



**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКИЙ
КОЛЕГІУМ» ІМЕНІ Т.Г. ШЕВЧЕНКА**

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики

М. М. Нак

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник

Чернігів – 2025

УДК 512.64+514](075.8)

Н21

Рецензенти:

Наталія Майбородіна – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут».

Олена Антоненко – вчитель математики вищої категорії, старший вчитель Гончарівського ліцею імені героя АТО Дмитра Степанченка Гончарівської селищної ради.

Н 21 Нак М. М. Вища математика: Ч. І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2025. 112 с.

УДК 512.64+514](075.8)

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з курсу «Вища математика», приклади розв'язування типових завдань і завдання для самостійного опрацювання. Укладено на основі курсів, які автор веде на природничо-математичному факультеті Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. Він може бути корисним студентам як денної, так і заочної форм навчання.

*Рекомендовано до друку
вченою радою природничо-математичного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка
(протокол №7 від 29.12.2025 року)*

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
1. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	5
1.1. Матриці. Дії над матрицями	5
1.2. Визначники, їх обчислення	9
1.3. Обернена матриця. Ранг матриці	13
1.4. Системи лінійних рівнянь (СЛР) та способи їх розв'язування	15
1.5. Поле комплексних чисел	18
1.6. Приклади розв'язування задач	24
1.7. Завдання для самостійного опрацювання	40
2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	46
2.1. Системи координат	46
2.2. Вектори та операції над ними	51
2.3. Множення векторів	53
2.4. Лінійно-залежні та лінійно-незалежні системи векторів	57
2.5. Пряма лінія на площині	58
2.6. Криві другого порядку на площині	62
2.7. Площина та пряма в просторі. Різні способи задання	66
2.8. Взаємне розміщення прямих і площин в просторі	70
2.9. Приклади розв'язування задач	73
2.10. Завдання для самостійного опрацювання	87
3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДО ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ	93
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	111

ПЕРЕДМОВА

Кожна професійна діяльність потребує від спеціаліста певних якостей і здібностей. Тому важливим є також адекватний вибір професії у відповідності з нахилами і здібностями людини. Вища математика допомагає розвитку кар'єри в багатьох галузях: інформаційні технології, економічні науки, механічна інженерія, соціальні та поведінкові науки, природничі науки, електрична інженерія, автоматизація та приладобудування, хімія та біоінженерія, медицина та ін.

Навчальний посібник створено на основі лекцій і практичних занять з курсу «Вища математика», проведених для студентів різних спеціальностей.

Мета навчальної дисципліни «Вища математика» – це навчити здобувачів вищої освіти володіти основами сучасного математичного апарату, необхідного для аналізу і розв'язання прикладних технологічних задач, логічному та алгоритмічному мисленню, сприяти формуванню у студентів наукового світогляду.

Основні завдання навчальної дисципліни:

- дати необхідні теоретичні знання з вищої математики та навчити застосовувати їх на практиці;
- сформулювати первинні навички математичного дослідження прикладних задач;
- виробити вміння при розв'язуванні задач самостійно розробляти і використовувати необхідні методи і засоби, а також спеціальну літературу;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне і алгоритмічне мислення, інтуїцію в питаннях застосування математики.

Тому, початковий посібник містить короткі теоретичні відомості з тем курсу, приклади розв'язування типових завдань та завдання для самостійного опрацювання, які можуть бути використані для домашніх завдань. А також в навчальний посібник включено застосування вищої математики в різних галузях. Складається посібник з двох частин: в першій частині подано матеріали з лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії; в другій частині буде розглянуто вступ до математичного аналізу та застосування різних тем курсу до задач практичного змісту.

1. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лінійна алгебра – частина алгебри, що вивчає теорію лінійних рівнянь, теорію визначників, теорію матриць, теорію векторних просторів та лінійних перетворень у них. Лінійна алгебра знаходить застосування практично в кожній галузі математики, включаючи багатовимірне обчислення, диференціальні рівняння та теорію ймовірностей. Вона також широко застосовується в таких галузях, як фізика, хімія, економіка, психологія та інженерія. Ви навіть покладаетесь на методи лінійної алгебри кожного разу, коли використовуєте пошук в Інтернеті, як Google, Глобальну систему позиціонування (GPS) або мобільний телефон.

1.1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмірність*. На першому місці в цьому записі зазначено кількість рядків матриці, а на другому – кількість стовпців. Наприклад, запис матриця 4×7 означає, що в ній чотири рядки і сім стовпців. Для позначення матриць використовують великі букви латинського алфавіту $A, B, C, \dots$, а саму таблицю записують у круглих (іноді квадратних) дужках.

Види матриць:

1. Матриця, яка складається лише з одного рядка $A = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$, називається матрицею-рядком.

Наприклад, $A = (1 \ 3 \ 5 \ -1)$.

2. Матриця, яка має лише один стовпець, називається матрицею-стовпцем.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Матриця називається квадратною, якщо кількість її рядків дорівнює кількості стовпців. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$

Діагональ квадратної матриці, що йде від елемента a_{11} до елемента a_{nn} , називається *головною діагоналлю* матриці.

А діагональ, яка йде від елемента a_{1n} до елемента a_{n1} – *побічною діагоналлю*.

Так, у матриці $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 12 & 1 & -4 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ на головній діагоналі містяться числа 7,1,0.

5. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратна матриця називається *симетричною*.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 10 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця.

6. Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною*.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – трикутна матриця.

7. Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n-1l} & \dots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається ступеневою.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – ступенева матриця.

8. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи крім елементів, які містяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця.

9. Діагональна матриця називається одиничною, якщо елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці:
 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

10. Якщо рядки матриці A замінити стовпцями з однаковими номерами, то отримана матриця називається транспонованою і позначається A^T .

Наприклад, до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ транспонованою є матриця $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Для матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ транспонована матриця $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однакову розмірність і всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою.

Матрицю скорочено записують у вигляді

$$A = (a_{ij}), \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Дії над матрицями

Сумою (різницею) двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

однієї й тієї самої розмірності $m \times n$ називають матрицю C тієї ж самої розмірності, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij} матриць A і B , тобто $C = A \pm B$, якщо $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ для всіх i та j .

$$\text{Тобто } A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад, знайдемо суму матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Обидві матриці мають однакову розмірність 2×2 , тому за означенням $A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Суми матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ не існує (розмірність не однакова).

Добутком матриці $A \stackrel{df}{=} (a_{ij})$ розмірності $m \times n$ на число λ є матриця (λa_{ij}) тієї самої розмірності, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A на число λ , яка позначається λA або $A\lambda$. При цьому λ називається числовим (скалярним) множником, A – матричним множником.

Отже, $\lambda A \stackrel{df}{=} (\lambda a_{ij}) \stackrel{df}{=} A\lambda$.

У розгорнутому вигляді означення множення матриці на число можливо записати так:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \lambda \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

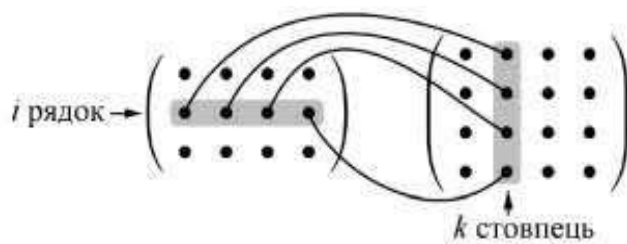
Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\alpha = -3; C = \alpha A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 12 \\ -9 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A=(a_{ik})$ розмірності $m \times p$ на матрицю $B=(b_{jk})$ розмірності $p \times n$ називається така матриця $C = A \cdot B$ розмірності $m \times n$, $C = (c_{ik})$, кожний елемент якої можна знайти за формулою:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{jk}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи k -го стовпця матриці B , тобто за схемою:



В результаті множення отримаємо матрицю розмірності $m \times n$.

1.2. Визначники, їх обчислення

Поняття визначника. Визначники другого і третього порядків, їх властивості. Обчислення визначників

Нехай маємо деяку матрицю, що складається з n рядків та n стовпців:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Поставимо у відповідність даній матриці певне число, яке будемо називати *визначником матриці*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Складемо добуток із n -елементів матриці взятих по одному з кожного рядка і стовпчика.

Визначником (детермінантом) матриці називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків елементів визначника, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця.

Позначають визначник Δ , або $|A|$, або $\det A$.

Якщо матриця A складається з одного числа, то визначник даної матриці ототожнюється з даним числом.

Для визначників другого і третього порядку існують готові правила обчислення, а для визначників порядку вище ніж три, потрібно вибирати свій спосіб обчислення для кожного конкретного визначника.

Визначником другого порядку називається число, яке знаходиться за формулою:

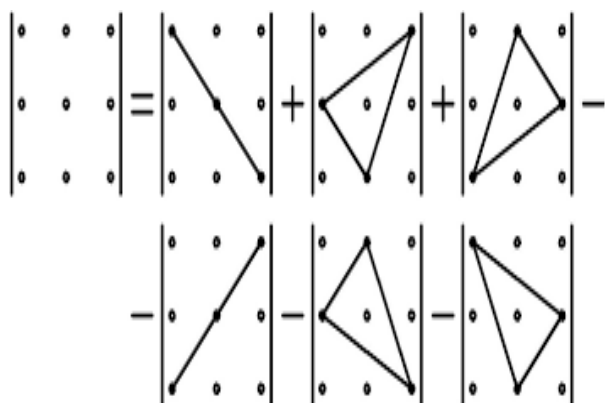
$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для обчислення визначників матриці 3-го порядку застосовують правило Саррюса або трикутника.

Визначники третього порядку можна обчислити за правилом,

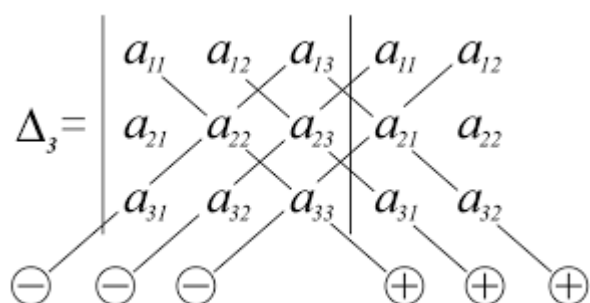
яке називається правилом трикутників
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$



Три перші члени визначника третього порядку є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі ($a_{11}a_{22}a_{33}$) й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні основній діагоналі ($a_{21}a_{32}a_{13}$ і $a_{12}a_{23}a_{31}$). Три інші члени є добутками

елементів побічної діагоналі, взятими з протилежними знаками ($a_{13}a_{22}a_{31}$), й елементів, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі ($a_{21}a_{12}a_{33}$ і $a_{32}a_{23}a_{11}$).



Є ще й інше правило обчислення визначників третього порядку, яке називають *правилом Саррюса*. За цим правилом складають таблицю, для якої дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинаються по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть з протилежним знаком. Такий самий результат маємо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

Властивості визначників:

1. Визначник матриці A і визначник транспонованої до неї матриці рівні:

$$|A| = |A^T|.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$

2. Якщо один із рядків (стовбців) визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}.$

4. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені на деяке число.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$

Перший рядок визначника додамо з другим і запишемо на місце другого рядка (перший рядок без змін):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2.$$

З цієї властивості випливає, що визначник, який має два однакові (або пропорційні) рядки, дорівнює нулю.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на сталє число, то і визначник помножиться на це число (спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника).

Наприклад, $\begin{vmatrix} 6 \cdot (-2) & 6 \cdot 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$

5. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ k & l \end{vmatrix}.$$

Наприклад, у визначнику $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ елементи першого рядка представимо у вигляді двох доданків довільним чином ($-2 = -5+3$, $4 = -6+10$). За даною властивістю матимемо:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5+3 & -6+10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай маємо визначник

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Викреслимо в ньому i -й рядок і j -й стовпець, на перетині яких лежить елемент a_{ij} . Внаслідок цього дістанемо визначник $(n-1)$ -го порядку, який називається мінором, що відповідає елементу a_{ij} у визначнику D ; його позначають M_{ij} . Отже,

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором $(n-1)$ -го порядку M_{ij} називають визначник матриці A n -го порядку викресленням i -го рядка j -го стовпця.

Мінор нульового порядку вважають рівним одиниці.

Мінор першого порядку співставляють з певним елементом матриці.

Наприклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ і т. д.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника D називають мінор M_{ij} , узятий зі знаком плюс, якщо сума номерів рядка й стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij} , парна, і зі знаком мінус, якщо ця сума непарна.

Залежність між мінором M_{ij} і алгебраїчним доповненням A_{ij} виражається співвідношенням

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де i – номер рядка і j – номер стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij} .

Визначник D дорівнює сумі добутків елементів будь-якого з його стовпців (рядків) на їх алгебраїчні доповнення.

Такий розклад називають розкладом визначника за елементами деякого рядка або стовпця. $\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \text{ – рядка,}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \text{ – стовпця.}$$

Визначник, у якого всі елементи j -го стовпця, крім a_{ij} дорівнюють 0, дорівнює добутку елемента a_{ij} на алгебраїчне доповнення цього елемента A_{ij} .

Виберемо в матриці n -го порядку, визначник якої є Δ , p довільних рядків. Сума попарних добутків усіх можливих мінорів p -го порядку, утворених з елементів цих рядків, на їх алгебраїчні доповнення дорівнює детермінанту Δ .

1.3. Обернена матриця. Ранг матриці

Рядки $a_1, a_2, \dots, a_s$ матриці A називаються *лінійно-залежними*, якщо існують числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ не всі рівні нулю і такі, що лінійна комбінація цих рядків дорівнює нулю $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_sa_s = 0$. (*)

Рядки $a_1, a_2, \dots, a_s$ називають *лінійно-незалежними*, якщо рівність (*) справедлива тоді і тільки тоді, коли всі числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ дорівнюють нулю. Аналогічно визначається лінійна залежність чи лінійна незалежність стовпців матриці.

Рангом матриці A називається число, яке дорівнює максимальній кількості її лінійно-незалежних рядків (стовпців).

Нехай A – ненульова матриця розмірності $m \times n$ і r – натуральне число з такими властивостями:

I. Матриця A має r -мінори, відмінних від нуля.

II. Усі мінори, порядок яких перевищує r (якщо такі наявні), дорівнюють нулю.

Число r називається *рангом матриці A* за мінорами, а будь-який відмінний від нуля мінор порядку r називається базисним мінором.

Факт, що натуральне число r є рангом матриці A , записують так: $r(A) = r$.

Якщо всі елементи матриці є нулями (нуль-матриця), то її ранг дорівнює нулю.

Якщо матриця має принаймні один відмінний від нуля елемент, то ранг цієї матриці дорівнює одиниці (за означенням всі мінори другого та вищих порядків у такій матриці дорівнюють нулю).

Елементарними перетвореннями матриці A називаються такі її перетворення*:

1) перестановка місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Матриці, які мають рівні ранги, називаються *еквівалентними* матрицями.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Ранг матриці за мінорами дорівнює рангу цієї матриці за рядками.

Матрицею, оберненою до даної квадратної матриці A , називають матрицю A^{-1} яка задовольняє співвідношення $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Постає запитання: чи для кожної квадратної матриці A існує обернена матриця A^{-1} ?

Квадратну матрицю A називають *неособливою* або *невиродженою*, якщо визначник цієї матриці D_A не дорівнює нулю. Якщо $D_A = 0$, то матрицю A називають *особливою* або *виродженою*.

Для того щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю A^{-1} , необхідно й достатньо, щоб матриця A була неособливою, тобто $|A| \neq 0$.

Обернену матрицю позначають A^{-1} . Якщо матриця A має обернену до себе матрицю, то її називають *оборотною*. Якщо матриця має обернену, то така матриця єдина.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

Знаходження оберненої матриці:

1. За допомогою алгебраїчних доповнень визначника.
 2. За допомогою одиничної матриці відповідного порядку.
- $$(A/E) \xrightarrow{\text{ел.перет.}} (E/A^{-1}).$$

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

[illegible]

Якщо всі $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$), то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Кількість рівнянь системи може не дорівнювати кількості невідомих цієї системи.

Розглянемо три різні способи розв'язування СЛР: Формули Крамера, метод Гаусса та матричний метод.

Формули Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Якщо головний визначник Δ , складений із коефіцієнтів при невідомих системи, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), яка обчислюється за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n}.$$

де Δ – головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих системи;

Δ_j – визначник, який утворюється заміною j -го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Щоб розв'язати систему за формулами Крамера, необхідно:

1. Скласти з коефіцієнтів при невідомих і обчислити головний визначник системи Δ .

а) Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна, має єдиний розв'язок.

б) Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$, то система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і Δ_j – числа, відмінні від нуля, то система немає розв'язків.

2. Скласти із головного визначника системи (заміною стовпця коефіцієнтів при відповідній невідомій стовпцем вільних членів) і обчислити визначники Δ_j системи (їх кількість дорівнює кількості невідомих системи).

3. За формулами Крамера обчислити значення невідомих x_j .

4. Виконати перевірку розв'язку системи (при підстановці знайдених розв'язків замість змінних в кожне рівняння системи повинні отримати правильну числову рівність).

Метод Гаусса

Історично першим, найбільш поширеним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є метод Гаусса, або метод послідовного

виключення невідомих. Суть методу Гаусса полягає в тому, що задану систему лінійних рівнянь зводять (за допомогою виконання елементарних перетворень) до еквівалентної системи шляхом послідовного вилучення невідомих так, щоб одержати систему, в якій одне із рівнянь має лише одну невідому (прямий хід), потім знайти цю невідому і, застосовуючи метод підстановки, знаходити значення останніх невідомих (зворотний хід).

Нехай дана довільна система лінійних рівнянь. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. У противному разі можна переставити рівняння у вихідній системі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Перетворимо систему, виключивши невідому x_1 з усіх рівнянь, крім першого. Для цього перше рівняння домножимо на $(-a_{21}/a_{11})$ додамо до другого, потім перше рівняння домножимо на $(-a_{31}/a_{11})$ і додамо до третього і т.д.

Оскільки це елементарні перетворення, то прийдемо до еквівалентної системи рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

де a'_{ij} та b'_j – нові коефіцієнти, які легко виразити через a_{ij} та b_j .

Процес виключення невідомих можна продовжити далі. Він є скінченним.

Щоб розв'язати систему, необхідно:

1) серед всіх невідомих систем вибрати ведучу невідому (краще всього невідому, що має коефіцієнт ± 1);

2) рівняння, в яке входить вибрана ведуча невідома (ведуче), в системі записати на перше місце;

3) шляхом множення рівнянь на сталі числа і додавання до другого рівняння, вилучити ведучу невідому із всіх рівнянь системи крім ведучого;

4) серед неведучих рівнянь одержаної системи знову вибрати ведучу невідому і ведуче рівняння, вилучити другу ведучу невідому з неведучих рівнянь і т.д. до тих пір, поки не одержимо рівняння з одним невідомим;

5) використовуючи метод підстановки і виконуючи зворотний шлях (знизу вгору), знайти значення всіх невідомих.

Матричный метод

Нехай задано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

[illegible]

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X – матрицю-стовпець з невідомих (вектор) і через B – матрицю-стовпець з вільних членів (вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Урахувавши правило множення матриць і умову рівності матриць, систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$AX = B. \quad (2.2)$$

Це матричний запис системи рівнянь і позначимо його (2.2).

Припустимо, що матриця A – неособлива ($D_A \neq 0$), тоді існує обернена матриця A^{-1} . Помножимо зліва обидві частини рівності (2.2) на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, то остаточно дістанемо:

$$X = A^{-1}B. \quad (2.3)$$

Таким чином, матриця-стовпець з невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів.

1.5. Поле комплексних чисел

Понятия комплексного числа. Зображення комплексних чисел

Поняття комплексного числа виникло з потреб практики та внаслідок внутрішнього розвитку математики – в процесі пошуку формул вираження коренів кубічних рівнянь.

Поле комплексних чисел називається алгебраїчне розширення поля дійсних чисел за допомогою кореня i квадратного рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Алгебраїчна форма комплексних чисел.

Комплексним числом називається число виду $a + bi$, де $a, b \in R$ (R – множина дійсних чисел), де a називається дійсною частиною комплексного числа $a + ib$, bi – його уявною частиною, b – коефіцієнтом при уявній частині, а i – уявною одиницею ($i^2 = -1$).

Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *рівними*, якщо $a = c$ і $b = d$.

Два комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$, які відрізняються тільки знаком при уявній частині, називаються *спряженими*.

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Сумою (різницею) двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$ ($(a - c) + (b - d)i$).

Щоб додати (відняти) два комплексні числа в алгебраїчній формі, треба додати (відняти) їх дійсні частини та коефіцієнти при уявних частинах.

Наприклад:

$$(-4 + 6i) + (2 - 7i) = (-4 + 2) + (6 - 7)i = -2 - i;$$

$$(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4.$$

$$(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i.$$

$$(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i.$$

Добутком двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Множення двох комплексних чисел в алгебраїчній формі відбувається за звичайним правилом множення дужок.

