

Tasks with parameters: a digitized approach

Yurii H. Horoshko¹[0000–0001–9290–7563],
Tetiana V. Pidhorna²[0000–0002–1414–3489],
Petro F. Samusenko³[0000–0002–4241–6173],
Hanna Y. Tsybko¹[0000–0002–1861–3003], and
Ihor A. Tverdokhlib^{4,5}[0000–0001–6301–0159]

¹ T. H. Shevchenko National University “Chernihiv Colehium”,
53 Hetman Polubotka Str., Chernihiv, 14013, Ukraine
`y.horoshko@ukr.net`, `a.tsb@ukr.net`

² State University of Trade and Economics, 19 Kyoto Str., Kyiv, 02156, Ukraine
`t.pidhorna@knute.edu.ua`

³ National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic
Institute”, 37 Beresteyskiy Ave., Kyiv, 03056, Ukraine
`psamusenko@ukr.net`

⁴ Dragomanov Ukrainian State University, 9 Pyrohova Str., Kyiv, 01601, Ukraine

⁵ Institute of Pedagogy of the NAES of Ukraine, 52-D Sichovyh Striltsiv Str., Kyiv,
04053, Ukraine
`igtverd@ukr.net`

Abstract. Technological and methodological aspects of using freeware software, such as GeoGebra, Wolfram|Alpha, Maxima, SageMath and GRAN1, for solving tasks with parameters, are presented in the article. Criteria were defined for selection of computer mathematics system (CMS) to solve tasks with parameters, including plotting a graph of a function given in explicit and implicit forms, using a parameter in a function’s analytical definition, and automatically changing the graph of a function depending on the parameter value; ability to changing the parameter step change; plotting of a tangent and a normal to a curve at a point; ability to change the scale; determination of the coordinates of the intersection of graphs of functions; obtaining an analytical solution. In the article, some examples were presented for graphic and analytical tasks that used CMS parameters. GRAN1 and GeoGebra are recommended to use for plotting and analyzing of the graphs⁶.

Keywords: Computer Mathematics System · tasks with parameters · Wolfram|Alpha · Maxima · SageMath · GeoGebra · GRAN

1 Вступ

1.1 Постановка проблеми

Моделювання різноманітних процесів і явищ є одним з основних загальних методів, що використовується в наукових дослідженнях. Навчання розв’язу-

⁶ Partial results of this research were highlighted at the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology (AET 2021) [13].

вання задач з параметрами в процесі навчання математики, є одним з підготовчих етапів до математичного моделювання, де відбувається дослідження моделей за різних умов, зокрема за різних значень параметрів математичних моделей.

Впродовж десятиліть розв'язування задач з параметрами зазвичай містилось в програмі вступних випробувань до закладів вищої освіти України, наразі це вміння вимагається для успішного складання зовнішнього незалежного оцінювання з математики, яке проводиться в Україні вже понад 10 років. Як свідчить практика і результати педагогічних досліджень розв'язування задач з параметрами викликає у учнів багато труднощів, більше 85% абітурієнтів на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики навіть не роблять спроб розв'язати такі задачі [5].

Зрозуміло, що успішне розв'язування студентами задач із параметрами пов'язане насамперед із відповідною професійною кваліфікацією їхніх викладачів, яка переважно набувається під час навчання у ЗВО. Загалом існує дві групи методів розв'язування задач з параметрами – аналітичні та графічні методи. Аналітичні методи ґрунтуються на властивостях функцій дійсної змінної (періодичність, парність, монотонність, опуклість тощо), які детально вивчаються в курсі математичного аналізу для студентів відповідних спеціальностей бакалаврату. Застосування графічних методів традиційно обмежується можливістю побудови графіків елементарних функцій і способами їх перетворення. Ситуація докорінно змінилася з розвитком комп'ютерних технологій і появою систем комп'ютерної математики (СКМ). При цьому не лише суттєво спростився процес побудови графіків функцій, але й з'явилася можливість графічного представлення складених функцій, аналітичний вираз яких досить громіздкий. Це призвело до органічного поєднання аналітичних і графічних методів при розв'язуванні задач з параметрами, що висуває додаткові вимоги до підготовки студентів – майбутніх учителів математики. Їх підготовка повинна ґрунтуватися на поєднанні теоретичного матеріалу класичної теорії диференціального числення функцій дійсної змінної та практичних засобів побудови функцій за допомогою СКМ.

1.2 Аналіз праць з тематики досліджень

Методиці навчання розв'язування задач з параметрами присвячена значна кількість публікацій [8, 10, 19, 21, 25]. З розвитком комп'ютерної техніки і відповідного програмного забезпечення розширилось коло таких задач, засоби і методи навчання їх розв'язування. Серед найбільш відомих вільнопоширюваних прикладних програмних засобів навчального характеру, з використанням яких можна раціонально розв'язувати задачі з параметрами, можна виокремити GeoGebra, Wolfram|Alpha, Maxima, SageMath та GRAN [3, 6, 7, 9, 11, 13, 15–18, 20, 22, 24, 26].

Тематика публікацій дослідження використання програмних засобів для аналізу зазначених задач охоплює різні аспекти методики навчання розв'язування задач з параметрами: вивчення форм графіків функцій за різних

значень параметра [6, 15]; використання комп'ютера для ілюстрації аналітичних розв'язків [7, 20]; методика організації дослідницької діяльності учнів і студентів в процесі попереднього графічного аналізу розв'язків задач з подальшим аналітичним розв'язуванням [11, 17, 18, 21, 24]; отримання розв'язків задач на основі детального графічного аналізу [20, 26]. Як правило, в цитованих працях розглядаються приклади задач, в яких розв'язки можна отримати аналітичним шляхом, що є винятковим випадком на практиці.

Незважаючи на те, що даній тематиці присвячено велику кількість досліджень в галузі методики навчання математики, зокрема і з використанням сучасних комп'ютерно-орієнтованих технологій, її важливість не викликає сумнівів, оскільки кількість зазначених задач та їх типів постійно збільшується. Крім того, розширюється функціонал СКМ, що призводить до появи нових шляхів отримання розв'язків таких задач. Зрозуміло, що для практичного використання важливо знати не стільки точне значення розв'язку задачі, яка описує математичну модель реального процесу чи явища, скільки те, чи сумісна та стійка задача. Тоді, використовуючи сучасні програмні засоби можна знайти наближене значення певного розв'язку задачі з наперед заданою точністю, що цілком достатньо для практики.

У даній праці розглядаються деякі аспекти застосування аналітичного та графічного методів розв'язування задач з параметрами за допомогою СКМ. Окремі результати цього дослідження були висвітлені на 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology (AET 2021) [13].

1.3 Мета дослідження

Метою даної праці є розробка критеріїв вибору програмного забезпечення, яке доцільного використовувати в процесі розв'язування задач з параметрами.

У роботі наведено приклади розв'язування таких задач як аналітичним, так і графічним методами.

Значна увага приділяється задачам, які принципово неможливо розв'язати аналітичним методом. При цьому побудова досить складних графіків функцій для різних значень параметрів із застосуванням відповідного програмного забезпечення дозволяє уникнути помилок при побудові таких графіків, зосередити увагу на аналізі їх форми та знайти розв'язок задачі. Розгляд завдань, які можна розв'язати лише наближено за допомогою графічного методу, розширює уявлення учнів про те, що в процесі опису математичних моделей різноманітних об'єктів і явищ використовуються і такі розв'язки.

2 Матеріали і методи дослідження

2.1 Системи комп'ютерної математики

На сьогодні для розв'язання різноманітних як теоретичних, так і практичних задач все більше використовується веб-орієнтоване програмне забез-

печення, зокрема і СКМ. Як вже зазначалося, програмні засоби GeoGebra, Wolfram|Alpha, Maxima, SageMath, GRAN тощо є одними з найпопулярніших вільно поширюваних систем комп'ютерної математики.

WolframAlpha – це база знань з різних наукових напрямів, зокрема і математичних. В її основі різноманітні алгоритми і технології штучного інтелекту. Доступ до веб-орієнтованої версії за посиланням <https://www.wolframalpha.com/>.

Система Wolfram|Alpha була розроблена Стівеном Вольфрамом у 2009 році. Як зазначається на сайті Wolfram|Alpha, реалізація такого проекту стала можливою завдяки потужності сучасних комп'ютерів, обміну даними через Інтернет, а також досвідом Стівена Вольфрама в управлінні розробкою програмного забезпечення понад 30 років. За допомогою цієї програми, заснованої на швидких обчисленнях, основою яких є достатньо велика колекція вбудованих даних, алгоритмів і методів, можна отримати відомості з різних галузей науки – математики, фізики, історії тощо. Wolfram|Alpha реалізовано на мові Wolfram на базі пакету Mathematica. Wolfram|Alpha є безкоштовним ресурсом, але з 2012 року можна отримати доступ до додаткових системних сервісів, таких як покрокове виконання завдань, за щомісячну плату [14, 23].

SageMath – це безкоштовна математична система з відкритим вихідним кодом, ліцензована під GPL. Доступ до веб-орієнтованої версії за посиланням <https://www.sagemath.org/>.

За допомогою цієї системи комп'ютерної алгебри можна розв'язувати задачі з різних областей математики, зокрема алгебри, комбінаторики, обчислювальної математики, математичного аналізу тощо. Перша версія SageMath була випущена 24 лютого 2005 року як безкоштовне програмне забезпечення під ліцензією GNU GPL. Початковою метою проекту було «створити альтернативу системам Magma, Maple, Mathematica та MATLAB з відкритим кодом». Розробником SageMath є Вільям Стайн, математик Вашингтонського університету [2].

