник ABC – зображення трикутника $A'B'C'$ відомої форми (**Рис. 11.9**).

Побудова.

1) На стороні AB будуюмо трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику $A'B'C'$.

2) $O_1 = A_1Q_1 \cap B_1P_1$ – точка перетину висот трикутника $A_1B_1C_1$.

3) Для побудови зображення O ортоцентра O' потрібно побудувати зображення P і Q основ висот трикутника оригіналу: Q_1Q і P_1P паралельні CC_1 .

$P = P_1P \cap AC$; $Q = Q_1Q \cap CB$.

4) $O = AQ \cap BP$ – зображення ортоцентра (**Рис. 11.9**).

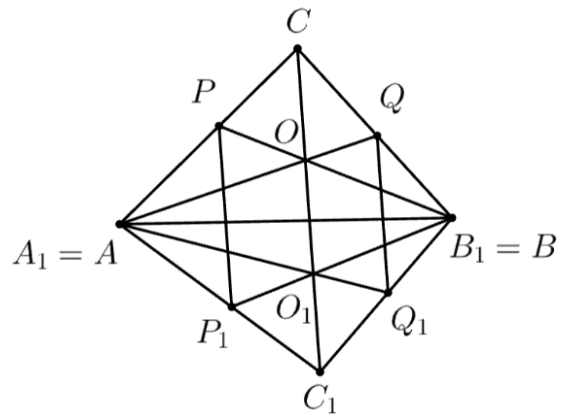


Рис. 11.9

7.4. Розв'язання.

1. У правильному трикутнику висоти співпадають з його медіанами. Тому якщо BB_0 і CC_0 – медіани трикутника ABC (рис.11.10), а $MM_0 \parallel BB_0$ і $NN_0 \parallel CC_0$, то $MM_0 \cap NN_0 = O$ – зображення **ортоцентра** трикутника AMN .

2. AO – зображення шуканого перпендикуляра.

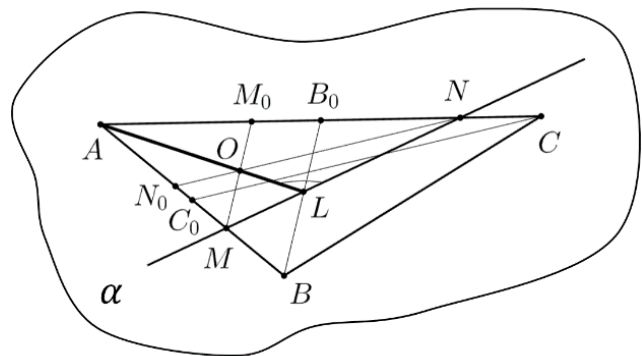


Рис. 11.10

7.5. Вказівки.

1. Розгляньте фігуру оригінал (рис. 11.11 а).

Якщо D_1M_1 – висота ромба, то трикутник $A_1D_1M_1$ – прямокутний і рівнобедрений.

2. Тому $\frac{A_1M_1}{A_1D_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Оскільки $A_1D_1 = A_1B_1$, то $\frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Отже, щоб зобразити висоту ромба потрібно на стороні AB (рис. 11.11 б) знайти таку точку M , яка задовольняла б умову (3).

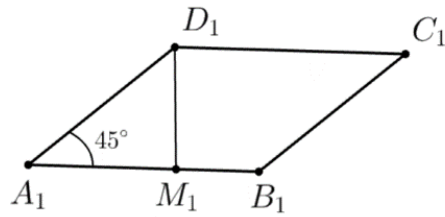


Рис. 11.11 а

7.6. Вказівки.

1. Знайдіть напрям шуканого перпендикуляра.

У правильному тетраедрі всі його грані та всі вершини рівноправні, тому пряма AP , яка з'єднує вершину A з **центроїдом** P грані BCS перпендикулярна до цієї грані (Рис. 11.12).

2. Отже, шуканий перпендикуляр MN паралельний AP .

3. Для визначення основи перпендикуляра проведіть через паралельні прямі MN і AP допоміжну площину.

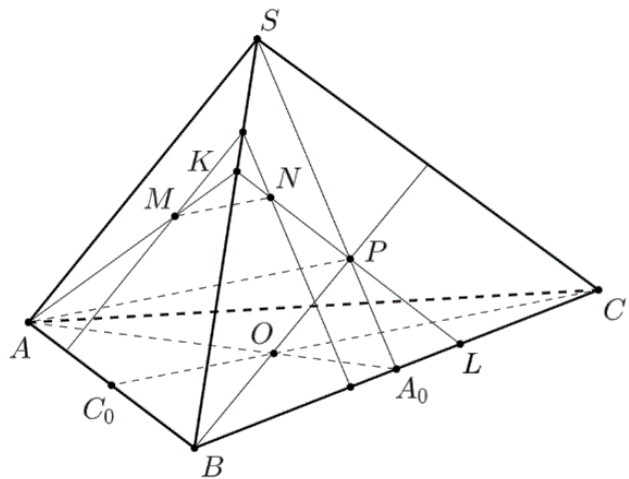


Рис.11.12

8°. [2, Р5, §37 п. 36.3, с. 398-404]; [1, Р1, §6 с. 43-51] або [5, §6.4.3, с. 347-348].



Література

1. Боровик В. Н. Зображення просторових фігур та їх застосування до розв'язування задач на комбінацію тіл. Навчальний посібник. Чернігів : Чернігівський державний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка, 2002. 192 с.

2. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії : Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.

3. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи. : Пособие для учителя. Київ : Рад. шк., 1990. 118 с.
4. Жовнір Я. М. Позиційні задачі в стереометрії : Посібник для вчителя. Київ : Освіта, 1991. 95 с.
5. Курс математики: Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.
6. Ленчук І. Г. Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії: монографія. Житомир : Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2011. 360 с.
7. Лоповок Л. М. Зображення круглих тіл. Посібник для вчителів середньої школи. Київ : Рад. шк., 1961. 64 с.
8. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.
9. Нелін Є. П. Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.
10. Савченко В. М. Изображение фигур в математике. Київ : Вища школа, 1978. 136 с.
11. Четверухін Н. Ф. Стереометричні задачі на проєкційному рисунку. Київ : Рад. шк., 1954. 112 с.
12. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.
13. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ: 2015. 21 с.

Науково-методичні статті

14. Швець Л. В. Проєкційні методи побудови зображень в педагогічному процесі: історичний аспект // Дидактика математики: проблеми і дослідження. 2010. №34. С 83–92.
15. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників виконувати просторові зображення на перших уроках стереометрії // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій та середній школі: Зб. наукових праць. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. №8. С. 139–147.
16. Швець Л. В. Побудова зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. Vol. 5, Budapest, 2013. С. 153–157.
17. Швець Л. В. Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення: перпендикулярність прямих і площин у просторі // Математика в рідній школі. 2015. №3. С. 9–15.

18. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників виконувати просторові зображення: ортогональне проєкціювання // Математика в рідній школі. 2015. №4. С. 4–11.

Тема 12.

КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Мета заняття: здійснити порівняльний аналіз методичних підходів до навчання координат і векторів на площині та у просторі, які використовуються в шкільному курсі геометрії основної та старшої школи. Виявити спільне та відмінне з викладом даного матеріалу у вузівському курсі «Аналітична геометрія», розглянути застосування методу координат, векторів та векторно-координатного методу до розв'язування задач.

Завдання.

1) Аналіз програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення координат і векторів у просторі під час навчання курсу на різних рівнях.

2) Розгляд запропонованих у діючих шкільних підручниках підходів, щодо формування понять «прямокутна декартова система координат у просторі», «координатний простір», «координати точки», «вектори у просторі», «координати вектора», «довжина вектора», «рівність», «колінеарність», «компланарність» векторів та ін.

3) З'ясування методичних особливостей та ознайомлення з технологією вивчення формул, теорем-ознак та властивостей на яких базуються координатний та векторний методи.

4) Виявлення спільного та відмінного з викладом даного матеріалу у ШК геометрії та вузівському курсі «Аналітична геометрія».

5) Розгляд векторного обґрунтування геометрії Евкліда. Система аксіом Г. Вейля. Про побудову геометрії за схемою Г. Вейля в курсі «Основи геометрії».

6) Відтворення змісту методу векторів, координат та векторно-координатного методу та формування вмінь їх використовувати в тривимірному просторі.

7) Застосування скалярного, векторного та мішаного добутків до розв'язування геометричних задач на визначення величин.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз програм шкільного курсу геометрії на предмет навчання координат і векторів у просторі під час навчання курсу в старшій школі на різних рівнях	[4], [5]
2	З'ясування понятійного апарату тем навчання (основна, старша школа) та порівняння його з відповідним понятійним апаратом курсу аналітичної геометрії	[3], [6],[7] Л 3.6, [8], шкільні підручники
3	Порівняльний аналіз способів доведення теорем-ознак та властивостей, виведення формул, пов'язаних з координатами та векторами (основна школа – старша школа – курс аналітичної геометрії).	[6], [7],[8], шкільні підручники
4	Розгляд векторного обґрунтування геометрії Евкліда	[2]
5	Відтворення знань змісту координатного та векторного методів з курсу геометрії основної школи	[9]
6	Формування вмінь застосовувати векторний, координатний та векторно-координатний методи до розв'язування стереометричних задач.	[1] та ін., шкільні підручники
7	Застосування векторів до доведення нерівностей.	[14]
8	Векторний добуток двох векторів, мішаний добуток трьох векторів та їх застосування до розв'язування задач.	[8] та ін.



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша самооцінка)

1. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії старшої школи на предмет навчання координат і векторів у просторі. Визначте місце теми в програмі. Ознайомтесь з очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів та змістом навчального матеріалу.

2. Зробіть порівняльну характеристику змісту та очікуваних результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів з тем «Координати на площині» та «Координати в просторі», «Вектори на площині» та «Вектори в просторі» в основній школі (9 кл.) та старшій школі (10 кл.).

3. Виділіть понятійний апарат теми «Координати у просторі» та здійсніть порівняльну характеристику з понятійним апаратом теми «Координати на площині» курсу геометрії основної школи. З'ясуйте роль аналогії у формуванні провідних математичних понять.

4. Які особливості існують у формуванні цих понять під час навчання курсу «Аналітична геометрія»?

5. Згадайте методичний підхід, який застосовується до виведення формул координат середини відрізка, відстані між двома точками на площині в курсі геометрії 9 класу?

6.° Як метод аналогії застосовується під час виведення цих формул в курсі стереометрії старшої школи?

7.° Як виводиться формула координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні? Проведіть аналогію між виводом цієї формули на площині та у просторі.

8. Як вводиться поняття рівняння фігури F у прямокутній системі координат в основній та старшій школі?

9. В чому полягає **метод координат** в геометрії? Що називають *аналітичним заданням фігури Φ* ? Як означається поняття *рівняння лінії* в деякій афінній системі координат?

10. Який підхід до складання **рівняння кола** застосовують в курсі геометрії основної школи? Порівняйте його з підходом, що використовують в курсі «Аналітична геометрія».

11.°. Проведіть аналогію між складанням рівняння кола та сфери? Які методичні підходи застосовуються до складання рівняння сфери у шкільних підручниках геометрії та в курсі «Аналітична геометрія»?

12.°. Який *тип рівняння площини* розглядається в курсі стереометрії старшої школи? Як виводиться це рівняння?

13.°. Які інші *типи рівнянь площини* вивчаються в курсі аналітичної геометрії?

14°. Які означення поняття вектора вам відомі? Яке з них розглядається у шкільному курсі геометрії?

15°. Зверніть увагу на аналогію, яка існує між означеннями понять, пов'язаними з поняттям вектор (координати вектора, рівні вектори, співнапрямлені та протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора, сума, різниця, добуток вектора на число, колінеарні вектори, скалярний добуток векторів) на площині та у просторі.

16°. Зверніть увагу на аналогію між виконанням операцій над векторами на площині та у просторі та вивченням їх властивостей.

17. Пригадайте векторне обґрунтування геометрії Евкліда, відоме з курсу «Основи геометрії». Які об'єкти є *вихідними*? Які відношення є *основними*?

18. На які групи розділені 17 аксіом тривимірного евклідового простору?

19. Повторіть ці аксіоми.

20. Об'єднання яких груп аксіом є *аксіоматикою тривимірного векторного евклідового простору*?

21°. Які вектори називаються *компланарними*? Як здійснюється розклад вектора за трьома некопланарними векторами?

22°. В чому полягає суть *векторного та координатного методів*? Які властивості поділу відрізка у даному відношенні існують?

23°. На чому базується метод застосування векторів до доведення нерівностей?

24°. Дайте означення *векторного добутку двох векторів*. Назвіть його властивості.

25°. В чому полягає *геометрична властивість векторного добутку*?

26°. Дайте означення *мішаного добутку трьох векторів*. Назвіть його властивості.

27°. В чому полягає *геометрична властивість мішаного добутку*?



Відповіді та вказівки до контрольних-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру
(перша змістова самооцінка)

1. Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії старшої школи на предмет вивчення координат і векторів у просторі.

[4, 10 кл., рівень стандарту]

Тема 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ 10 годин	
<i>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</i>	<i>Зміст навчального матеріалу</i>
Учень/учениця: користується аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі; усвідомлює важливість векторно-координатного методу в математиці; виконує операції над векторами; застосовує вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; знаходить відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; використовує координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.	Прямокутні координати в просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин.

[5, 10 кл., профільний рівень]

Тема 4. КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ (22 години)	
<i>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</i>	<i>Зміст навчального матеріалу</i>
Учень/учениця формулює означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу; розрізняє векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори;	Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.

класифікує взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі; зображає на рисунку вектор, рівний сумі/різниці векторів, добутку вектора на число; обґрунтовує перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; застосовує формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач; розв'язує вправи, що передбачають: знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів.	Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач. Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння площини. Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення, подібність.
--	--

2. Геометрія. 9 клас.

Тема 1. КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ (8 год).

Зміст навчального матеріалу. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами. Рівняння кола і прямої.