Дійсно, $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bdi + bci = ac + adi - bd + bci = ac - bd + (ad + bc)i$.

Отже, можна не користуватися формулою множення комплексних чисел, а комплексні числа множити, як двочлени.

Наприклад:

$$(1 - 4i)(5 + 6i) = 5 - 20i + 6i - 24i^2 = 29 - 14i;$$

$$(1 + 3i)(1 - 3i) = 1^2 - 3^2 = -8.$$

Часткою двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$.

Щоб поділити два комплексні числа в алгебраїчній формі, треба і чисельник і знаменник помножити на число, спряжене до знаменника.

$$\text{Дійсно, } \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Наприклад,

$$\frac{5-3i}{4+2i} = \frac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{20-12i-10i+6i^2}{16+4} = \frac{14-22i}{20} = \frac{7}{10} - \frac{11}{10}i.$$

Якщо комплексне число z є співмножником n разів, то добуток $\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_n$ називають n -м степенем числа z і позначають z^n .

Для $z \neq 0$ вважають $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. При піднесенні комплексного числа до степеня з цілим показником правильними являються наступні властивості:

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q},$$

$$(z_1 \cdot z_2)^p = z_1^p \cdot z_2^p, \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p = \frac{z_1^p}{z_2^p}, \text{ де } p \text{ і } q - \text{цілі числа.}$$

Розглянемо, як виражаються цілі додатні степені уявної одиниці i . За означенням $i^0 = 1$, $i^1 = i$. Далі, відомо, що $i^2 = -1$. Тому $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^5 \cdot i = -1$, $i^7 = i^6 \cdot i = -i$, $i^8 = i^7 \cdot i = 1$ і так далі. У загальному вигляді отриманий результат можна записати так: $i^{4 \cdot k} = 1$, $i^{4 \cdot k+1} = i$, $i^{4 \cdot k+2} = -1$, $i^{4 \cdot k+3} = -i$.

Тобто, при піднесенні комплексного числа в алгебраїчній формі до довільного степеня з цілим показником користуються формулами бінома Ньютона.

$$(a+b)^n = C_0 a^n b^0 + C_1 a^{n-1} b^1 + C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n a^0 b^n$$

Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число $w = \sqrt[n]{z}$, що $w^n = z$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Таким чином, добування кореня визначається як дія, обернена до дії піднесення до степеня.

Визначимо, наприклад, квадратний корінь з комплексного числа $a + bi$, де a і b – дійсні числа.

Припустімо, що квадратний корінь з числа a існує і дорівнює $u + iv$ тобто $\sqrt{a + bi} = u + vi$. Далі, скориставшись означенням про рівність комплексних чисел, а саме два комплексних числа рівні тоді

і тільки тоді, коли рівні їх дійсні і уявні частини, дістанемо систему двох рівнянь. Розв'язуємо отриману систему і знаходимо відповідні u і v . Таким чином, якщо корінь квадратний з комплексного числа $\alpha = a + bi$ існує, то його значення визначаються формулами:

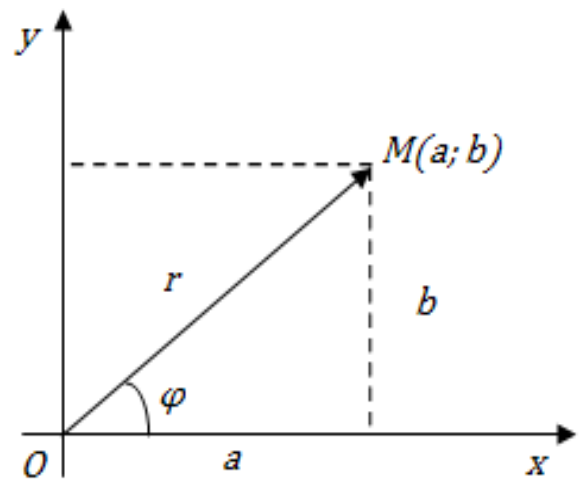
$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), \text{ якщо } b > 0;$$

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), \text{ якщо } b < 0.$$

Таким чином, добування квадратного кореня з комплексного числа завжди можливе і дає два значення, які відрізняються тільки знаками.

Геометричне зображення комплексних чисел.

Комплексні числа зображують на числовій площині в прямокутній системі координат. Комплексне число $a + bi$ зображується точкою $M(a, b)$ (абсциса дорівнює дійсній частині комплексного числа $x = a$, ордината – його уявній частині $y = b$). При цьому вісь x називають дійсно віссю, а вісь y – уявною.



Таким чином, між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини встановлена взаємно однозначна відповідність. Площина, на якій зображують комплексні числа, називається комплексною площиною.

Модулем комплексного числа $a + bi$ називається вираз $\sqrt{a^2 + b^2}$, який позначається $|a + bi|$ або r .

Наприклад,

$$r = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

Кут φ , який утворює радіус-вектор точки M з додатнім напрямом осі Ox , називається *аргументом* комплексного числа $a + bi$.

Аргумент φ комплексного числа $a + bi$ визначається формулами:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, x < 0, y \geq 0, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, x < 0, y < 0. \end{cases}$$

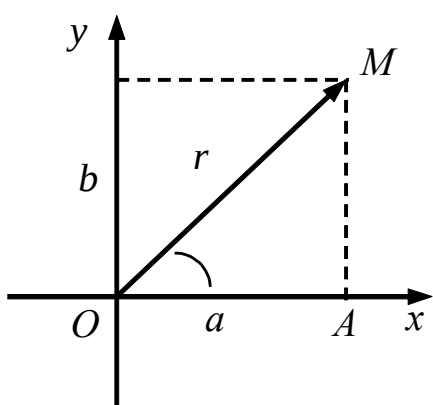
Або $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}; a \neq 0$.

Кожне комплексне число (крім нуля) має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Для числа нуль аргумент не визначений.

Використовуючи геометричну інтерпретацію комплексного числа можна перейти до тригонометричної форми комплексних чисел.

Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

Розглянемо трикутник OAM на малюнку



$$\frac{a}{r} = \cos \varphi; \frac{b}{r} = \sin \varphi.$$

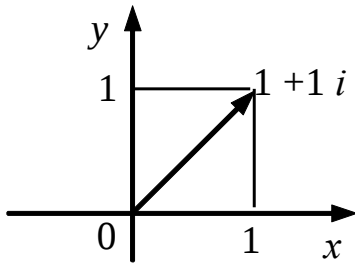
Звідси $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$.

Підставимо в алгебраїчний запис комплексного числа. Отже, комплексне число z можна записати у вигляді:
 $a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$, або
 $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Вираз, що стоїть справа, називається *тригонометричною формою* запису комплексного числа

$z = a + bi$; r – називається *модулем* комплексного числа z , φ – *аргументом* комплексного числа z .

Аргумент комплексного числа вважається додатним, якщо він відраховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки, а від'ємним – при протилежному напрямку. Очевидно, що аргумент φ задається не однозначно, а з точністю до доданка $2\pi k$, де k – довільне ціле число.

Наприклад, записати комплексне число $1 + i$ у тригонометричній формі.



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Підставимо у тригонометричну форму комплексного числа, отримаємо: $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для множення і ділення зручніша тригонометрична форма.

Добуток двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i \sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i \sin y_2)$ можна записати так:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].$$

Тобто, при множенні комплексних чисел в тригонометричній формі модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Ділення двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i \sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i \sin y_2)$ можна записати так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)].$$

Тобто, при діленні комплексних чисел в тригонометричній формі модулі діляться і від аргументу діленого віднімається аргумент дільника.

Степенем p комплексного числа $r(\cos \phi + i \sin \phi)$ є число $z^p = r^p(\cos p \phi + i \sin p \phi)$, де p – будь-яке ціле число. Ця формула виводиться за означенням добутку комплексних чисел.

Знайти z^6 , якщо $z = 3(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$.

$$z^6 = 3^6(\cos 6 \cdot 5^\circ + i \sin 6 \cdot 5^\circ) = 729 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Якщо $p = n$ (n – ціле число), дістаємо *формулу Муавра*:

$$(r \cos \phi + i \sin \phi)^n = r^n(\cos n \phi + i \sin n \phi).$$

Якщо $p = 1/n$, маємо:

$$\sqrt[n]{r(\cos \phi + i \sin \phi)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Наприклад, знайти $z = \sqrt{i}$.

Треба знайти корінь квадратний з комплексного числа, тобто $n=2$, $k=0, 1$. Матимемо два розв'язки (при $k=0$ і $k=1$). За формулою $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$. Далі:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (при } k = 0),$$

$$z_2 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (при } k = 1).$$

1.6. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти матриці $A+B$, A^T , C^2 , AB , BA .

Розв'язання.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C^2 = CC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1(-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1(-1) + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0(-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2(-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3(-1) & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -1(-1) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 + 2 - 3 & 2 - 2 - 2 & 0 + 4 - 4 \\ 2 + 0 + 9 & 1 + 0 + 6 & 0 + 0 + 12 \\ 8 - 3 + 6 & 4 + 3 + 4 & 0 - 6 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 12 \\ 11 & 11 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 + 1 + 0 & 4 + 0 + 0 & -2 + 3 + 0 \\ 2 - 1 + 8 & 2 + 0 - 6 & -1 - 3 + 4 \\ 8 - 3 + 16 & 6 + 0 - 12 & -3 + 6 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \\ 24 & -6 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Добуток AB можна утворити, оскільки матриця A має розмірність 2×4 , а матриця B – розмірність 4×3 . Матриця $C = AB$ матиме розмірність 2×3 . Щоб знайти C_{11} , утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B :

$$C_{11} = 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -11.$$

Аналогічно:

$$C_{12} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1)(-1) = 11,$$

$$C_{13} = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3(-2) + (-1)(-2) = -4;$$

$$C_{21} = (-1)(-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 19,$$

$$C_{22} = (-1)2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4(-1) = 0,$$

$$C_{23} = (-1)0 + 2 \cdot 1 + 1(-2) + 4(-2) = -8.$$

Отже, $C = AB = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$

Утворити BA – неможливо.

Приклад 3. Знайти:

- 1) добуток матриць A і B ;
- 2) значення многочлена $f(A)$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

Розв'язання.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ -3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(A) = A^2 + 2 \cdot A - 4 \cdot E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4-9 & -2+4+0 & 3-2+3 \\ 2-4-3 & -4+4+0 & 6-2+1 \\ -3+0-3 & 6+0+0 & -9+0+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 2 & 4 \\ -5 & -2 & 5 \\ -6 & 6 & -8 \end{pmatrix}; \quad 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4 \cdot E = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -12 & 2 & 4 \\ -5 & -2 & 5 \\ -6 & 6 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 10 \\ -1 & -10 & 7 \\ -12 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Обчислити обернену матрицю A^{-1} до заданої

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Зробити перевірку, обчисливши добуток } A \cdot A^{-1}.$$

Знайдемо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 0 =$$

$$= 47 \neq 0,$$

отже A^{-1} існує.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 0 - 3 \cdot 3] = 9,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -[4 \cdot 0 - 1 \cdot 2] = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 1 - 4 \cdot 3] = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 16,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 3 - 1 \cdot 2] = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = -6,$$

За формулою записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{47} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 16 \\ 9 & -6 & -1 \\ 7 & 11 & -6 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку за означенням оберненої матриці, для цього обчислимо добуток $A^{-1} \cdot A$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{47} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 16 \\ 9 & -6 & -1 \\ 7 & 11 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 16 \cdot 3 & -3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 16 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 16 \cdot 0 \\ 9 \cdot 1 - 6 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 9 \cdot 4 + (-6) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & 9 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + (-6) \cdot 3 & 7 \cdot 4 + 11 \cdot (-2) + (-6) \cdot 1 & 7 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{47} \cdot \begin{pmatrix} 47 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Так як $A^{-1}A = E$ і $A \cdot A^{-1} = E$, то A^{-1} знайдена правильно.

Приклад 5. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Щоб побудувати A^{-1} , знайдемо $\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$. Оскільки

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -4, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 3, \quad \text{маємо: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \text{За формулою (1.7) визначаємо } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}. \text{ Отже, шукана матриця } X = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти ранг матриці A методом окантування мінорів, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Проте матриця A має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад 7. Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Поміняємо місцями 1 і 2 рядок. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

додамо до 2 рядка 1 помножений на -2 ; додамо до 3 рядка 1 помножений на -2 ; додамо до 4 рядка 1 помножений на -3 .

Отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Додамо до 3 рядка 2 помножений

на 4; додамо до 4 рядка 2 помножений на -1 . Отримаємо:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отримали три ненульові рядки, значить ранг

матриці дорівнює 3.

Приклад 8. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10.$$

Приклад 9. Знайти визначник матриці A за правилом трикутника, якщо

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) \cdot 7 = \\ &= 15 + 0 + 0 - 2 - 0 + 84 = 97. \end{aligned}$$

Приклад 10. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \dots, M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 11. Знайти визначник матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Обчислимо визначник матриці, розклавши його за другим стовпцем (в ньому більше всього нулів):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42} = \\ &= 2 \cdot A_{42} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + \\ &+ (-2) \cdot 2 \cdot 2)) = 2(6 + 2 - 6 - (1 + 9 - 8)) = 2 \cdot (2 - 2) = 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Приклад 12. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п'ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п'ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п'ятого віднімемо третій, помножений на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

$$\text{Тоді } \Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 5.$$

Приклад 13. Дано систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник головної матриці системи. Для цього розкладемо його за першим рядком.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Знайдемо визначники третього порядку

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-8) \cdot 5 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 3] = -65;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3] = -69;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 2 - [(-8) \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 2] = 58;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - [2 \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 2] = 52.$$

Підставимо знайдені значення у головний визначник $\Delta = -65 + 69 + 58 - 52 = 10$.

Визначник матриці не рівний нулеві $\Delta = 10 \neq 0$, отже система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Шукаємо визначники за формулами Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо кожен з визначників через стовпець вільних членів, в ньому найбільше нулів.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 3 \cdot (-25) = 70;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 + 3 \cdot (-29) = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 \cdot (18) = -50;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 3 \cdot 22 = 60.$$

За формулами Крамера обчислюємо корені

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{80}{10} = -8, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{50}{10} = -5, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{10} = 6.$$

Розв'язок системи $x_1=7$; $x_2=-8$; $x_3=-5$; $x_4=6$.

Приклад 14. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -3x_2 - 5x_3 = -5, \\ -3x_2 - 7x_3 = -7; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{5}{3}, \\ 3x_2 + 7x_3 = 7; \end{cases} \quad (-3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x_3, \\ 2x_3 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x_3, \\ x_3 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\bar{X} = (1; 0; 1)$.

Приклад 15. Розв'язати СЛР матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану систему можна записати у вигляді матричного рівняння наступним чином:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

В такому випадку розв'язок системи матиме вигляд $X = A^{-1} \cdot B$ ($A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$). Знайдемо матрицю, обернену до A за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів:

$$A_{11} = -7; A_{21} = -1; A_{31} = -3;$$

$$A_{12} = 3; A_{22} = -9; A_{32} = -5;$$

$$A_{13} = -5; A_{23} = -7; A_{33} = 1.$$

Отже обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Помножимо A^{-1} та B :

$$X = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ -66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тобто єдиним розв'язком є $(1, -1, 3)$.

Приклад 16. Виконати дії над комплексними числами.

1) $(-4 + 6i) + (2 - 7i) = (-4 + 2) + (6 - 7)i = -2 - i$;

2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

3) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.

4) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

5) $(1 - 4i)(5 + 6i) = 5 - 20i + 6i - 24i^2 = 29 - 14i$;

6) $(1 + 3i)(1 - 3i) = 1^2 + 3^2 = 10$.

7) $\frac{5-3i}{4+2i} = \frac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{20-12i-10i+6i^2}{16+4} = \frac{14-22i}{20} = \frac{7}{10} - \frac{11}{10}i$.

Приклад 17. Обчислити значення виразів $z_1 + z_2 - z_3$; $z_1 z_2 \bar{z}_3$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_3^2}{z_2}$, якщо $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - 3i$; $z_3 = 5 - i$.

Розв'язання.

1) Проведемо додавання та віднімання згідно правил

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 &= 3 + 2i + 2 - 3i - (5 - i) = \\ &= (3 + 2 - 5) + (2 - 3 + 1)i = 0; \end{aligned}$$

2) Спряженим до числа $z_3 = 5 - i$ буде $\bar{z}_3 = 5 + i$.

Обчислимо добуток перших двох чисел

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 2i)(2 - 3i) = (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3)) + (3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2)i = \\ &= 12 - 5i. \end{aligned}$$

Обчислимо добуток отриманого числа на z_3

$$\begin{aligned} (12 - 5i)(5 + i) &= (12 \cdot 5 - (-5) \cdot 1) + (12 \cdot 1 + (-5) \cdot 5)i = \\ &= 65 - 13i. \end{aligned}$$

Отже, шуканий добуток буде рівний $65 - 13i$

$$z_1 z_2 \bar{z}_3 = 65 - 13i.$$

3) Виконаємо ділення комплексних чисел за формулою

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{3+2i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{2^2 + 3^2} + \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2^2 + 3^2}i = i.$$

В результаті отримали число, яке має тільки уявну частину.

4) Спочатку підносимо число z_3 до квадрату

$$z_3^2 = (5 - i)(5 - i) = 5 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) + (5 \cdot (-1) - 1 \cdot 5)i = 24 - 10i.$$

Тепер виконаємо ділення

$$\begin{aligned} \frac{24 - 10i}{2 - 3i} &= \frac{24 - 10i}{2 - 3i} \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{24 \cdot 2 - (-10) \cdot 3}{2^2 + 3^2} + \frac{24 \cdot 3 - 10 \cdot 2}{2^2 + 3^2} i = \\ &= \frac{78}{13} + \frac{52}{13} i = 6 + 4i. \end{aligned}$$

Приклад 18. Знайти модуль і аргумент комплексного числа

1) $z = 3 - 3i$;

2) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$;

3) $z = \sqrt{3} + i$.

Розв'язання:

1) Знайдемо модуль комплексного числа. Для цього сумуємо квадрати дійсної та уявної частини числа, після чого добуваємо корінь квадратний $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Кут належить IV чверті, оскільки $a > 0$, $b < 0$. Знайдемо його значення через тангенс $\tan \varphi = -\frac{3}{3} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Отже, задане комплексне число буде мати наступні модуль і аргумент $|z| = 3\sqrt{2}$, $\varphi = -\pi/4$.

2) Обчислюємо модуль комплексного числа $z = -2 - 2\sqrt{3}i$; згідно правила $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$. Кут φ знаходиться в третій чверті, оскільки $a < 0$, $b < 0$. Знайдемо його значення через синус $\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$; $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$. Заданому комплексному числу має відповідати наступні модуль та аргументу $|z| = 4$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

3) Модуль числа $z = \sqrt{3} + i$ знаходимо за формулою $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Кут φ знаходиться в першій чверті, оскільки $a > 0$, $b > 0$. Його значення обчислюємо через тангенс $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Шукані величини приймуть значення $|z| = 2$, $\varphi = \pi/6$.

Приклад 19. Знайти z^3 , якщо комплексне число задано в тригонометричній формі $z = 4(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))$.

2) Знайти z^{12} , якщо число рівне $z = 2(\cos(15^\circ) + i \sin(15^\circ))$.

3) Знайти корінь квадратний $\sqrt{z}$, якщо $z = i$.

Розв'язання. 1) За правилом підносимо до третього степеня

$$\begin{aligned} z^3 &= 4^3 (\cos(3 \cdot 10^\circ) + i \sin(3 \cdot 10^\circ)) = 64 (\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ)) = \\ &= 64 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 32\sqrt{3} + 32i \end{aligned}$$

Тут немає чого коментувати, все ілюструє формула.

2) Виконаємо піднесення до дванадцятого степеня

$$\begin{aligned} z^{12} &= 4096 (\cos(12 \cdot 15^\circ) + i \sin(12 \cdot 15^\circ)) = \\ &= 4096 (\cos(180^\circ) + i \sin(180^\circ)) = 4096i. \end{aligned}$$

Обчислення теж не складні, аргумент 15 градусів дозволяє легко обчислити синус та косинус.

3) Знайдемо корінь квадратний комплексного числа. Подаємо число у тригонометричній формі $r = \sqrt{0+1} = 1; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

За формулою знаходимо корінь з уявної частини

$$\sqrt{i} = \sqrt{1} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \right) \right].$$

Підставляючи $k = 0, 1$, отримаємо два корені

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отримані значення лежать на колі одиничного радіусу з центром в початку координат, відповідно в першій та третій чверті. Варто зазначити, що згідно правила знаходження кількості коренів має бути однакова з показником кореня (ступінь $1/2$ означає 2 корені числа). Якщо, наприклад маємо корінь $\sqrt[n]{z}$, то розв'язків повинно бути n , а в формулі для кореня перебираємо значення $k = 0, 1, \dots, n-1$ і для кожного знаходимо відповідне значення.