Maxima — це система комп'ютерної алгебри, де для розв'язування задач використовуються як чисельні так і аналітичні методи. Maxima є нащадком Macsyma, системи комп'ютерної алгебри, розробленої наприкінці 1960-х років у Массачусетському технологічному інституті, з 1982 по 2001 рік Maxima підтримувалась Вільямом Шелтером. У 1998 році вихідний код був випущений під GNU General Public License (GPL). Після смерті Вільяма Шелтера в 2001 році було створено групу користувачів і розробників для підтримки і розвитку проекту Maxima, зокрема, остання оновлена версія цієї програми була у травні 2023 року. Розробники стверджують, що функціональність і ефективність використання програми можна порівняти з комерційними системами, такими як Mathematica та Maple [1].

Однією з найпоширеніших систем комп'ютерної математики навчального призначення на території України є програмний комплекс GRAN, про це свідчить значна кількість науково-педагогічних публікацій присвячених різним аспектам організації і здійснення освітнього процесу в сучасних умо-

вах навчання. Програмний комплекс GRAN було розроблено в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова під керівництвом М. І. Жалдака. Цей комплекс складається з трьох програм GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D. Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу і розв'язуванню задач, що пов'язані із побудовою графіків функцій на декартовій площині заданих явно і неявно, параметрично, таблично, в полярній системі координат; для опрацювання статистичних даних, побудови графіків функцій розподілу ймовірностей випадкових величин, обчислення визначених інтегралів, довжини кривих, площі криволінійних трапецій, площі поверхонь та об'ємів тіл обертання тощо. Першу версію GRAN1 було розроблено для персонального комп'ютера Yamaha YIS-805, ще в 1990 році А. В. Пеньковим [28]. Пізніше GRAN1 удосконалено і адаптовано до використання під операційною системою сімейства Windows Ю. В. Горошком. У 2019 цей програмний засіб було викладено на віддаленому робочому столі, що дозволяє його використовувати через браузер віддалено [27], а не лише на локальних комп'ютерах. GRAN-2D призначено для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, а GRAN-3D – для графічного аналізу систем тривимірних геометричних об'єктів. Перші версії програм GRAN-2D GRAN-3D були розроблені в 2002 році. Комплекс є вільно поширюваним і його можна завантажити з сайту <https://zhaldak.fi.npu.edu.ua/>.

Однією з найпоширеніших систем комп'ютерної математики навчально-го призначення є система GeoGebra. Перша версія GeoGebra розроблена в 2001-2002 рр. Маркусом Хохенвартером [12]. У грудні 2021 року GeoGebra була придбана конгломератом Vuju's. Цей програмний засіб можна використовувати як дистанційно, так і на локальному комп'ютері, завантаживши відповідні модулі програми. Складовою частиною системи GeoGebra є програми для графічного аналізу і розв'язування задач, що пов'язані із побудовою графіків функцій на декартовій площині заданих в явному або в неявному вигляді, полярній системі координат, задач з теорії ймовірностей, планіметрії та стереометрії. Використовуючи СКМ GeoGebra, можна також створювати дидактичні матеріали для різних користувачів, надавати до них доступ іншим; створювати освітнє середовище класу для використання його учнями.

2.2 Приклади задач з параметрами

З'ясуємо, які функції СКМ доцільно використовувати в процесі розв'язування задач з параметрами. Для цього розглянемо деякі приклади.

1. Розв'язати рівняння

$$ax = 1.$$

Спробуємо знайти аналітичний розв'язок заданого рівняння за допомогою Wolfram|Alpha, Maxima та SageMath. Використовуючи Wolfram|Alpha, дістаємо

$$x = 1/a, \quad (1)$$

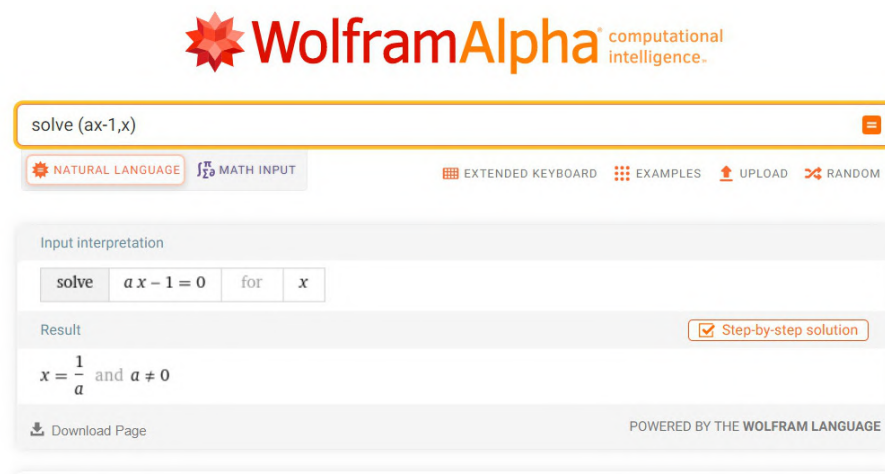


Рис. 1.

якщо $a \neq 0$ (рис. 1).

Для $a = 0$ рівняння (1) не має розв'язків. Специфіка інтерфейсу Wolfram|Alpha полягає в тому, що за замовчуванням не розглядається випадок, коли множина розв'язків рівняння порожня.

Використовуючи програми Maxima та SageMath, ми отримуємо

$$x = 1/a$$

(рис. 2), і це, зрозуміло, неповна (неправильна) відповідь.

```
(%i1) solve([a*x-1], [x]);
(%o1) [x = 1/a]
sage: x,a=var('x,a')
sage: solve([a*x-1],x)
[x == (1/a)]
```

Рис. 2.

Як вже зазначалось, за допомогою GeoGebra та GRAN1 не можна знайти аналітичні розв'язки рівняння (1). Однак може бути корисною геометрична інтерпретація задачі.

Так, на рисунку 3, отриманому за допомогою програми GRAN1, зображено графік функції $y = ax$ для різних значень параметра ($a = 1$, $a = 0$).

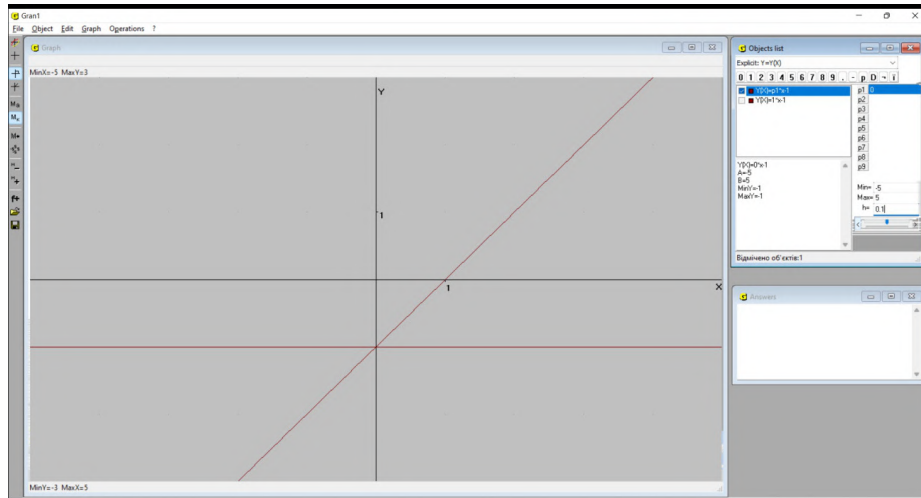


Рис. 3.

У випадку, коли $a = 1$, графіки функцій $y = x$ і $y = 1$ перетинаються в одній точці, тобто рівняння (1) має один розв'язок. Якщо $a = 0$, то графіки функцій $y = 1$ і $y = 0$ не перетинаються, тобто дане рівняння не має розв'язків.

2. Розв'язати рівняння

$$ax^2 + 3x - 5 = 0. \quad (2)$$

Знайдемо аналітичний розв'язок заданого рівняння, використовуючи Wolfram|Alpha, Maxima та SageMath. Порівнюючи результати розв'язання (рисунок 4, 5), переконуємось, що за допомогою Wolfram|Alpha можна отримати правильний розв'язок задачі, а використання SageMath і Maxima приводить лише до неповного (неправильного) розв'язання задачі.

Як і раніше, використовуючи GeoGebra або GRAN1, можна зробити висновок про кількість розв'язків рівняння (2). На рисунках 6 і 7 зображено графіки функції $y = ax^2 + 3x - 5$ у випадку, коли $a = 0$ та $a = 1$ відповідно.

Абсциси точок перетину графіків цих функцій з віссю абсцис є коренями рівняння (2), тобто залежно від значень параметра a дане рівняння має один або два розв'язки.

3. Розв'язати рівняння

$$1 - \frac{3}{x + a - 1} = \frac{5a}{(x + a - 1)(x + 1)}. \quad (3)$$

Розв'язуючи це рівняння аналітично за допомогою Wolfram|Alpha, Maxima та SageMath, ми отримуємо неповну відповідь. Залежно від значень параметра a знайдено два розв'язки $x = 4$ і $x = -a - 1$ (рис. 8).