Тема 2. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ (12 год)

Зміст навчального матеріалу. Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів. Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

3. [6, с. 474-476], [7, с. 375-379], 9 кл. [9, РЗ §8], 10 кл. (рівень стандарту) [10, РЗ, §16, с. 284-289] таблиця 16 (с. 284-285); (профільний рівень) [11, Р4, §18, с. 172-182] таблиця 18 (с. 172-173).

До понятійного апарату теми «*Координати на площині*» курсу геометрії основної школи відносять: прямокутна система координат на площині, координати точки, координатний метод, рівняння фігури.

До понятійного апарату теми «*Координати в просторі*» курсу геометрії старшої школи відносять: прямокутна система координат, координатні осі, координатні площини, октант, координати точки, координатний метод, рівняння фігури.

4. В курсі «**Аналітична геометрія**» існують певні особливості у вивченні методу координат на площині та в просторі: 1) перед вивченням методу координат на площині вивчаються «*Елементи векторної алгебри*», зокрема вводиться поняття *вектора, координат вектора, довжини вектора, рівних, колінеарних, компланарних векторів, тривимірного векторного простору та його підпросторів* [8, P1]; 2) розпочинають з введення *афінної системи координат на площині* [8, P2], *у просторі* [8, P5]; 3) потім розглядається *прямокутна декартова система координат на площині* [8, P2, §2], *у просторі* [8, P5, §2]; 4) за координати точки приймають координати радіус-вектора цієї точки [8, с.56, с. 170].

5. [9, P3, §8, с.83-93].

6. [11, P4, §18, с.175-176].

7. [11, §4, п.16, с.157] без доведення. Курс «**Аналітична геометрія**» [8, P2, §3, с. 58-61; P5, §1, с. 171-172. Задача 2].

8. Поняття *рівняння фігури F* у прямокутній системі координат

9 кл.[9, P3, § 9, с.90]	10 кл. [11, § 4, п. 21, с.193]
<u>Означення.</u> Рівняння з двома змінними x і y називається рівнянням фігури F у прямокутній системі координат, якщо: 1) координати будь-якої точки фігури F задовольняють це рівняння; 2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури F.	<u>Означення.</u> Рівнянням фігури F, заданої в координатному просторі xyz, називають рівняння з трьома змінними x, y, z, яке має такі властивості: 1) якщо точка належить фігурі F, то її координати $(x; y; z)$ є розв'язком даного рівняння; 2) будь-який розв'язок $(x; y; z)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

9. [8, P2, § 9, с.74-75].

Метод координат в геометрії полягає в тому, що за допомогою координат точок геометричні об'єкти задаються аналітично за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем. Тим самим при доведенні теорем або при розв'язуванні геометричних задач використовують *аналітичні методи*.

Означення 1. Аналітичним заданням фігури Φ в даній системі координат називається рівняння, нерівність або їх система, які задовольняють координати будь-якої точки фігури Φ і не задовольняють координати ніякої іншої точки, що не належить фігурі Φ .

Приклад 1. Аналітичним заданням прямої, яка є бісектрисою першого і третього координатних кутів ПДСК є рівняння $y = x$.

Приклад 2. Аналітичним заданням кола з центром у точці $C(a; b)$ та радіусом R є рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Означення 2. Рівняння $F(x; y) = 0$ (1)

називається *рівнянням лінії* в деякій афінній системі координат, якщо виконуються дві умови:

1) координати будь-якої точки даної лінії задовольняють це рівняння;

2) будь-яка точка, координати якої задовольняють рівняння (1) належить даній лінії.

10. У ШК геометрії 9 класу [9, P3, § 9] доведення складається з двох частин: 1) Показують, що для довільної точки $M(x; y)$ має місце рівність $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $C(a; b)$ – центр кола, R – його радіус, 2) Доводять, що якщо числа x_0 і y_0 задовольняють рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ належить колу.

У курсі «Аналітична геометрія» підхід такий же [8, P2, §9, с. 75-76].

11°. [13, P4, § 18, с.176-177] виведення рівняння сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ аналогічно до виведення рівняння кола, У курсі «Аналітична геометрія» [8, P7, §6, с.249-250 – сфера, як частковий випадок еліпсоїда].

12°. [11, P4, §21, с. 208-210] $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – рівняння площини заданої точкою і нормальним вектором, $ax + by + cz + d = 0$ – загальне рівняння площини.

13°. [8, Р6, §1-7]:

- а)** рівняння площини заданої точкою і напрямним підпростором;
- б)** рівняння площини, яка проходить через три задані точки;
- в)** рівняння площини «у відрізках на осях»;
- г)** векторне рівняння площини;
- д)** нормальне рівняння площини.

14°. [8, Р1, § 2].

15°. [11, Р4, §19, с. 182-184, таблиця 19].

16°. [11, Р4, §19, с. 182-183, таблиця 19].

17. Вихідні об'єкти: «вектор», «точка». Основні відношення: «сума векторів», «добуток вектора на число», «скалярний добуток», «відкладання вектора від точки».

18. [2, Р3, §20, п. 20.1, с. 66-72].

П'ять груп аксіом: I. Аксіоми додавання векторів (4), II. Аксіоми множення вектора на число (4), III. Аксіоми скалярного добутку векторів (метричні аксіоми) (5), IV. Аксіоми розмірності (2), V. Аксіоми відкладання вектора (2).

20. [2, с. 66-67]. Об'єднуючи по-різному названі групи аксіом, дістають аксіоматики різних просторів.

1. Лінійний векторний простір V . Основними об'єктами цього простору є вектори, основними відношеннями – сума векторів і множення вектора на число, а аксіомами – аксіоми перших двох груп (I. Аксіоми додавання векторів; II. Аксіоми множення вектора на число).

2. Лінійний векторний тривимірний простір V_3 . Основними об'єктами цього простору є вектори, основними відношеннями – сума векторів і множення вектора на число, а аксіомами – аксіоми першої, другої і четвертої груп. (I. Аксіоми додавання векторів; II. Аксіоми множення вектора на число; IV. Аксіоми розмірності).

21°. 10 кл. [12, Р4, §19, с.189-190]; курс «Аналітична геометрія» [8, Р1, §5, п. 5.2, с.35-38].

22°. [11, P4, §22] таблиця 22, с. 215. [12, P1, §5, п.5.2].

Поділ відрізка у даному відношенні.

Нехай $\lambda = \frac{m}{n} \in R$ ($\lambda \neq -1$, $m \neq -n$). Кажуть, що точка M ділить відрізок AB в даному відношенні $\frac{m}{n}$, якщо $\overline{AM} = \frac{m}{n} \overline{MB}$.

При цьому число $\lambda = \frac{m}{n}$ називають *відношенням трьох точок* A, B, M [17, с.83-84] (простим відношенням цих точок) і пишуть: $\lambda = \frac{m}{n} = (AB, M)$.

Твердження: якщо O – довільна точка простору, то точка M ділить відрізок AB в даному відношенні $m:n$, тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}.$$

Наслідки.

1. Якщо O – довільна точка простору, то щоб точка M була серединою відрізка AB необхідно й достатньо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2. Якщо O – довільна точка простору, тоді M – точка перетину медіан трикутника ABC тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

3. Якщо O – довільна точка простору, то щоб точки $A, B, C \in a$ необхідно й достатньо, щоб

$$\overrightarrow{OC} = p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB}, \text{ де } p + q = 1.$$

4.

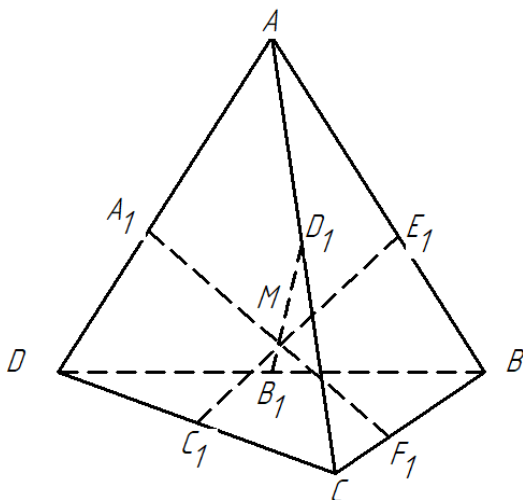


Рис. 12.1

Якщо O – довільна точка простору, то M – *центроїд* тетраедра $ABCD$ (точка перетину відрізків, що сполучають середини протилежних ребер тетраедра) тоді і тільки тоді, коли

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

5. Для довільної точки простору X і деяких дійсних чисел k і l рівність $\overrightarrow{XD} = k \overrightarrow{XA} + l \overrightarrow{XB} + (1 - k - l) \overrightarrow{XC}$ (*) є необхідною і достатньою умовою належності точок A, B, C і D одній площині.

Співвідношення (*) можна записати так: точки A, B, C і D належать одній площині тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} \overrightarrow{XD} = \alpha_1 \overrightarrow{XA} + \alpha_2 \overrightarrow{XB} + \alpha_3 \overrightarrow{XC}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – дійсні числа, X – довільна точка простору).

23. [14, с.83-84]. Цей метод базується на властивостях дій над векторами. В основі нього лежать дві нерівності:

$ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \geq \overrightarrow{AC} $ (1)	нерівність трикутника у векторній формі
$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ (2)	нерівність Коші-Буняковського у векторній формі
Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{a} (a_1; a_2)$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} (b_1; b_2)$, то	
$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ (1*)	нерівність трикутника у координатній формі
$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) (b_1^2 + b_2^2)$ (2*)	нерівність Коші-Буняковського у координатній формі
Для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ $\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$ (1**)	нерівність трикутника у координатній формі
Для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ (2**)	нерівність Коші-Буняковського у координатній формі
З векторного запису нерівності трикутника видно, що співвідношення (1) перетворюється у рівність коли $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{BC}$.	умова співнапрявленості векторів $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k > 0$
Нерівність Коші-Буняковського (2) перетворюється у рівність, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.	

24°. [8, P5, §5].

25°. [8, P5, §5, п. 5.3].

26°. [8, P5, §6].

27°. [8, P5, §6, п. 6.2].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника геометрії 11 класу [12] Єршова А. П. та ін.

№1.1. Відрізок BM – медіана трикутника ABC . Знайдіть координати: а) точки C , якщо $A(2; -9; 0)$, $M(-1; -2; 3)$; б) точки A , якщо $M(0; -1; 4)$, $C(-3; 1; 0)$.

№1.2. Серединами сторін трикутника є точки $(1; -3; -3)$, $(6; 3; -1)$ і $(2; -1; 2)$. Знайдіть координати вершин трикутника.

№1.3. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(2; -1; 3)$ і $N(1; -2; 5)$.

2°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника геометрії 11 класу [12] Єршова А. П. та ін.

№2.1. Доведіть рівність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(-2; -1; 0)$, $B(4; 1; -1)$, $C(3; 0; 2)$, $D(9; 2; 1)$.

№2.2. Знайти значення m , при якому: а) довжина вектора $\vec{a}(-4; m; 2)$ дорівнює 6; б) вектор $\vec{a}(3m; 8; -4m)$ має довжину 17.

№2.3. Дано точки $A(0; 2; -1)$, $B(0; 1; -2)$, $C(1; 2; -2)$. Знайдіть кут ABC .

№2.4. Дано точки $A(3; -2; 7)$, $B(5; -4; 9)$, $C(13; -8; -3)$, $D(0; -12; 6)$. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини (BCD) .

№2.5. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60° . Кожен із даних векторів перпендикулярний до вектора $\vec{c}$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

3°. Запропонуйте методику застосування методу координат і векторів до розв'язування геометричних задач з підручника геометрії 11 класу [12] Єршова А. П. та ін.

№3.1. Точки D і E – середини ребер AB і PC тетраедра $PABC$ відповідно. Розкладіть вектор: а) $\overrightarrow{AP}$ за векторами $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE}$; б) $\overrightarrow{BE}$ за векторами $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PC}$.

№3.2. Відрізок MA – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. За допомогою векторного методу доведіть, що MD перпендикулярно CD .

№3.3. Промені OA, OB, OC – взаємно перпендикулярні. Використовуючи векторно-координатний метод, знайдіть кут між бісектрисами кутів AOC і AOB .

4. Запропонуйте методику застосування методу векторів до доведення теорем та розв'язування задач на доведення:

№4.1. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої та площини.

№4.2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

№4.3. Доведіть, що сума квадратів усіх діагоналей паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

№4.4. У піраміді $ABCD$ довжини чотирьох ребер зв'язані співвідношенням $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Доведіть, що ребра AD і BC взаємно перпендикулярні.

№4.5. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ діагональ AC_1 перпендикулярна площині, яка проходить через точки A_1, B, D . Доведіть, що цей паралелепіпед є кубом.

5. Запропонуйте методику застосування методу векторів до розв'язування задач на обчислення:

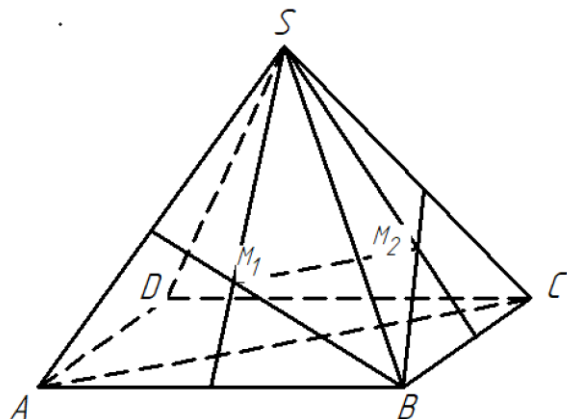


Рис. 12.2

№5.1. У піраміді $SABCD$ (рис. 12.2) точки M_1 і M_2 є відповідно точками перетину медіан граней ASB і BSC . Знайдіть M_1M_2 , якщо $AC = 3$.