Приклад 20. Знайти корені рівняння $z^4 + 625 = 0$.

Розв'язання. Напишемо рівняння у вигляді $z^4 = -625$. Число в правій стороні рівності (-625) подаємо в тригонометричній формі $-625 = 625(\cos \pi + i \sin \pi)$.

За формулою Муавра корені шукаємо за формулою

$$z = \sqrt[4]{625} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Перебором можливих значень лічильника 0-3 отримаємо

$$z_0 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); z_1 = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$z_2 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); z_3 = 5 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Приклад 21. Розв'язати рівняння $3x^2 - 8x + 13 = 0$.

Розв'язок. Обчислюємо дискримінант

$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 13 = 64 - 156 = -92.$$

Корінь квадратний з від'ємного дискримінанта прийме значення

$$\sqrt{D} = \sqrt{-92} = \sqrt{4 \cdot 23 \cdot i^2} = 2\sqrt{23}i.$$

Отримане значення підставляємо в формулу коренів $x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{23}i}{2 \cdot 3}$

та знаходимо $x_1 = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{23}i}{3}; x_2 = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{23}i}{3}.$

Приклад 22. Знайти розв'язок квадратного рівняння $(-1+i)x^2 + (3+2i)x + 2-i = 0$.

Розв'язання. Знаходимо дискримінант за стандартною формулою

$$D = (3+2i)^2 - 4(-1+i)(2-i)$$

Обчислюємо доданки дискримінанта множенням комплексних чисел

$$\begin{aligned}(3+2i)^2 &= 9 + 2 \cdot 6i - 4 = 5 + 12i; \\ -4(-1+i)(2-i) &= -4(-2+i+2i-i^2) = \\ &= -4(-1+3i) = 4 - 12i.\end{aligned}$$

Підставляємо у формулу

$$D = 5 + 12i + 4 - 12i = 9.$$

У даному випадку маємо додатній дискримінант, з якого можемо взяти дійсний корінь

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3.$$

Це дуже спрощує обчислення, оскільки при від'ємному дискримінанті потрібно визначати корені за формулою Муавра. Знаходимо розв'язок рівняння за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Після підстановки отримаємо корені

$$x_{1,2} = \frac{-3-2i \pm 3}{2(-1+i)} \text{ або } x_1 = \frac{-3-2i+3}{2(-1+i)} = \frac{-i}{1+i}; \quad x_2 = \frac{-3-2i-3}{2(-1+i)} = \frac{-3-i}{1+i}.$$

Для спрощення (ділення комплексних чисел), множимо чисельник і знаменник на спряжене число до знаменника

$$x_1 = \frac{-i}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{i^2-i}{1-i^2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}; \quad x_2 = \frac{-3-i}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{-3+3i-i+i^2}{2} = 2-i.$$

Таким чином наступні значення розв'язків

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}; \quad x_2 = 2-i$$

задовольняють вихідне квадратне рівняння.

1.7. Завдання для самостійного опрацювання

1. Виконати дії над матрицями.

1) $AB-C^*$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $AB-BA$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) A^2 , де $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $3A+2B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $3A^2-EA^3$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

6) ABC , де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7) C^3 , де $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8) B^2-4A , де $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

9) $A(B+C)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

10) AB^* , де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити добуток матриць.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначники другого порядку.

1) $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 2a & 6 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} a+2 & a^2 \\ a & a^2-2a+4 \end{vmatrix}$.

$$7) \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}. \quad 8) \begin{vmatrix} \ln(\ln(\ln(\cos x))) & 0 \\ \operatorname{tg}(\operatorname{ctg}(x)) & 0 \end{vmatrix}. \quad 9) \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix}. \quad 10) \begin{vmatrix} 3 & g \\ 3 & g \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначники.

Третього порядку:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}. \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 7 \end{vmatrix}. \quad 4) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}. \quad 5) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 13 & -4 & 15 \\ 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$6) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \\ 21 & 3 & 5 \end{vmatrix}. \quad 7) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}. \quad 8) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}. \quad 9) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вищих порядків:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}. \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}. \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 5) \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}. \quad 6) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -6 & 4 & 7 \end{vmatrix}. \quad 8) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}. \quad 9) \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & -8 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Знайти ранг матриці

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}. \quad 3) \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}. \quad 6) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot 8) \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix} \cdot 9) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Для даної матриці знайти обернену матрицю.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot 2) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot 3) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot 4) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot 6) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix} \cdot 7) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 8) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot 10) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Розв'язати матричне рівняння.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 4) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot 6) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot 8) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$9) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \cdot 10) X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

8. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами (методом Гауса, за формулами Крамера, матричним способом).

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - y + z = -2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_3 = -2, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 1, \\ x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

9. Розв'язати систему рівнянь.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 10x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 17x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6. \end{cases}$$

10. Знайти значення x та y вважаючи їх дійсними.

1) $3y + 10xi = 15 - 70i$;

2) $(2x + 3y) + (x - y)i = 7 + 6i$;

3) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.

11. Розв'язати рівняння:

$(-4 - 5i)x + (1 + 4i)y = -27i + (7 - 2i)y$.

12. Дано: $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = (7 - 2i)$.

Знайти: 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$.

13. Виконати ділення: 1) $\frac{2-3i}{5+2i}$; 2) $\frac{3-7i}{3+2i}$; 3) $\frac{2+3i}{2-3i}$.

14. Виконати дії: 1) $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$; 2) $\frac{6+2i}{3-7i} - \frac{2+3i}{2+5i}$.

15. Нехай $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Знайти $f(3 + i)$.

16. Представити комплексне число в алгебраїчній та тригонометричній формах:

1) $z_0 = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$; 2) $z_0 = \frac{1}{1-i}$; 3) $z_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}$; 4) $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$.

17. Виконати дії і відповідь записати в тригонометричній формі.

1) $\frac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{12}}$; 2) $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^9}$; 3) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 4) $\frac{(i-1)^3}{i^{12}+i^{31}}$;
5) $\frac{2i^5}{1+i^{11}}$; 6) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^4}$; 7) $\frac{5+i}{2+3i}$; 8) $\frac{3i^{15}+(\sqrt{3}i)^2}{i^9}$.

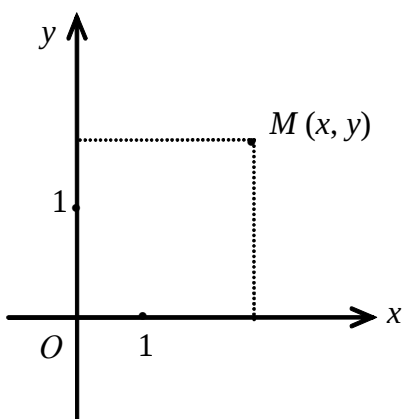
2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Після великих географічних відкриттів (Америки – в 1492 р, морського шляху в Індію – в 1498 р.) активізувався розвиток виробництва, торгівлі. Мореплавство вимагало розробки і вдосконалення складання географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць. Дослідження Галілея та Кеплера стимулювало створення аналітичної геометрії в середині XVII ст.

У XVIII ст. завершено формування аналітичної геометрії як науки і як навчального предмету. З кінця XIX ст. до неї увійшли також поняття і операції векторної алгебри.

2.1. Системи координат

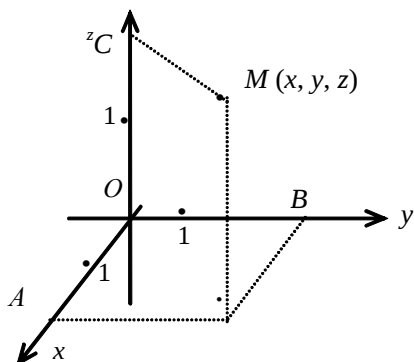
Прямокутна система координат. Система координат на прямій, на площині, у просторі



Декартова система координат. Дві взаємно перпендикулярні осі Ox , Oy , які мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють *прямокутну декартову систему координат на площині*.

Якщо таких осей три: Ox і Oy , Oz , то маємо *прямокутну декартову систему координат у просторі*.

Осі Ox , Oy , Oz називаються відповідно *осьми абсцис, ординат і аплікат*, точка O – *початок системи координат*. Декартовими координатами x , y , z довільної точки M у просторі є відповідно довжини OA , OB , OC .



Кожній точці площини можна поставити у відповідність впорядковану двійку чисел (x, y) , а в просторі – впорядковану трійку чисел (x, y, z) .

Французький математик Лагранж у творі «Аналітична механіка» (1788) показав застосування методу координат в фізиці. У першій главі цього тому вводиться система декартових координат у просторі,

знаходиться відстань точки простору до початку координат, у другій главі виводяться рівняння циліндричних і конічних поверхонь, у третій досліджуються плоскі перерізи кругового циліндра і конуса, у п'ятій главі виведено рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, параболоїдів.

Метод координат сприяв використанню в математиці змінних величин. На основі двовимірної та тривимірної геометрії була створена багатовимірна аналітична геометрія.

Система координат на прямій

Нехай задано довільну пряму a . Виберемо на ній дві різні точки A і B . Напрявлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ задає один із можливих напрямів на прямій – орієнтує пряму і визначає вектор $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Вважатимемо заданий напрям додатним і позначимо його стрілкою.

Пряму a на якій задано додатний напрям за допомогою вектора $\vec{r}$ називають віссю і позначають $a(\vec{r})$, при цьому вектор r називають *напрямним вектором осі*.

Зафіксуємо на прямій a точку O – початок координат і виберемо за базис ненульовий одиничний вектор $\vec{i} = \overrightarrow{OE}$. Кажуть, що на прямій задано *систему координат* Ox . Разом з тим пряма a , з орієнтованим вектором $\vec{i}$, є віссю.

Розглянемо довільну точку C на прямій і розкладемо вектор $\overrightarrow{OC}$ за базисом $\langle \vec{i} \rangle$: $\overrightarrow{OC} = x\vec{i}$. *Координатою точки C у системі* називають координату x вектора $\overrightarrow{OC}$ у базисі $\langle \vec{i} \rangle$ і записують $C = C(x)$.

Ставлячи у відповідність кожній точці її координату, отримаємо взаємно однозначну відповідність між всіма точками прямої і множиною дійсних чисел. Пряму, на якій задано деяку систему координат, називають *числовою віссю* Ox . Початкова точка O має нульову координату, на одній з двох півосей, на які точка O розбиває числову вісь, координати всіх точок додатні, на другій – від'ємні: маємо *додатну* та *від'ємну півосі*.

Щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

Прямокутна декартова система координат на площині

Виберемо за базис векторів площини пару перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}$. У цьому разі кажуть, що на площині задано

прямокутну декартову систему координат Oij . Точку O називають початком координат. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$, називають *осями координат*: віссю абсцис Ox та віссю ординат Oy . Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною Oxy* .

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають *координатними чвертями (квадрантами)*. Кожній чверті відповідає певна комбінація знаків координат.

Розглянемо довільну точку C на площині і розкладемо її радіус вектор за базисом $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_x} + \overrightarrow{OC_y} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Координатами точки C у прямокутній системі координат називають координати її радіус-вектора $\vec{r}_C$ у базисі $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ і записують $C = C(x, y)$.

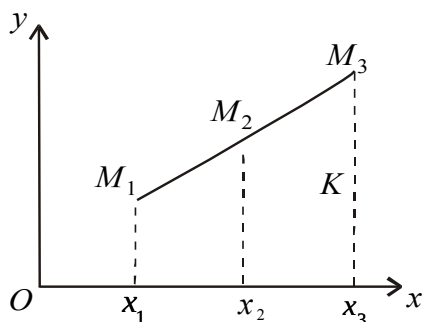
Нехай на площині дано дві точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Знайдемо відстань між точками A_1 і A_2 через координати цих точок. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, що паралельні осям координат. Відстань між точками A_1 і A_2 дорівнює $|y_1 - y_2|$, а відстань між точками A_1 і A_2 — $|x_1 - x_2|$. Так як трикутник A_1AA_2 прямокутний, то за теоремою Піфагора отримаємо: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$, d — відстань між точками A_1, A_2

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Нехай на площині Oxy дано дві довільні точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Знайдемо координати x і y точки A , що поділяє відрізок A_1A_2 в відношенні $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Відрізок A_1A_2 не паралельний до осі Ox .

Спроектуємо точки A, A_1, A_2 на вісь Oy : $\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{A_1^*A^*}{A^*A_2^*} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Так як точки A^*, A_1^*, A_2^* мають ті ж ординати, що і точки A, A_1, A_2 , то $A_1^*A^* = |y_1 - y|$, $A^*A_2^* = |y - y_2|$. Так як точка A^* лежить між точками A_1^*, A_2^* , то $y_1 - y$ і $y - y_2$ одного знаку. Тому $\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Звідси знаходимо $y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Аналогічно знаходиться абсциса точки A , для неї отримаємо формулу: $x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Поділ відрізка в заданому відношенні



Нехай задано координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_3(x_3, y_3)$.

Число μ — називається відношенням, в якому точка $M_2(x_2, y_2)$ ділить відрізок M_1M_3 , якщо

$$\mu = \frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|}.$$

Нехай μ — відоме число і треба знайти координати точки $M(x, y)$.

З теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, маємо:

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_2|} = \mu.$$

Оскільки числа $x_2 - x_1$ і $x_3 - x_2$ при $x_1 < x_3$ додатні, а при $x_1 > x_3$ — від'ємні, то знак модуля в останній рівності можна опустити:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \mu.$$

$$\text{Звідси: } x_2 = \frac{x_1 + \mu \cdot x_3}{1 + \mu}.$$

$$\text{Аналогічно, формула для знаходження ординати: } y_2 = \frac{y_1 + \mu \cdot y_3}{1 + \mu}.$$

Наслідок. Якщо точка $M_2(x, y)$ — середина відрізка M_1M_3 , то $\mu = 1$ і $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2}$.

Якщо точка A поділяє даний відрізок A_1A_2 у відношенні λ , то формули набувають вигляду: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Якщо точка A є серединою відрізка A_1A_2 , то її координати обчислюються за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Прямокутна декартова система координат у просторі

Зафіксуємо у просторі точку O і виберемо за базис трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. У цьому разі кажуть, що у просторі задано прямокутну декартову систему координат $Oijk$ ($Oxyz$). Осі, що проходять через початок координат з відповідними напрямними векторами, називають віссю абсцис Ox , віссю ординат Oy і віссю аплікат Oz . Площини, що проходять через осі координат, називають координатними площинами Oxy , Oxz , Oyz . Координатні площини розбивають простір на вісім частин — октантів.

Розглянемо довільну точку M у просторі і розкладемо її радіус-вектор $\vec{r}_M = \vec{OM}$ за базисом $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$:

$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Координатами точки M називають координати її радіус-вектора $\vec{r}_M$ у базисі $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ і записують $M = M(x, y, z)$.

Знайдемо відстань між двома точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ через координати цих точок. Розглянемо випадок, коли пряма A_1A_2 не паралельна осі Oz . Проведемо через дані точки прямі, паралельні осі Oz . Вони перетнуть площину xOy в точках A_1^*, A_2^* . Ці точки мають ті ж координати x, y , що і точки A_1, A_2 , а координата z у них дорівнює 0. Проведемо через точку A_1 площину паралельну площині xOy . Вона перетне пряму $A_1A_2^*$ в деякій точці C . Згідно теореми Піфагора $A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2$, $CA_2 = A_1^*A_2^*$, а $A_1C = |x_1 - x_2|$. Тому $A_1^*A_2^* = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Відстань між двома точками в просторі обчислюється за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нехай точка C поділяє відрізок AB у відношенні λ , тоді $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$. Отже,
$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases}$$
 після перетворень будемо мати формули: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Зробимо зауваження, щодо розташування точки C : 1) якщо точки A і C збігаються, то $\lambda = 0$; 2) якщо $\lambda > 0$, то точка C лежить усередині відрізка AB ; 3) якщо $\lambda < 0$, то точка C лежить зовні відрізка AB і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином; 4) якщо $\lambda = 1$, точка C є серединою даного відрізка.

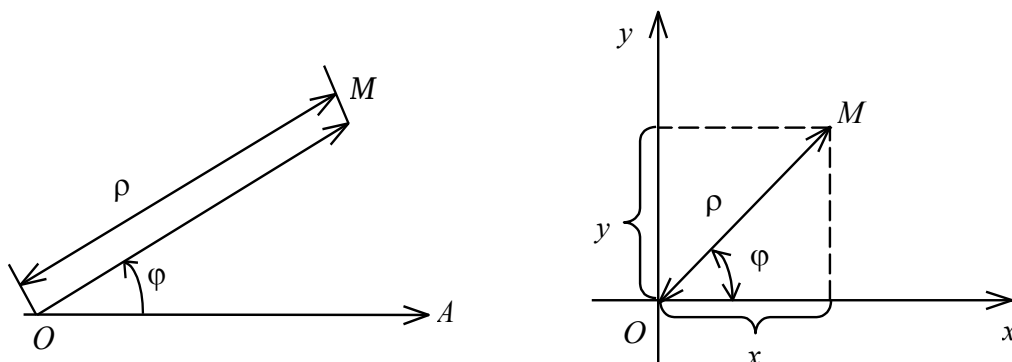
Розклад вектора на складові в просторі

Візьмемо вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і по модулю дорівнюють одиниці: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Такі вектори називаються *одиничними* векторами осей системи координат (ортами). Тоді вектор $\vec{a} = (x; y; z)$ можна подати у вигляді:

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ – розклад вектора за одиничними векторами.

В геометрії набула широкого застосування полярна система координат.

Полярна система координат складається з деякої точки площини O (полюса θ), і полярної осі (променя OA , що виходить з цієї точки) і одиниці масштабу.



Полярними координатами точки M є число ρ – відстань від полюса O до точки M (полярний радіус) і φ – кут між полярною віссю OA і радіусом OM (проти годинникової стрілки). $M(\rho, \varphi)$.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \leq \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.2. Вектори та операції над ними

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначають малими латинськими літерами $\vec{a}, \vec{b}, \dots$, або $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок вектора, а точка B – його кінець.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ вважається заданим, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$ (модуль) і напрям.

Два вектори вважаються рівними, якщо їх модулі рівні, і напрямки збігаються.

Два паралельних, однакових за довжиною, але протилежно направлених вектори $\vec{a}$ та $-\vec{a}$ називаються протилежними векторами.

Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, вектор називають одиничним.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, треба від координат кінця цього вектора відняти координати початку. Якщо $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів координат цього вектора:

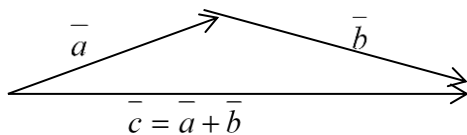
Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Дії з векторами, що задані своїми координатами

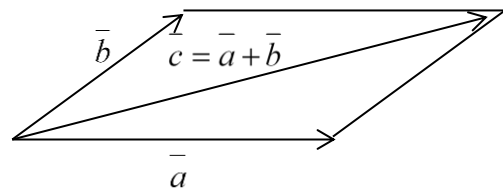
Над векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ означені такі операції:

1. Додавання:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$



Правило трикутника



Правило паралелограма

Віднімання векторів.

Щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, необхідно до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний $\vec{b}$ ($-\vec{b}$).

2. Множення вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на дійсне число α :

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число α треба кожен координату вектора множимо на це число.

2.3. Множення векторів

Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Якщо хоча б один із векторів у є нульовим, то скалярний добуток дорівнює нулю.

Оскільки

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \text{ то}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{ пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{ пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$

Дана формула виражає *геометричний зміст* скалярного добутку.

Робота A сили $\vec{F}$, прикладеної до матеріальної точки, по переміщенню даної точки вздовж вектора $\vec{S}$, що утворює з вектором $\vec{F}$ кут φ , дорівнює

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi, \text{ або } A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Остання формула виражає *механічний зміст* скалярного добутку.

Властивості скалярного добутку.

Алгебраїчні:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Зауваження: скалярно можна множити лише два вектори.

Геометричні:

1. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не нульові, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, якщо кут φ між векторами гострий; $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, якщо кут φ між векторами тупий.

2. Скалярний добуток двох не нульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні. Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні* тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$3. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2, \text{ тобто } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Скалярний добуток у координатній формі.

Нехай задано вектори своїми координатами: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тоді скалярний добуток цих векторів буде:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) + (a_x b_y + a_y b_x)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + \\ &\quad + (a_x b_z + a_z b_x)(\vec{i} \cdot \vec{k}) + (a_y b_z + a_z b_y)(\vec{j} \cdot \vec{k}).\end{aligned}$$

Оскільки $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$ та $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Дана формула виражає скалярний добуток у координатній формі.