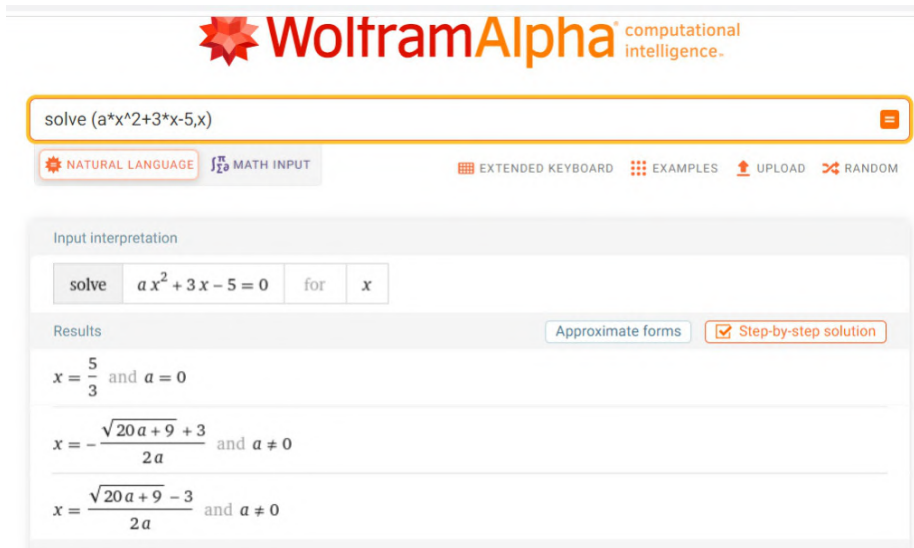


Рис. 4.

```
(%i5) solve([a*x^2+3*x-5], [x]);
(%o5) [x == -sqrt(20*a+9)/2*a, x == sqrt(20*a+9)/2*a]

sage: solve([a*x^2+3*x-5], x)
[x == -1/2*(sqrt(20*a + 9) + 3)/a, x == 1/2*(sqrt(20*a + 9) - 3)/a]
```

Рис. 5.

Але незрозуміло, чи сумісне рівняння (3), якщо $a = -3$ або $a = 0$. На підставі результатів, отриманих за допомогою Wolfram|Alpha, не можна відповісти на питання про множину розв'язків даного рівняння. Ми приходимо до таких же висновків, використовуючи пакети SageMath і Maxima (рис. 9).

Проаналізуємо задачу, використовуючи СКМ GRAN1. Побудуємо графіки функцій

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x + a - 1}$$

та

$$g(x) = \frac{5a}{(x + a - 1)(x + 1)}$$

для конкретних значень параметра a . Для цього позначимо параметр a через $p1$ (назва параметра за замовченням). Зміна значень параметра $p1$, наприклад, від -5 до 5 з кроком 0.1 (ці значення встановлюються за замовченням) призводить до відповідної зміни форми графіків зазначених функцій.

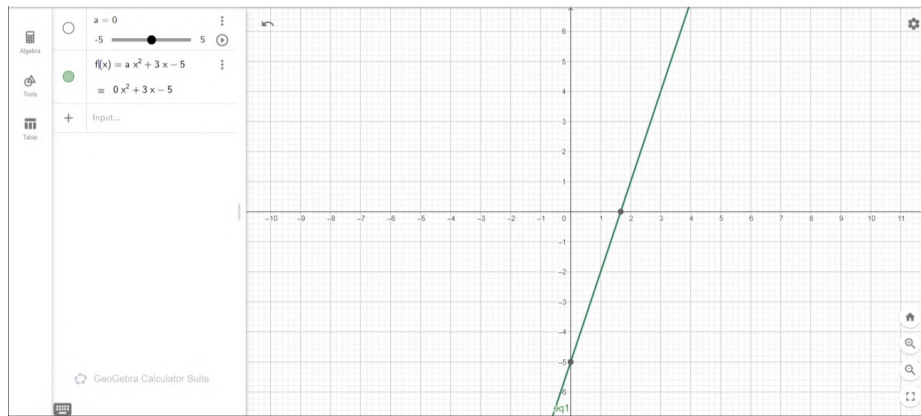


Рис. 6.

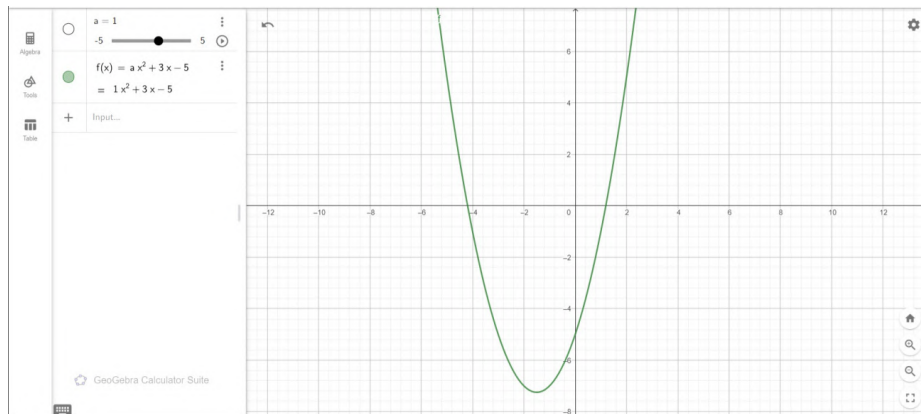


Рис. 7.

Розв'язки рівняння (3) є абсцисами точок перетину графіків функцій $f(x)$ та $g(x)$. Оскільки для значень параметра $p1$ від -4.9 до -3.1, від -2.9 до -0.1 та від 0.1 до 5 графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$ перетинаються у двох точках, то рівняння (3) для таких $p1$ має два розв'язки (рис. 10).

Якщо $p1 = -5$, то візуально графіки функцій перетинаються в одній точці, що є виключним випадком для рівняння (3), оскільки воно, взагалі кажучи, зводиться до квадратного рівняння, а тому за певних умов має два дійсні розв'язки. Тому доцільно параметр $p1$ розглядати, наприклад, від -6 до 5.

Таким чином, враховуючи форму графіків функцій $f(x)$ та $g(x)$ для $p1 = -5.2$, $p1 = -5.1$, $p1 = -4.9$ та $p1 = -4.8$ і зважаючи на те, що навіть при збільшенні масштабу для $p1 = -5$ не можна отримати чіткої відповіді про кількість коренів рівняння (3) (рис. 11), приходимо до виснов-

 **WolframAlpha** computational intelligence.

solve $(1-3/(x+a-1)-(5*a)/((x+a-1)*(x+1)),x)$

 NATURAL LANGUAGE
 MATH INPUT
 EXTENDED KEYBOARD
 EXAMPLES
 UPLOAD
 RANDOM

Input interpretation

solve $1 - \frac{3}{x+a-1} - \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)} = 0$ for x

Results ☒ Step-by-step solution

$x = 4$ and $a + 3 \neq 0$

$x = -a - 1$ and $a \neq 0$

Рис. 8.

```
(%i4) solve([1-3/(x+a-1)-(5*a)/((x+a-1)*(x+1))], [x]);
(%o4) [x = -a - 1, x = 4]
sage: solve([1-3/(x+a-1)-(5*a)/((x+a-1)*(x+1))], x)
[x == -a - 1, x == 4]
```

Рис. 9.

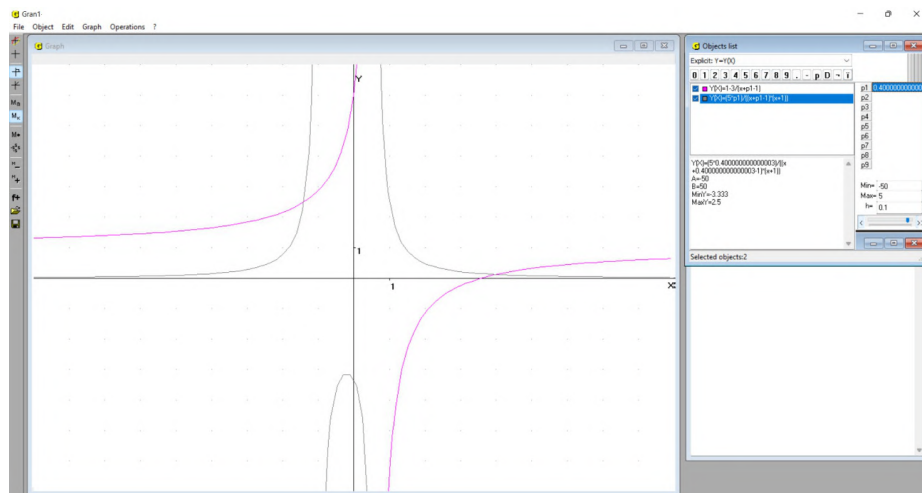


Рис. 10.

ку про необхідність аналітичного дослідження рівняння (3) коли значення параметра a змінюється в околі точки -5 .