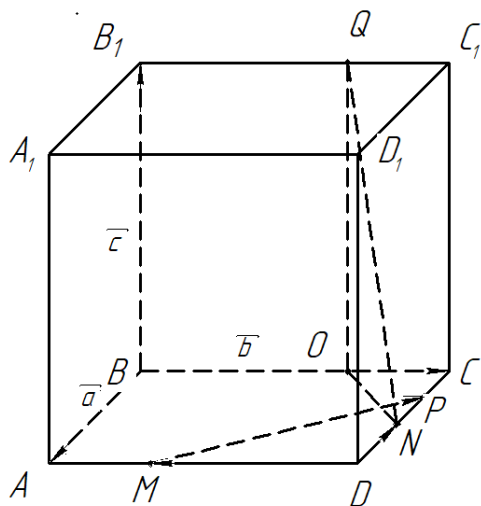


Рис. 12.3

№5.2. На ребрах AD і B_1C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взято точки M і Q , а на ребрі CD точки P і N так, що $AM = C_1Q = CP = DN = \frac{1}{3}a$, де a – довжина ребра куба. Знайдіть величину кута між прямими MP і QN .

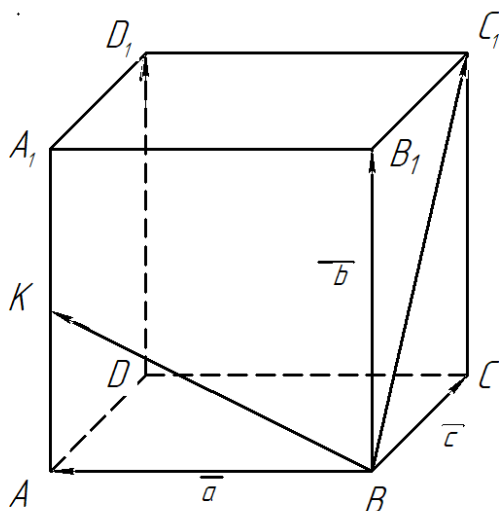


Рис. 12.4

№5.3. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12.4). Знайдіть величину кута між векторами $\vec{BK}$ і $\vec{BC_1}$, де K – середина ребра AA_1 .

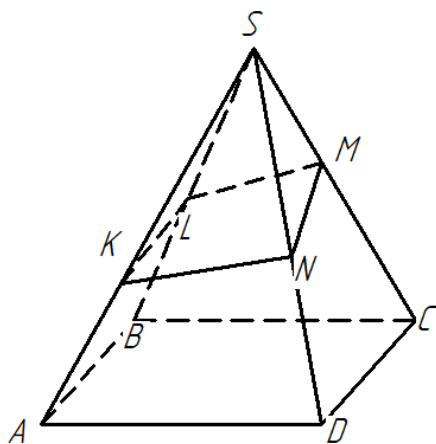


Рис. 12.5

№5.4. Площина відтинає від бічних ребер правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з вершиною S відрізки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$ відповідно. Довжина бічного ребра піраміди дорівнює a . Знайдіть довжину відрізка SN , який відтинається цією площиною на ребрі SD .

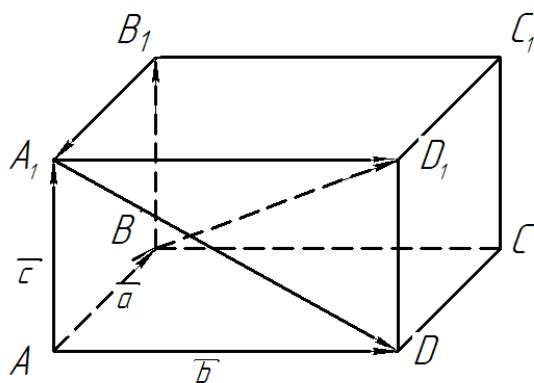


Рис. 12.6

№5.5. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12.6), $AB = a$, $BC = b$, $DD_1 = c$. Знайдіть гострий кут між прямими BD_1 і A_1D .

6. Запропонуйте методику застосування *методу координат* до розв'язування задач на обчислення:

№6.1. Дано вектори $\vec{a} (1; -2; 4)$ та $\vec{b} (4; 2; -1)$. Обчисліть:

1) $|\vec{b} - \vec{a}|$; 2) $(2\vec{a}, -3\vec{b}) = \varphi$.

№6.2. У площині OYZ знайдіть вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до вектора $\vec{n} (12; -3; 4)$, що має однакову з ним довжину.

№6.3. Знайдіть одиничний вектор, перпендикулярний до вісі OX та до вектора $\vec{b} (3; 6; 8)$.

№6.4. Точки $A (1; 2; 3)$, $B (1; 5; 3)$, $C (3; 3; 3)$ лежать на колі нижньої основи циліндра, а точка $D (2; 3; 7)$ – на його верхній основі. Знайдіть координати центрів основ і об'єм циліндра.

№6.5. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, довжина ребра якого дорівнює a . Знайдіть радіус сфери, проведеної через точки A , B , E і F , де E і F – точки на ребрі CC_1 , причому $CE = EF = FC_1$.

7. Запропонуйте методику застосування *векторно-координатного методу* до розв'язування задач.

№7.1. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ довжина бічного ребра вдвічі менша від сторони основи. Довести, що довжина відрізка перпендикуляра, проведеного з середини M сторони BC до діагоналі B_1D дорівнює бічному ребру призми.

№7.2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ a , висота h . Знайдіть відстань між прямими BD і SA .

№7.3. Доведіть, що площина, перпендикулярна до бічного ребра правильної чотирикутної піраміди, паралельна діагоналі основи, мимобіжної з цим ребром.

8. Запропонуйте методику застосування векторів до доведення нерівностей:

№8.1. Доведіть, що $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$ для всіх значень a , при яких має зміст ліва частина нерівності.

№8.2. Доведіть, що коли $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $|ma + nb + c| \leq \sqrt{2}$.

№8.3. Доведіть, що коли $x^2 + y^2 \leq 2$, то $|x + y| \leq 2$.

№8.4. Доведіть, що для всіх дійсних чисел x та y має місце нерівність $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq 2$.

№8.5. Доведіть нерівність $\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \leq 6$.

№8.6. Доведіть нерівність $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 15$, якщо $a + b + c = 1$.

№8.7. Доведіть нерівність $\sqrt{4a+7} + \sqrt{4b+7} + \sqrt{4c+7} \leq 7\sqrt{3}$, якщо $a + b + c = 7$.

№8.8. Доведіть, що $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, якщо $xy + yz + zx = 1$.

№8.9. Доведіть, що $x + y + z \leq 9$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.

9. Застосуйте **векторний добуток** до розв'язування задач:

№9.1. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ і $C(1; 3; -1)$. Обчисліть довжину його висоти, яка опущена з вершини B на сторону AC .

№9.2. Дано координати вершин піраміди $A(-4; -1; 2)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-1; 4; 6)$ і $D(-2; -3; 8)$. Обчисліть: 1) $(\vec{BA}, \vec{BC})$; 2) $\text{Pr}_{BC} \vec{BD}$; 3) площу трикутника ABC .

10. Застосуйте **мішаний добуток** до розв'язування стереометричних задач:

№10.1. Дано координати вершин піраміди $A(-4; -1; 2)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-1; 4; 6)$ і $D(-2; -3; 8)$. Обчисліть об'єм піраміди.

№10.2. Дано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Обчисліть довжину його висоти, яка опущена з вершини D .



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

4.1. Нехай пряма OA перпендикулярна до прямих OB і OC , які лежать на площині α . Треба довести, що пряма OA перпендикулярна до будь-якої третьої прямої OD площини α .

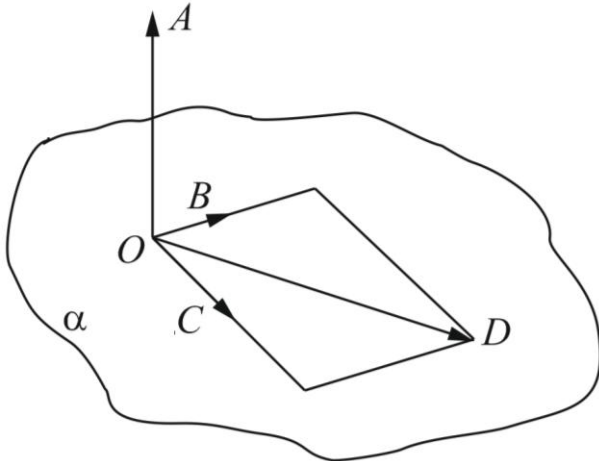


Рис.12.7

Вказівка. Виберіть вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ і $\vec{OD}$ (рис. 12.7).

Скористайтесь теоремою про розклад вектора за двома не колінеарними векторами:

$\vec{OD} = \alpha \vec{OB} + \beta \vec{OC}$, де α, β – дійсні числа.

4.2. Нехай дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12.8). Якщо M_1 – середина діагоналі AC_1 , то $\vec{AM_1} = \frac{1}{2} \vec{AC_1}$.

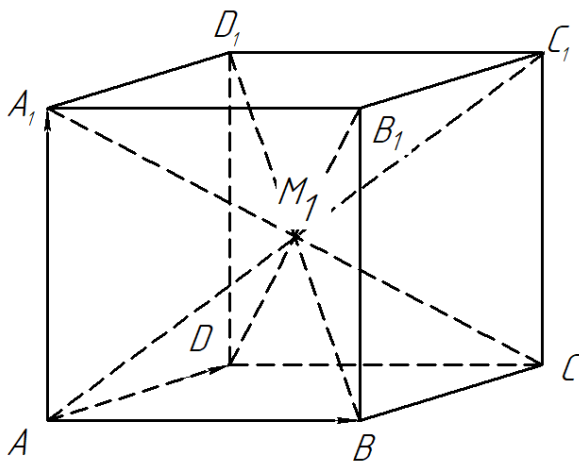


Рис.12.8

З трикутника $AA_1 C_1$:
 $\vec{AC_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1 C_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1 D_1} + \vec{A_1 B_1} = \vec{AA_1} + \vec{AD} + \vec{AB}$.

Отже,
 $\vec{AM_1} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$.

Вказівка. Розгляньте точки M_2, M_3, M_4 , які є серединами інших діагоналей паралелепіпеда.

Виразіть вектори $\vec{AM_2}, \vec{AM_3}, \vec{AM_4}$ через базисні вектори $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}$, зробіть висновок.

4.3. Нехай дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 12.9). Розгляньте вектори $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AA_1} = \vec{c}, \vec{AC_1} = d_1, \vec{BD_1} = d_2, \vec{CA_1} = d_3, \vec{DB_1} = d_4$.

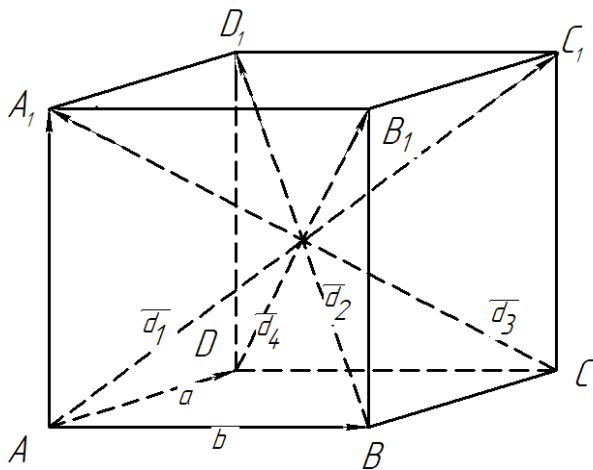


Рис.12.9

Вказівка.

1) Виразіть вектори $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4$ через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2) Піднесіть утворені рівності до квадратів та додайте їх.

4.4. Вказівка. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тому $\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2$ (рис. 12.10), або $\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 = \vec{BD}^2 - \vec{CD}^2$.

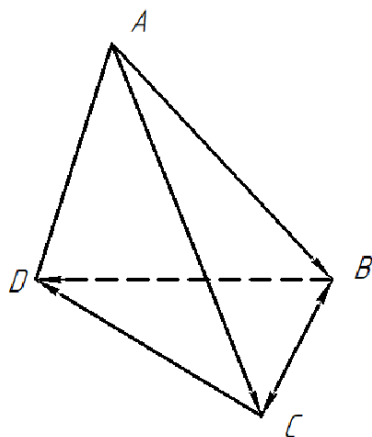


Рис.12.10

1) Розкладіть різниці квадратів на множники, та з'ясуйте чому дорівнюють різниці векторів $\vec{AB} - \vec{AC}$ та $\vec{BD} - \vec{CD}$.

2) Зробіть відповідні тотожні перетворення отриманої рівності та переконайтесь у рівності нулю скалярного добутку векторів $\vec{CB}$ та $\vec{AD}$.

4.5. Вказівка. Нехай $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AA_1} = \vec{c}$ (рис. 12.11). Тоді $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$.

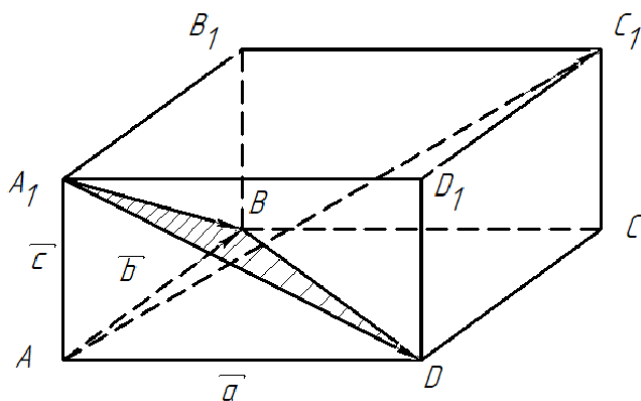


Рис.12.11

Оскільки паралелепіпед прямокутний, то

$$\vec{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

1) Виразіть вектори $\vec{A_1B}, \vec{A_1D}$ через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2) Використайте означення прямої перпендикулярної до площини.

5.1. Вказівка. Використайте векторну формулу з наслідку 2 (с.36) для точок перетину медіан M_1 і M_2 трикутників ASB і BSC відповідно.

5.2. Вказівка. Нехай $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{QN}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайдіть $\cos \angle (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{QN})$.

5.3. $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. Вказівка. Нехай $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BK}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайдіть $\cos \angle (\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC_1})$, скориставшись позначенням $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = t$.

5.4. $\frac{2}{5} \alpha$. Алгоритм розв'язання. 1) Для точок N , K , L і M (рис. 12.5) застосуйте властивість 5 (с.36), де S – вершина піраміди є довільною точкою простору; 2) введіть позначення $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{SN}$ і $\overrightarrow{SD}$ співнапрямлені, то $\overrightarrow{SN} = m \overrightarrow{SD}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{SN}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; 3) порівняйте вирази отримані в пунктах 1 та 2 і складіть систему, розв'язавши яку знайдіть m .