Умова перпендикулярності векторів:

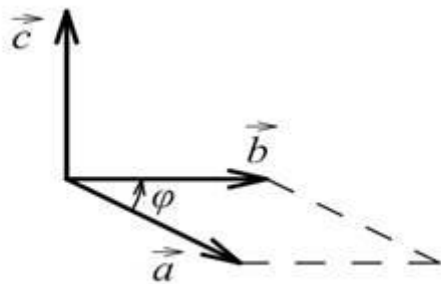
$$\vec{a} \perp \vec{b}, \text{ якщо } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Кут φ між векторами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, шукаємо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:



- 1) перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- 2) якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні, то разом з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворює праву трійку;
- 3) має довжину, що дорівнює добутку довжини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$.

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

З означення векторного добутку випливає його *геометричний зміст*: модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = S_{\text{парал}}.$$

Властивості векторного добутку.

Алгебраїчні:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Геометричні:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi = S_{\text{парал}}$, а площа трикутника $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *колінеарні* тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Таблиця векторного добутку ортів:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Векторний добуток у координатній формі.

Нехай задано вектори своїми координатами: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тоді векторний добуток векторів у координатній формі буде:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) + (a_x b_y - a_y b_x) (\vec{i} \times \vec{j}) + \\ &\quad + (a_x b_z - a_z b_x) (\vec{i} \times \vec{k}) + (a_y b_z - a_z b_y) (\vec{j} \times \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Отже, векторний добуток у координатній формі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скаляр $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, тобто скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку:

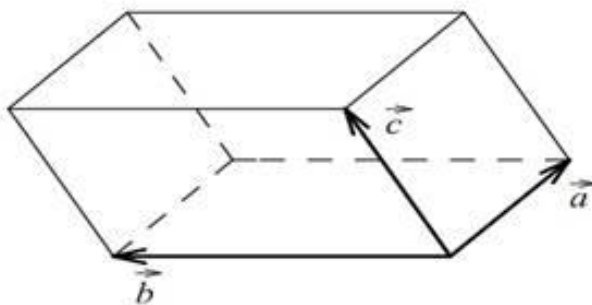
1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$, якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то добуток змінить знак;

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$, при циклічній перестановці множників мішаний добуток не зміниться;

3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

4. Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах:

$$V_{\text{парал}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



А об'єм піраміди: $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$.

5. Вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

6. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$, якщо вектори утворюють праву трійку;
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, якщо вектори утворюють ліву трійку.

Мішаний добуток у координатній формі.

Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, та $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ то мішаний добуток буде:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Висновок: 1) скалярний добуток – це число, за допомогою скалярного добутку знаходять кути;

2) векторний добуток – це вектор, за допомогою векторного добутку знаходимо площі паралелограма та трикутника;

3) мішаний добуток – це число, за допомогою мішаного добутку знаходимо об'єми паралелепіпеда та піраміди.

2.4. Лінійно-залежні та лінійно-незалежні системи векторів

Нехай задано систему (множину) m n -вимірних векторів:

$a_1, a_2, \dots, a_m$.

Якщо помножити ці вектори відповідно на числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ і скласти суму цих добутків, то вираз

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$$

є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Відповідно до означень суми векторів і добутку вектора на число, лінійна комбінація n -вимірних векторів є n -вимірний вектор. Позначимо його буквою a .

Отже,

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m.$$

При цьому говорять, що вектор a *лінійно виражається* через вектори

$a_1, a_2, \dots, a_m$.

З поняття лінійної комбінації пов'язане поняття лінійної залежності векторів. Введемо таке означення

Означення. Система m ($m \geq 1$) n -вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ називається лінійно незалежною, якщо можна підібрати такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, що справджується рівність :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0.$$

Систему векторів, яка не є лінійно залежною, називають *лінійно незалежною*. Іншими словами, маємо ще таке означення.

Означення. Система m ($m \geq 1$) n -вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ називається лінійно незалежною, якщо рівність $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ справджується тільки тоді, коли всі числа $\lambda_i = 0$.

Розглянемо деякі найпростіші властивості лінійно залежних і лінійно незалежних систем векторів.

1. *Поняття лінійної залежності і поняття лінійної комбінації рівносильні*, тобто справедливі такі два твердження.

а) Якщо система m ($m > 1$) n -вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ лінійно залежна, то хоча б один з векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших.

б) Якщо один з векторів системи $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($m > 1$) є лінійною комбінацією інших, то ця система векторів лінійно залежна.

2. Якщо система векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ є лінійно незалежною, а система векторів $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ є лінійно залежною, то вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$.

3. Поняття лінійної залежності чи незалежності по суті стосується системи кількох векторів, а не одного вектора.

4. Будь-яка система векторів, яка включає нуль-вектор, є лінійно залежною.

5. Назвемо підсистемою системи m векторів сукупність будь-яких

k ($k < m$) векторів цієї системи. Довільна підсистема лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ є також лінійно незалежною системою.

Наслідок. Якщо деяка підсистема системи векторів є лінійно залежною, то і вся систем векторів є лінійно залежною.

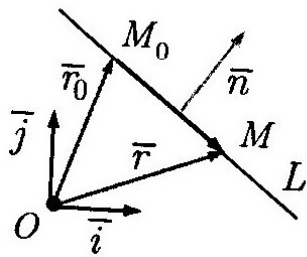
2.5. Пряма лінія на площині

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай задано деяку пряму L , точку $M_0(x_0; y_0)$, що належить цій прямій, вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярний до неї.

Візьмемо точку $M(x, y)$ – довільну точку прямої.



Побудуємо вектор $M_0M = (x - x_0, y - y_0)$, який буде перпендикулярний вектору $\vec{n}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ або в координатній формі:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – *нормальне рівняння прямої, заданої точкою $M(x_0; y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A; B)$.*

2) Якщо в цьому рівнянні розкриємо дужки, то маємо $Ax + By + C = 0$ – *загальне рівняння прямої на площині*, A, B, C – числа, причому $C = -Ax_0 - By_0$.

Ми бачимо, що в прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y . Навпаки, це рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy .

Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння A і B .

В загальному рівнянні прямої коефіцієнти A і B – це координати векторів:

$\vec{p} = (-B; A)$ – напрямленого вектора даної прямої,

$\vec{n} = (A; B)$ – нормального (перпендикулярного вектора даної прямої).

Наприклад, рівняння $6(x - 3) - 2(y + 5) = 0$ визначає пряму, що проходить через точку $A(3, -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (6; -2)$.

Дослідимо загальне рівняння прямої:

1. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ – пряма, що проходить через початок системи координат ($O(0, 0)$ лежить на цій прямій).

2. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A}$ – пряма, паралельна осі Oy . Якщо ще і $C = 0$, то маємо $x = 0$ – рівняння осі Oy .

3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, тоді $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B}$ – пряма, паралельна осі Ox , якщо ще і $C = 0$, то маємо $y = 0$ – рівняння осі Ox .

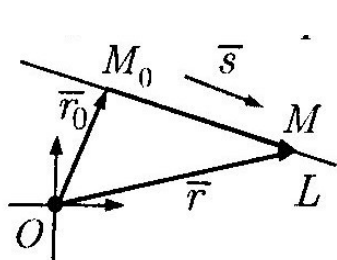
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Побудуємо вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Ці вектора колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2,4)$ і $M_2(-3,5)$:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-4}{5-4}, \text{ тобто } \frac{x-2}{-5} = y-4.$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому вектору $\bar{s} = \{l, m\}$.



Точка $M(x, y)$ лежить на цій прямій тоді, коли вектори $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ і $\bar{s} = \{l, m\}$ колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} - \text{канонічне рівняння прямої.}$$

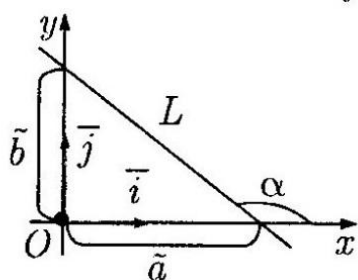
З цього рівняння можна отримати *параметричне рівняння* прямої:
$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = t, \\ \frac{y-y_0}{m} = t, \end{cases} \quad t \in R, \text{ де } t - \text{параметр.}$$

Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом

Якщо в рівняння прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт при y не дорівнює нулю, то рівняння можна розв'язати відносно y і тоді отримаємо $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Якщо позначити $k = -\frac{a}{b}$, $B = -\frac{c}{b}$, то будемо мати $y = kx + B$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі абсцис. Візьмемо дві точки на прямій $A(x_1, y_1) \in L$, $B(x_2, y_2) \in L$, $x_1 < x_2$. Тоді їх координати будуть задовольняти рівняння прямих $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$; $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$.

Рівняння прямої у відрізках



Нехай усі коефіцієнти в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ відмінні від нуля. Виконаємо деякі перетворення даного рівняння (перенесемо вільний член в праву частину рівняння і поділимо кожний коефіцієнт на $-C$), $Ax + By = -C$,

$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$, тоді $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях.

Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

Прямі можуть перетинатися, бути паралельними або співпадати.

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається такий кут φ , поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до співпаданя цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

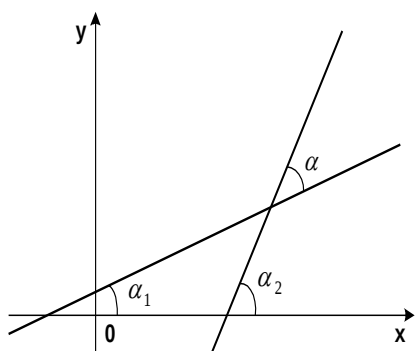
Зрозуміло, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1 .

Нехай маємо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Треба знайти кут α між ними.

За означенням кутового коефіцієнта прямої $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, крім того $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Отже:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$



Кут між прямими, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ визначається за формулою $\cos \alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Наприклад, якщо прямі задані рівняннями $3x + 4y - 2 = 0$ та $-x + y + 8 = 0$, то

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = 5x - 1$, $y = 6x - 8$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{6 - 5}{1 + 6 \cdot 5} = \frac{1}{31}.$$

Якщо кут α – це кут між l_1 і l_2 , то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \alpha$.

З цієї формули легко отримати умови паралельності і перпендикулярності двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Умова паралельності:

Прямі l_1 і l_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow k_1 = k_2,$$

$$\text{або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Коли $k_1 = k_2$ і $b_1 = b_2$ (або $A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$) прямі співпадають.

Наприклад, прямі $3x+4y=-1$ та $6x+8y=-2$ співпадають.

Прямі $y=7x+6$ і $3y=21x+18$ співпадають.

Прямі $3x+4y=-1$ та $6x+8y=-10$ паралельні.

Прямі $y=7x+6$ і $3y=21x+5$ паралельні.

Умова перпендикулярності:

Прямі l_1 і l_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), коли

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо:

$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ – умова перпендикулярності двох прямих.

Нехай задано деяку точку $M_0(x_0, y_0)$ і пряму $l: Ax + By + C = 0$. Якщо M_0 лежить на прямій, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$. В іншому випадку відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.6. Криві другого порядку на площині

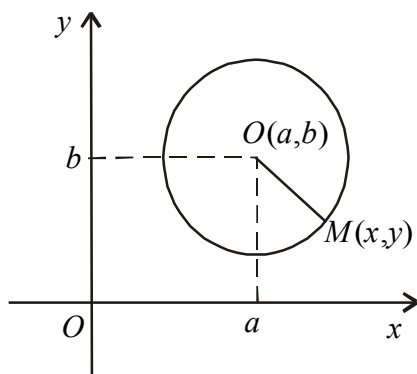
Лінії другого порядку можна виявити в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети Сонячної системи, по гіперболі або параболі – комети. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою; космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

Лінією другого порядку на площині називають множину точок площини, прямокутні координати (x, y) яких справджують алгебраїчне рівняння 2-го порядку: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, де a_{11}, a_{12}, a_{22} – коефіцієнти не рівні разом нулю.

До кривих другого порядку належать: еліпс, гіпербола, парабола. Окремим випадком еліпса є коло.

Коло

Відомі праці Архімеда «Книга про круги, що дотикаються», «Книга про будову круга, поділеного на сім рівних частин», «Книга лем».



Аполлоній із Перги ((262 – 190 до н.е., давньогрецький математик, один з представників александрійської школи) показав, що коло можна також задати як множину точок на площині, які мають однакове відношення відстаней до двох фокусів А і В. Про таке коло іноді кажуть, що воно задане двома точками.

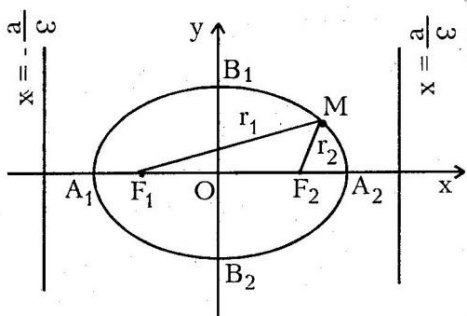
Дамо означення кола.

Коло – це множина точок, розміщених на однаковій відстані від заданої точки O (центра). За означенням $OM = R$.

В координатній формі: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$. Піднесемо праву і ліву частину до квадрата і отримаємо канонічне рівняння кола з центром в точці $O(a, b)$ і радіусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Еліпс



Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок (фокусів), що лежать в цій площині, є величиною сталою, більшою за відстань між фокусами, такою, що дорівнює даному числу $2a$.

Відстань між фокусами, що позначається через $2c$, називається фокальною. Дане число $2a$ називається великою віссю, а число $2b$ – малою віссю.

Нехай $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокуси еліпса, $M(x, y)$ – точка еліпса, тобто за означенням $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді, підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - канонічне рівняння еліпса (з центром в початку координат), де $b^2 = a^2 - c^2$, a – велика півось еліпса, b – мала півось.

Один з приладів для механічного креслення еліпса – еліптичний циркуль сконструював італійський вчений Леонардо да Вінчі наприкінці XV ст.

Числові характеристики еліпса:

Ексцентриситет еліпса – це відношення відстані між фокусами до довжини великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1; \text{ (за означенням } c < a \text{)}.$$

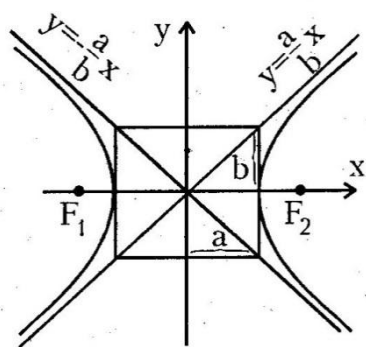
Ексцентриситет характеризує ступінь витягнутості еліпса. Для кола $a = b \Rightarrow \varepsilon = 0$. Якщо ε наближається до одиниці, то еліпс витягується вздовж осі Ox (a – велика півось еліпса, b – мала півось).

Дві прямі, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{e}$, називаються *директрисами еліпса*. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких (за абсолютним значенням) до двох заданих точок (фокусів) стала. Або можна дати інше означення гіперболи: це крива, яка є лінією перетину кругового конуса і площини, паралельної двом твірним конуса.

Нехай дано гіперболу. Нехай точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ – фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ належить гіперболі.



Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a, a < c$.

Підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо канонічне рівняння гіперболи (з центром в початку координат):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2, a - \text{дійсна півось гіперболи, } b - \text{уявна півось.}$$

Властивості гіперболи:

1. Не перетинає вісь Oy .
2. Точки перетину з віссю Ox : при $y = 0$; $x = \pm a$. Отже, це точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$.
3. Симетрична відносно осей ox і oy .

Числові характеристики гіперболи:

Ексцентриситет гіперболи відстані між фокусами до довжини $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ ($c > a$). $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує нахил віток гіперболи до осі Ox .

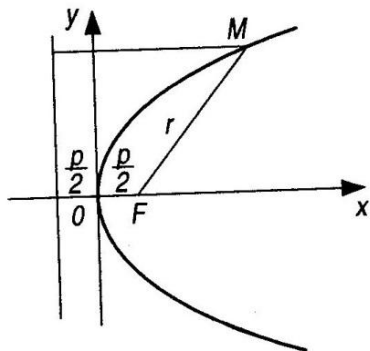
Асимптоти гіперболи – прямі, які наближаються до віток гіперболи, але ніколи їх не перетинають. У гіперболи їх дві.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – рівняння асимптот гіперболи.

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять між вітками гіперболи.

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (фокуса) дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої (директриси).



Нехай дано параболу. Введемо декартову систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус параболі перпендикулярно до директриси і була направлена від директриси до фокусу, початок координат розташовано між фокусом і директрисою, тоді дана параболою буде визначатися рівнянням: $y^2 = 2px$ – канонічне рівняння параболі,

де p – фокальний параметр. Проводячи аналогічні міркування, можна отримати $x^2 = 2py$ – рівняння параболі з центром в початку координат, симетричної відносно осі Oy .

З рівняння параболі випливає, що: 1) параболою розташована у правій півплощині $x \geq 0$; 2) вісь абсцис – вісь симетрії; 3) параболою перетинає вісь Ox у точці $O(0,0)$; 4) пряма $x = -\frac{p}{2}$ – директриса; 5) фокальний радіус довільної точки $M(x,y)$ параболі можна обчислити за формулою $r = \frac{p}{2} + x$.

Параболою є множиною точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси $r = d$.

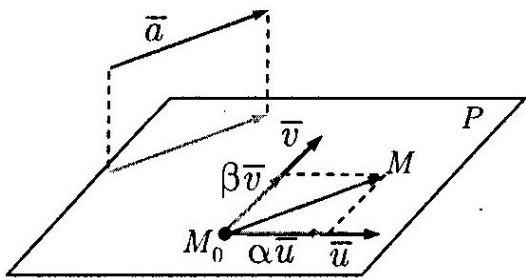
2.7. Площина та пряма в просторі. Різні способи задання

Загальне рівняння площини

Нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$ і точка $M(x, y, z) \in \alpha$. Тоді рівняння площини в векторній формі записується так: $\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, так як $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, де $\vec{r}_0$ – радіус вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$. Це рівняння можна записати у координатній формі: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, де $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ або $Ax + By + Cz + D = 0$, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. У просторі будь-яке лінійне рівняння вигляду $Ax + By + Cz + D = 0$ задає площину і називається загальним рівнянням площини.

Окремі випадки загального рівняння площини:

1. Якщо вільний член дорівнює нулю, то площина проходить через початок координат;



2. Один з коефіцієнтів при біжучих координатах дорівнює нулю, $D \neq 0$:

площина паралельна осі Ox – $By + Cz + D = 0$

площина паралельна осі Oy – $Ax + Cz + D = 0$

площина паралельна осі Oz – $Ax + By + D = 0$.

3. Один з коефіцієнтів при біжучих координатах дорівнює нулю, $D = 0$:

площина проходить через вісь Ox – $By + Cz = 0$

площина проходить через вісь Oy – $Ax + Cz = 0$

площина проходить через вісь Oz – $Ax + By = 0$.

4. Два коефіцієнти при біжучих координатах дорівнюють нулю, $D \neq 0$:

площина паралельна площині Oyz – $Ax + D = 0$

площина паралельна площині Oxz – $By + D = 0$

площина паралельна площині Oxy – $Cz + D = 0$.

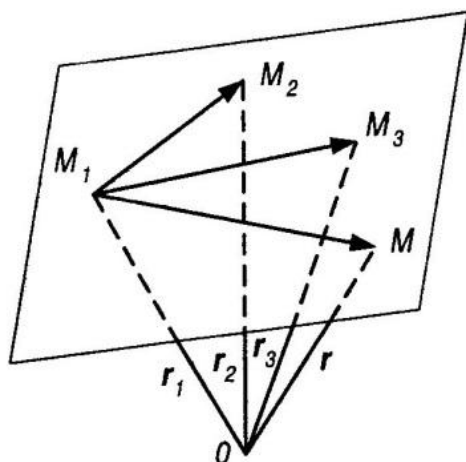
5. Два коефіцієнти при біжучих координатах дорівнюють нулю, $D = 0$:

рівняння площини Oyz – $Ax = 0$, $x = 0$

рівняння площини Oxz – $By = 0$, $y = 0$

рівняння площини Oxy – $Cz = 0$, $z = 0$.