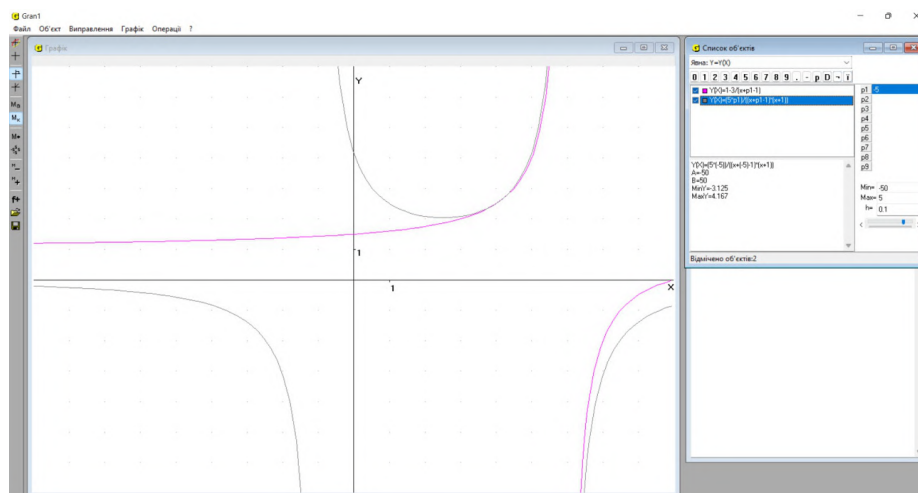


Рис. 11.

У випадку, коли $p1$ дорівнює -3 або 0 графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$ перетинаються в одній точці, тобто рівняння (3) має єдиний розв'язок (рис. 12, 13).

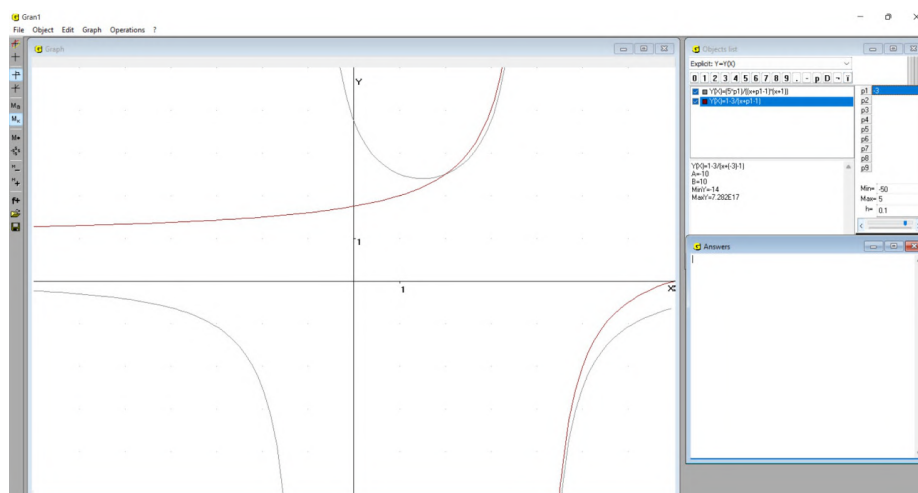


Рис. 12.

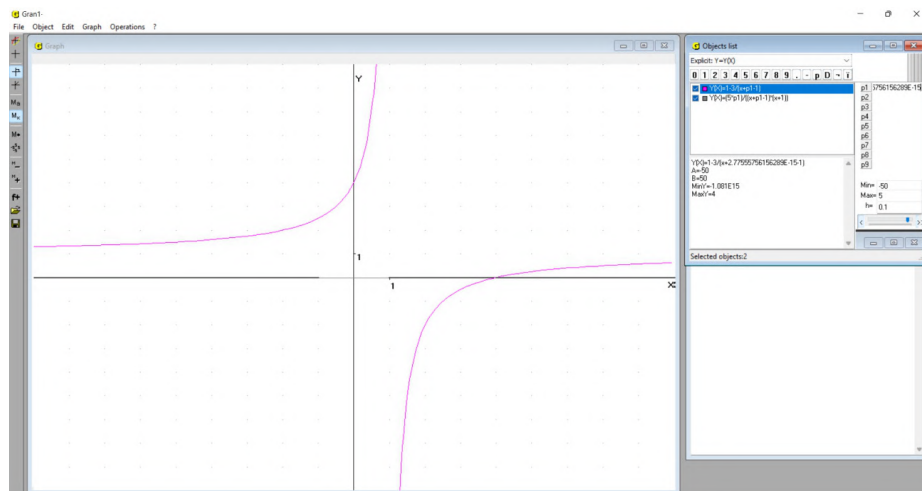


Рис. 13.

Враховуючи неперервність функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відповідних проміжках можна висловити гіпотезу про існування двох розв'язків рівняння (3) для $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; \infty)$ і про існування одного розв'язку рівняння (3) для $a = -5$, $a = -3$ та $a = 0$. Для її підтвердження або спростування, як правило, необхідно провести аналітичне дослідження задачі.

Зрозуміло, що $x \neq -1$, $x \neq 1 - a$. Тоді з рівняння (3) дістаємо

$$(x + a - 4)(x + 1) - 5a = 0$$

$$\text{або } x^2 + x(a - 3) - 4a - 4 = 0.$$

За теоремою Вієта

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -a - 1.$$

З обмежень, накладених на змінну x , випливає, що

$$x_1 \neq -1, \quad x_1 \neq 1 - a, \quad x_2 \neq -1, \quad x_2 \neq 1 - a.$$

Перша та четверта умови очевидні. Тому розглянемо докладніше решту умов. З нерівності $x_1 \neq 1 - a$ дістаємо, що $a \neq -3$. Тобто для $a = -3$ значення $x_1 = 4$ не є коренем заданого рівняння (у цьому випадку коренем буде $x_2 = 2$) (рис. 12). Третя нерівність $x_2 \neq -1$ рівносильна $a \neq 0$. Тому для $a = 0$ коренем рівняння буде $x_1 = 4$ (рис. 13).

Таким чином, якщо $a = -3$, то $x = 2$ (рис. 12), якщо $a = 0$, то $x = 4$ (рис. 13), якщо ж $a \neq -3$ і $a \neq 0$, то $x = 4$ або $x = -a - 1$ (рис. 10).

Отже, запропонована раніше гіпотеза про кількість коренів рівняння (3) частково підтвердилась.

На рисунках 10–12 значення параметра відповідно дорівнює 0, 4; -5 та -3 . Зазначимо, що добір значення параметра також можна здійснювати

за допомогою бігунка. При цьому один і той же малюнок може містити зображення графіків функцій, які відповідають різним фіксованим значенням параметра.

Як відомо, існує дещо інший підхід до побудови геометричної інтерпретації задачі (3). А саме, потрібно знайти точки перетину графіка функції

$$h(x) = 1 - \frac{3}{x+a-1} - \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}$$

для різних значень параметра a з віссю абсцис. Зрозуміло, що розв'язування такої задачі з використанням відповідних програмних засобів за складністю аналогічне до наведеного вище. На рис. 14 побудовано графік функції $h(x)$ за умови, що $a = 0,4$. У цьому випадку графік функції $h(x)$ перетинає вісь абсцис у двох точках, тобто рівняння (3) має два розв'язки.

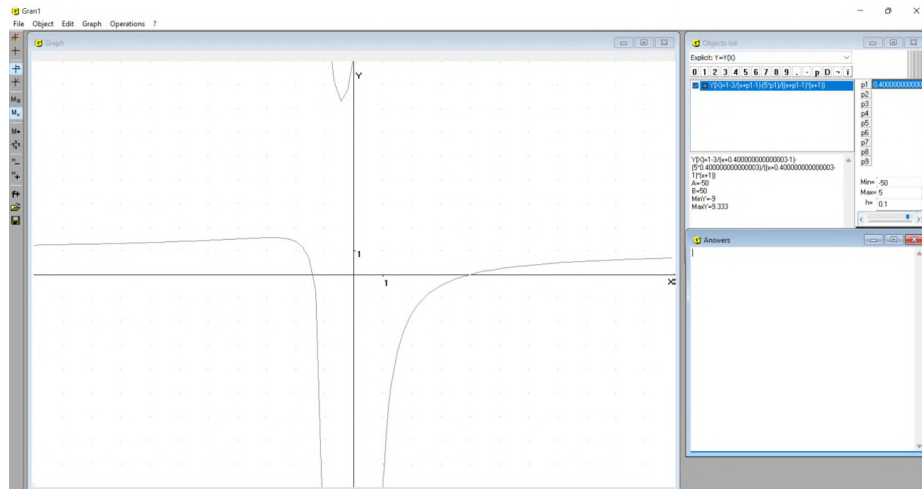


Рис. 14.

Зазначимо, що використання вказаного підходу до розв'язування задач з параметрами може призвести до більш адекватної геометричної інтерпретації задачі. Так, для $a = -5$ графік функції $h(x)$ в точці з абсцисою $x = 4$ дотикається до осі абсцис (рис. 15).