5.5. $|\cos \varphi| = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Алгоритм розв'язання. 1) Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, M_1 . φ – кут між прямими BD_1 і A_1D ; 2) Виразіть вектори $\overrightarrow{A_1D}$ та $\overrightarrow{BD_1}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; 3) використовуючи формулу скалярного добутку векторів $\overrightarrow{A_1D}$ та $\overrightarrow{BD_1}$, знайдіть косинус кута між цими векторами.

6.1. 1) $5\sqrt{2}$; 2) $\cos \varphi \approx 0,1915$, $\varphi \approx 11^\circ$.

6.2. $\vec{m}_1 (0; 10, 4; 7, 8)$, $\vec{m}_2 (0; -10, 4; -7, 8)$. Вказівки. 1) вектор $\vec{m} (0; y; z)$ лежить у площині OYZ ; 2) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$.

6.3. $(0; -\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ або $(0; \frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$. Вказівка. Оскільки шуканий вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до вісі OX , то $\vec{a} \cdot \vec{i} = 0$.

6.4. $O_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$, $O_2\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 7\right)$, $V = 10\pi$ од. куб. **Алгоритм розв'язання.** 1) Знайдіть рівняння площини, що проходить через точки A , B , C (вона проходить через центр нижньої основи), використовуючи загальне рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$; 2) Нехай центр нижнього кола $O_1(x; y; z)$. Для визначення його координат складіть систему трьох рівнянь та розв'яжіть її; 3) Рівняння площини верхньої основи $z = d = 7$, оскільки площини верхньої та нижньої основ паралельні і точка D лежить у цій площині.

6.5. $R = \frac{a\sqrt{211}}{18}$.

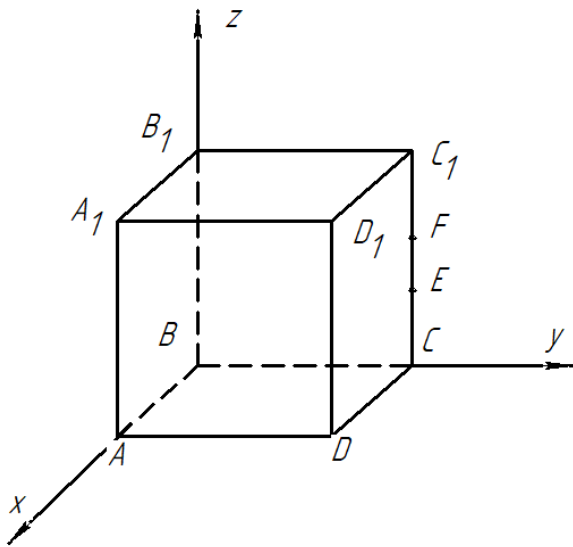


Рис.12.12

Алгоритм розв'язання.

1) Введіть систему координат, початком якої є точка $B(0; 0; 0)$. Визначте координати точок A , B_1 , E , F у цій системі координат; 2) нехай $O(0; 0; 0)$ – центр шуканої сфери. Тоді $OA^2 = OB_1^2 = OE^2 = OF^2 = R^2$, де R – радіус сфери. Складіть систему чотирьох рівнянь з трьома невідомими x , y , z . Виразіть z , x , y через a та підставте у друге рівняння системи $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$. 3) Виразіть R через a .

7.1.

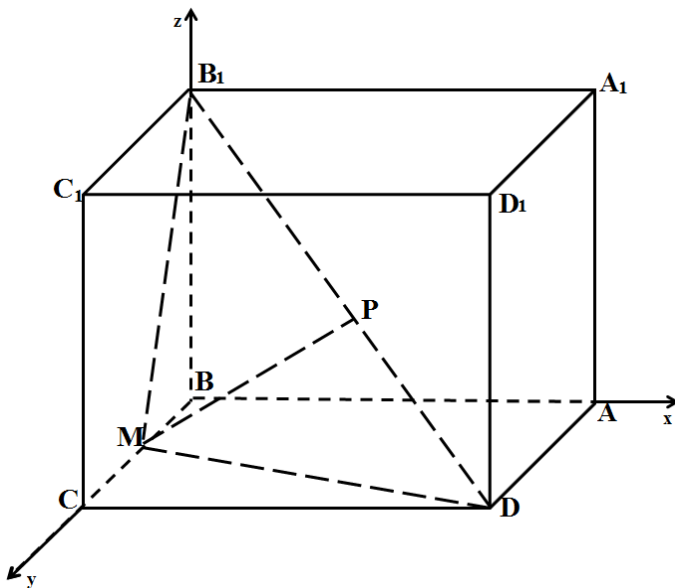


Рис.12.13

Алгоритм розв'язання.

1) Введіть систему координат так, як показано на рис. 12.13. Нехай довжина сторони основи дорівнює a ; 2) визначте координати точок B_1 , M , D та векторів $\overrightarrow{B_1M}$, $\overrightarrow{B_1D}$; 3) нехай кут MB_1D дорівнює α . Використовуючи скалярний добуток векторів $\overrightarrow{B_1M}$, $\overrightarrow{B_1D}$ знайдіть цей кут; 4) з прямокутного трикутника MB_1P знайдіть довжину MP порівняйте її з довжиною BB_1 .

7.2. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+2h^2}}.$

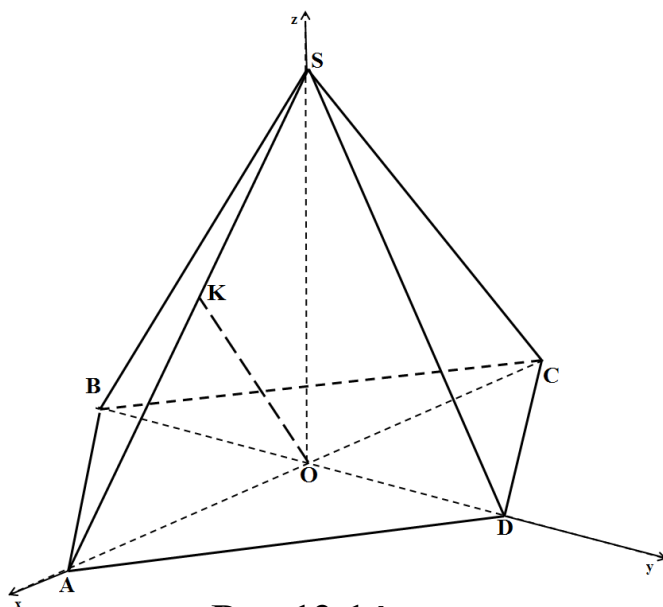


Рис.12.14

Алгоритм розв'язання.

- 1) Введіть прямокутну систему координат так, як показано на рисунку 12.14;
- 2) визначте координати точок A, B, D, S та векторів $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SA}$.
- 3) шукана відстань OK дорівнює довжині спільного перпендикуляра між прямими BD і SA . $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$. Оскільки $\overrightarrow{KA} \uparrow \uparrow \overrightarrow{SA}$; і $\overrightarrow{BO} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BD}$, то існують числа m і n такі, що $\overrightarrow{KA} = m \cdot \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BO} = n \cdot \overrightarrow{BD}$;
- 4) виразіть координати вектора $\overrightarrow{OK}$ через m, n, h ;

5) за умовою $\overrightarrow{KO} \perp \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{KO} \perp \overrightarrow{BD}$, тому скалярні добутки $\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$, $\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Записавши ці рівності в координатах, складіть систему рівнянь. Розв'яжіть її відносно n та m ; 6) запишіть координати вектора $\overrightarrow{OK}$ та знайдіть його довжину.

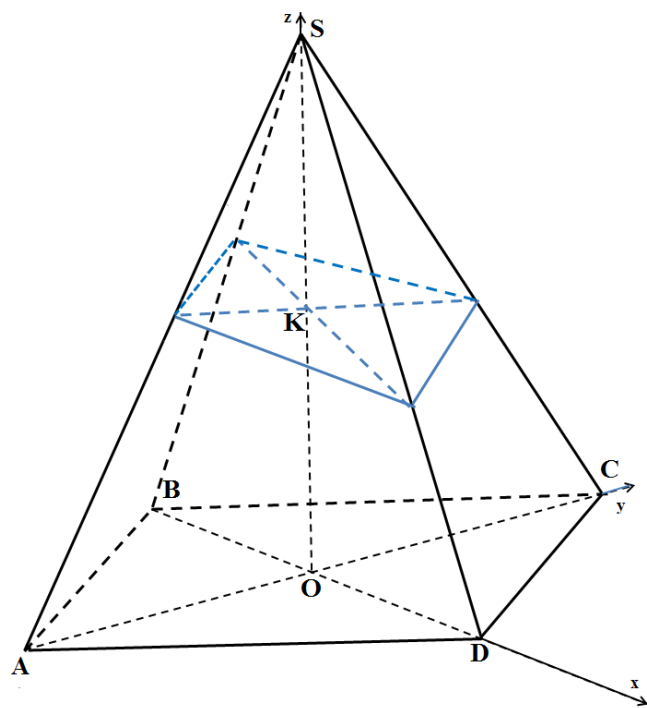


Рис.12.15

7.3. Алгоритм розв'язання.

- 1) Введіть систему координат так, як показано на рисунку 12.15; нехай a – довжина сторони основи піраміди, h – довжина її висоти;
- 2) позначте координати точки перетину січної площини з висотою $K(0; 0; z_0)$;
- 3) визначте координати точок S, B та вектора $\overrightarrow{SB}$;
- 4) складіть рівняння площини, проведеної через точку K , перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{SB}$;
- 5) зведіть це рівняння до загального вигляду і зробіть висновок.

8.1. Вказівка. Розгляньте два вектори $\vec{x} (1; 1; 1)$ і $\vec{y} (\sqrt{a+1}; \sqrt{2a-3}; \sqrt{50-3a})$. Скористайтесь нерівністю $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$.

8.2. Вказівка. Розгляньте два вектори $\vec{x} (m; n; 1)$ і $\vec{y} (a; b; c)$. Скористайтесь нерівністю $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$.

8.3. Вказівка. Розгляньте два вектори $\vec{u} (x; y)$ і $\vec{v} (1; 1)$. Скористайтесь нерівністю $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, враховуючи умову $x^2 + y^2 \leq 2$.

8.4. Алгоритм розв'язання. 1) Розгляньте два вектори $\vec{a} (x; 1-y)$, $\vec{b} (1-x; y)$; 2) знайдіть $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$; 3) скористайтесь нерівністю трикутника $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$.

8.5. Вказівка. Розгляньте два вектори $\vec{a} (1; 1)$, $\vec{b} (\sqrt{x+7}; \sqrt{11-x})$.

8.6. Вказівка. Розгляньте два вектори $\vec{a} (1; 1; 1)$, $\vec{b} (\sqrt{2a+1}; \sqrt{2b+1}; \sqrt{2c+1})$.

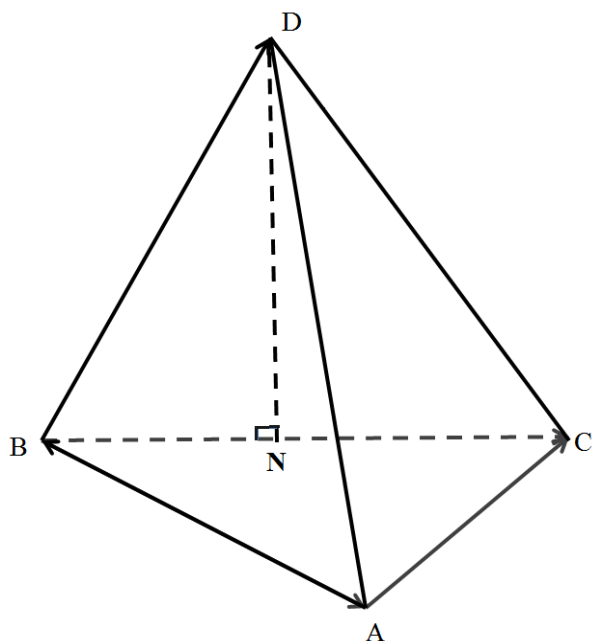


Рис.12.16

9.2. 1) $\cos \varphi \approx 0,1961$, 2) 3, 3) 15.

Вказівка. 3) Скористайтесь формулою $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.



Література

1. Боровик В. Н., Ігнатенко М. Я. Векторно-координатний метод розв'язування геометричних задач на площині та у просторі: Навч. посібник. Київ : ІСДО, 1995. 116 с.
2. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.
3. Кобко Л. М. Аналогія: планіметрія–стереометрія в таблицях. Навчальний посібник для студентів педагогічних вищих навчальних закладів. Чернігів : ЧДПУ імені Т. Г. Шевченка, 2008. 64 с.
4. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту // Математика в рідній школі. 2017. №10. С. 2–10.
5. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/.../programi/navchalni-programi-dlya-10-11...> 2018.
6. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582с.
7. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.
8. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Шкільні підручники та посібники

9. Єршова А. П., Голобородько В. В. та ін. Геометрія: Підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Видавництво «Ранок», **2017** (2009).
10. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти). Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.
11. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.
12. Єршова А. П. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. Харків : Вид-во «Ранок», 2011. 304с.
13. Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
14. Швець В. О. Математичний гурток: старша школа: нерівності та їх доведення / В. О. Швець, Л. В. Заболотня, І. С. Соколовська. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. 112 с.

Мета заняття: провести аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет навчання прямих і площин в курсі геометрії старшої школи, повторити методику навчання тем «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і площин у просторі прямих і площин у просторі» з курсу МНМ старшої школи (І семестр), повторити теорію прямої та площини з курсу аналітичної геометрії, підібрати стереометричні задачі курсу геометрії старшої школи під час розв'язування яких застосовується теорія прямої та площини і запропонувати методику навчання їх розв'язування.

Завдання.

1) Порівняльний аналіз, щодо послідовності та змісту навчання *прямих та площин, координат та векторів у просторі* у шкільному курсі геометрії 10 класу та в курсі «Аналітична геометрія» для ЗВО.