Рівняння площини, що проходить через три точки



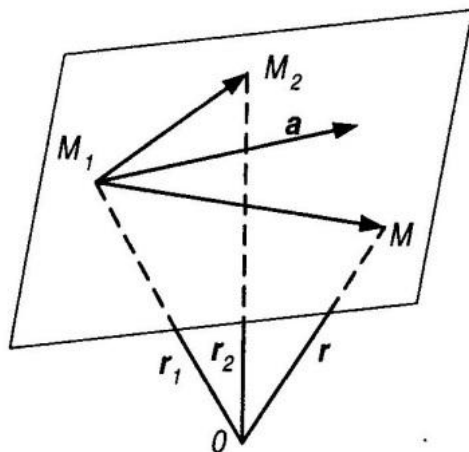
Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка площини α , яка проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ і $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$, $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}$ – радіус-вектори даних точок. Введемо ще такі вектори: $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$. Так як ці вектори лежать в одній площині, то їх мішаний добуток дорівнює нулю $(\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$ або в

координатній формі рівняння має вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння площини, що проходить через дві дані точки, паралельно даному вектору

Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка площини α , яка проходить через дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, паралельно даному вектору



$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Вектори $\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}$ – не колінеарні. Відкладемо вектор $\vec{a}$ від точки M_1 , тоді $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ – радіус-вектори даних точок. Введемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$. Вектори $\vec{a}, \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ лежать в одній площині, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}(\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$. В координатній

формі рівняння має вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічним чином, до двох попередніх доведень, виводиться рівняння площини, що проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, паралельно двом даним не колінеарним векторам $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$,

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$, $\vec{r}_1$ – радіус-вектор даної точки M_1 , тоді вектори компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю:

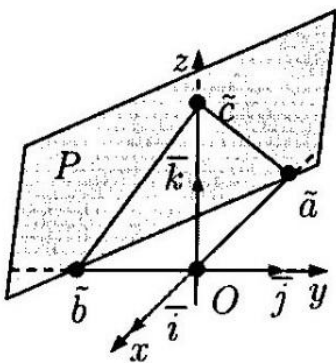
$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \vec{a} \vec{b} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальне рівняння площини

Нехай точка $M(x, y, z)$ не належить площині $Ax + By + Cz + D = 0$. Опустимо перпендикуляр з точки M на площину і нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ основа перпендикуляра. Так як точка M_0 належить площині, то її координати задовольняють рівняння $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, $\vec{n} \overrightarrow{M_0M} = 0$, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = \pm |n| \delta$, $\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$, δ – відстань від точки до площини. Коефіцієнт пропорційності $\pm |n| = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Якщо в рівнянні площини $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, то $Ax + By + Cz + D$ буде дорівнювати з точністю до знаку відстані точки від площини. В цьому випадку кажуть, що площина задана рівнянням в нормальній формі. Для того, щоб отримати рівняння площини в нормальній формі, достатньо розділити його на вираз $\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Відстань від даної точки до площини обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рівняння площини у відрізках на осях

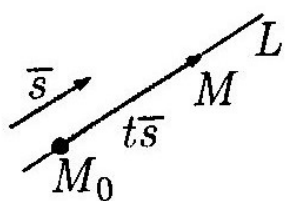


Нехай усі коефіцієнти в загальному рівнянні площини відмінні від нуля. Зробивши перетворення, отримаємо $Ax + By + Cz = -D$, $\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$, де $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. Рівняння виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння в відрізках на осях.

Пряма в просторі. Різні способи задання прямої в просторі. Канонічне рівняння прямої у просторі

Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на двох поверхнях.

Будь яку пряму можна задати як перетин двох площин і навпаки, будь яка система двох незалежних рівнянь представляє



собою рівняння деякої прямої.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad \text{рівняння}$$

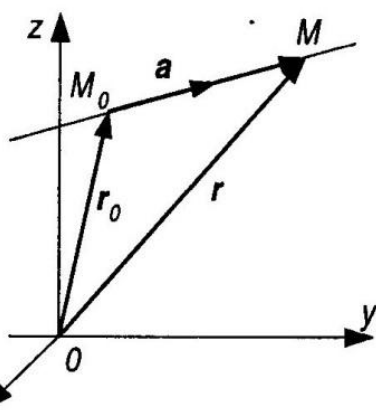
прямої подається як *перетин двох площин* (припускається, що площини непаралельні).

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фіксована точка даної прямої, $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої і вектор $\vec{s}(k, l, m)$ – вектор паралельний прямій. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, вектори колінеарні і їх координати пропорційні, тобто маємо співвідношення $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$. Ця форма рівняння прямої називається *канонічною*. Їх сприймають як умову колінеарності векторів, і якщо, наприклад, $m=0$, то це означає, що $z - z_0 = 0$, $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l}$ або, наприклад $k=l=0$, $x - x_0 = 0, y - y_0 = 0, z \in R$.

З рівняння прямої в канонічній формі можна отримати її рівняння в параметричній. Припускаючи, що загальне значення трьох співвідношень канонічного рівняння дорівнює t . Тобто кожній точці прямої відповідає певне значення параметра і навпаки, кожному значенню параметра t відповідає певний радіус-вектор точки на прямій.

Параметричне рівняння прямої у просторі

Нехай задано прямокутну систему координат $Oxyz$. Пряму L задають точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a}(k, l, m)$ і нехай точка $M(x, y, z)$ належить прямій L . Тоді



$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$, де t – будь-яке дійсне число $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ – *векторне параметричне рівняння* прямої.

Тоді в матричній формі –

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases} \quad - \quad \text{рівняння прямої в}$
параметричній формі.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай напрямний вектор прямої проходить через дві різні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M(x, y, z)$ належить даній прямій, тоді $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. З колінійності векторів отримаємо: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки.

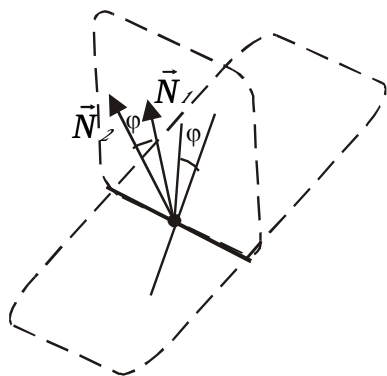
Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, точка через яку проходить пряма, а вектор $\vec{s}(k, l, m)$ – напрямний вектор, напрямні коефіцієнти якого є проекціями на координатні осі Ox , Oy , Oz . Якщо α, β, γ – кути між прямою і відповідними координатними осями, то: $\cos \alpha = \pm \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$; $\cos \beta = \pm \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$; $\cos \gamma = \pm \frac{m}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$, які називаються напрямними косинусами прямої. Направні коефіцієнти k, l, m можна розглядати як проекції на координатні осі вектора, паралельного прямій (причому одночасно дорівнювати нулю вони не можуть). Канонічне рівняння прямої з направляючими коефіцієнтами можна записати у такому вигляді:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}, \quad \frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\cos \beta} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma}.$$

2.8. Взаємне розміщення прямих і площин в просторі

Кут між площинами

Розглянемо дві площини α і β , які задано відповідно рівняннями



$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут φ між площинами α і β дорівнюватиме куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, перпендикулярними до цих площин, тому

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}.$$

Умова перпендикулярності двох площин (скалярний добуток векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ дорівнює нулю): $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Умова паралельності двох площин: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Відстань від точки до площини

За аналогією з формулою знаходження відстані від точки до прямої на площині можна записати формулу знаходження відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Наприклад, відстань від точки $M(0, 4, 5)$ до площини $3x + 4y - 5z + 1 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot (-5) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{50}}.$$

Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

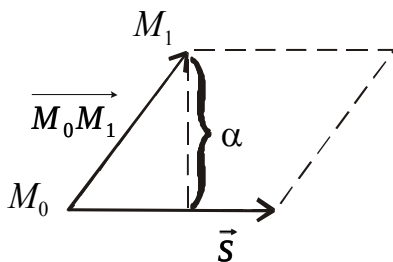
З останньої формули випливає умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.



Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\vec{M_0M_1}$ і $\vec{s}$. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм.

Шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|\vec{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Кут між прямою і площиною

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$ у просторі.

Якщо $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$, то пряма перпендикулярна до площини.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, то пряма паралельна площині.

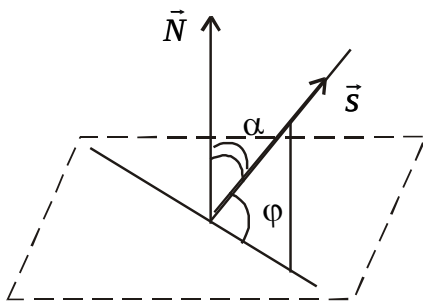
Нехай пряма паралельна площині, тобто $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до параметричного рівняння прямої $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$ і підставимо значення x, y, z у рівняння площини: $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$.

Звідси знайдемо значення параметра

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}, Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Підставимо знайдений параметр в параметричне рівняння прямої і знайдемо координати точки перетину: $x = x_0 + mt_0, y = y_0 + nt_0, z = z_0 + pt_0$.

Знайдемо кут між площиною і прямою.



Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину. Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ – перпендикулярний до площини, а кут α , який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90° : $\alpha + \varphi = 90^\circ$.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{s}}{|\vec{N}| |\vec{s}|}$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = -\sin \varphi$, у будь-якому разі $\sin \varphi = |\cos \alpha|$. Отже,

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

2.9. Приклади розв'язування задач

Задача 1. В паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$. Виразити інші вектори через $\vec{p}$, і $\vec{q}$: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$.

Розв'язання: Так як вектори BC і AD колінеарні, то їх довжини рівні і однаконо направлені (протилежні сторони паралелограма рівні і паралельні). Тому у відповідності з означенням рівності векторів маємо $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{q}$. Вектори AB і CD мають рівні довжини, але протилежно направлені, тому маємо: $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{p}$. Вектор AC є сумою векторів AB і BC , але $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$. За означенням різниці двох векторів будемо мати: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{q} - \vec{p}$, а вектор $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{p} + \vec{q}) = -\vec{p} - \vec{q}$.

Задача 2. Довести, що при будь-якому розташуванні точок A , B , C справедлива формула: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

Розв'язання: Вектор BC відкладений від кінця вектора AB , вектор CA від кінця вектора BC , в такому випадку кінець вектора CA співпадає з початком вектора AB . Тому сума $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ є вектором, кінець і початок якого співпадають. Такий вектор за означенням є нуль-вектор, що і треба було довести.

Задача 3. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю Ou кут $\alpha = 60^\circ$, а вектор $\vec{b}$ утворює з цією ж віссю кут $\beta = 120^\circ$. Знайти проекцію суми $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{c} = 3\vec{a}$, на вісь Ou , якщо $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$

Розв'язання: Так як проекція суми векторів дорівнює сумі їх проекцій, то необхідно знайти проекцію кожного доданка на вісь Ou . За формулою $\text{пр}_{Ou} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$ отримаємо, що $\text{пр}_{Ou} \vec{a} = 6 \cos \alpha = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$, $\text{пр}_{Ou} \vec{b} = 4 \cos \beta = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$. Знайдемо проекцію вектора $\vec{c}$, $\text{пр}_{Ou} \vec{c} = 3\text{пр}_{Ou} \vec{a} = 3 \cdot 3 = 9$. За першою властивістю знайдемо проекцію суми даних векторів

$$\text{пр}_{Ou}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_{Ou} \vec{a} + \text{пр}_{Ou} \vec{b} + \text{пр}_{Ou} \vec{c} = 3 + (-2) + 9 = 10.$$

Задача 4. Дано три вершини паралелограма $ABCD$. визначити довжину його діагоналей, якщо $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$.

Розв'язання: Задачу можна розв'язати двома способами, розглянемо їх. Перший спосіб: розглянемо вектори AB і BC , які

суміщаються з відповідними сторонами паралелограма, тоді $\overrightarrow{AB} = (5-3; -7 - (-7)) = (2; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2-5; 5-(-7)) = (-7; 12)$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ розміщені послідовно, отже вектор $\overrightarrow{AC}$, який суміщається з діагоналлю AC паралелограма, можемо записати за означенням суми векторів так: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, або $\overrightarrow{AC} = (2 - (-7); 0 + 12) = (-5; 12)$, а його модуль $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25 + 144} = 13$. Визначимо модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 0} = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{49 + 144} = \sqrt{193}$. За відомою теоремою шкільного курсу геометрії про залежність між сторонами та діагоналями паралелограма можемо записати так: $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$, де BD – друга діагональ паралелограма $ABCD$. Тоді будемо мати: $8 + 386 = 169 + BD^2$, $BD = \sqrt{225} = 15$. Отже $AC = 13$, $BD = 15$.

Розглянемо другий спосіб розв'язання задачі. Довжина діагоналі AC визначається так само, як і в першому способі. Для визначення довжини діагоналі BD позначимо координати точки $D(x, y)$.

Тоді $\overrightarrow{AD} = (x - 3; y + 7)$, $\overrightarrow{BC} = (-7; 12)$. Так як вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні, то і їх одноіменні координати теж рівні: $\begin{cases} x - 3 = -7 \\ y + 7 = 12 \end{cases}$, звідки $x = -4$, $y = 5$. Маємо $D(-4; 5)$, тому $\overrightarrow{BD} = (-4 - 5; 5 - (-7)) = (-9; 12)$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{81 + 144} = 15$.

Задача 5. Чому дорівнює сума $(a, b) + (b, c) + (c, a)$, якщо a, b, c – три орти, що задовольняють умову: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Розв'язання: Якщо сума векторів є нуль-вектор, то це означає, що вектори-доданки розміщені послідовно і утворюють замкнену фігуру. У даному випадку задані три вектори суміщаються із сторонами трикутника і розміщені послідовно. Для розв'язування задачі використаємо властивості скалярного добутку: 1) $\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$; 2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; 3) $(a, b) = (b, a)$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c})$. Знайдемо скалярний квадрат вектора

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0, (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(a, b) + 2(a, c) + 2(b, c) = 0.$$

За умовою задачі $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$, тому будемо мати, що сума $(a, b) + (b, c) + (c, a) = -\frac{3}{2}$.

Задача 6. Визначити довжину діагоналей паралелограма $ABCD$ і величину кута A , якщо паралелограм побудовано на векторах $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання: На підставі властивостей скалярного добутку маємо право записати:

$$AC = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(8\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{64\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 32\vec{a}\vec{b}} = 8\sqrt{7},$$

де вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{a} + 2\vec{b}$, аналогічно знайдемо вектор

$$\overrightarrow{BD} = \sqrt{\overrightarrow{BD}^2} = \sqrt{(2\vec{a} + 4\vec{b})^2} = 4\sqrt{21}, \text{ де } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}. \text{ Кут } A$$

лежить між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, отже

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{ABAD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{(3\vec{a}-\vec{b})(5\vec{a}+3\vec{b})}{\sqrt{(3\vec{a}-\vec{b})^2}\sqrt{(5\vec{a}+3\vec{b})^2}} = \frac{7}{\sqrt{637}}.$$

Задача 7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, кут між векторами $\vec{m}, \vec{n}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання: За означенням модуля векторного добутку двох векторів маємо:

$$|[\overrightarrow{ABAD}]| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}| \sin A = S_{\text{пар}} = |[\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{m} - 3\vec{n}]|.$$

На підставі розподільної властивості векторного добутку маємо право записати:

$$S_{\text{пар}} = |[\vec{m}\vec{n}] + 2[\vec{n}\vec{m}] - 3[\vec{m}\vec{n}] - 3[\vec{n}\vec{m}]| = 5|[\vec{n}\vec{m}]| = 5 \cdot 5 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{75}{2}.$$

Отже площа паралелограма дорівнює $\frac{75}{2}$ кв. од.

Задача 8. Дано вершини трикутника $A (1; -1; 2)$, $B (5; -6; 2)$, $C (1; 3; -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .

Розв'язання: З відомої формули для площі трикутника $S = \frac{1}{2}ha$ дістанемо $h = \frac{2S_{ABC}}{AC}$. Знайдемо площу трикутника, виходячи з того, що вона чисельно дорівнює половині модуля векторного добутку двох векторів, які суміщаються із сторонами трикутника:

$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} [|\overrightarrow{ABAC}|]$. У декартовій системі координат ця формула записується так :

$$S_{\Delta} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} =$$

$$= \frac{25}{2} \text{ кв. од.}$$

Знайдемо довжину вектора $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = 5$, отже шукана висота дорівнює $h = \frac{2 \cdot 25}{2 \cdot 5} = 5$ лін.од.

Задача 8. Об'єм тетраедра 15 куб.од., а три його вершини знаходяться в точках $A (2; 1; -1)$, $B (3; 0; 1)$, $C (2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D цього тетраедра, якщо відомо, що вона лежить на осі OZ .

Розв'язання: Якщо точка D лежить на осі OZ , то вона має такі координати $D (0; 0; z)$. Об'єм тетраедра становить $\frac{1}{6}$ частину об'єму відповідного паралелепіпеда. А об'єм паралелепіпеда чисельно дорівнює модулю мішаного добутку трьох векторів, які суміщаються з його ребрами і мають спільний початок. Отже, $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{ABAC}] \overrightarrow{AD}|$. Знайдемо всі ці вектори: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; -1; z + 1)$. Мішаний добуток визначається формулою:

$$[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & z + 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-2z + 2| = 15,$$

$$90 = |-2z + 2|,$$

розв'язуючи це рівняння отримаємо два значення $z_1 = -44$, $z_2 = 46$. Отже, дана задача має два розв'язки: $D(0; 0; -44)$, $D(0; 0; 46)$.

Задача 9. Перевірити компланарність векторів $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (3; -1; -2)$.

Розв'язання: Умовою компланарності векторів є те, що їх мішаний добуток дорівнює нулеві. Знайдемо його: $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} =$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -25 \neq 0. \text{ Отже, дані вектори не є компланарними.}$$

Задача 10. Скласти рівняння траєкторії точки M , яка в кожний момент руху міститься вдвічі ближче до точки $A (3;2)$, ніж до точки $B (-4;5)$.

Розв'язання: Запишемо віддаль між точками A і M , а також між точками B і M : $AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$; $BM = \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2}$.

Виходячи з умови задачі, маємо право записати, що $2AM = BM$, виконавши певні алгебраїчні перетворення, отримаємо $3x^2 + 3y^2 - 32x - 6y + 11 = 0$. Розглядаючи це рівняння, помічаємо, що старші коефіцієнти рівні, відсутні члени з добутком біжучих координат. Отже, знайдене рівняння є рівнянням кола. Після перетворень одержуємо його канонічне рівняння: $\left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{232}{9}$. Центр цього кола знаходиться в точці $O \left(\frac{16}{3}; 1\right)$, а радіус дорівнює $\frac{\sqrt{232}}{3}$.

Задача 11. На осі ординат прямокутної системи координат знайти точку, яка рівновіддалена від початку координат і від прямої $3x - 4y + 12 = 0$.

Розв'язання: Нехай шукана точка $M (0; y)$, дана пряма c , тоді $MO = d(M, c)$. Оскільки $O (0;0)$, то $MO = y$, а $d(M, c) = \frac{|3 \cdot 0 - 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-4y + 12|}{5}$; отримали рівняння $\frac{|-4y + 12|}{5} = y$, що рівносильно сукупності рівнянь $\begin{cases} -4y + 12 = 5y \\ 4y - 12 = 5y \end{cases}$. Розв'язуючи сукупність, одержимо два значення $y_1 = \frac{4}{3}$, $y_2 = 12$, тобто маємо дві точки з координатами $M_1 \left(0; \frac{4}{3}\right)$, $M_2(0; 12)$.

Задача 12. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A (2; -1)$ і утворює з віссю OX кут, вдвічі більший від кута, який утворює з тією ж віссю пряма $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$.

Розв'язання: Складемо рівняння прямої, що проходить через точку A і має кутовий коефіцієнт k , $y + 1 = k(x - 2)$. Виходячи з геометричного змісту кутового коефіцієнта, можемо записати $k = \tan 2\alpha$, де α є кут утворений заданою прямою з віссю OX .

$tg\alpha = k_1 = \frac{1}{3}$, $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, $k = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$. Тепер можемо записати рівняння шуканої прямої: $y + 1 = \frac{3}{4}(x - 2)$, $3x - 4y - 12 = 0$.

Задача 13. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x+2y-7=0$ і $5x+2y-36=0$ та рівняння діагоналі $3x+7y-10=0$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника і його другої діагоналі.

Розв'язання: Звертаємо увагу на те, що задані сторони прямокутника лежать на паралельних прямих, бо виконується умова паралельності прямих $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Тоді дві інші сторони прямокутника будуть перпендикулярними до даних прямих, отже, їх кутові коефіцієнти можна визначити з умови перпендикулярності прямих $k = -\frac{1}{k_1}$, k_1 – кутовий коефіцієнт заданої прямої, запишемо

дане рівняння у вигляді $2y = -5x+7$ або $y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$, тоді

$k_1 = -\frac{5}{2}$, $k = \frac{2}{5}$. Щоб скласти рівняння прямої, крім кутового коефіцієнта, потрібно знати ще точку, через яку проходить дана пряма. Точки, через які проходять шукані сторони прямокутника можна визначити як точки перетину відомих сторін прямокутника з його відомою діагоналлю. Знайдемо ці точки, розв'язуючи відповідні системи рівнянь

$\begin{cases} 5x + 2y - 7 = 0 \\ 3x + 7y - 10 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 5x + 2y - 36 = 0 \\ 3x + 7y - 10 = 0 \end{cases}$. Отже, визначили точки

A (1;1), C (8;-2) Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку A і перпендикулярно до заданих сторін $y - 1 = \frac{2}{5}(x - 1)$,

$2x - 5y + 3 = 0$. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку C і перпендикулярно до заданих сторін прямокутника

$y + 2 = \frac{2}{5}(x - 8)$, $2x - 5y - 26 = 0$. Щоб знайти рівняння другої діагоналі, знайдемо дві інші вершини прямокутника B і D як точки перетину відповідних сторін. Для цього складемо і розв'яжемо такі

системи рівнянь $\begin{cases} 5x + 2y - 36 = 0 \\ 2x - 5y + 3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 5x + 2y - 7 = 0 \\ 2x - 5y - 26 = 0 \end{cases}$, звідки

маємо B (6;3) і D (3;-4). Рівняння діагоналі запишемо як рівняння

прямої, що проходить через дві точки В і D. $\frac{x-3}{6-3} = \frac{y+4}{3+4}$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{7}$, $7x - 3y - 33 = 0$. Таким чином знайшли рівняння всіх сторін і діагоналей даного прямокутника.