Це означає, що

$$h(4) = 0, \quad h'(4) = 0,$$

тобто рівняння

$$h(x) = 0,$$

а тому і рівняння (3) має два однакові корені $x = 4$. Справді, за побудовою

$$h(x) = (x-4)^2 \tilde{h}(x), \quad \tilde{h}(4) \neq 0.$$

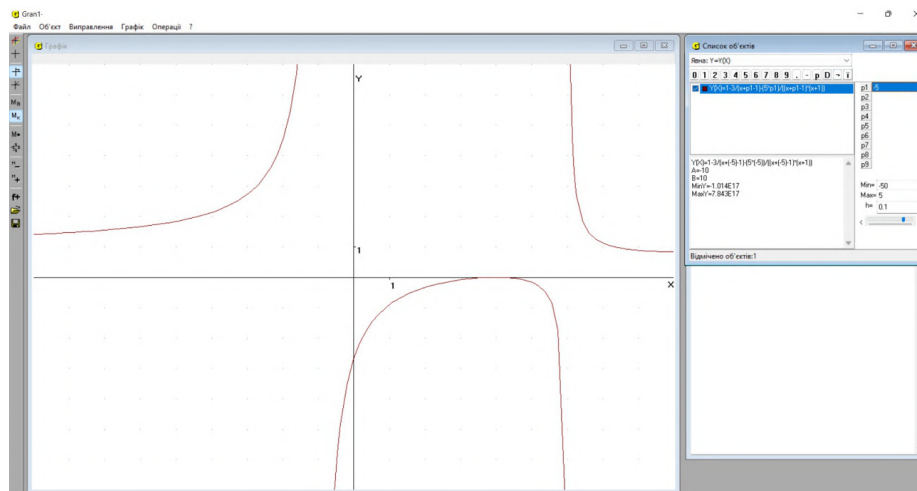


Рис. 15.

4. Знайти кількість коренів рівняння

$$a^x = \log_a x. \quad (4)$$

У даному випадку для графічних ілюстрацій використовуємо програмний засіб GeoGebra. Побудуємо графіки функцій $f(x) = a^x$ та $g(x) = \log_a x$ для конкретних значень параметра a . Збільшуючи значення параметра a від 0 з кроком 0.1 приходимо до висновку – якщо параметр a набуває значень від 0.1 до 0.9, то рівняння (4) має один корінь, від 1.1 до 1.4 – рівняння (4) має два корені, і нарешті, якщо значення параметра більше 1.4, то рівняння (4) коренів не має.

Зрозуміло, що використання лише графічного способу розв'язання рівняння (4) не дозволяє не лише зробити правильний висновок про кількість коренів рівняння для $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, але й не дозволяє висловити адекватну гіпотезу про довжину проміжків зміни параметра a , де рівняння (4) має однакову кількість коренів. І ситуацію не покращує суттєве зменшення кроку зміни параметра a , оскільки значення параметра, при переході через які відбувається зміна кількості коренів рівняння (4) є трансцендентними числами.

Тому необхідним є аналітичне дослідження задачі.

За умовою задачі $x \in (0; \infty)$ та $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$. Нехай спочатку $a \in (1; \infty)$. Знайдемо точку дотику A графіків функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$. Зрозуміло, що абсциса точки дотику буде розв'язком рівняння (4). Оскільки зазначені функції є взаємнооберненими, то їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$. Враховуючи строгу монотонність функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ і незмінність типу опуклості їх графіків приходимо до висновку, що якщо точка дотику графіків цих функцій існує, то вона є єдиною і міститься на прямій $y = x$ (рис. 16).

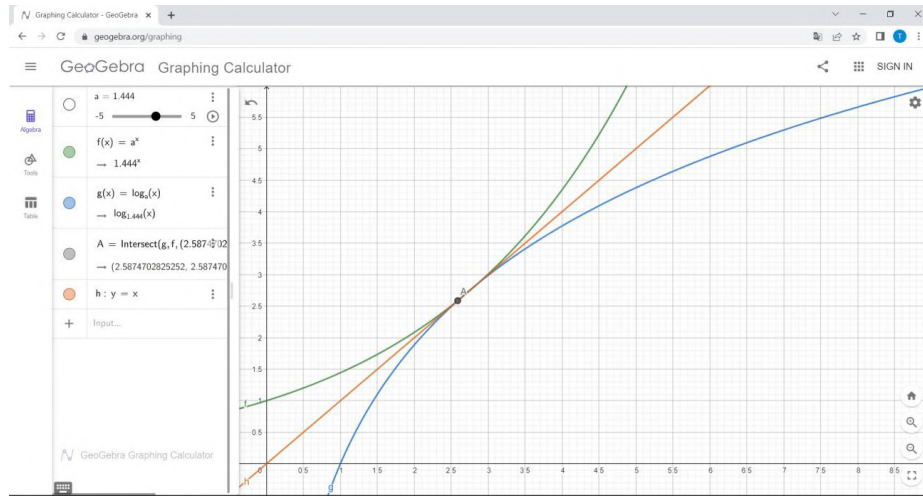


Рис. 16.

Як відомо, координати точки дотику графіків функцій $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x) = \psi(x), \\ \varphi'(x) = \psi'(x), \end{cases}$$

яка у нашому випадку набуде вигляду

$$\begin{cases} a^x = x, \\ a^x \ln a = 1. \end{cases}$$

Звідси дістаємо $a = \sqrt[e]{e}$, $A(e, e)$.

Припустимо, що $a > \sqrt[e]{e}$. Тоді графіки функцій $y = a^x$ та $y = x$ не перетинаються, тобто рівняння (4) не має розв'язків (рис. 17).

Справді, позначимо через $h(x) = a^x - x$, $x \geq 0$. Тоді

$$h'(x) = a^x \ln a - 1$$

і $x = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}$ є стаціонарною точкою функції $h(x)$. Оскільки

$$h''(x) = a^x \ln^2 a > 0, \quad x \geq 0,$$

то $x = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}$ точка мінімуму функції $h(x)$.

Враховуючи, що

$$h(0) = 1 > 0$$

і

$$h\left(-\frac{\ln \ln a}{\ln a}\right) = \frac{1 + \ln \ln a}{\ln a} > 0, \quad a > \sqrt[e]{e},$$

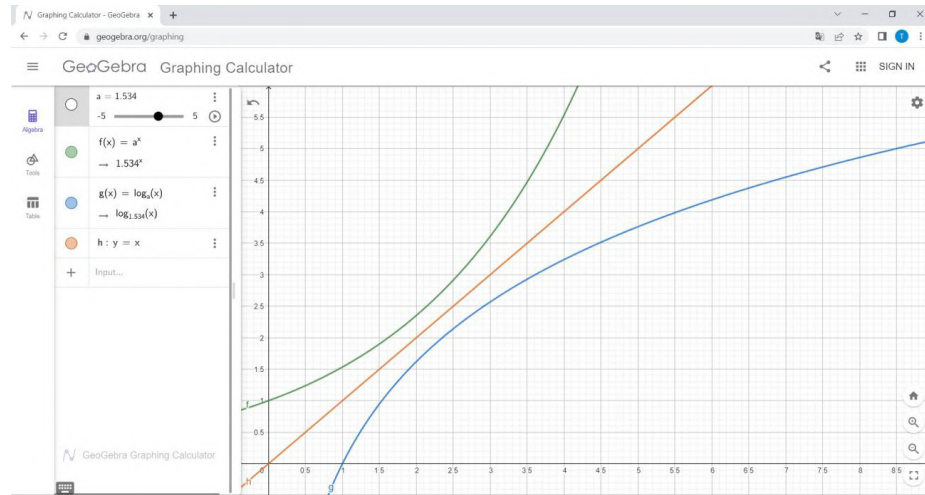


Рис. 17.

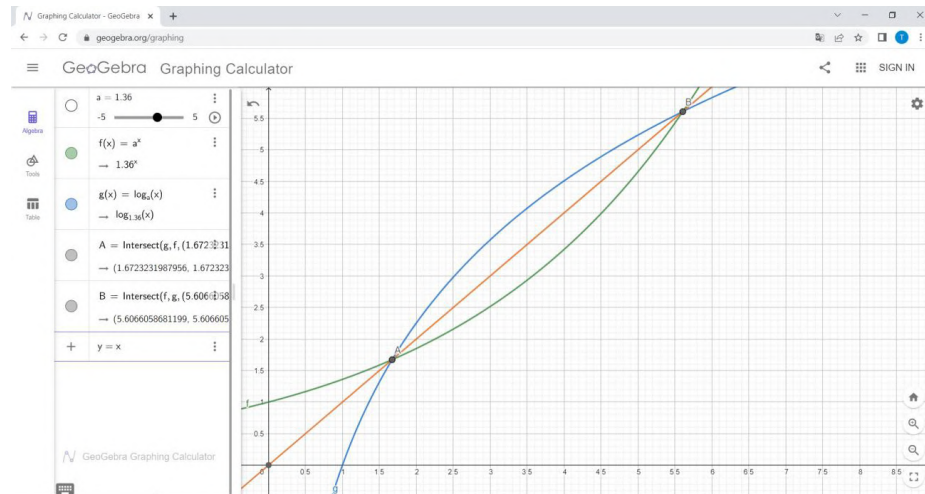


Рис. 18.

то $h(x) > 0$, $x \geq 0$, тобто $a^x > x$, $x \geq 0$.

Нехай тепер $1 < a < \sqrt[e]{e}$. Тоді рівняння (4) має два розв'язки.

Справді, визначаючи як і раніше функцію $h(x)$, дістаємо

$$h(0) = 1 > 0, \quad h\left(-\frac{\ln \ln a}{\ln a}\right) < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Оскільки точок перегину графіки функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ не мають, то згідно теореми Больцано-Коші, вони перетинаються у двох точках, які до того ж містяться на прямій $y = x$ (рис. 18).