2) Виокремлення зі змісту тем «*Площина у просторі*», «*Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин*», «*Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин*» навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для ЗВО питань, які є **теоретичними основами** курсу стереометрії 10-го класу.

3) Ознайомлення з **класифікацією задач** теми «*Площина і пряма в просторі*» курсу «Аналітична геометрія».

4) Виокремлення **опорних задач** шкільного курсу геометрія 10-го класу, пов'язаних з теорією прямої та площини у просторі. Методика навчання їх розв'язування.

5) Використання **опорних задач** шкільного курсу геометрії (ШКГ), пов'язаних з теорією прямої та площини у просторі, під час розв'язування окремих типів стереометричних задач.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Порівняльний аналіз програм шкільного курсу геометрії 10-го класу та програми навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для ЗВО на предмет навчання тем «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і	[2], [3], [5] [1]

	площин у просторі прямих і площин у просторі», «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі».	
2	Виокремлення з тем навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» питань, які є теоретичними основами курсу стереометрії 10-го класу.	[5] [8]-[12]
3	Класифікація задач теми «Площина і пряма в просторі» курсу «Аналітична геометрія». Опорні задачі шкільного курсу геометрія 10 класу, пов'язані з теорією прямої та площини у просторі.	[1], [6] Л. 3.3 та ін.
4	Використання опорних задач шкільного курсу геометрії (ШКГ), пов'язаних з теорією прямої та площини у просторі, під час розв'язування окремих типів стереометричних задач.	статті [1], [2].



**Контрольно-сміслові запитання і завдання
репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка)

Частина 1

1°. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії 10-го класу старшої школи та програми навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для ЗВО на предмет навчання *прямих та площин, координат і векторів* у просторі. Визначте послідовність тем в програмі. Ознайомтесь зі змістом навчального матеріалу.

2. Виокремте зі змісту тем «*Площина у просторі*», «*Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин*», «*Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин*» навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для ЗВО питання, які є **теоретичними основами** курсу стереометрії 10-го класу.

3°. Згадайте, які типи задач виділяють в темі «Площина і пряма в просторі» курсу «Аналітична геометрія».

4. Виокремте **опорні задачі** шкільного курсу геометрія 10-го класу, пов'язані з теорією прямої та площини у просторі.



Відповіді та вказівки до контрольних запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. У відповідності до чинних навчальних програм з математики для старшої школи [2], [3] в курсі геометрії 10-го класу виокремлюються теми «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі». Під час вивчення **перших двох** з них розглядаються різні розміщення у просторі прямих і площин, формулюються відповідні означення та доводяться ознаки, які потім застосовуються під час розв'язування задач. Вивчаючи третю тему: «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі», учні ознайомлюються з **методом координат**, який і є основним засобом дослідження аналітичної геометрії.

У курсі «Аналітична геометрія» геометричні образи, серед яких точки, прямі та площини, досліджуються **засобами алгебри на основі методу координат**. Відповідна навчальна дисципліна вивчається у ЗВО на 1-му курсі, зокрема студентами педагогічних спеціальностей, паралельно з дисципліною «Лінійна алгебра». Міждисциплінарні зв'язки навчальних дисциплін «Лінійна алгебра» та «Аналітична геометрія» дають можливість засвоювати **теорію прямої та площини** в наступній послідовності [5]:

Тема 1. Площина у просторі. Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

Тема 2. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин. [Відстань між паралельними площинами]. Пучок площин. Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин.

Тема 3. Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин. Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин).

Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими.

Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

2. Аналіз змісту названих тем приводить до висновку, що переважна більшість з них є теоретичною основою курсу геометрії 10-го класу старшої школи. При цьому виокремлюються **питання, теоретичне обґрунтування яких можливе без використання понять лінійної алгебри** («визначник», «матриця» та понять пов'язаних з ними), а також **без використання векторного та мішаного добутку векторів і їх геометричних властивостей.**

До таких питань відносяться: 1) Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Загальне рівняння площини; 2) Розміщення площини відносно системи координат; 3) Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин; 4) Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин); 5) Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих; 6) Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною; 7) Відстані у просторі: відстань від точки до площини; відстань між паралельними площинами.

Саме ці питання і взяті за основу під час викладу даної теорії та її застосувань до розв'язування стереометричних задач у альтернативних підручниках геометрії для 10-го класу, зокрема [8]-[12].

3°. Класифікуючи задачі теми «*Площина і пряма в просторі*» курсу «Аналітична геометрія», виокремлюють такі типи задач: 1) задачі, пов'язані з площиною у просторі; 2) задачі, пов'язані з прямою у просторі; 3) задачі, пов'язані з прямою і площиною [1].

4. До **опорних задач** шкільного курсу геометрії 10-го класу, пов'язаних з теорією площини та прямої у просторі відносяться:

I. Задачі, пов'язані з площиною у просторі: 1) на складання рівняння площини (заданої точкою і нормальним вектором, загального

рівняння площини); 2) на визначення належності точки площині, заданої загальним рівнянням; 3) на з'ясування розміщення площини відносно системи координат; 4) на з'ясування взаємного розміщення двох площин (паралельні, перетинаються під певним кутом, перпендикулярні); 5) на обчислення двогранного кута між площинами, заданими загальними рівняннями; 6) на визначення відстані від точки до площини; 7) на визначення відстані між паралельними площинами.

II. Задачі, пов'язані з прямою у просторі: 1) на складання рівняння прямої (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричних рівнянь прямої; заданої як перетин двох площин); 2) на визначення належності точки прямій; 3) на з'ясування взаємного розміщення двох прямих (прямі паралельні, прямі перетинаються під певним кутом, прямі перпендикулярні); 4) на обчислення кута між прямими, заданими канонічними рівняннями.

III. Задачі, пов'язані з прямою і площиною: 1) на складання рівняння прямої (площини), що проходить через певну точку перпендикулярно до площини (прямої); 2) на взаємне розміщення прямої та площини (пряма перетинає площину, паралельна площині, належить площині); 3) на визначення точки перетину прямої з площиною; 4) на визначення кута між прямою з площиною.



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

Частина 2

1°. З'ясуйте, який рівень складності мають опорні задачі, яким чином вони пов'язані між собою. Обґрунтуйте це на прикладі деяких видів задач, пов'язаних з площиною у просторі. Запропонуйте методику навчання їх розв'язування.

Завдання 1.1. Задачі, пов'язані з площиною у просторі:

Задача 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; 1; -1)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(1; -2; 3)$.

Задача 2. Дано точки $M_1(3; -1; 2)$ і $M_2(4; -2; -1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Задача 3. Точка $P(2; -1; -1)$ є основою перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину. Складіть рівняння цієї площини.

Завдання 1.2. Задачі, пов'язані з площиною у просторі (загальним рівнянням площини).

Задача 4. Складіть рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(4; -1; 2)$.

Задача 5. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7; 2; -3)$ і $M_2(5; 6; -4)$ паралельно до вісі Ox .

Задача 6. Вказати особливості у розташуванні наступних площин та побудувати їх: 1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; 2) $3x + 4y - 12 = 0$; 3) $2x - 9 = 0$; 4) $2y - 3z = 0$; 5) $2x + 3y - 4z = 0$.

2. Назвіть типи стереометричних задач, під час розв'язування яких використовуються опорні задачі ШКГ, пов'язані з теорією прямої та площини у просторі.

3. Розгляньте **задачу 7** (на складання рівняння площини, враховуючи додаткові умови її розміщення відносно інших площин). Складіть рівняння площини α , яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $\alpha_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$, $\alpha_2: x + 2y + z = 0$. Запропонуйте методику навчання її розв'язування.

4°. Розв'яжіть **задачу 8** (на знаходження ГМТ). Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин $\alpha_1: 4x - y - 2z - 3 = 0$ і $\alpha_2: 4x - y - 2z - 5 = 0$. Запропонуйте методику навчання її розв'язування.

5. Розгляньте **задачу 9** (на знаходження точки симетричної даній відносно даної прямої) Знайдіть точку Q симетричну до точки $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $a: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2,5}{1}$. Виконайте детально всі кроки розв'язання.

6. Розв'яжіть **задачу 10** (на обчислення об'єму). Обчисліть об'єм піраміди, яка обмежена площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

7. Розгляньте **задачу 11** (на доведення). Доведіть, що для висоти h трикутної піраміди з взаємно перпендикулярними бічними ребрами, які дорівнюють a , b , c , виконується співвідношення $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$.

8°. До яких висновків приводять розв'язання задач 8-11?



Відповіді та вказівки до окремих завдань реконструктивного та творчого характеру

1.1. Задачі на складання рівняння площини (заданої точкою і нормальним вектором) ускладнюються від безпосереднього складання рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, в якому координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$, та координати вектора нормалі $\vec{n}(A; B; C)$ відомі (задача 1), до випадків різного рівня складності, коли координати вектора нормалі потрібно знайти (задачі 2, 3).

1.2. Задачі на з'ясування розміщення площини відносно системи координат, пов'язані з загальним рівнянням площини $Ax + By + Cz + D = 0$ та неповними рівняннями, можуть розв'язуватись аналітичним методом (задачі 4, 5) та містити вимогу побудови такої площини, після проведення аналізу рівняння (задача 6).

2. Типи задач: 1) на складання рівняння площини, враховуючи додаткові умови її розміщення відносно інших площин та прямих; 2) задачі на знаходження ГМТ; 3) на знаходження точки симетричної даній відносно даної прямої; 4) задачі на обчислення величин; 5) задачі на доведення.

3. Розв'язання. Нехай вектор нормалі площини α має координати $\vec{n}(A; B; C)$. Враховуючи вимогу задачі про перпендикулярність площин α і α_1 та α і α_2 , на основі рівності нулю скалярних добутків $\vec{n} \cdot \vec{n}_1$ та $\vec{n} \cdot \vec{n}_2$ складемо систему $\begin{cases} 2A - B + 3C = 0, \\ A + 2B + C = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи цю систему, A та C виражають через B : $A = -7B$, $C = 5B$. Підставляючи ці значення у неповне загальне рівняння площини $Ax + By + Cz = 0$, оскільки вона проходить через початок координат, одержують $-7Bx + By + 5Bz = 0$. Звідки, поділивши на B , приходять до рівняння площини α : $-7x + y + 5z = 0$. **Відповідь.** $-7x + y + 5z = 0$.

5. Розв'язання. Для розв'язування цієї задачі складається рівняння площини (рис. 1), перпендикулярної до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2,5}{1}$, в якій і розташовані точки P та Q симетричні відносно точки перетину площини та прямої a .

Напрямний вектор прямої $\vec{p}(2; -2; 1)$ є вектором нормалі до площини. Отже, рівнянням площини є рівняння: $2(x - 4) - 2(y - 1) + 1(z - 6) = 0$ або рівносильне йому рівняння $2x + 2y + z - 12 = 0$.

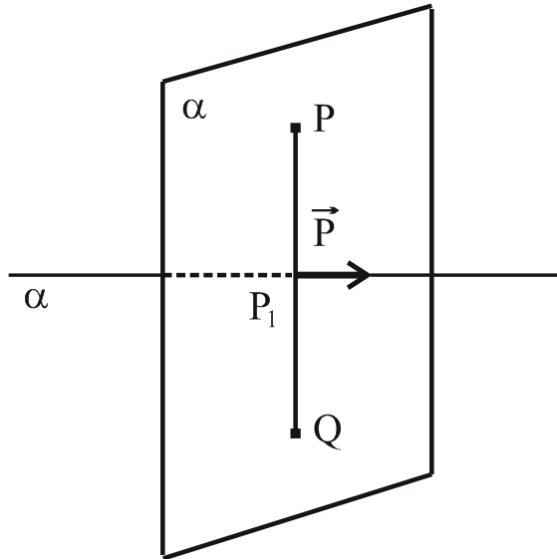


Рис. 1

Прирівнявши рівняння прямої до t та виразивши x, y, z через t одержують систему

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -2t + 2, \\ z = t + 2,5, \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знаходять координати точки $P_1(3; -1; 4)$ – середини відрізка PQ .

Використовуючи формули координат середини відрізка знаходять координати точки $Q(2; -3; 2)$. **Відповідь.** $Q(2; -3; 2)$.

6.

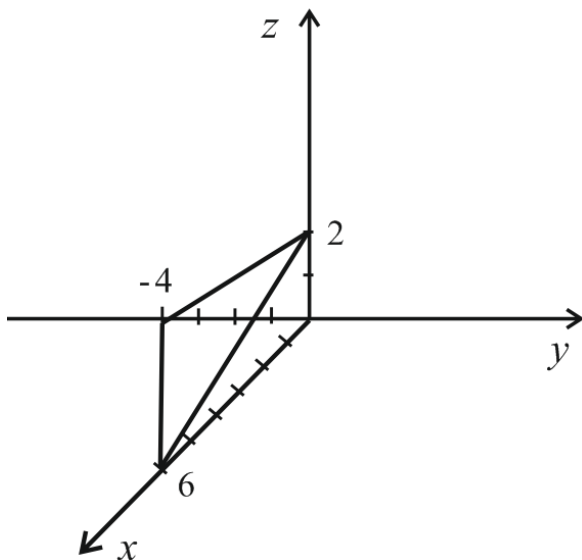


Рис. 2

Вказівка.

Зобразіть площину у ПДСК (див. рисунок). Обґрунтуйте, чому площина розміщена саме так. Охарактеризуйте одержану піраміду.

7. Розв'язання. Нехай вершина піраміди співпадає з початком координат, а її бічні ребра з додатними півосями ПДСК.

Тоді рівняння площини ABC : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (у «відрізках на осях»). Звівши його до загального одержуємо: $bcx + acy + abz - abc = 0$. Висота h піраміди дорівнює відстані від точки $O(0; 0; 0)$ до цієї площини $h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$.

Звідки $h^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) = a^2b^2c^2$. Поділивши цей вираз на $h^2a^2b^2c^2$, одержуємо рівність, яку слід було довести.



Література

1. Кобко Л. М., Глінка-Єремко І. Б. Аналітична геометрія. Частина 3. Площина і пряма в просторі. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Чернівці, 2008. 75 с.

2. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>.

3. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

4. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582с.

5. Соколенко Л. О. Програма навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для студентів галузі 01 Освіта/Педагогіка. Спеціальності 014 Середня освіта (математика). Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, 2024. 6 с.

6. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.

7. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Шкільні підручники

8. Геометрія. Профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз та ін. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.

9. Геометрія : профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.

10. Геометрія : початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.

11. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія: (профільний рівень) : підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза, 2018. 368 с.

12. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Видавництво «Ранок», 2018. 240 с.

Науково-методичні статті

1. Соколенко Л. О. Про застосування теорії прямої до розв'язування задач шкільного курсу геометрії. Сучасна освіта в контексті нової української школи : зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 153–156.

2. Соколенко Л. О., Швець В. О. Застосування теорії прямої та площини до розв'язування стереометричних задач // **НАУКОВИЙ ЧАСОПИС НАЦІОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА. Серія №3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 21: збірник наукових праць.** Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. С. 52–59.

Тема 14.

НАУКОВІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ МНОГОГРАННИКІВ ТА ТІЛ ОБЕРТАННЯ, КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Мета заняття: провести аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет навчання многогранників та тіл обертання в курсі геометрії 11-го класу; зробити порівняльну характеристику щодо навчання цього матеріалу у вузівських курсах математики та геометрії, виділити спільне та відмінне; розглянути співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника, теорему Ейлера; розглянути сферу (кулю), циліндричні поверхні (циліндри), конічні поверхні (конуси), як простіші поверхні та тіла обертання; розгляд комбінацій геометричних тіл та наукових основ їх навчання.

Завдання.

- 1) Аналіз програм шкільного курсу геометрії 11-го класу на предмет вивчення многогранників та тіл обертання.
- 2) Повторення методики формування основних понять тем «Многогранники», «Тіла обертання» в шкільному курсі стереометрії старшої профільної школи.
- 3) Проведення порівняльного аналізу вивчення **тіл обертання** в ШКГ та **поверхонь обертання** в курсі «Аналітична геометрія» для ЗВО.
- 4) Розгляд співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника.
- 5) Застосування теореми Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника до класифікації правильних многогранників.
- 6) Розгляд перерізів тіл обертання площинами та дотичних площин до тіл обертання.
- 7) Розв'язування задач на знаходження елементів многогранників та тіл обертання.
- 8) Розглянути комбінації многогранників і тіл обертання, розв'язувати задачі на комбінації геометричних тіл.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет навчання многогранників та тіл обертання в курсі стереометрії 11-го класу.	[5], [6]
2	Методика формування основних понять тем « Многогранники », « Тіла обертання » в шкільному курсі стереометрії.	[7], [10] Л 3.8, 3.9, шкільні підручники
3	Порівняльний аналіз вивчення тіл обертання в ШКГ та поверхонь обертання в курсі «Аналітична геометрія» для ЗВО.	[8], [11], шкільні підручники
4	Співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника.	[3]
5	Теорема Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника та її застосування до класифікації правильних многогранників .	[3]

6	Перерізи тіл обертання площинами та дотичні площини до тіл обертання.	[1]-[2], шкільні підручники, зокрема [15]
7	Методика навчання учнів розв'язування задач на знаходження елементів многогранників та тіл обертання.	[1], [10] Л 3.8, 3.9, шкільні підручники
8	Методика навчання учнів розв'язування задач на комбінації геометричних тіл.	[1], шкільні підручники



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

Частина 1

1. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії 11-го класу на предмет вивчення **многогранників та тіл обертання** у стереометрії. Визначте місце теми в програмі, вимоги до знань і вмінь учнів.

2°. Ознайомтесь з методичним підходом, який використовується в альтернативному підручнику геометрії для 11-го класу [15, Р1, §9] для означення понять *опукла фігура, зв'язна фігура, внутрішня точка фігури, гранична точка фігури, обмежена фігура*. Як означаються ці поняття? Які з них є родовими поняттями для понять **геометричне тіло, поверхня геометричного тіла**? Як означаються поняття **геометричне тіло, поверхня геометричного тіла**?

3. Здійсніть порівняльний аналіз вивчення **тіл обертання** в ШКГ та **поверхонь обертання** в курсі «Аналітична геометрія» для ЗВО.

4°. Повторіть методику формування понять двогранний кут, лінійний кут двогранного кута, многогранний кут, многогранник запропоновану у діючих шкільних підручниках геометрії 11-го класу.

5°. Повторіть методику формування понять призма, пряма і правильна призма, паралелепіпед, піраміда, зрізана піраміда, правильна піраміда, запропоновану у діючих шкільних підручниках геометрії 11-го класу.

6. Згадайте **співвідношеннями, які існують між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника**.

7. Згадайте **теорему Ейлера** про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника.

8°. Розгляньте перерізи тіл обертання площинами та дотичні площини до тіл обертання.



Відповіді та вказівки до контрольних-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

Частина 1

1. [5] 11 кл., проф. рівень

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (частково). Детально у [5]	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ (24 години)	
Учень/учениця наводить приклади: геометричних фігур; многогранників і їх видів; пояснює що таке: многогранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; формулює означення основних понять та властивостей для многогранників, зазначених у змісті теми; класифікує многогранники за характеристиками їх елементів: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; розрізняє елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; видимі і невидимі елементи призми / піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; зображає на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проєціювання: призму; паралелепіпед; піраміду; зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника – висота, твірна, апофема; перерізи площинами (осьові, діагональні, паралельні до площини основи тощо);	Многогранні кути. Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призма. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. Правильні многогранники.

аналізує та досліджує кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи); обґрунтовує розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутного трикутника; характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (21 година)	
Учень/учениця наводить приклади: тіл обертання; пояснює що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; формулює означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми; формулює і доводить теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною;	Тіло обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса;

класифікує геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; розрізняє елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; зображає рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проєкціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур; аналізує та досліджує кут між похилою та її проєкцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур; обґрунтовує властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола; характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур; розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.	перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації геометричних тіл.
--	--

2°. [15] 11 кл. Р1, §9. З курсу геометрії 10-го класу відомо, що наочно *геометричне тіло* можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею [15, с.84]. Таке уявлення дозволяє говорити про *внутрішні точки* будь-якого геометричного тіла, які на інтуїтивному рівні можна уявляти як точки, відділені від інших точок простору границею цього тіла.

Приклади. Внутрішні точки кулі віддалені від інших точок простору своєю границею – *сферою*.

Внутрішні точки куба теж віддалені своєю границею – шістьма його гранями.

Твердження. Будь-які дві внутрішні точки геометричного тіла, наприклад кулі, можуть бути сполучені лінією, яка повністю розташована всередині цієї кулі, тобто лінією, що утворена тільки внутрішніми точками цієї кулі.

Завдання 1. З'ясуйте, як означаються ці поняття «*опукла фігура*», «*зв'язна фігура*», «*внутрішня точка фігури*», «*гранична точка фігури*», «*обмежена фігура*» у підручнику геометрії для 11-го класу [15, Р1, §9].

Які з них є родовими поняттями для понять *геометричне тіло*, *поверхня геометричного тіла*?

Означення 8 [15, Р1, §9, с.86]. *Геометричним тілом* називається обмежена фігура в просторі, що має такі властивості:

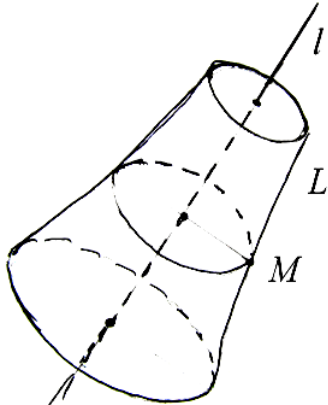
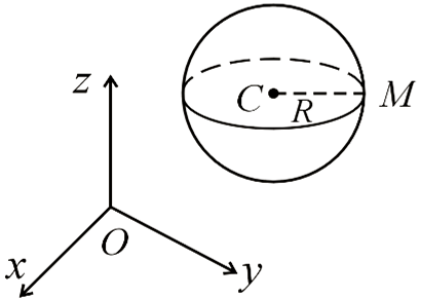
1) у неї є внутрішні точки, причому будь-які дві з них можна сполучити лінією, усі точки якої є внутрішніми;

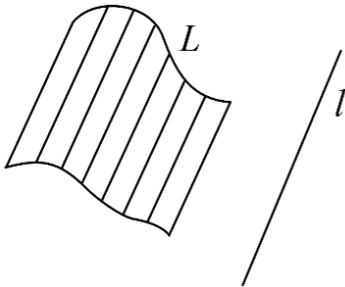
2) фігура містить свою границю, причому її границя збігається з границею множини всіх її внутрішніх точок.

Означення 9 [15, Р1, §9, с.87]. Границя тіла називається його *поверхнею*. Говорять, що поверхня тіла обмежує це тіло.

Завдання 2. Розгляньте **приклади** (Рис. 9.1-9.6) та **контрприклад** об'єднання двох тетраедрів (Рис. 9.11), **тригранний кут** (Рис 9.12).

3. Порівняльний аналіз вивчення тіл обертання в ШКГ та поверхонь обертання в курсі «Аналітична геометрія» для ЗВО.

Шкільний курс стереометрії	Курс «Аналітична геометрія» для ЗВО
[15]11 кл. Р1, §10, § 11, §12.	[11] Р7
	<u>Поверхні обертання.</u> <u>Означення</u> [11, с.240]. Нехай у деякій площині лежить пряма l і крива L. Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання кривої L навколо прямої l, називається поверхнею обертання (рис. 1). При цьому пряма l називається <i>віссю обертання</i>, а крива L – <i>твірною</i> або <i>меридіаном</i> поверхні обертання. Кожна точка M кривої L при цьому обертається по колу, площина якого перпендикулярна до осі l, а центр знаходиться на осі l. Це коло називається <i>паралеллю</i> поверхні обертання.  Рис. 1 <u>Простішими поверхнями обертання є сфера, циліндричні поверхні, конічні поверхні.</u>
§12. Куля й сфера. <u>Означення 1.</u> <i>Кулею</i> називається тіло, що складається з усіх точок простору, віддалених від даної точки на відстань, не більшу за задану. Ця точка називається центром кулі, а задана відстань – радіусом кулі. (с.117, таблиця 10).	Сфера  Рис. 2

Означення 2. Границя кулі називається кульовою поверхнею, або сферою. Отже, точками сфери є всі точки кулі, віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу. Означення 3. Відрізок, який сполучає дві точки кульової поверхні й проходить через центр кулі, називається діаметром кулі. Кінці будь-якого діаметра називаються діаметрально-протилежними точками кулі. Зауваження. Куля утворюється в результаті обертання півкруга навколо його діаметра як осі. Сфера може бути отримана в результаті обертання півкола навколо його діаметра.	Означення. Сферою називається множина точок простору віддалених від даної точки простору (центру сфери) на одну й туж відстань (радіус сфери) (рис.2). Поряд із площиною – поверхнею 1-го порядку, до найпоширеніших поверхонь відносять сферу – поверхню 2-го порядку. Положення сфери у просторі відносно даної системи координат повністю визначається заданням координат її центра і заданням довжини радіуса. Нехай $C(x_0; y_0; z_0)$ – центр сфери, $M(x; y; z)$ – довільна точка на сфері, $CM = R$. Тоді за означенням сфери матимемо: $CM^2 = R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Отже, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ – канонічне рівняння сфери.
§ 10. Циліндр і деякі його перерізи. Означення 1. Циліндром (точніше, круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів (с.96, Рис. 10.1). Круги називаються основами циліндра, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, – твірними циліндра. Означення 2. Циліндр називається прямим, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ (с.98, Рис. 10.1 б).	Циліндричні поверхні  Рис. 3. Означення. Поверхня, утворена внаслідок руху прямої, яка перетинає задану криву і залишається паралельною даній прямій, називається циліндричною поверхнею. (рис. 3). Прямі, які повністю лежать на цій поверхні і паралельні заданій прямій, називаються твірними циліндричної поверхні, а крива L, яку перетинають ці твірні, називається напрямною цієї поверхні.

Зауваження. Прямий циліндр наочно можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника навколо сторони, як осі (с.98, Рис. 10.2).

Означення 3. *Радіусом циліндра* називається радіус його основи.

Означення 4. *Висотою циліндра* називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки основи на іншу.

Означення 5. *Віссю циліндра* називається пряма, що проходить через центри його основ.

Отже, циліндрична поверхня повністю визначається заданням *твірної* і *напрямної* ліній.

Якщо прямоною лінією є лінія другого порядку, то циліндрична поверхня називається *циліндром 2-го порядку*.

В залежності від ліній 2-го порядку маємо три типи циліндрів 2-го порядку: еліптичний, гіперболічний, параболічний. Круговий циліндр є окремим випадком еліптичного типу (рис. 4).

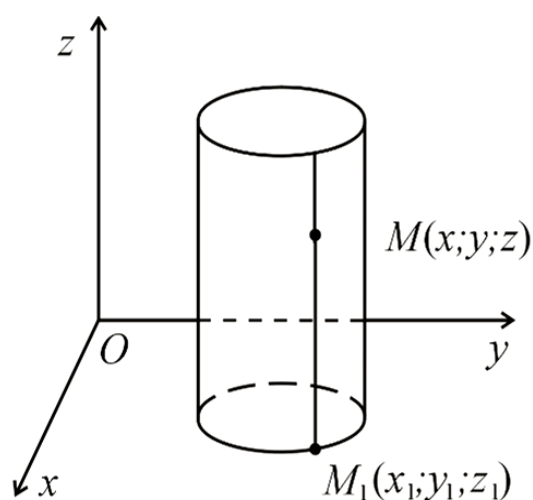


Рис. 4

§ 11. Конус і деякі його перерізи, зрізаний конус.

Означення 1. *Конусом (круговим конусом)* називається тіло, що складається з круга – *основи конуса*, точки, яка не лежить у площині цього круга, – *вершини конуса*, і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи (с. 107, Рис.11.1).

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса*.