Задача 14. Знайти координати точки А, яка рівновіддалена від точок В (4; -3) і С (2; -1), і віддалі якої від прямої $2x + y - 1 = 0$ дорівнює 2 лін.од.

Розв'язання: Позначимо через x і y координати шуканої точки А. За умовою задачі $BA = CA$, отже

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Виконавши алгебраїчні перетворення, дістаємо таке співвідношення: $x - y - 5 = 0$. Для визначення x та y потрібно мати ще одне рівняння відносно цих координат. Для цього знайдемо віддалі точки А від прямої $2x + y - 1 = 0$. Спочатку приведемо рівняння цієї прямої до нормального вигляду, для цього знайдемо нормуючий множник (знак якого береться протилежним знаку вільного члена) $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $M = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, тому нормальне рівняння прямої матиме вигляд $\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}} = 0$. Віддалі будь-якої точки до прямої визначається рівністю $d = \frac{|Ax+By+C|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. Отже, маємо

$2 = \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}}$, що дає два рівняння відносно x та y : $2\sqrt{5} = 2x + y - 1$,

$2\sqrt{5} = -2x - y + 1$. Складемо відповідні системи рівнянь з яких зможемо знайти координати шуканої точки А:

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 1 - 2\sqrt{5} = 0 \end{cases}; \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 1 + 2\sqrt{5} = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи ці системи отримаємо дві точки $A_1 \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}; -3 + \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $A_2 \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}; -3 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.

Задача 15. Знайти віддалі між прямими: $3x + 4y + 2 = 0$ і $6x + 8y - 5 = 0$.

Розв'язання: Дані прямі паралельні, так як виконується умова паралельності $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \neq \frac{2}{-5}$. Ці прямі розміщені по різні боки від початку координат, бо їх нормуючі множники різних

знаків, а це вказує на те, що вектори-нормалі мають протилежний напрям. Отже, віддаль між даними прямими дорівнює сумі віддалей цих прямих від початку координат: $d = p_1 + p_2$. Знайдемо нормуючі множники даних прямих і величину нормалей: $M_1 = -\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{1}{5}$, $p_1 = \frac{2}{5}$; $p_2 = \frac{1}{2}$, $M_2 = \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{1}{10}$. Відстань між даними прямими дорівнює $d = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$.

Задача 16. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи координати однієї його вершини $A(3; -1)$ і рівняння бісектриси $x - 4y + 10 = 0$ та медіани $6x + 10y - 59 = 0$, проведених з різних вершин.

Розв'язання: Координати точки A не задовольняють ні рівняння бісектриси, ні рівняння медіани. Нехай бісектриса проведена з вершини B , а з вершини C – медіана. Координати точки B позначимо через x_0 та y_0 , а точка D тоді є основою медіани (вона середина відрізка AB), $D\left(\frac{x_0+3}{2}; \frac{y_0-1}{2}\right)$. Запишемо умову належності точки B до бісектриси: $x_0 - 4y_0 + 10 = 0$. Умова належності точки D до медіани $6\frac{x_0+3}{2} + 10\frac{y_0-1}{2} - 59 = 0$. Ці дві умови складають систему рівнянь, розв'язками якої є координати точки B : $\begin{cases} x_0 - 4y_0 + 10 = 0 \\ 3x_0 + 5y_0 - 35 = 0 \end{cases}$, $x_0 = 10$, $y_0 = 5$. Рівняння сторони AB можна розглядати як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B , а саме: $\frac{x-3}{10-3} = \frac{y+1}{5+1}$, $6x - 7y - 2 = 0$. Для визначення рівняння сторони BC , точка B якої відома, потрібно знайти ще одну точку, яка лежала б на BC . Такою точкою є точка, симетрична точці A відносно бісектриси кута B . Знайдемо її. Для цього складемо рівняння прямої, що проходить через точку A і перпендикулярна до бісектриси кута B : $y - 1 = k(x - 3)$. Кутовий коефіцієнт бісектриси $k_1 = \frac{1}{4}$, $k = -4$, $kk_1 = -1$ – умова перпендикулярності прямих. Отже маємо рівняння $y + 1 = -4(x - 3)$ або $4x + y - 11 = 0$. Знайдемо точку P перетину цього перпендикуляра з бісектрисою: $\begin{cases} x - 4y + 10 = 0 \\ 4x + y - 11 = 0 \end{cases}$, $P(2; 3)$. Точка A і її симетрична точка K знаходяться на однаковій відстані від точки P , причому точка P

лежить на АК, отже, Р – середина відрізка АК. Використаємо це для знаходження координат точки К: $2 = \frac{3+x}{2}$, $3 = \frac{-1+y}{2}$, $x = 1, y = 7$, тобто К (1; 7). Тепер можна вже знайти рівняння прямої ВС, як прямої, що проходить через дві точки В і К: $\frac{x-10}{1-10} = \frac{y-5}{7-5}$, $2x + 9y - 65 = 0$. Для знаходження рівняння прямої АС, необхідно знайти координати точки С, як спільної точки прямої ВС та відомої медіани, запишемо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + 9y - 65 = 0 \\ 6x + 10y - 59 = 0 \end{cases}$, звідки маємо С $(-\frac{7}{2}; 8)$. Знайдемо рівняння прямої АС:

$$\frac{x-3}{3,5-3} = \frac{y+1}{8+1}, \quad 18x + 13y - 41 = 0.$$

Задача 17. Обчислити висоту КО піраміди АВСК з вершинами К (0;6;4), А (3;5;3), В (-2;11;-5), С (1;-1;4).

Розв'язання: Складемо рівняння площини АВС:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -2-3 & 11-5 & -5-3 \\ 1-3 & -1-5 & 4-3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6(x-3) + 16(y-5) + 30(z-3) + 12(z-3) + 5(y-5) - 48(x-3) = 0, \quad 2x - y - 2z + 5 = 0.$$

Оскільки $AK \perp (ABC)$, то $AK = d(K, (ABC))$. Використовуючи формулу відстані від точки до площини, одержимо

$$AK = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Задача 18. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку К (2; -1;3) паралельно векторам а (1;2; -1) і b (3; -1;4).

Розв'язання: Запишемо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Підставивши координати точки К і координати даних векторів, одержимо рівняння шуканої площини:}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad x - y - z = 0.$$

Задача 19. Записати рівняння площини, що проходить через точку $B(2; 3; -1)$ перпендикулярно вектору $a(2; 1; -1)$.

Розв'язання: Запишемо рівняння площини у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Підставивши дані $A = 2$, $B = 1$, $C = -1$ і координати вектора, одержимо:

$$2(x - 2) + (y - 3) - (z + 1) = 0, \quad 2x + y - z - 8 = 0.$$

Задача 20. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(1; 4; -3)$, $B(2; 1; 3)$.

Розв'язання: Запишемо рівняння прямої у вигляді $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Підставивши координати даних точок, дістанемо $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+3}{6}$.

Задача 21. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $A(1; -1; 3)$, $B(1; 2; 4)$ та перпендикулярна до площини $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Розв'язання: Оскільки шукана площина перпендикулярна до даної площини, то нормальний вектор даної площини $\vec{n} = (A; B; C) = (2; -3; 1)$ паралельний до вектора $AB(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (0; 3; 1)$, тоді рівняння площини

запишемо у вигляді $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ або

$-3(x - 1) + 6(z - 3) - 2(y + 1) - 3(x - 1) = 0$, $3x + y - 3z + 7 = 0$ – отримали рівняння шуканої площини.

Задача 22. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 3; 7)$ та пряму $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-1}$.

Розв'язання: З рівняння прямої – точка $P(0; 3; 5)$ належить шуканій площині; напрямний вектор даної прямої $\vec{l}(2; 5; -1)$, через яку проходить площина, паралельний до площини. Так як точки M і P належать площині, то вектор $\overrightarrow{PM}$ паралельний до шуканої площини

і має координати $(1; 0; 2)$. Отже рівняння площини набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad 2x - y - z + 8 = 0.$$

Задача 23. Знайти точку перетину даної площини $4x + 3y + 2z - 69 = 0$ з прямою $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Розв'язання: Запишемо параметричні рівняння прямої:
 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} = t, \quad \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$. Розв'язавши систему рівнянь,

отримаємо точку перетину прямої і площини:

$$4(2 + 4t) + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t - 69 = 0 \text{ або } 29t = 58, t = 2.$$

Тоді $x = 2 + 4 \cdot 2 = 10$; $y = 1 + 3 \cdot 2 = 7$; $z = 2 \cdot 2 = 4$. Точка перетину прямої з площиною має координати $A(10; 7; 4)$.

Задача 24. Через точку $A(1; 5, -1)$ провести пряму, перпендикулярну до прямих $a: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$, $b: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$.

Розв'язання: Напрямні вектори даних прямих $\vec{l}_1(-1; 3; -1)$, $\vec{l}_2(-3; 1; -2)$. Рівняння шуканої прямої запишемо у вигляді $\frac{x-1}{l_1} = \frac{y-5}{l_2} = \frac{z+1}{l_3}$; умови того, що $a \perp c$, $b \perp c$: $\begin{cases} -l_1 + 3l_2 - l_3 = 0 \\ -3l_1 + l_2 - 2l_3 = 0 \end{cases}$. Знайдемо розв'язки цієї системи, ввівши параметр t :
 $l_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} t = -5t$, $l_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} t = t$, $l_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} t = 8t$;
 покладемо, що $t = 1$. Отже, рівняння шуканої прямої c :
 $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

Задача 25. Більша вісь еліпса рівна 12, а директрисами цього еліпса є прямі $x = \pm 12$. Знайти рівняння еліпса та його ексцентриситет.

Розв'язання: Для складання рівняння еліпса необхідно знати його півосі a, b . За умовою задачі $12 = 2a$, $a = 6$. Піввісь b знаходимо із відношення $b^2 = a^2 - c^2$, а піввісь c можна знайти, використовуючи рівняння директрис еліпса $x = \pm \frac{a^2}{c}$. Взявши праву

директрису, одержимо $12 = \frac{a^2}{c}$, $c = \frac{a^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$, $b^2 = 36 - 9 = 27$,
 $b^2 = 27$. Маємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$,
а ексцентриситет еліпса $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Задача 26. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо відстань між її вершинами 8 і фокуси знаходяться в точках $(-3; 3)$ і $(7; 3)$.

Розв'язання: Фокуси гіперболи лежать на прямій $y = 3$ (ординати фокусів рівні 3). Отже, центр гіперболи лежить не в початку координат, але осі її паралельні координатним осям. В цьому випадку рівняння гіперболи має вигляд $((x_0; y_0) - \text{координати центра гіперболи}) \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Центр гіперболи буде лежати на прямій $y = 3$ і ділить відстань між фокусами навпіл.

Отже, $x_0 = \frac{-3+7}{2} = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $A(2; 3)$ – центр гіперболи. Далі згідно умови $2a = 8$, $a = 4$ і відстань між фокусами

$$2c = \sqrt{(7+3)^2 + (3-3)^2} = 10, c = 5.$$

Використовуючи залежність $b^2 = c^2 - a^2$, знайдемо $b = 3$. Тепер запишемо рівняння гіперболи

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Задача 27. Скласти рівняння параболи, що проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8y = 0$ та симетрична відносно осі Oy .

Розв'язання: Для знаходження точки перетину прямої і кола розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + 8y = 0 \end{cases}$. Знайдемо x з першого рівняння і підставимо в друге: $(-y)^2 + y^2 + 8y = 0$, $2y(y + 4) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, відповідно $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Маємо дві точки перетину $O(0; 0)$ і $M(4; -4)$. Рівняння параболи, що проходить через початок координат, симетрично відносно осі Oy , має вигляд: $x^2 = 2py$. З умови, що парабола проходить через точку M , визначимо параметр p : $4^2 = 2p(-4)$, $2p = -4$. Отже, шукане рівняння параболи має вид: $x^2 = -4y$.

Задача 28. Встановити по якій лінії площина $x - 2 = 0$ перетинає поверхню, знайти її півосі та вершини $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Розв'язання: Лінія перетину даного еліпсоїда з даною площиною записується такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ x - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$
. Це є рівняння еліпса, що лежить у даній площині. Центр його міститься в точці $O(2; 0; 0)$, відповідні півосі: $b = 3$, $c = \sqrt{3}$. Вершинами цього еліпса є точки: $A(2; 3; 0)$, $B(2; -3; 0)$, $C(2; 0; \sqrt{3})$, $D(2; 0; -\sqrt{3})$.

Задача 29. Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить в точці $K(0; 2; 3)$, а напрямною є лінія $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ z = -2 \end{cases}$.

Розв'язання: Складемо рівняння довільної твірної конічної поверхні, знайдемо залежність між l і m , що впливає з умови перетину твірної і напрямної, розв'язавши для цього систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ z = -2 \\ \frac{x}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{1} \end{cases}, \text{ де } l, m - \text{довільні.}$$

Виключимо біжучі координати:

$$\frac{x}{l} = z - 3, z = -2, x = -5l; \quad \frac{y-2}{m} = z - 3, y = 2 - 5m.$$

Знайдені значення x і y підставимо в перше рівняння системи $\frac{25l^2}{25} + \frac{(2-5m)^2}{16} = 1$ або $16l^2 + 25m^2 - 20m - 12 = 0$. Це рівняння виражає залежність між параметрами l і m . Біжучу точку твірної конічної поверхні можна розглядати як біжучу точку поверхні. Визначимо l , m через змінні і підставимо отримані значення в останнє рівняння: $\frac{x}{l} = z - 3, l = \frac{x}{z-3}, \frac{y-2}{m} = z - 3, m = \frac{y-2}{z-3}$.

$$16\left(\frac{x}{z-3}\right)^2 + 25\left(\frac{y-2}{z-3}\right)^2 - 20\frac{y-2}{z-3} - 12 = 0,$$

$$16x^2 + 25y^2 - 12z^2 - 20yz - 112z - 128 = 0.$$

Задача 30. Встановити взаємне розташування даних пар

$$\text{прямих: } l_1 \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t; \\ z = -2 + t \end{cases} \quad l_2 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t. \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо канонічне рівняння даних прямих:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{4}, \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1},$$

маємо $M_1(1; 7; 3) \in l_1$, $\vec{l}_1(2; 1; 4) \parallel l_1$; $M_2(6; -1; -2) \in l_2$, $\vec{l}_2(3; -2; 1) \parallel l_2$. Умова того, що дві прямі лежать в одній площині має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

де $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l_1$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in l_2$, $\vec{l}_1(l_1; m_1; n_1) \parallel l_1$, $\vec{l}_2(l_2; m_2; n_2) \parallel l_2$. Перевіримо умову належності двох прямих одній

площині: $\begin{vmatrix} -5 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 20 - 15 - 16 - 40 + 90 = 0$. Отже,

прямі лежать в одній площині і перетинаються, так як $\vec{l}_1; \vec{l}_2$ — не колінеарні.

Задача 31. Знайти рівняння площини, що дотикається до сфери $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$ та паралельна до площини $6x + 3y + 2z = 0$.

Розв'язання: Шукана площина паралельна до даної, тому її рівняння запишемо у вигляді $6x + 3y + 2z + D = 0$ (α). Центр сфери $C(0; -1; -2)$, радіус сфери $r = 3$, тому $r = \rho(C, \Pi)$. Скористаємося формулою відстані від точки до площини, одержимо $\rho(C, \alpha) = \frac{|6 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{36 + 3 + 4}} = \frac{|-7 + D|}{7}$, $3 = \frac{|-7 + D|}{7}$, $|-7 + D| = 21, D = 28$ або $D = -14$. Отже, отримали два рівняння площини: $6x + 3y + 2z + 28 = 0$.

Задача 32. Скласти канонічне рівняння прямої, що задана як лінія перетину площин: $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання: Рівняння прямої будемо шукати у вигляді: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Знайдемо координати $x_0; y_0; z_0$ будь якої точки, що належить прямій та координати $m; n; p$ напрямного вектора.

Нехай $z_0 = 0$: $\begin{cases} 5x_0 + y_0 = -4 \\ x_0 - y_0 = -2 \end{cases}$; $6x_0 = -6$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. Точка $M(-1; 1; 0)$ – належить даній прямій, а напрямний вектор прямої колінеарний вектору $[n_1, n_2]$, де $\vec{n}_1(5; 1; -3)$, $\vec{n}_2(1; -1; 2)$ – нормальні вектори до даних площин. Координати m, n, p напрямного вектора пропорційні координатам вектора $[n_1, n_2] = (1; -13; -7)$. Отже, рівняння шуканої прямої має вид: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z}{-7}$.

2.10. Завдання для самостійного опрацювання

1. Довести, що середня лінія трикутника дорівнює половині основи і паралельна їй (методом векторної алгебри).

2. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на дві частини, пропорціональні прилеглим бічним сторонам.

3. Визначити точку перетину медіан трикутника через радіус-вектори вершин.

4. Використавши залежність між радіус-векторами вершин паралелограма, довести, що його діагоналі діляться навпіл.

5. Задано довільний трикутник ABC , у якого точки M, K, P є серединами сторін. Вказати, які пари векторів рівні і які колінеарні.

6. Як повинні бути розміщені вектори $\vec{a}, \vec{c}$, щоб мало місце співвідношення $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{c}|$?

7. Нехай $\vec{a}, \vec{c}$ – довільні вектори. Показати, що $|\vec{a} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{c}|$. При яких умовах у цьому співвідношенні має місце знак рівності?

8. Під яким кутом може бути нахилений до осі вектор, проекція якого на цю вісь: а) додатна; б) від'ємна; в) дорівнює нулю?

9. Дано вектор $\vec{c}(-2; 4)$. Знайти довжину цього вектора, напрямні косинуси і кут нахилу до осі OX .

10. Встановити вид трикутника з вершинами $A(3; 1)$, $B(7; 5)$, $C(5; -1)$, користуючись апаратом векторної алгебри.

11. Розкласти вектор $\vec{x} = (2; 3; 1)$ за базисом векторів $\vec{a} = (5; 7; 0)$, $\vec{c} = (3; -2; 4)$, $\vec{p} = (4; 12; -3)$.

12. Знайти довжину і напрямні косинуси вектора, що суміщається з бісектрисою кута В трикутника з вершинами А (2;-1;3), В (4;0;1), С (-10;5;3)

13. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах: $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (0; -1; 2)$.

14. Задано вектори $\vec{a} = (3; 0; -4)$, $\vec{c} = (2; -1; -2)$. Обчислити $\text{pr}_{\vec{a}}(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

15. Показати, що $[\vec{a}, \vec{c}]^2 + (\vec{a}, \vec{c})^2 = \vec{a}^2 \vec{c}^2$.

16. Визначити кути трикутника з вершинами А (-1;3;2), В (-1;2;2), С (-3;1;4).

17. Визначити площу трикутника з вершинами А (2;-3), В (4;1), С (-2;3).

18. У трикутнику з вершинами А (1;2;3), В (3;1;4), С (-1;1;0) на прямій АВ знайти точку Р, щоб вектори $\overrightarrow{AP}$ та $\overrightarrow{CP}$ були перпендикулярні, та визначити площу трикутника АВС.

19. Довести колінеарність векторів $\vec{a}, \vec{c}$, якщо $\vec{p} = (5; 0; -2)$, $\vec{m} = (6; 4; 3)$; і вектори $\vec{a} = 5\vec{p} - 3\vec{m}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 3\vec{p}$.

20. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m} = (1; 5; 2)$, $\vec{n} = (-1; 1; -1)$.

21. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, кут $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

22. Довести компланарність точок А (1;2;1), В (0;1;2), С (-1;-1;0), D (2;0;1).

23. Обчислити об'єм паралелепіпеда, знаючи, що його вершини знаходяться в точках А (1;1;1), В (2;3;6), С (8;4;1), D (2;-2;1), де В, С, D – кінці ребер, що виходять з точки А.

24. Обчислити довжину висоти тетраедра, опущеної з точки D, якщо вершинами тетраедра є точки А (0;0;2), В (3;0;5), С (1;1;0), D (4;1;2).