Нехай $0 < a < 1$. Позначимо через $l(x) = \log_a x - a^x$, $a \in [a_0; 1)$, де a_0 буде визначено нижче. Дослідимо функцію $l(x)$ на монотонність:

$$l'(x) = \frac{1 - xa^x \ln^2 a}{x \ln a}.$$

Значення a_0 підберемо так, щоб $l'(x) \leq 0$, $x \in (0; \infty)$. Оскільки $x \ln a < 0$, $x \in (0; \infty)$, $a \in (0; 1)$, то $l'(x) \leq 0$, $x \in (0; \infty)$, тоді і тільки тоді, коли

$$1 - xa^x \ln^2 a \geq 0, \quad x \in (0; \infty).$$

Підберемо a_0 так, щоб

$$1 - xa^x \ln^2 a \geq 0, \quad x \in (0; \infty), \quad a \in [a_0; 1).$$

Позначимо через $m(x) = xa^x \ln^2 a$, $x \in (0; \infty)$ і дослідимо $m(x)$ на екстремум. Обчислюючи

$$m'(x) = a^x \ln^2 a (1 + x \ln a),$$

$$m''(x) = a^x \ln^3 a (2 + x \ln a),$$

переконуємось, що стаціонарна точка $x = -\frac{1}{\ln a}$ функції $m(x)$ є точкою максимуму.

Оскільки

$$m(0) = 0$$

і

$$m\left(-\frac{1}{\ln a}\right) = -\frac{1}{e} \ln a \leq -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e^e} = 1, \quad a \in \left[\frac{1}{e^e}; 1\right),$$

то $a_0 = \frac{1}{e^e}$.

Таким чином, $l'(x) \leq 0$, $x \in (0; \infty)$, і точки, де $l'(x) = 0$ не утворюють відрізка. Тому функція $l(x)$, $x \in (0; \infty)$, $a \in [\frac{1}{e^e}; 1)$ є спадною. Отже, рівняння (4) має один розв'язок (рис. 19).

Нехай нарешті $a \in (0; \frac{1}{e^e})$. У цьому випадку рівняння (4) має три розв'язки (рис. 20).

Справді, графіки функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ перетинаються в деякій точці прямої $y = x$. Позначимо абсцису цієї точки через x_0 . Зрозуміло, що $x = x_0$ є розв'язком рівняння (4). Розглянемо інтервал $(0; x_0)$. Зазначимо, що $\lim_{x \rightarrow 0+} l(x) = +\infty$. Визначимо знак числа $l(x_0 - \varepsilon)$, де ε – достатньо мала додатна стала.

$$\begin{aligned} l(x_0 - \varepsilon) &= \log_a(x_0 - \varepsilon) - a^{x_0 - \varepsilon} = \log_a\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_0}\right) + \log_a x_0 - a^{x_0} a^{-\varepsilon} = \\ &= x_0 + \frac{1}{\ln a} \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_0}\right) - x_0 a^{-\varepsilon} = \frac{1}{\ln a} \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_0}\right) - x_0 (a^{-\varepsilon} - 1) = \end{aligned}$$

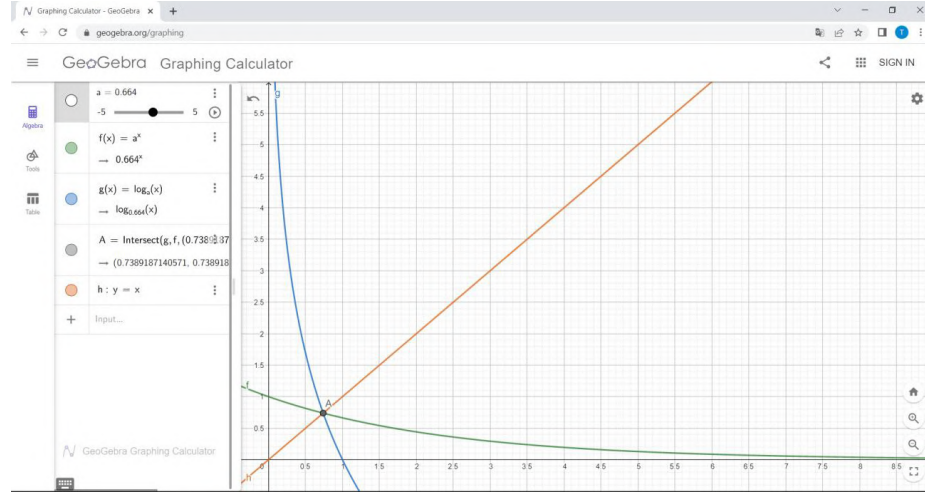


Рис. 19.

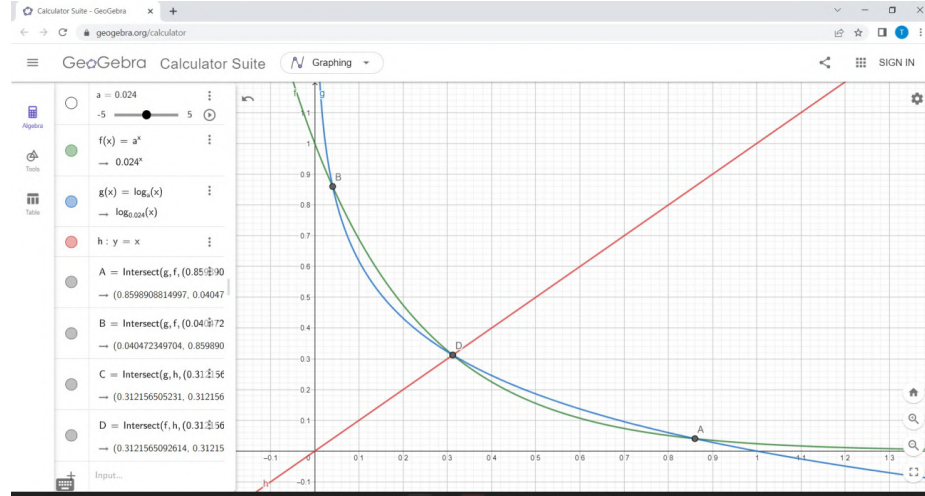


Рис. 20.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\ln a} \left(-\frac{\varepsilon}{x_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{x_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{x_0} \right)^3 - \dots \right) - x_0(-\varepsilon \ln a + O(\varepsilon^2)) \leq \\
 &\leq -\frac{1}{\ln a} \left(\frac{\varepsilon}{x_0} + \left(\frac{\varepsilon}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{x_0} \right)^3 + \dots \right) - x_0(-\varepsilon \ln a + O(\varepsilon^2)) = \\
 &= \varepsilon \left(-\frac{1}{(x_0 - \varepsilon) \ln a} + x_0 \ln a \right) + O(\varepsilon^2) < 0,
 \end{aligned}$$

оскільки нерівність

$$-\frac{1}{x_0 \ln a} + x_0 \ln a < 0 \quad (5)$$

є правильною для всіх $a \in (0; \frac{1}{e^e})$. Справді, нерівність (5) рівносильна нерівності

$$x_0^2 \ln^2 a > 1$$

або

$$\ln^2 x_0 > 1,$$

тобто $x_0 \in (0; \frac{1}{e}) \cup (e; \infty)$.

Оскільки $x = \frac{1}{e}$ є розв'язком рівняння

$$\log_{\frac{1}{e^e}} x = x,$$

то розв'язок рівняння

$$\log_a x = x$$

менший за $\frac{1}{e}$, якщо $0 < a < \frac{1}{e^e}$. А тому $x_0 \in (0; \frac{1}{e})$, тобто нерівність (5) правильна.

Таким чином, згідно теореми Больцано-Коші рівняння (4) в інтервалі $(0; x_0)$ має розв'язок. Із міркувань симетрії, враховуючи незмінність типу опуклості графіків функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$, впливає, що для $a \in (0; \frac{1}{e^e})$ рівняння (4) має три розв'язки.

Підсумовуючи проведений аналіз приходимо до висновку. Рівняння (4) має три розв'язки, якщо $a \in (0; \frac{1}{e^e})$, два розв'язки, якщо $a \in (1; \sqrt[e]{e})$, один розв'язок, якщо $a \in [\frac{1}{e^e}; 1) \cup \{\sqrt[e]{e}\}$ і не має розв'язків, якщо $a \in (\sqrt[e]{e}; \infty)$.

Системи комп'ютерної математики можна використовувати для якісного аналізу задач з параметрами. Розглянемо наступну задачу.

5. Знайти значення параметрів a та b , для яких рівняння

$$\sin x = ax + b \quad (6)$$

має два розв'язки.

Зрозуміло, що розкладаючи функцію $y = \sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

який збігається в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, рівняння (6) можна записати наступним чином

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = ax + b. \quad (7)$$

Для наближеного розв'язання рівняння (7) розглядаємо рівняння вигляду

$$\sum_{k=1}^p \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = ax + b, \quad (8)$$

де вже вираз в лівій його частині є многочленом. Значення номера p визначається заданою точністю. Рівняння (8) містить многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами. Тому воно має непарну кількість дійсних коренів. Тобто, на перший погляд, задача 5 не має розв'язку.

Для більш детального якісного аналізу задачі 5 скористаємось програмним засобом GRAN1. Рівняння (6) матиме два розв'язки, якщо графіки функцій $y = \sin x$ та $y = ax + b$ перетинатимуться у двох точках. Зрозуміло, що одна з цих точок є точкою дотику графіків цих функцій (рис. 21).