Конічні поверхні

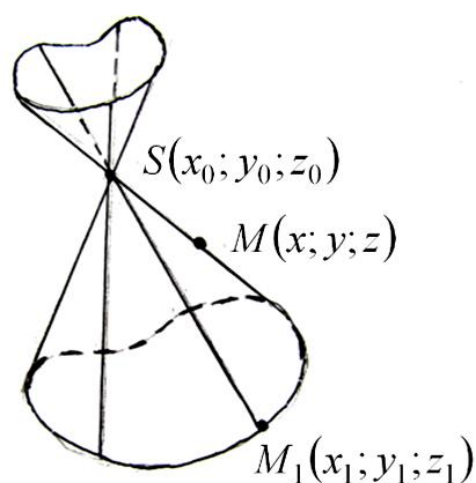


Рис. 5

Означення 2. Конус називається <i>прямим</i>, якщо пряма що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярна до площини основи (с. 107, Рис.11.1, б). Зауваження. Прямий круговий конус можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі (с. 108, Рис.11.2). Означення 3. Радіусом конуса називається радіус його основи. Означення 4. Висотою конуса називається перпендикуляр, проведений із його вершини на площину основи. Означення 5. Віссю прямого кругового конуса називається пряма, що містить його висоту.	Означення. <i>Конічною поверхнею</i> називається поверхня утворена рухом прямої, яка проходить через одну і ту ж фіксовану точку S і перетинає якусь лінію (рис. 5). S називають <i>вершиною конуса</i>, <i>твірною</i> – прямою, що проходить через вершину, <i>напрямною</i> – лінію, яку перетинає твірна. Отже, конічна поверхня повністю визначається заданням вершини і напрямної лінії. Напрямну лінію можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ Твірна, яка проходить через точки $S(x_0; y_0; z_0)$ і $M_1(x_1; y_1; z_1)$ має рівняння $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$
--	---

6. [3, § 6.3.2, с. 327].

Теорема 1. Число плоских кутів многогранника вдвоє більше від числа його ребер (і дорівнює $2P$).

Наслідок 1. Число плоских кутів многогранника завжди парне.

Наслідок 2. Якщо в кожній вершині многогранника сходиться однакове число m ребер, а B – число вершин многогранника, то $Bm = 2P$.

Наслідок 3. Якщо кожна грань многогранника є n -кутником з однаковим числом n сторін і G – число всіх граней многогранника, то $Gn = 2P$.

Теорема 2. Сума плоских кутів многогранника з числом ребер P і числом граней G дорівнює $360^\circ (P - G)$.

7. [3, § 6.3.3, §6.3.4 с. 328-329].

Теорема Ейлера. У кожному опуклому многограннику з числом граней G , числом вершин B і числом ребер P сума числа вершин і числа і числа граней не перевищує число ребер на 2, тобто $B + G = P + 2$.

8°. [15, P2, §10, §11, §12].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

Частина 2

1. Розгляньте методику застосування теореми Ейлера до класифікації правильних многогранників.

2°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач:

1) Основою призми є правильний шестикутник із стороною a , а бічні грані – квадрати. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів.

2) Основа піраміди – рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона 10 см. Бічні грані утворюють з основою рівні двогранні кути, які мають по 45° . Знайдіть висоту піраміди.

3°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач:

3) Висота циліндра 6 дм, радіус основи 5 дм. Кінці відрізка AB завдовжки 10 дм лежать на колах обох основ. Знайдіть найкоротшу відстань від нього до осі.

4) Твірна конуса 13 см, а висота 12 см. Конус перетнуто прямою, паралельною основі, відстань від неї до основи дорівнює 6 см, а до висоти 2 см. Знайдіть відрізок цієї прямої, який міститься в середині конуса.

4°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач:

5) Радіус кулі R . Через кінець радіуса проведено площину під кутом 60° до нього. Знайдіть площу перерізу.

6) Діаметр кулі 25 см. На її поверхні дано точку A і коло всі точки якого віддалені (по прямій лінії) від A на 15 см. Знайдіть радіус цього кола.

5. Складіть рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомо

рівняння його осі $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 4t + 1, \\ z = 2t + 3, \end{cases}$ та координати однієї з точок $M_1(2; -1; 0)$.

6. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач на **комбінації геометричних тіл** (різних рівнів складності):

1) У конусі дано радіус основи R і висоту H . Знайдіть ребро вписаного в нього куба.

2) У конусі дано радіус основи R і висоту H . У нього вписано правильну трикутну призму, бічні грані якої квадрати. Знайдіть ребро призми.

3) Кулю радіуса R вписано у зрізаний конус. Кут нахилу твірної до площини нижньої основи конуса дорівнює α . Знайдіть радіуси основ і твірну зрізаного конуса.



Література

1. Боровик В. Н. Зображення просторових фігур та їх застосування до розв'язування задач на комбінацію тіл. Навчальний посібник. Чернігів : Чернігівський державний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка, 2002. 192 с.

2. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.

3. Курс математики: Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

4. Ленчук І. Г. Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії: монографія. Житомир : Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2011. 360 с.

5. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>.

6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>.

7. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582с.

8. Соколенко Л. О. Програма навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» для студентів галузі 01 Освіта/Педагогіка. Спеціальності 014 Середня освіта (математика). Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, 2024. 6 с.

9. Соколенко Л. О. Програма навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» для студентів галузі 01 Освіта/Педагогіка. Спеціальності 014 Середня освіта (математика). Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка, 2024. 7 с.

10. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.

11. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Шкільні підручники

12. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.

13. Геометрія : проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.

14. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.

15. Нелін Є. П. Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Видавництво «Ранок», 2019. 208 с.

Тема 15.

НАУКОВІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Мета заняття: здійснити порівняльну характеристику щодо навчання геометричних величин у шкільному курсі геометрії 10-11 класів та у вузівських курсах математики, виділити спільне та відмінне; усвідомити математичні і методичні основи їх навчання та технологію реалізації методичних схем виведення формул об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Завдання.

1) Проаналізувати програми шкільного курсу геометрії 11-го класу на предмет вивчення геометричних величин.

2) Виділити геометричні величини, які розглядають у курсі геометрії 10-11 класів.

3) Розглянути поняття «об'єм тіла» та його основні властивості.

4) З'ясувати методичні схеми формування понятійного апарату та вивчення формул об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання під час навчання курсу стереометрії в старшій профільній школі на різних рівнях.

5) Ознайомитись з методикою навчання учнів 11-го класу розв'язування задач на визначення об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії.	[4], [5]
2	Виділення геометричних величин, які розглядають у курсі геометрії 10-11 класів.	[1],[2], [6], [10]-[15] стаття 1
3	Розгляд поняття «об'єм тіла» та його основних властивостей.	[1], [2], [6], [8] Л 3.11, [10]-[15]
4	Формування понять «рівноскладені тіла» та «рівновеликі тіла», встановлення взаємозв'язку між цими поняттями.	[1], [2]
5	Різні математичні та методичні підходи до виведення формул об'ємів та площ поверхонь: а) об'єму прямокутного паралелепіпеда; б) об'єму трикутної піраміди; в) площ поверхонь та об'ємів тіл обертання.	[2], [6], [8] Л 3.11, 3.12, 3.13, [7], [9], [10]-[15]
6	Класифікація задач за рівнем складності залежно від профільної диференціації: на обчислення відстаней, величини кутів, площі поверхні, об'єму.	[3], [10]-[15]
7	Методика навчання учнів розв'язування задач на визначення об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.	[10]-[15]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

Частина 1

1°. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії 11-го класу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії. Визначте місце теми в програмі, вимоги до знань і вмінь учнів.

2. Виділіть геометричні величини, які розглядають в курсі геометрії 10-11 класів.

3. Як означається поняття «об'єм геометричного тіла» у вузівському та шкільному курсі математики? Назвіть властивості об'єму.

4. Які тіла називають *рівновеликими*, а які *рівноскладеними*? Який зв'язок існує між цими поняттями?

5°. Які математичні підходи існують до виведення **формули об'єму прямокутного паралелепіпеда**? Які з цих підходів використовуються у вузівському курсі математики, а які у шкільних підручниках?

6°. Використовуючи моделі, продемонструйте, як відбувається доведення **формул об'єму похилого паралелепіпеда** методом перетворення його додатковими побудовами на прямокутний?

7°. Ознайомтесь з аналогічним прийомом, який використовується у діючому шкільному підручнику [14, Р4, §15.3, с.226-227] під час виведення **формули об'єму призми**.

8. Як використовується *визначений інтеграл* для обчислення об'ємів тіл обертання? Згадайте підхід запропонований у курсі вищої математики [7, с.306-307] та у діючих шкільних підручниках, серед яких [14], [15].

9°. Які способи існують для виведення формули об'єму піраміди? Розгляньте їх застосування у шкільних підручниках курсу геометрії старшої школи.

10°. Як вводиться поняття площі поверхні многогранника? Які методичні підходи застосовують для виведення **формул площі бічної поверхні** прямої призми, похилої призми, правильної піраміди, зрізаної піраміди?



Відповіді та вказівки до контрольних-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

Частина 1

1. Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії 11 класу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії.

11 клас, профільний рівень

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (частково)	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ (окремі складові)	
Учень/учениця пояснює та записує формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; вимірює та обчислює площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; розв'язує вправи, що передбачають: обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди.	Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди.
Тема 3. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ (16 годин)	
Учень/учениця пояснює що таке: об'єм многогранника; об'єм паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди; формулює основні властивості об'ємів многогранника; формулює і доводить теореми про: об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; об'єм призми; об'єм піраміди; зображує рисунком, відповідно до властивостей паралельного проєкціювання: призму, паралелепіпед, піраміду, зрізану піраміду; видимі та невидимі	Об'єм многогранника та властивості об'єму. Об'єм многогранників: паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди.

елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об'єму; пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об'єму прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; аналізує та досліджує лінійні виміри та величини для обчислення об'єму; вимірює та обчислює об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; розв'язує вправи, що передбачають: обчислення об'єму прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди.	
Тема 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ (16 годин)	
Учень/учениця пояснює що таке: об'єм циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса; площа сфери; формулює і доводить теореми про об'єм: циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; розрізняє розгортки поверхні циліндра і конуса; зображує рисунком, відповідно до властивостей паралельного проєціювання: циліндра, конус, зрізаний конус; кулю та її частини; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об'єму; вимірює та обчислює площі бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса;	Об'єм тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі та її частин. Площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса. Площа сфери.

вимірює та обчислює об'єм та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площу сфери; розв'язує вправи, що передбачають: обчислення об'єму циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі; площ бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, площу сфери. знаходження площ поверхонь комбінації просторових фігур.	
--	--

2. У курсі «Геометрія» старшої школи розглядають **величини** наступних видів: 1) **відстані** (від точки до прямої (відрізка, площини), між двома фігурами, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими); 2) **кути** (між двома прямими, між прямою і площиною, двогранні кути, лінійний кут двогранного кута); 3) **площі поверхонь** (многогранників та тіл обертання), 4) **об'єми** (многогранників та тіл обертання).

3. Порівняльний аналіз формування поняття «об'єм геометричного тіла».

[2, §7.4.1, с.375] «Курс математики»	[13] Нелін Є. П. «Геометрія (профільний рівень)»
Означення. Об'ємом геометричного тіла називається величина обмеженої частини простору, яку займає тіло.	Означення. Об'єм – величина, що ставить у відповідність тілам у просторі невід'ємні дійсні числа. Об'єм – число V, що показує, скільки разів одиниця виміру об'єму і її частини укладаються в заданому тілі.
Чисельне вираження цієї величини можна дістати за допомогою прямокутної системи координат у просторі і вибраного одиничного відрізка e [2, с.375-376]: 1) Якщо число нових кубів на якомусь етапі ділення одиничного відрізка на осях координат на	Це число може бути натуральним, раціональним, або навіть ірраціональним.

$10, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$ рівних частин повністю вичерпує внутрішню частину тіла то при цьому об'єм тіла виразиться раціональним числом. 2) Якщо такий процес нескінченний, тоді об'єм тіла виразиться ірраціональним числом. Кожному замкненому опуклому тілу ставиться у відповідність додатне дійсне число, яке називають його об'ємом.	
Властивості об'єму тіла	
<i>Аксіоми об'єму тіла.</i> 1. Рівні тіла мають рівні об'єми. 2. Якщо тіло розбито площиною на дві частини, то об'єм цього тіла дорівнює сумі об'ємів утворених частин. 3. Існує тіло, об'єм якого дорівнює одиниці.	1. Об'єм тіла у просторі є невід'ємним числом. 2. Рівні тіла мають рівні об'єми. 3. Якщо тіло F поділене на частини, що не перетинаються, то об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів його частин. 4. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.
За <i>одиницю вимірювання об'єму</i> приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини. $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$; $1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$; $1 \text{ см}^3 = 1000 \text{ мм}^3$.	

4. Рівноскладеність та рівновеликість.

<u>Означення.</u> Два тіла називаються рівноскладеними, якщо з усіх частин одного тіла можна скласти друге тіло.	<u>Означення.</u> Два тіла, що мають рівні об'єми, називаються рівновеликими.
Зв'язок між рівноскладеністю та рівновеликістю	
Твердження: рівноскладені тіла є водночас рівновеликими	Обернене твердження неправильне. Не кожні два рівновеликі тіла є рівноскладеними. <u>Контрприклад.</u> Куб та правильний тетраедр однакових об'ємів не є рівноскладеними.

5°. [2, §7.4.2, с. 377-378], [14, Р4, §15.2 + Додаток 2]; [15, Р4, §29, с.224, теорема 26].

6°. [14, Р4, §15.2, с.224-225, теорема (формула об'єму паралелепіпеда)].

8. [7, с.306-307].