25. Точки А (3;5;1), В (1;8;1), С (5;-1;0) і початок координат є вершинами тетраедра. Обчислити висоту тетраедра. Проведену з початку координат, площу грані АВС та об'єм тетраедра.

26. Написати рівняння трьох сторін трикутника з вершинами (-1;2), (5;0), (7;4).

27. Через точку Р (2;-3) провести пряму, паралельну (перпендикулярну) прямій $5x + 2y + 7 = 0$.

28. Дано вершини трикутника АВС: А (3;4), В (7;-2), С (5;6). Скласти рівняння медіани цього трикутника, яка виходить з вершини А.

29. Дано рівняння двох сторін трикутника $x - 2y - 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$ і середину третьої сторони (1;1). Знайти вершини трикутника.

30. Знайти площу трапеції, сторони якої визначаються прямими $x - 2 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 15 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

31. Задана вершина А (-3;5) та діагональ квадрата $x - 3y - 12 = 0$. Скласти рівняння його сторін.

32. Знайти координати точки В та рівняння прямої, якій належить ця точка, якщо вона симетрична точці А (-2;1) відносно прямої $y = -3x + 5$.

33. Дано рівняння медіан трикутника і одну з його вершин (2;-5), $x - 3y = 0$, $4x + 5y = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника і знайти його вершини.

34. Дано прямі: $x - 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$. Знайти пряму, яка паралельна двом даним і проходить по середині між ними.

35. Через точку А (1;0) провести пряму так, щоб віддалі точок В (2;1) і С (-1;2) до цієї прямої знаходились у відношенні 1:2.

36. Довести, що бісектриси кутів між прямими взаємно перпендикулярні $x - 2y - 2 = 0$, $4x + 3y - 12 = 0$.

37. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих та точку (3;-2), $2x - y + 1 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$.

38. Через точку перетину прямих $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести пряму, перпендикулярну до даної прямої $x + y - 4 = 0$.

39. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $C(4,5;-2)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 6.

40. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $11x + 3y - 7 = 0$, $12x + y - 19 = 0$ на однакових відстанях від точок $A(3;-1)$ і $B(1;6)$. Розв'язати задачу не обчислюючи координати точки перетину даних прямих.

41. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $(2;0;1)$, $(0;3;0)$, $(0;0;6)$ та визначити віддаль точки $M(3;-1;5)$ від цієї площини.

42. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $B(2;-1;4)$ і паралельна площині $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

43. Через дві точки $A(0;1;-1)$ і $B(1;2;0)$ провести площину, перпендикулярну до площини $3x - y + 2z = 0$.

44. Знайти площину, паралельну даним площинам і що проходить по середині між ними $2x - 3y - 4z + 1 = 0$, $4x - 6y - 8z - 3 = 0$.

45. Через лінію перетину площин $x - y + z = 0$, $3x + y - z - 1 = 0$ провести площину, перпендикулярну до площини $x + 3z = 0$.

46. Написати рівняння площин, які проходять через точку $M(1;2;-1)$ і паралельна кожній з координатних площин.

47. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;1;-5)$ і через кожну з координатних осей.

48. Площина проходить через точку $M(1;-2;5)$ та відтинає на осі абсцис напрямлений відрізок з довжиною $a = |-3|$, а на осі аплікат відрізок $c = 1$. Скласти рівняння площини у відрізках.

49. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точці $M(0;1;3)$.

50. Скласти рівняння множини точок, що знаходяться на відстані 3 від площини $6x - 3y + 2z - 14 = 0$.

51. Дано вершини трикутника: $A(1;2;1)$, $B(0;1;-1)$, $C(-1;2;3)$. Скласти рівняння його висоти, проведеної з вершини A .

52. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y + z = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

53. Через точку $A(-1;2;1)$ провести пряму, паралельну прямій

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

54. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3;2;1)$ і перпендикулярна до двох прямих

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 8t \\ z = -1 + 2t \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 5t \\ z = -t \end{cases}.$$

55. З даної точки $A(1;2;-3)$ опустити перпендикуляр на пряму

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

56. Скласти рівняння прямої, яка перетинає прямі $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$; $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{1}$ і паралельна прямій $\frac{x-4}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

57. Знайти точку, симетричну з точкою $M(4;3;10)$ відносно прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

58. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $\frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{7}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$.

59. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(5;1;2)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$.

60. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(5;-2;4)$ і пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$.

61. Написати рівняння кола, яке має центр в точці $(-4;3)$ і проходить: 1) через початок координат; 2) через точку $(-1;2)$.

62. Велика вісь еліпса дорівнює 26, мала вісь дорівнює 10. Написати рівняння еліпса, якщо його фокуси розміщені на осі OY . Знайти координати фокуса і ексцентриситет.

63. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо: 1) його мала вісь дорівнює 6, а віддаль між директрисами дорівнює 13; 2) віддаль між директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет дорівнює 0,5.

64. Визначити фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$.

65. Написати рівняння гіперболи з фокусами в точках $(3;0)$ і $(-3;0)$ та ексцентриситетом 1,5.

66. Знайти рівняння гіперболи, асимптоти якої є прямі $y = \pm 2x$ і яка проходить через точку $(2;3)$.

67. Знайти фокуси, ексцентриситет, величину осей та асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

68. Написати рівняння параболи: 1) фокус якої лежить в точці $(3;0)$, а вершина в початку координат; 2) фокус якої лежить в точці $(-2;0)$, а директрисою є пряма $x = -3$.

69. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі ОУ і яка проходить через початок координат і точку А $(6;-2)$.

70. Записати рівняння параболи, якщо відомо, що вона проходить через точки $(0;0)$, $(-2;10)$ і центр кола $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 36$.

71. Промінь світла проходить через точки $C(2;3)$, відбивається від прямої $x+y+1=0$ і проходить після цього через точку $B(1;1)$. Знайти рівняння падаючого і відбитого променів.

72. Стержень переміщується в просторі так, що три його постійні точки А, В, С ковзають по трьох координатних площинах. Чим обмежений рух четвертої точки М довільно вибраної на стержні?

3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДО ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ

Лінійна алгебра має фундаментальне значення і широко застосовується в багатьох галузях науки, техніки та повсякденного життя, зокрема в економіці, комп'ютерній графіці, криптографії та науці про дані (Data Science). Вона забезпечує основу для моделювання та ефективного розв'язання складних задач.

1. Фізика

- Квантова механіка: стан частинки описується вектором у гільбертовому просторі, фізичні величини – лінійними операторами.
- Електромагнетизм: рівняння Максвелла представляють у вигляді матричних рівнянь.
- Механіка твердого тіла: тензори напружень, деформацій – це матриці.

Обертові матриці використовують для опису руху супутників, роботів, літаків у просторі.

2. Інформатика та комп'ютерні науки

- Комп'ютерна графіка: перетворення об'єктів (масштабування, поворот, проєкція) виконуються матрицями.
- Штучний інтелект і машинне навчання: нейронні мережі – це множення матриць та операції з тензорами.
- Криптографія: Методи лінійної алгебри, зокрема теорія матриць та векторних просторів, застосовуються для шифрування та дешифрування даних, а також для виявлення помилок у передачі повідомлень (наприклад, коди Геммінга). Алгоритм Google PageRank – знаходження власних векторів великої матриці посилань.

3. Економіка та фінанси

- Моделі міжгалузевого балансу Леонтьєва: система лінійних рівнянь для аналізу взаємодії секторів економіки.
- Оптимізація портфелів: коваріаційні матриці прибутковостей та ризиків.
- Прогнозування: лінійна регресія – робота з векторами та матрицями даних.

Оптимальний розподіл інвестицій обчислюють через мінімізацію квадратичної форми на основі матриці дисперсій.

4. Інженерія

- Теорія автоматичного керування: моделі систем керування в матричному вигляді.
- Електричні кола: аналіз через системи лінійних рівнянь (метод контурних струмів).
- Будівельна механіка: розрахунок навантажень за допомогою матричних методів (метод скінченних елементів).

Моделювання мосту або літака виконується через матриці жорсткості та мас.

5. Географія та геологія

- Супутникові знімки (GIS): матрична обробка зображень та фільтри.
- Сейсмологія: аналіз хвильових сигналів через лінійні перетворення (Фур'є, вейвлети).

Виявлення родовищ нафти через розв'язання великих систем рівнянь на основі геоданих.

6. Біологія та медицина

- Геноміка: аналіз великих матриць ДНК-даних.
- Медична томографія: відновлення зображення за проєкціями (використання матричних перетворень).
- MRI та СТ реконструюють зображення шляхом розв'язання систем лінійних рівнянь.

7. Соціологія та психологія

- Аналіз даних опитувань: метод головних компонент (PCA) – робота з власними векторами матриці.
- Моделювання соціальних мереж: матриці зв'язків між людьми.

Лінійна алгебра – це мова науки, яка дозволяє:

- моделювати системи,
- аналізувати дані,
- виконувати перетворення,
- знаходити закономірності.

Вона лежить в основі нейронних мереж, 3D-моделювання, економічних прогнозів, медичної діагностики, квантових розрахунків.

Нижче наведено конкретні приклади задач з різних наук і показано, як у них безпосередньо використовується лінійна алгебра.

Лінійна алгебра і генетика

Однією з основних властивостей живих організмів є спадковість. Генотип контролює формування всіх ознак організмів. Генетика є наукою про спадковість і мінливість організмів.

Одна з лабораторій аграрного університету досліджує, що корови з генотипом AA можуть давати кращу якість молока, ніж інші генотипи. Вчені зацікавлені у дослідженні частки нащадків корів з генотипом AA . Якщо у лабораторії обирають для схрещення тільки генотип AA з іншими генотипами, то якими є ймовірності того, що нащадок буде мати генотипи AA , Aa або aa ?

Розв'язання. Для аналізу проблеми ми розглянемо три випадки. Описані в умові спостереження можна записати у таблицю:

Генотип батьків			Генотип нащадка
$AA - AA$	$AA - Aa$	$AA - aa$	
1	$\frac{1}{2}$	0	AA
0	$\frac{1}{2}$	1	Aa
0	0	0	aa

Отримуємо еволюційну матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Припустимо,

що у початковій популяції корів усі три генотип присутні порівну,

тобто початковий вектор розподілу є таким: $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Через один

рік розподіл стане таким:

$$\bar{x}_1 = A \cdot \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Після того, як пройшов ще один рік, вектор розподілу можна отримати так:

$$\bar{x}_2 = A \cdot \bar{x}_1 = A \cdot (A \cdot \bar{x}_0) = A^2 \cdot \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, нас цікавить кількість корів з генотипами AA , Aa і aa через 20 років. Для цього слід обчислити значення $A^{20} \cdot \bar{x}_0$.

Дослідження економічних задач.

В наш час лінійна алгебра – це незмінний компонент економіки для різних розрахунків на підприємствах. Зокрема, для знаходження загальної кількості продукції, загальної потреби в матеріалах, обчисленні сукупного валового прибутку, розв'язуванні задач балансового аналізу тощо.

1. Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину трьох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею: $s = (s_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, де s_{ij} – кількість одиниць сировини i -того типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції j -того виду. План щоденного випуску продукції передбачає 90 одиниць продукції першого виду і 120 одиниць продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 гр. од. Визначити загальні витрати сировини V , необхідної для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість C цієї сировини.

Розв'язання. Запишемо план випуску продукції у вигляді матриці $P = \begin{pmatrix} 90 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Тоді загальні витрати сировини планового випуску продукції можна знайти як добуток матриці S і P , тобто:

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 90 + 4 \cdot 120 \\ 3 \cdot 90 + 1 \cdot 120 \\ 2 \cdot 90 + 3 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 390 \\ 540 \end{pmatrix}.$$

Отже, для щоденного випуску продукції використовується 930, 390 і 540 одиниць сировини першого, другого та третього типів відповідно.

Знайдемо вартість одиниці кожного типу сировини матрицею $Q = (8 \ 5 \ 10)$. Тоді загальна вартість сировини:

$$C = QV = (8 \ 5 \ 10) \cdot \begin{pmatrix} 930 \\ 390 \\ 540 \end{pmatrix} = (8 \cdot 930 + 5 \cdot 390 + 10 \cdot 540) = (14700).$$

Зауважимо, що застосування матриць в цій задачі привело до унаочнення, спрощення і компактності обчислень.

Математична модель економічного процесу є формалізованим описом об'єкту математичною мовою. Розробка математичної моделі економічної системи будь-якої природи також супроводжується відповідною формалізацією середовища існування, зв'язків між елементами, вплив зовнішніх факторів та наявних ресурсів тощо. Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Розглянемо наступний приклад.

2. Необхідно визначити, яку суму слід покласти в банк при заданій процентній ставці (20 % річних), аби через рік отримати 12000 грн.?

Вводячи формальні позначення для величин, що фігурують у задачі: початкова сума грошей – M_0 , кінцева сума грошей – M_1 , процентна ставка – R та записуючи співвідношення між ними $M_1 = M_0 \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)$. Знайдемо необхідну величину з розв'язання основного рівняння моделі

$$M_0 = \frac{M_1}{1 + \frac{R}{100}} = \frac{12000}{1,2} = 10000 \text{ грн.}$$

Модель міжгалузевого планування потреб і пропозицій

У таблиці задані показники взаємних потреб і пропозицій між різними галузями промисловості

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

1) Визначити матрицю потреб-пропозицій A . 2) Припускаючи, що через 3 роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 та 75 (показники для галузей 1, 2, 3 відповідно), визначити скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Розв'язання: 1) Елементи шуканої матриці потреб-пропозицій A дорівнюють відношенню потреб i -тої галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів i -го стовпця ($i=1, 2, 3$) матриці A треба поділити потреби i -тої галузі, вказаної в таблиці на загальну кількість пропозицій цієї галузі.

Таким чином, одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

2) Нехай E – одинична матриця третього порядку, D – матриця-стовпець нових потреб, X – матриця нових пропозицій, що відповідають новим потребам:

$$D = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix}; X = B^{-1} \cdot D, \text{ де}$$

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 & -0,3 \\ -0,3 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Для обчислення майбутніх пропозицій X залишилося знайти B^{-1} .

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix},$$

де $\det B = 0,336$, а алгебраїчні доповнення елементів матриці B : $B_{11} = 0,63$, $B_{12} = 0,33$; $B_{13} = 0,36$; $B_{21} = 0,35$; $B_{22} = 0,61$; $B_{23} = 0,36$; $B_{31} = 0,21$; $B_{32} = 0,27$; $B_{33} = 0,6$ – пропонується самостійно впевнитись в тому, що останні обчислення виконані вірно.

Отже, обернена матриця має вигляд

$$B^{-1} = \frac{1}{0,336} \cdot \begin{pmatrix} 0,63 & 0,35 & 0,21 \\ 0,33 & 0,61 & 0,27 \\ 0,36 & 0,36 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Визначаємо X – матрицю нових пропозицій. $X = B^{-1} \cdot D$

$$X = \frac{1}{0,336} \cdot \begin{pmatrix} 0,63 & 0,35 & 0,21 \\ 0,33 & 0,61 & 0,27 \\ 0,36 & 0,36 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126,25 \\ 143,75 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Відповідь: таким чином першій галузі треба виробити 126,25 одиниць продукції, другій галузі – 143,75, а третій потрібно виробити 195 одиниць продукції.

Створення нових речовин.

Для утворення певної нової хімічної речовини необхідні три різних інгредієнти: А, В та С. Перед реакцією взаємодії цих складових їх необхідно розчинити у воді кожен окремо. Нехай ми утворили розчини речовини А з концентрацією $1,5 \text{ г/см}^3$, речовини В з концентрацією $3,6 \text{ г/см}^3$ та речовини С з концентрацією $5,3 \text{ г/см}^3$. У процесі реакції взаємодії цих розчинів отримали 25,07 г нової хімічної речовини.

Якщо концентрації речовин А, В та С у розчинах будуть 2,5, 4,3 та $2,4 \text{ г/см}^3$ відповідно, то при взаємодії таких самих об'ємів цих розчинів отримаємо 22,36г нової хімічної речовини.

Нарешті, якщо концентрації речовин А, В та С у розчинах будуть 2,7, 5,5 та $3,2 \text{ г/см}^3$ відповідно, то при взаємодії таких самих об'ємів цих розчинів отримаємо 28,14 г нової хімічної речовини.

Які об'єми (у кубічних сантиметрах) розчинів речовин А, В та С використовували у процесі цих реакцій?

Розв'язання. Нехай x , y , z – об'єми розчинів речовин відповідно А, В та С, які взаємодіяли у процесі згаданих в умові задачі реакцій. Тоді у першому випадку маса речовини А буде $1,5x$, речовини В буде $3,6y$ та речовини С – $5,3z$. Додаючи ці всі три маси ми отримали 25,07 г нової хімічної речовини. Тому маємо рівняння $1,5x + 3,6y + 5,3z = 25,07$.

Проведемо аналогічні міркування у двох інших випадках та отримаємо ще два рівняння, які разом утворюють систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 1,5x + 3,6y + 5,3z = 25,07, \\ 2,5x + 4,3y - 2,4z = 22,36, \\ 2,7x + 5,5y + 3,2z = 28,14. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю цієї системи:

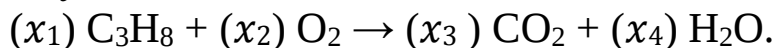
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 3,6 & 5,3 & 25,07 \\ 2,5 & 4,3 & 2,4 & 22,36 \\ 2,7 & 5,5 & 3,2 & 28,14 \end{array} \right).$$

Розв'язуючи дану систему одним з відомих способів (методом Гаусса, за правилом Крамера чи за допомогою обчислення оберненої матриці) ми отримаємо розв'язок системи: $x = 1,5$, $y = 3,1$, $z = 2,2$.

Збалансування хімічних рівнянь.

Хімічні рівняння описують кількості субстанцій, які витрачаються і виробляються у хімічних реакціях.

Коли згорає газ пропан, то пропан (C_3H_8) змішується з киснем (O_2), утворюючи двоокис вуглецю (CO_2) і воду (H_2O), у відповідності з рівнянням виду



Для «балансу» цього рівняння хімік повинен знайти всі цілі числа x_1 , x_2 , x_3 , x_4 такі, щоб загальне число атомів вуглецю (C), водню (H) і кисню (O) на лівій стороні узгоджувалося з відповідними числами атомів на правій (тому, що атоми не зникають і не виникають у реакції).

$$\text{C}_3\text{H}_8: \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{O}_2: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{CO}_2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{H}_2\text{O}: \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Вуглець} \\ \text{Водень.} \\ \text{Кисень} \end{array}$$

Для балансу даного хімічного рівняння коефіцієнти x_1 , x_2 , x_3 , x_4 повинні задовольняти векторне рівняння

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для розв'язання перенесемо всі члени в ліву частину (змінюючи знаки у третього і четвертого векторів):

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Рядкова редукція розширеної матриці для цього рівняння приводить до загального розв'язку $x_1 = \frac{1}{4}x_4$, $x_2 = \frac{5}{4}x_4$, $x_3 = \frac{3}{4}x_4$ з вільною змінною x_4 .

Оскільки коефіцієнти у хімічних рівняннях повинні бути цілими, візьмемо $x_4 = 4$, і в такому випадку, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ і $x_3 = 3$. Збалансоване рівняння має вигляд $\text{C}_3\text{H}_8 + 5 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$.

Рівняння залишається збалансованим, якщо, наприклад, кожний коефіцієнт подвоїти. У більшості випадків хіміки надають перевагу використанню балансового рівняння, коефіцієнти якого є найменш можливими цілими числами.

Розрахунок харчових дієт.

Формула для кембріджської дієти – популярної дієти у 80-х роках ХХ століття – ґрунтується на багатьох роках досліджень. Команда вчених у Кембріджському університеті, очолювана доктором Аланом Г. Говардом, запропонувала цю дієту після багаторічної клінічної роботи з пацієнтами з надмірною вагою. Дуже низькокалорійна формула дієти комбінує точний баланс вуглеводів, високоякісного протеїну і жиру разом з вітамінами, мінералами та відслідковуванням мікроелементів і електролітів. Мільйони людей використовували цю дієту, щоб досягти швидкої втрати ваги.

Для досягнення бажаних обсягів і пропорцій поживних речовин доктор Говард включав у дієту велике розмаїття продуктів харчування. Кожний продукт харчування забезпечував декілька потрібних складових, але не в коректній пропорції. Наприклад, обезжирене молоко було головним джерелом протеїну, але містило надто багато кальцію. Через це частину протеїну використовували з соєвого борошна, оскільки воно містить менше кальцію. Однак соєве борошно містить відносно багато жиру. Тому була додана сироватка, оскільки вона містила менше жиру у відношенні до кальцію. На жаль, сироватка містить багато вуглеводів. Тому задача точного підбору поживних речовин є достатньо складною.