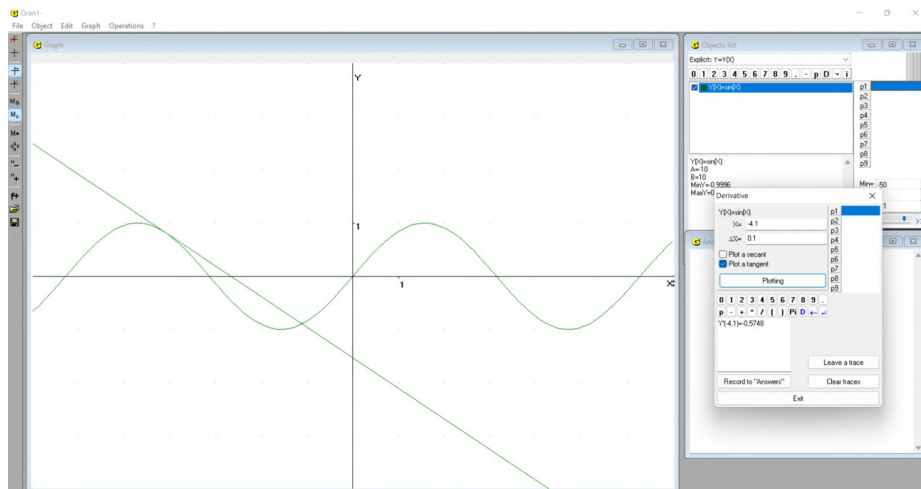


Рис. 21.

У програмі GRAN1 є можливість побудови дотичної до кривої в заданій точці. При цьому абсцису точки дотику можна вважати параметром. Поступова зміна значення параметра призводить до зміни положення дотичної. Таким чином можна візуально визначати кількість коренів рівняння (6). Отже, за яких значень параметрів a та b рівняння (6) має два розв'язки?

Нехай в точці з абсцисою x_1 графіки функцій $y = \sin x$ та $y = ax + b$ дотикаються. Припускатимемо також, що $a < 0$ і $x_1 < -\frac{b}{a}$ (рис. 22).

Оскільки

$$\begin{cases} \sin x_1 = ax_1 + b, \\ \cos x_1 = a, \end{cases}$$

то, використовуючи основну тригонометричну тотожність, дістаємо

$$x_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Таким чином,

$$\cos\left(-\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = a. \quad (9)$$

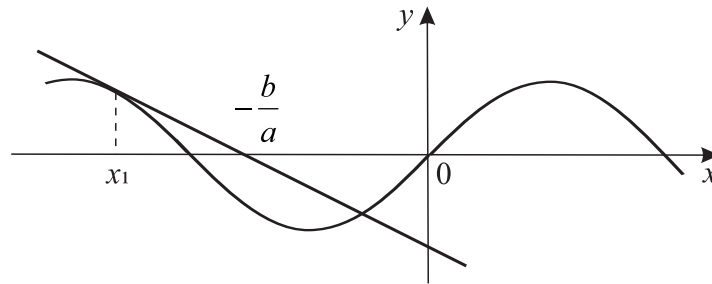


Рис. 22.

Зазначимо, що правильне і обернене твердження. А саме, з виконання умови (9) випливає, що в точці з абсцисою

$$x_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

графіки функцій $y = \sin x$ та $y = ax + b$ дотикаються.

За побудовою існує таке $n \in \mathbb{Z}$, що

$$-\pi + 2\pi n < -\frac{b}{a} < 2\pi n. \quad (10)$$

Тоді, при виконанні умови (9) рівняння (6) в інтервалі $(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n)$ має два розв'язки.

Нехай тепер $x_1 > -\frac{b}{a}$ (рис. 23).

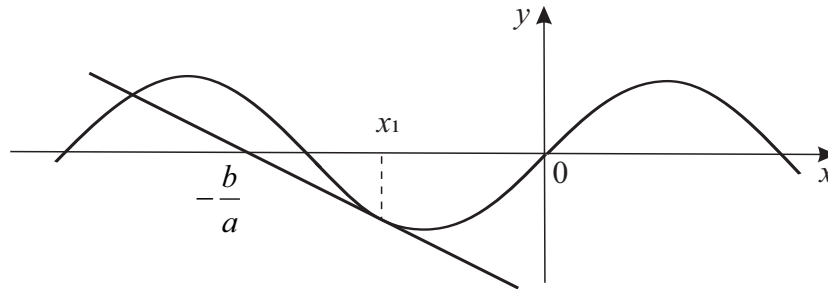


Рис. 23.

Тоді якщо

$$\cos\left(-\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = a, \quad (11)$$

то рівняння (6) в інтервалі $(2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, де $n \in Z$ визначається з нерівностей

$$2\pi n < -\frac{b}{a} < \pi + 2\pi n, \quad (12)$$

має два розв'язки. При цьому абсциса точки дотику

$$x_1 = -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Випадок $a > 0$ розглядається аналогічно. Нехай $x_1 > -\frac{b}{a}$. Тоді якщо виконується умова (9) то рівняння (6) в інтервалі $(-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, де $n \in Z$ визначається з нерівностей (10), має два розв'язки.

Якщо ж $x_1 < -\frac{b}{a}$, то при виконанні умови (11) рівняння (6) в інтервалі $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, де $n \in Z$ визначається з нерівностей (12), також має два розв'язки.

Зазначимо, що отримані результати про існування двох розв'язків рівняння (6) або рівносильного до нього рівняння (7) жодним чином не суперечать тому, що рівняння (8) парної кількості дійсних розв'язків не має. Рівняння (6) на відміну від (8) є трансцендентним і властивості функції $y = \sin x$ (обмеженість, монотонність, опуклість) суттєво відрізняються від відповідних властивостей многочлена $\sum_{k=1}^p \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

3 Результати дослідження

Підсумовуючи результати розгляду відповідних задач, вкажемо функції програмних засобів, використання яких значно спрощує процес розв'язування задач з параметрами.

Для графічного аналізу властивостей розв'язків задач з параметрами, як правило, необхідно побудувати графіки відповідних функцій. При цьому досить часто умови задач формулюються так, що записати відповідну функцію в явному вигляді або недоцільно з огляду на її громіздкий аналітичний вираз, або взагалі неможливо. Більше того, навіть у випадку, коли можливе явне задання функції, часто зручніше використовувати її неявне задання, наприклад, за умови, що відповідна функція є суперпозицією великої кількості функцій і, як наслідок, побудова її графіку за допомогою перетворень графіків основних елементарних функцій є недостатньо наочною. Тому необхідно мати можливість побудувати графік неявно заданої функції.

У задачах з параметрами форма графіка функції може змінюватися при кожній зміні значення параметра, тому повинна бути можливість побудови графіка функції для різних значень параметра. Є задачі, в яких властивості функції змінюються при досить невеликих змінах параметра, а в інших – це відбувається при значних змінах значень параметра. Зміна кроку зміни параметра є зручною функцією програм, що використовуються в процесі розв'язування таких задач. Для більш точного визначення інтервалів зміни

властивостей функції при різних значеннях параметрів можна також використовувати зміну масштабу координатних осей, і це наступна функція, яку повинна мати програма, що використовується в процесі розв'язування задач з параметрами.

Часто для визначення кореня рівняння необхідно побудувати дотичну або нормаль до графіка функції в заданій точці або знайти точку перетину кривих. Зрозуміло, що здебільшого це можна зробити аналітично, використовуючи відповідні математичні інструменти. Водночас, якщо мова йде про оцінку інтервалу зміни значення параметра, на якому відповідне рівняння має певну кількість коренів, або про наближене значення кореня, то зручно, коли за допомогою програмного забезпечення можна виконувати відповідні конструкції в автоматичному режимі.

Зазначимо, що розглянуті функції програм реалізуються без додаткового створення програмних кодів у системах комп'ютерної математики.

У таблиці 1 висвітлено наявність програмних функцій деяких СКМ, які, на нашу думку, необхідні для графічного аналізу розв'язування задач з параметрами.

Табл. 1. Функції програм для графічного аналізу розв'язування задач з параметрами.

Функції програм	GRAN1	GeoGebra	Wolfram Alpha	SageMath	Maxima
Побудова графіка функції заданої в явному вигляді	+	+	+	+	+
Побудова графіка функції заданої в неявному вигляді	+	+	+	-	+
Використання параметра в аналітичному записі функції	+	+	-	-	+
Автоматична зміна графіка функції в залежності від значення параметра	+	+	-	-	+
Побудова дотичної до кривої в точці	+	+	+	-	-
Побудова нормалі до кривої в точці	+	+	+	-	-
Можливість зміни кроку зміни параметра	+	+	-	-	+
Визначення координат перетину графіків кривих	+	+	+	-	-
Знаходження аналітичного розв'язку	-	-	+	+	+

Таким чином, із перелічених програмних засобів для розв'язування задач з параметрами доцільно використовувати, перш за все, GRAN1 та GeoGebra. Для аналітичного розв'язання можна використовувати Wolfram|Alpha, SageMath, Maxima, але при цьому отримані відповіді не завжди коректні.

4 Висновки

При розв'язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем часто виникає необхідність побудувати графіки відповідних функцій. У разі неявного або параметричного задання функцій процес побудови їх графіків досить складний. Завдання стає ще більш громіздким, якщо воно містить параметр. Тому ці проблеми часто намагаються розв'язати за допомогою різних програмних засобів.