Твердження: об'єм V тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $P(f)$, породженої графіком функції f , визначеної, невід'ємної і неперервної на відрізку $[a, b]$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1)$$

Остання формула узагальнюється на випадок тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $P(f, g)$, породженої графіками функцій f і g , кожна з яких визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, і ці функції такі, що $f(x) \geq g(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a, b]$, (рис. 1). Об'єм V такого тіла обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx. \quad (2)$$

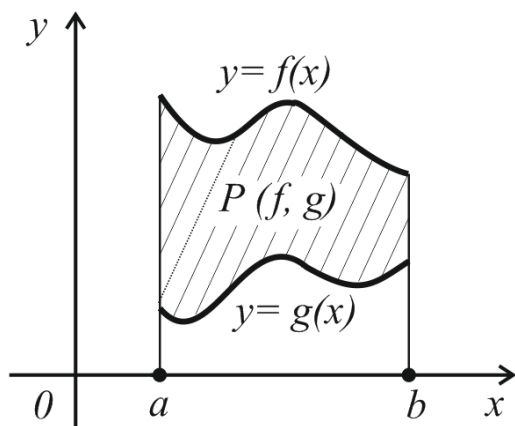


Рис. 1

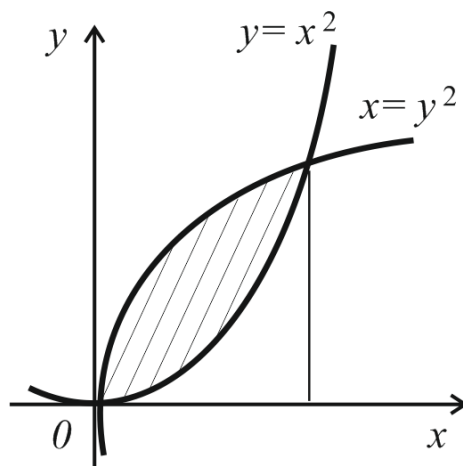


Рис. 2

Приклад. Обчислити об'єм V тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $x = y^2$ (рис. 2).

Розв'язання. Точками перетину ліній $y = x^2$ і $x = y^2$ (обидві лінії – параболі) є точки з абсцисами 0 і 1 (обґрунтуйте). Тому, скориставшись формулою (2), дістанемо

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10} \pi.$$

9°. Існують різноманітні способи виведення **формули об'єму трикутної піраміди**, серед яких:

1) спосіб, який спирається на явне **використання границь**: [10, §7, п. 69-70];

2) спосіб доведення за допомогою **визначеного інтеграла**: [14, Р IV, §16.2, с.238], [15, Р4, §32].

3) спосіб, що спирається на використання **принципу Кавальєрі**: [13, Р3, §15].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самотійної роботи)

Частина 2

1. Які три випадки, щодо сумірності ребер паралелепіпеда з обраною одиницею довжини e розглядають під час виведення формули об'єму у вузівському курсі математики? Проілюструйте кожен з цих випадків.

2. У якому зі шкільних підручників виведення формули об'єму паралелепіпеда побудовано на основі тієї ж ідеї? Розгляньте методику реалізації цієї ідеї.

3. Який альтернативний метод використовують автори інших шкільних підручників курсу геометрії 11 класу? В чому суть цього методу?

4°. Розгляньте методику застосування визначеного інтегралу до виведення **формули об'єму піраміди**, запропоновану у підручниках [15, с. 242-243], [14, с.237-238].

5°. Як виводиться формула **об'єму зрізаної піраміди** у альтернативних шкільних підручниках?

6. Опишіть методичний підхід, який використовують для виведення формул об'ємів циліндра та конуса. Яка ідея покладена в основу цього методу?

7. Розгляньте методику застосування визначеного інтегралу до виведення **формул об'єму кулі та кульового сегмента**. Як виводиться формула **об'єму кульового сектора**?

8. Який методичний підхід для виведення формул площ бічної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса застосовується в альтернативних шкільних підручниках геометрії 11 класу?

9. Як визначений інтеграл застосовується в курсі вищої математики до обчислення площ поверхонь обертання, зокрема площі сфери?

10. Чим відрізняється, запропонований у діючих шкільних підручниках, методичний підхід до виведення формули площі сфери?

11°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач на обчислення **об'ємів многогранників** з підручника [14].

№11.1. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб з площею S . Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2 . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

№11.2. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см. Одне з бічних ребер дорівнює 4 см і утворює з суміжними сторонами кути, які дорівнюють 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

№11.3. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і бічною стороною a . Діагональ бічної грані, що містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

№11.4. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α і діагоналлю d , яка є бісектрисою цього кута. Більша діагональ призми утворює кут β з бічним ребром. Знайдіть об'єм призми.

№11.5. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом вписаного кола r . Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом φ . Знайдіть об'єм піраміди.

12°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач на обчислення **об'ємів тіл обертання** з підручника [14].

№12.1. Паралельно осі циліндра проведено площину, що відтинає від кола основи дугу α . Діагональ перерізу дорівнює d й утворює з другою діагоналлю кут φ . Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

№12.2. Через дві твірні **конуса**, кут між якими дорівнює 120° , проведено переріз. Площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ см². Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між висотою і твірною дорівнює 60° .

№12.3. Знайдіть об'єм **кулі**, якщо площа перерізу, віддаленого від центра кулі на відстань d , дорівнює S .

13°. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач на обчислення **площ поверхонь тіл обертання** [14].

№13.1. Кут між діагоналлю осевого перерізу **циліндра** і площею основи дорівнює γ . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо діагональ дорівнює d .

№13.2. Паралельно осі **циліндра** проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом 2α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо діагональ утвореного перерізу дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β .

№13.3. Через вершину **конуса** проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом α , а з вершини – під кутом β . Визначити бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює m .

№13.4. Відрізок, який сполучає центр основи **конуса** із серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом φ . Довжина цього відрізка дорівнює d . Знайти повну поверхню конуса.

№13.5. Радіус кулі дорівнює R , а радіус її перерізу площиною – r . Знайдіть площу повної поверхні меншого **кульового сегмента**.



Література

1. Боровик В. Н. Курс лекцій з математики: Навчальний посібник для студентів факультету початкового навчання. Чернігів : РВВ ЧДПУ, 2005. 214 с.

2. Курс математики: Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

3. Кушнір І. А. Методи розв'язування задач з геометрії. Кн. для вчителя. Київ : Абрис, 1994. 464с.

4. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>.

5. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>.

6. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582с.

7. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.

8. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.

9. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Шкільні підручники

10. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.

11. Геометрія : проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.

12. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.

13. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Видавництво «Ранок», 2019. 208 с.

14. Єршова А. П. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. Харків : Вид-во «Ранок», 2011. 304с.

15. Геометрія: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. Київ : Генеза, 2011. 336 с.

Науково-методичні статті

1. Соколенко Л. О. Особливості навчання теоретичних основ геометрії майбутніх вчителів початкової школи. Матеріали наук.-практ. конф., присвяч. 90-річчю від дня народження В. Н. Боровика / упор. Олійник Н. А. Чернігів, 2015. С. 66–70.

КОМПЛЕКСИ ЗАВДАНЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Комплекс завдань самостійної роботи по змістовому модулю 3

Завдання	Тема	Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)	Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)
1	11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.	4, 5, 6, 9.	1, 2, 4, 6, 8.
2	12. Координати і вектори у просторі.	6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27	1, 2, 3, 4 (частково), 5 (частково), 6 (частково), 7 (частково), 8 (частково).
3	13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.	1, 3	1, 4, 8.
4	14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінації геометричних тіл.	2, 4, 5, 8	2, 3, 4
5	15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.	1, 5, 6, 7, 9, 10	4, 5, 11 (частково), 12 (частково), 13 (частково).

1.1. Акуленко І. А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія. Черкаси : видавець Чабаненко Ю, 2013. 460 с.

1.2. Елементарна математика. Навчальна програма (розроблена на основі концепції розвивальної освіти) / Укладач доцент Семенець С. П. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. 88 с.

1.3. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

1.4. Працьовитий М. В., Ніколаєнко С. В. «Наукові основи шкільного курсу математики» в системі підготовки сучасного вчителя математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі : Зб. наукових праць. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. № 5. С. 17–24.

1.5. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти // Математика в школі. 2005. № 5. С. 2–7.

1.6. Семенець С. П., Семенець Л. М. Елементарна математика : навч.-метод. посіб. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. 244 с.

1.7. Соколенко Л. О. Шкільна математика з точки зору вищої // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. Чернігів, 2011. Вип. 83. С. 126–128.

1.8. Соколенко Л. О. Роль наукових основ шкільного курсу математики у професійній підготовці вчителя // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. Чернігів, 2015. Вип. 130. С. 214–219.

1.9. Соколенко Л. О. Досвід формування спеціальних компетентностей під час навчання дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики» // Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Випуск 61. Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. С. 264–269.

1.10. Соколенко Л. О. «Наукові основи шкільного курсу математики» як невід’ємна складова частина професійної підготовки сучасного вчителя // Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Випуск 62. Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. С. 188–193.

1.11. Соколенко Л. О. Про застосування теорії прямої до розв’язування задач шкільного курсу геометрії // Сучасна освіта в контексті нової української школи: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 153–156.

1.12. Соколенко Л. О., Швець В. О. Застосування теорії прямої та площини до розв’язування стереометричних задач // **НАУКОВИЙ ЧАСОПИС НАЦІОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА. Серія №3.** Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 21: збірник наукових праць. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. С. 52–59.

1.13. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики: Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : Десна Поліграф, 2020. 144 с.

1.14. Соколенко Л. О. Аналітична геометрія: Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика. Частина 1 «Аналітична геометрія на площині» [електронне видання]. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. 80 с.

1.15. Соколенко Л. О. Аналітична геометрія: Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика. Частина 2 «Аналітична геометрія у просторі». [електронне видання] Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. 104 с.

1.16. Соколенко Л. О. Досвід навчання дисципліни «Наукові основи шкільного курсу геометрії» магістрів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) // Scientific Collection «InterConf+»,

32(151): with the Proceedings of the 7th International Scientific and Practical Conference «Current Issues and Prospects for The Development of Scientific Research» (April 19-20, 2023; Orléans, France) by the SPC «InterConf». Epi, 2023. P. 202–216.

1.17. Тарасенкова Н. А., Кірман В. К. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів // Математика в школі. 2008. № 6. С. 3–9.

1.18. Швець В. О. Математичний гурток: старша школа: нерівності та їх доведення / В. О. Швець, Л. В. Заболотня, І. С. Соколовська. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. 112 с.

1.19. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.

1.20. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ : 2015. 21 с.

1.21. Швець Л. В. Проекційні методи побудови зображень в педагогічному процесі: історичний аспект // Дидактика математики: проблеми і дослідження. 2010. №34. С. 83–92.

1.22. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників виконувати просторові зображення на перших уроках стереометрії // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій та середній школі: Зб. наукових праць. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. №8. С. 139–147.

1.23. Швець Л. В. Побудова зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. Vol. 5, Budapest, 2013. С. 153–157.

1.24. Швець Л. В. Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення: перпендикулярність прямих і площин у просторі // Математика в рідній школі. 2015. №3. С. 9–15.

1.25. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників виконувати просторові зображення: ортогональне проєкціювання // Математика в рідній школі. 2015. №4. С. 4–11.

Навчальні програми з математики

2.1. Державний стандарт базової середньої освіти. Затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 №898. URL: www.mon.gov.ua.

2.2. Державний стандарт профільної середньої освіти. 25.07.2024 №851. URL: www.mon.gov.ua

2.3. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Василюшин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьник О. В.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України» (наказ Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883).

2.4. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України» (наказ Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883).

2.5. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України» (наказ Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883).

2.6. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.7. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.8. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту // Математика в рідній школі. 2017. № 10. С. 2–10.

2.9. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

2.10. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

Шкільні підручники

3.36. Геометрія. Профільний рівень: підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.

3.37. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. Харків : Вид-во «Ранок», 2018.

3.38. Істер О. С., Єргіна О. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 368 с.

3.39. Істер О. С., Єргіна О. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 288 с.

3.40. Мерзляк А. Г. Геометрія: початок навч. на поглибл. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.

3.41. Мерзляк А. Г. Геометрія: початок навч. на поглибл. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.

3.42. Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.

3.43. Мерзляк А. Г. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.

3.44. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.

3.45. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.

Математичні Енциклопедії, словники

4.1. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 1 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 383 с.

4.2. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 2 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 360 с.

4.3. Математическая Энциклопедия. Ред. коллегия : И. М. Виноградов (глав. ред.) и др. Т. 1 – Москва : «Советская Энциклопедия», 1977. Т 1. А-Г. 1977. 1152 стб. с илл.

4.4. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, Т2 Д-Кoo. Москва : «Советская Энциклопедия», 1979. 1104 стб. с илл.

4.5. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, Т3 Кoo-Од. Москва : «Советская Энциклопедия», 1982. 1184 стб., ил.

4.6. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, Т4 Ок-Сло. Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1216 стб., ил.

4.7. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, Т5 Слу-Я. Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1248 стб., ил.

Соколенко Л. О. НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ: Навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня спеціальності А4 Середня освіта (Математика). Частина 2.

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольні-сміслові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 2 містить матеріал по змістовому модулю № 3.

Посібник призначений для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня спеціальності А4 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

Liliya SOKOLENKO. SCIENTIFIC FOUNDATIONS OF THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS: Teaching aid for universities students of the speciality A4 Secondary Education (Mathematics). Part 2.

Teaching aid contains a modular program of the discipline «Scientific fundamentals of the school course of mathematics», and methodical support for its implementation.

The aid provides material for lectures and practical classes at SFSCM, in which the main content lines of the school mathematics course are considered from the point of higher mathematics. In the school course are revealed the role and place of the most important concepts of modern mathematics, the comparative analysis is made of the key mathematical concepts of the school course and their properties with the general scientific.

For the purpose of thematic classes, were developed control and semantic questions and tasks of reproductive, reconstructive and creative character. Answers to specific questions and tasks are presented in this aid. Part 2 contains material for content module № 3.

The aid is intended for universities students, specialty A4 Secondary education (Mathematics), teachers and lecturers of mathematics.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
Частина 2

Технічний редактор *О. М. Єрмоленко*

Верстка та макетування *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Рисунки *В. В. Кислий, Є. М. Райчинець,
Я. В. Сапонова, Є. О. Смецький,
О. І. Полковник*

Підписано до друку 31.03.2025 р. Формат 60×84 1/16.

Папір офсетний. Друк на різнографі.

Ум. друк. арк. 5,35. Обл.-вид. арк. 5,52.

Наклад 100 прим. Зам. № 0014.

Віддруковано ТОВ «Видавництво «Десна Поліграф»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК №4079 від 1 червня 2011 року

14035, м. Чернігів, вул. Карпенка-Карого, 40
Тел. +38-097-385-28-13