Наступний приклад ілюструє цю задачу у маленькому масштабі. Запишемо у таблицю три складові, які потрібні у дієті, разом з сумами звичайних потреб поживних речовин на 100 грам кожної складової.

Поживні речовини	Обсяг (у грамах) на 100 г харчового продукту			Обсяг потреби по кембріджській дієті на один день (г)
	Нежирне молоко	Соєве борошно	Сироватка	
Протеїн	36	51	13	33
Вуглеводи	52	34	74	45
Жир	0	7	1,1	3

Якщо можливо, знайти деяку комбінацію не жирного молока, соєвого борошна і сироватки для того, щоб забезпечити точну кількість протеїну, вуглеводів і жиру потрібних у дієту на один день відповідно з наведеною таблицею.

Розв'язання. Нехай x , y і z позначають кількості одиниць (від 100 г) цих продуктів відповідно. Один з підходів до розв'язання цієї задачі полягає в наступному: одержати рівняння для кожної поживної речовини окремо, скласти систему лінійних рівнянь і розв'язати її.

$$\begin{cases} 36x + 51y + 13z = 33, \\ 52x + 34y - 74z = 45, \\ 7y + 1,1z = 3. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю цієї системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3 \end{array} \right).$$

Розв'язуючи дану систему одним з відомих способів (методом Гаусса, за правилом Крамера чи за допомогою обчислення оберненої матриці) ми отримаємо розв'язок системи: $x = 0,277$, $y = 0,392$, $z = 0,233$.

Таким чином, до трьох значущих цифр дієта вимагає 0,277 порції нежирного молока, 0,392 порцій соєвого борошна і 0,233 порції сироватки для того, щоб отримати бажані обсяги протеїну, вуглеводів і жиру.

У кожному з прикладів лінійна алгебра дає чітку модель та спосіб обчислення:

- поворот зображень / об'єктів,
- економічний баланс,
- згладження сигналів,
- прогнознi моделі,
- енергетичні рівні,
- поведінку конструкцій, тощо.

Векторна алгебра – це розділ математики, який вивчає об'єкти, що мають величину (довжину) та напрям, а також операції над ними:

- додавання та віднімання векторів;
- скалярний, векторний, мішаний добутки;
- проєкції, кути між векторами;
- базиси, координатні представлення.

Основні сфери застосування

1. Фізика та механіка
 - опис руху тіл: швидкість v , прискорення a , сила F – усі мають напрям;
 - момент сили, робота сили, кутовий імпульс;
 - аналіз траєкторій, рівновага систем.
2. Комп'ютерна графіка та 3D-моделювання
 - побудова 3D-координат, трансформації (зсув, поворот, масштабування);
 - нормалі до поверхонь;
 - освітлення та тінь у комп'ютерних іграх, VR, CAD.
3. Навігація та геодезія
 - визначення курсу руху літака, корабля, дрона;
 - обчислення відстаней і напрямів між точками GPS;
 - робота з векторними полями на сфері (модель Землі).
4. Машинобудування та робототехніка
 - опис руху маніпулятора, напрямів сил та навантажень;
 - кінематика і динаміка роботів;
 - аналіз стійкості конструкцій.
5. Біологія та хімія (прикладні елементи)
- У біології:
 - рух мікроорганізмів та клітин у полі течій (вектори швидкостей);
 - моделювання м'язових зусиль у біомеханіці;
 - поширення електричного сигналу по нейрону (векторні поля напруги).
- У хімії:
 - визначення просторової геометрії молекул (напрямок ковалентних зв'язків);
 - кут між векторами зв'язків при аналізі гібридизації (sp , sp^2 , sp^3);
 - вектор дипольного моменту молекули $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$
6. Медицина і біомеханіка
 - аналіз ходи, роботи суглобів (вектори моментів і сил);
 - розрахунок оптимальних кутів протезів;
 - моделювання кровотоку (швидкість/напрямок потоку).
7. Електротехніка й магнетизм
 - електричні й магнітні поля – векторні поля;
 - густина струму, індукція, напруженість поля: $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$

Операції, що найбільш часто використовуються

Операція	Формула	Де використовується
Скалярний добуток	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	робота сили, кут між зв'язками в молекулі
Векторний добуток	$\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin \alpha$	момент сили, магнітна індукція
Мішаний добуток	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	об'єми тіл, 3D-моделювання
Проекція	$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$	освітлення, рух по схилу, біомеханіка

Сума сил (фізичний зміст).

На точку діють дві сили: $\vec{F}_1 = (4,3)H$, $\vec{F}_2 = (-1,5)H$. Знайти рівнодійну силу.

Розв'язання. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4 - 1, 3 + 5) = (3,8)H$. Модуль сили: $|\vec{F}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8.54H$.

Задачі економічного змісту.

1. Троє покупців придбали у крамниці товари. Перший покупець придбав 7 одиниць 2-го товару; 2 – 4-го; 6 – 5-го; другий покупець купив 2 одиниці 1-го і 3 – 5-го товару, а третій придбав 3 одиниці 1-го товару; 1 – 3-го та 4 – 4-го. Ціну товарів виражає вектор $\vec{p} = (2, 7; 5; 8; 10; 6)$.

Записати покупки кожного покупця у вигляді 5-вимірних векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$. Витрати кожного покупця записати у векторному вигляді. Обчислити ці витрати.

Розв'язання. Кількість одиниць товару, купленого кожним з 3-х покупців, записуємо координатами векторів $\vec{a}_1 = (0; 7; 0; 2; 6)$; $\vec{a}_2 = (2; 0; 0; 0; 3)$; $\vec{a}_3 = (3; 0; 3; 4; 0)$.

Витрати кожного покупця є сумою витрат на кожний вид купленого товару і відповідає сумі добутків координат вектора $\vec{p}$ на вектор $\vec{a}_i$, тобто дорівнює скалярному добутку цих векторів: $\vec{p} \cdot \vec{a}_1 = 91$; $\vec{p} \cdot \vec{a}_2 = 23,4$; $\vec{p} \cdot \vec{a}_3 = 72,1$.

2. Відомі вектори заробітної плати шести робітників за лютий та березень $\vec{a} = (600; 800; 450; 900; 700; 500)$ та $\vec{b} = (300; 400; 550; 800; 950; 580)$. У квітні цим робітникам надали відпустку, заплативши їм за середнім заробітком за лютий та березень. Знайти вектор $\vec{c}$ – вектор заробітної плати цих робітників за квітень і довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – лінійно залежні.

Розв'язання: Оскільки середній заробіток за два місяці (лютий та березень) обирався як середнє арифметичне оплати праці у ці місяці, то вектор $\bar{c}$ – заробітної плати за квітень є вектором лінійних дій над векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{c} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$,

$$\bar{c} = \left(\frac{600+300}{2}; \frac{800+400}{2}; \frac{450+550}{2}; \frac{900+800}{2}; \frac{700+950}{2}; \frac{500+580}{2} \right),$$

$$\bar{c} = (450; 600; 500; 850; 540;).$$

Оскільки $\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – лінійно залежні, бо згідно теореми, вектори є лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

Навігація, GPS, радар.

Дано два вектори руху суден: $\vec{v}_1 = (2,3)$, $\vec{v}_2 = (4,1)$. Знайти кут між ними.

Розв'язання. Застосуємо формулу знаходження косинуса кута за допомогою скалярного добутку векторів. $\cos \varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$.

$$\text{Обчислення: } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 8 + 3 = 11.$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, |\vec{v}_2| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

$$\cos \varphi = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \approx 0,73.$$

$$\varphi = \arccos(0,73) \approx 43,1^\circ.$$

Авіація.

Літак рухається зі швидкістю: $\vec{v}_1 = (200,0)$ км/год, вітер $\vec{v}_2 = (-30,40)$ км/год. Знайти результуючу швидкість.

$$\text{Розв'язання. } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (200 - 30, 0 + 40) = (170, 40).$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{170^2 + 40^2} = \sqrt{28900 + 1600} = \sqrt{30500} \approx 174,6 \text{ км/год.}$$

Результуюча швидкість $\approx 174,6$ км/год., напрямок змінився у бік вітру.

Міграція птахів (напрямки та швидкості).

Птах летить зі швидкістю $\vec{v}_1 = (30,10)$ км/год, а вітер додає $\vec{v}_2 = (-5,15)$ км/год. Знайти результуючу швидкість і кут відхилення від початкового напрямку.

$$\text{Розв'язання. } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (30 - 5, 10 + 15) = (25, 25) \text{ км/год.}$$

Модуль швидкості: $|\vec{v}| = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35,36$ км/год. Кут

відхилення: $\tan \varphi = \frac{25}{25} = 1 \rightarrow \varphi = 45^\circ$. Отже результуюча швидкість $\approx 35,36 \text{ км/год.}$, а відхилення від курсу $- 45^\circ$.

Сумарна дифузія молекул у двовимірному середовищі.

Молекула рухається в середовищі під дією двох векторів дифузії: $\vec{d}_1 = (2,3)$, $\vec{d}_2 = (-1,4)$. Знайти сумарний напрям та модуль швидкості дифузії.

Розв'язання. $\vec{d} = (2 - 1, 3 + 4) = (1,7)$.

Модуль $|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} \approx 7,07$. Отже, сумарна дифузія: $(1,7)$, а модуль $\approx 7,07$ умовн. од.

Векторна алгебра дозволяє:

- визначати силу, швидкість, прискорення, переміщення;
- знаходити кути між напрямками (навігація, авіація);
- розраховувати роботу сили, момент, рівновагу конструкцій;
- моделювати рух у 2D і 3D (робототехніка, ігрова графіка).

Аналітична геометрія поєднує алгебру та геометрію, дозволяючи описувати просторові об'єкти через рівняння. Застосовується у величезній кількості сфер:

1. Інженерія та машинобудування

- моделювання траєкторій руху деталей та механізмів
- побудова профілів шестерень, кулачків, коліс
- проектування конструкцій, роботизованих модулів

Приклад: розрахунок оптимальної траєкторії робота-маніпулятора через параметричні рівняння кривих.

2. Навігація, GPS, авіація

- визначення положення об'єктів у просторі
- розрахунок маршруту літака, корабля, дрону
- моделювання орбіт супутників

Приклад: координати літака задаються у просторі, а курс – через вектор напрямку.

3. Архітектура та будівництво

- аналіз міцності конструкцій
- проектування арок, мостів, куполів
- розрахунок площ, об'ємів, кутів

Приклад: форма арки задається *параболою* $y = ax^2$, що дозволяє точно розрахувати навантаження.

4. Біологія та медицина

- моделювання зростання тканин, поширення інфекцій
- 3D-сканування органів, визначення об'ємів
- аналіз структури ДНК як просторової кривої

Приклад: 3D-геометрія використовується в томографії (МРТ, КТ) для відновлення об'єктів по зрізах.

5. Хімія та матеріалознавство

- просторові моделі молекул
- кути між зв'язками, довжини та форми структур
- кристалічна решітка, симетрія атомів

Приклад: молекула метану описується тетраедром з точними координатами атомів у просторі.

6. Ігрова графіка, 3D-моделювання

- рендеринг 3D-сцен
- обчислення освітлення, відбиття, тіней
- позиціонування об'єктів, камер

Приклад: координати та вектори визначають рух персонажа у тривимірному середовищі.

7. Геодезія та картографія

- перетворення координат на карті
- визначення висот і відстаней
- побудова топографічних планів

За допомогою аналітичної геометрії можна побудувати модель маршруту, де міста – це точки на координатній площині, а шляхи між ними – відрізки. Для цього використовують систему лінійних рівнянь, яка враховує реальні відстані, дорожні умови та середню швидкість транспорту. Наприклад, якщо компанія має вибрати між кількома шляхами з доставки вантажу, геометрична модель дозволить обчислити найкоротший та найзручніший маршрут.

Реальним прикладом можуть слугувати великі транспортні компанії, такі як DHL, UPS, «Нова Пошта» або Delivery-GROUP, які активно використовують подібні моделі, які допомагають зекономити до 20% витрат на логістику. Це дозволяє значно знижувати витрати і поліпшувати конкурентні переваги.

Архітектура і будівництво.

Поширеним є використання властивостей параболи у прикладних задачах. Міст Тсінь Ма у Гонконзі один з шести найдовших підвісних мостів у світі, є частиною інфраструктури міжнародного аеропорту Гонконгу і одним з найвідоміших місцевих орієнтирів.

Будівництво Тсінь Ма обійшлося в 900 мільйонів доларів, після 5 років робіт міст відкрився в 1997 році. 49000 тонн сталі пішли на будівництво платформи, в той час як на кожну вежу 205 метрів заввишки знадобилося 65000 тонн бетону. Міст Тсінь Ма – одна з найголовніших визначних пам'яток Гонконгу. Канат підвісного моста має приблизно форму параболи.

Скласти рівняння параболи відносно вказаних на кресленні осей, якщо прогин каната $OA=a$, а довжина прольоту $BC=2b$.

Розв'язання. Рівняння параболи з вершиною у початку координат і віссю симетрії, що співпадає з додатним напрямом вісі Oy , має вигляд $x^2 = 2py$. Визначимо параметр p , враховуючи, що точка $C(b; a)$ належить параболі. Підставляючи її координати в рівняння параболи, знаходимо: $b^2 = 2pa$ $p = \frac{b^2}{2a}$.

Тому, рівняння параболи буде мати вигляд $x^2 = -\frac{b^2}{a}y$.

Моделювання руху двох частинок.

Дві частинки рухаються в площині $z=0$ по прямих: $L1: r_1(t)=(1+3t, 2-t)$, $L2: r_2(s)=(4-2s, -1+4s)$. Чи перетнуться їх траєкторії (тобто існують такі t , що $r_1(t)=r_2(s)$? Якщо ні – знайти найменшу відстань між прямими.

Розв'язання.

1. Рівняння системи: $1+3t=4-2s, 2-t=-1+4s$. Розв'яжемо для t, s .

2. З першого: $3t+2s=3$. З другого: $-t-4s=-3$ або $t+4s=3$.

3. Маємо систему:
$$\begin{cases} 3t + 2s = 3, \\ t + 4s = 3. \end{cases}$$

4. Помножимо другу на 3: $3t+12s=9$. Віднімаємо першу:

$$(3t+12s)-(3t+2s)=9-3 \text{ дає } 10s=6 \rightarrow s=0.6.$$

$$\text{Тоді } t+4(0.6)=3 \rightarrow t+2.4=3 \rightarrow t=0.6.$$

5. Отже існують такі параметри. Перевіримо координати в точці перетину: $r_1(0.6)=(1+3 \cdot 0.6, 2-0.6)=(1+1.8, 1.4)=(2.8, 1.4)$.

$$r_2(0.6)=(4-2 \cdot 0.6, -1+4 \cdot 0.6)=(4-1.2, -1+2.4)=(2.8, 1.4). \text{ Сумісно.}$$

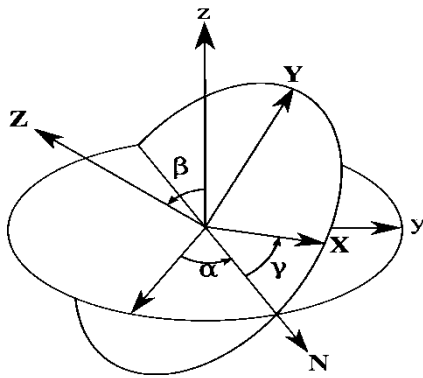
Отже, траєкторії перетинаються; точка перетину $(2.8, 1.4)$, при $t=s=0.6$.

Маневрування літака або космічного корабля (перетворення систем координат).

В аеронавтиці та астронавтиці орієнтацію літака або космічного корабля у системі координат $Oxuz$ часто описують за допомогою кутів, які називають рисканням, тангажем та креном.

Приміром, літак летить уздовж осі Oy і площина Oxy є горизонтальною, тоді кут повороту навколо осі Oz називають кутом *рисання*, кут повороту навколо осі Ox називають кутом *тангажа*, а кут повороту навколо осі Oy – кутом *крена*.

Комбінацію всіх трьох поворотів можна замінити єдиним обертанням навколо деякої осі, що проходить через початок координат. Саме так, ви- значаючи вісь і рухаючись навколо неї, космічний корабель набуває правильної просторової орієнтації.



Описати повертання тіла можна за допомогою *ейлерових кутів* – кутів, на які треба повернути ПДСК $OXYZ$, зв'язану з тілом, щоб сумістити її з нерухомою ПДСК $Oxyz$, яка має з першою спільний початок.

Оскільки ПДСК $Oxyz$ та $OXYZ$ мають спільний початок, то координатні площини Oxy та OXY перетинаються вздовж *вузлової лінії* ON .

Перше повертання відбувається навколо осі Oz , поки вісь Ox не потрапить у площину Oxy . Кут повороту а називають *кутом прецесії*.

Наступне повертання відбувається вздовж нового початку осі Ox , поки не сумістяться осі аплікату обох ПДСК, при цьому вісь Oy потрапить у площину Oxy . Кут повороту β називають *кутом нутації*. Останнє повертання відбувається на кут γ , який називають *кутом власного обертання*.

Макроекономіка.

У макроекономіці аналітична геометрія допомагає візуалізувати залежності між основними економічними показниками. Одним із найвідоміших прикладів є крива Лаффера, яка графічно описує зв'язок між податковою ставкою та доходами бюджету. Її побудова базується на квадратичній функції:

$$f(x) = -ax^2 + bx + c,$$

де x – податкова ставка, а $f(x)$ – доходи.

З графіка можна побачити, що за надто високих податкових ставок економіка починає втрачати ефективність, і доходи бюджету знижуються через зростання рівня тіньової економіки. Таке моделювання допомагає урядам прогнозувати ефективність різних податкових політик. Дослідження застосовуються для створення збалансованих схем оподаткування, які сприяють розвитку бізнесу і

забезпечують наповнення бюджету. Ця тема широко обговорюється в економічних дослідженнях і практиках OECD.

Ринок товарів і послуг завжди знаходиться у пошуку балансу між попитом і пропозицією. З точки зору аналітичної геометрії, ці два показники можна зобразити у вигляді ліній:

$$\text{Попит: } P = -mD + b,$$

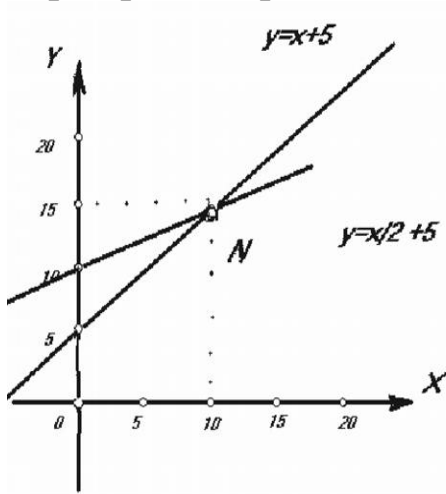
$$\text{Пропозиція: } P = mS + c.$$

Точка перетину цих двох прямих відповідає рівноважній ціні та кількості товарів.

Транспортні витрати перевезення вантажу.

Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним та автомобільним транспортом на відстань (x) знаходять за формулами: $y = -\frac{1}{2}x + 10$, та $y = x + 5$, де (x) вимірюється десятками км. Визначити рентабельність транспортного постачання.

Розв'язання. Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення. Графіки прямих перетинаються в точці $N(10; 15)$. Для перевірки координат точки N знайдемо точку перетину аналітично:



$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10, \\ -x + y = 5. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20, \\ x - y = -5. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 15 \end{cases}$$

Графіки витрат дають змогу дійти висновку:

а) коли $x \in [0, 10]$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати y перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

б) коли $x \in [10, \infty]$, тобто $x > 100$ км, більш

рентабельним буде залізничний транспорт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. Посібник. Київ, 2002. 482 с.
2. Клепо В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах. Центр навчальної літератури. 2019. 594 с.
3. Коваленко В. І., Нак М. М., Хайтова О. М. Аналітична геометрія і лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник для студентів. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2019. 108 с.
4. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посібник для студ. вищих пед. навч. закл. Київ: Вища школа, 2006. 343 с.
5. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.
6. Нак М. М. Лінійна алгебра: Методичні рекомендації до вивчення курсу. Чернігів: ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2014. 44 с.
7. Рокіцький І. О., Панасенко О. Б. Застосування лінійної алгебри. Вінниця : Вид. Главацька Р. В., 2012. 240 с.
8. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. природн. спец. вищ. навч. закл. Київ: Либідь, 2001. 245 с.
9. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. 432 с.
10. Тріщ Б. М. Вища математика. Збірник індивідуальних завдань. Навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 149 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Нак Марина Миколаївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Навчальний посібник

Технічний редактор О. І. Полковник

*Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.*

Підписано до друку 29.12.2025 р. Формат 60×90 1/16.
Ум. друк. арк. 6,51. Обл.-вид. 5,05. Зам. № 042.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
nuchk.tipograf@gmail.com