У даній праці обґрунтовується доцільність використання систем комп'ютерної математики для розв'язування задач з параметрами. Проаналізовано такі вільно поширювані програми, як GeoGebra, Wolfram|Alpha, SageMath, Maxima та GRAN1. Розроблено критерії вибору програмного забезпечення та проведено порівняльний аналіз зазначених програмних засобів для розв'язування задач з параметрами, згідно з яким можна рекомендувати використовувати, насамперед, GRAN1 і GeoGebra. У програмі GRAN1 є можливість запису формули функції із позначенням параметрів через змінні $p_1, p_2, \dots, p_{10}$. При цьому зміна параметра може відбуватись, як за допомогою присвоєння йому певного значення, так і за допомогою бігунка. У процесі зміни значень параметра відбувається автоматична побудова графіка функції з врахуванням оновлених значень параметра. Аналогічні функції притаманні програмі GeoGebra. Лише потрібно визначити змінні через які позначаються параметри.

Використовуючи автоматичну зміну форми графіка за різних значень параметра, зміну кроку зміни значення параметра, зміну масштабу для перегляду графіку функції або його фрагменту, автоматичне визначення координат точки перетину графіків функцій у роботі встановлено умови сумісності геометричного характеру ілюстративних задач з параметром та наведено їх аналітичні розв'язки. При цьому для геометричної підтримки процесу розв'язування вказаних задач, як вже зазначалось вище, використовувались системи комп'ютерної математики GRAN1 і GeoGebra. Зазначені програмні засоби є однаково зручними для застосування в процесі розв'язування задач з параметрами.

Для отримання повної правильної відповіді необхідно проаналізувати аналітичні та графічні розв'язки задачі, отримані за допомогою систем комп'ютерної математики. Результати аналізу побудованих графіків функцій можуть бути джерелом припущень щодо результатів розв'язання задачі. І навпаки, геометричну інтерпретацію задачі часто можна використовувати як критерій правильності її аналітичного розв'язання. Незважаючи на те, що для ілюстративних задач зазвичай можна доволі просто знайти аналітичні розв'язки, все ж доцільно дати геометричну інтерпретацію задачі та проаналізувати отримані результати, що підтверджується прикладами, розглянутими в цій праці.

На підтвердження наших міркувань і висновків можна навести слова розробників Wolfram|Alpha. Автори вважають, що мета домашнього завдання учнів полягає не в тому, щоб навчитися виконувати обчислення, а в тому, щоб навчитися знаходити і розуміти відповідь задачі, незалежно від того,

як виконуються обчислення. Не можна очікувати, що в сучасному технологічно насиченому світі учні зможуть відразу застосувати достатні знання з математики в практичних задачах новітніх важливих для суспільства галузей науки і техніки. Але знання того, як сформулювати запит і провести аналіз для отримання правильної відповіді за допомогою комп'ютера, допоможе зрозуміти і використовувати математику. Якщо учні роблять це, за словами розробників WolframAlpha, вони просто попереду в навчанні [4].

References

- [1] Maxima, a Computer Algebra System (November 2023), URL <https://maxima.sourceforge.io>
- [2] SageMath - Open-Source Mathematical Software System (November 2024), URL <https://www.sagemath.org/>
- [3] Bhagat, K.K., Chang, C.Y.: Incorporating GeoGebra into Geometry learning-A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* **11**, 77–86 (2015), URL <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1307a>
- [4] Biddle, P.: AI Is Making It Extremely Easy for Students to Cheat (2017), URL <https://www.wired.com/story/ai-is-making-it-extremely-easy-for-students-to-cheat/>
- [5] Botuzova, Y.V.: Parametric tasks in the context of STEM-education. In: Tarasenkova, N. (ed.) *Problems of mathematics education: materials of the international scientific and methodological conference*, pp. 237–238, Gordijenko, Cherkasy (2019), URL <https://dspace.cusu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/b284c082-d0ce-4098-918d-3d89045b4bbe/content>
- [6] Božić, R., Takači, Đ., Stankov, G.: Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments* **29**, 655–669 (2021), <https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1602842>, URL <https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1602842>
- [7] Fuchs, K.J.: Computer algebra systems in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **35**, 20–23 (Feb 2003), <https://doi.org/10.1007/BF02652762>, URL <https://doi.org/10.1007/BF02652762>
- [8] Gonda, D.: Analysis of the causes of low achievement levels in solving problems with parameter. *European Journal of Education Studies* **4**, 339–354 (2018), URL <https://oapub.org/edu/index.php/ejes/article/view/1558>
- [9] Gonda, D., Tirpakova, A.: A new teaching method aimed at eliminating the causes of students' unsuccessful algorithmic problem solving with parameter. *Problems of Education in the 21st Century* **76**, 499–519 (Aug 2018), <https://doi.org/10.33225/pec/18.76.499>, URL <https://doi.org/10.33225/pec/18.76.499>
- [10] Gornshhteyn, P.I., Polonskyi, V.B., Yakir, M.S.: Tasks with parameters. *Tekst*, Kyiv (1992), URL <https://www.at.alleng.org/d/math/math269.htm>

- [11] Hašek, R.: Dynamic Geometry Software Supplemented with a Computer Algebra System as a Proving Tool. *Mathematics in Computer Science* **13**(1), 95–104 (Jun 2019), <https://doi.org/10.1007/s11786-018-0369-x>, URL <https://doi.org/10.1007/s11786-018-0369-x>
- [12] Hohenwarter, M., Fuchs, K.: Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In: *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference*, pp. 1–6 (2004), URL <https://www.researchgate.net/publication/228398347>
- [13] Horoshko, Y., Pidhorna, T., Samusenko, P., Tsybko, H.: Computer Mathematics Systems and Tasks with Parameters. In: *Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology*, pp. 768–780, SCITEPRESS - Science and Technology Publications (2023), <https://doi.org/10.5220/0012067700003431>, URL <https://doi.org/10.5220/0012067700003431>
- [14] Horoshko, Y.V., Pokryshen, D.A.: Wolfram|alpha knowledge system. *Scientific journal of National Pedagogical Dragomanov University. Computer-based learning systems* **13**(20), 96–101 (2012), URL <https://sj.udu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/326>
- [15] İlhan, E.: Introducing parameters of a linear function at undergraduate level: use of geogebra. *Mevlana International Journal of Education (MIJE)* **3**, 77–84 (2013), URL http://web.archive.org/web/20140308041226/http://mije.mevlana.edu.tr/archieve/issue_3_3/8_miye_si_2013_08_volume_3_issue_3_page_77_84_PDF.pdf
- [16] Kobylnyk, T., Kohut, U.P., Vynnytska, N.: CAS MAXIMA as a tool for forming research skills in the process of pre-service informatics teachers training. *Information Technologies and Learning Tools* **80**, 58–74 (2020), URL <https://doi.org/10.33407/itlt.v80i6.3801>
- [17] Kramarenko, T.H.: Some methodical aspects of solving tasks with parameters. *Scientific journal of National Pedagogical Dragomanov University. Computer-based learning systems* **2**(9), 170–177 (2005), URL <https://sj.udu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/721>
- [18] Kramarenko, T.H., Korolskyi, V.V., Semerikov, S.O., Shokaliuk, S.V.: Innovative information and communication technologies for teaching mathematics. *Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih*, 2 edn. (2019), URL <https://doi.org/10.31812/123456789/3315>
- [19] Kuzmina, N.M., Samusenko, P.F., Kuzmin, A.V.: About some aspects of the organization of students individual work at pedagogical universities in the process of teaching classical optimization methods. *Journal of Physics: Conference Series* **2288**, 012009 (2022), URL <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012009>
- [20] Pokryshen, D.A.: Learning information technologies when solving mathematical tasks with parameters. *Scientific journal of National Pedagogical Dragomanov University. Computer-based learning systems* **5**(12), 136–141 (2007), URL <https://sj.udu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/616>

- [21] Prus, A.V., Shvets, V.O.: Tasks with parameters in the school mathematics course. *Ruta, Zhytomyr* (2016), URL <http://eprints.zu.edu.ua/20630/>
- [22] Watson, A., Chick, H.: Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM* **43**(2), 283–294 (May 2011), <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0301-6>, URL <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0301-6>
- [23] Wolfram Alpha LLC: Wolfram|Alpha: Computational Intelligence (November 2024), URL <https://www.wolframalpha.com/>
- [24] Yohannes, A., Chen, H.L.: GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments* **31**, 5682–5697 (2023), URL <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861>
- [25] Zakirova, V.G., Zelenina, N.A., Smirnova, L.M., Kalugina, O.A.: Methodology of Teaching Graphic Methods for Solving Problems with Parameters as a Means to Achieve High Mathematics Learning Outcomes at School. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education* **15**, em1741 (2019), URL <https://doi.org/10.29333/ejmste/108451>
- [26] Zhaldak, A.V.: Computerized analysis of functions and equations with parameters. *Scientific journal of National Pedagogical Dragomanov University. Computer-based learning systems* **18**(25), 111–124 (2016), URL <https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/18933>
- [27] Zhaldak, M.I., Franchuk, V.M., Franchuk, N.P.: Some applications of cloud technologies in mathematical calculations. *Journal of Physics: Conference Series* **1840**, 012001 (mar 2021), <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012001>, URL <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012001>
- [28] Zhaldak, M.I., Morze, N.V., Ramskyi, Y.S., V., H.Y., Tsybko, H.Y., Vynnychenko, Y.F., Kostyuchenko, A.O.: In memory of Andrii Viktorovych Penkov. *Scientific journal of National Pedagogical Dragomanov University. Computer-based learning systems* **18**(25), 170–173 (2016), URL http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_2_2016_18_27