Національний університет «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка

Природничо-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітнього ступеня «магістр»
на тему:

Диференціація у навчанні математики (на прикладі вивчення теми «Степенева функція»)

Виконав:
студент 2 курсу, групи 61,
спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
Бондарець Олег Леонідович
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Філон Л.Г.

Чернігів – 2025

Роботу подано до розгляду «_____» ______________ 20___ року.

Студент ______________________ ____________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Науковий керівник _____________ Філон Л. Г.

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Рецензент ______________________ ________________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від «_____» _____________ 20___ року.

Студент допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри __________________ Філон Л.Г.

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

АНОТАЦІЯ

Бондарець О.Л. Диференціація у навчанні математики (на прикладі вивчення теми «Степенева функція»). Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису. Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). – Чернігів, 2025.

У кваліфікаційній роботі розглянуто можливості реалізації диференційованого підходу при вивчені теми «Степенева функція» у старшій профільній школі.

Результатом проведеного дослідження стало підтвердження ефективність запропонованої методики, розробка уроків для класів різних профілів та підготовка системи диференційованих завдань з теми «Степенева функція».

Ключові слова: диференційоване навчання, профільна та рівнева диференціація, степенева функція.

SUMMARY

Bondarets O.L. Differentiation in teaching mathematics (using the example of studying the topic «Power function»). Qualification work of the educational degree «master». On the rights of the manuscript. Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics). – Chernihiv, 2025.

The qualification work considers the possibilities of implementing a differentiated approach when studying the topic «Power Function» in a senior profile school.

The result of the research was confirmation of the effectiveness of the proposed methodology, development of lessons for classes of different profiles and preparation of a system of differentiated tasks on the topic «Power Function».

Keywords: differentiated learning, profile and level differentiation, power function.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференційований підхід залишається одним із фундаментальних дидактичних принципів сучасної шкільної математичної освіти. В умовах реформування української школи, переходу до профільного навчання у старших класах та необхідності забезпечення рівного доступу до якісної освіти, питання врахування індивідуальних особливостей учнів, їхніх інтересів, здібностей та планів на майбутнє набуває особливої гостроти. Реалізація профільного навчання, що є формою зовнішньої диференціації, вимагає від учителя не лише глибокого знання предмета, але й володіння методиками, які дозволяють адаптувати навчальний процес до потреб різних груп учнів.

Функціональна змістова лінія є однією з провідних у шкільному курсі алгебри та початків аналізу. Поняття функції має важливе світоглядне значення, оскільки дозволяє моделювати реальні процеси та явища навколишнього світу. Серед різноманіття елементарних функцій важливе місце посідає степенева функція, вивчення якої у старшій школі є логічним продовженням та узагальненням знань, отриманих учнями в основній школі. Однак, як свідчить практика, засвоєння цієї теми викликає в учнів певні труднощі, пов’язані з абстрактністю матеріалу, різноманіттям властивостей степеневих функцій залежно від показника степеня та необхідністю володіння розвиненими навичками графічної культури.

Проблема диференціації навчання математики досліджувалася багатьма науковцями та методистами. Питанням методики вивчення функціональної лінії присвячено праці відомих учених, проте аспекти реалізації диференційованого підходу саме під час вивчення степеневих функцій в умовах профільної школи потребують подальшого розроблення та систематизації. Необхідність розв’язання суперечності між вимогами державних стандартів до рівня математичної підготовки випускників та реальними можливостями й потребами учнів різних профілів навчання зумовлює актуальність обраної теми дослідження.

Об’єктом дослідження є процес навчання алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі.

Предметом дослідження виступають методичні особливості та шляхи реалізації диференційованого підходу під час вивчення теми «Степенева функція».

Мета дослідження полягає у теоретичному обґрунтуванні, розробленні та апробації методичних рекомендацій диференційованого навчання степеневих функцій, яка забезпечує ефективне засвоєння навчального матеріалу учнями класів різних профілів.

Відповідно до мети визначено такі **завдання дослідження**:

1) здійснити аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми диференціації навчання математики;

2) розкрити сутність та особливості профільної та рівневої диференціації у сучасній старшій школі;

3) проаналізувати висвітлення теми «Степенева функція» у чинних навчальних програмах та підручниках для різних рівнів навчання на предмет дослідження;

4) визначити методичні особливості вивчення степеневих функцій в умовах диференційованого навчання;

5) розробити методичне забезпечення (конспекти уроків, систему диференційованих завдань) для вивчення теми у класах різних профілів.

Для розв’язання поставлених завдань використано **методи дослідження**: теоретичні (аналіз наукової, навчально-методичної літератури, нормативних документів, порівняння та узагальнення педагогічного досвіду); емпіричні (педагогічне спостереження за процесом навчання та діяльністю учнів).

Наукова новизна одержаних результатів полягає в уточненні та обґрунтуванні методичних підходів до вивчення степеневих функцій з урахуванням специфіки профільного навчання, а також у розробленні системи диференційованих завдань, спрямованих на формування предметної компетентності учнів.

Практичне значення роботи визначається тим, що розроблені методичні матеріали, зокрема конспекти уроків та система завдань, можуть бути безпосередньо використані вчителями математики в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти, а також здобувачами освіти за відповідною спеціальністю під час проходження педагогічної практики.

Апробація результатів дослідження. Основні положення дослідження доповідалися та обговорювалися на Всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (м. Чернігів, 18 листопада 2025 р.).

Опубліковано тези доповіді: Бондарець О. Л., Філон Л. Г. Реалізація рівневої диференціації у навчанні степеневої функції на профільному рівні [7].

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Диференційований підхід у сучасній школі

Кардинальні зміни, що відбуваються у сучасному українському суспільстві, суттєво впливають на всі сфери життя, зокрема й на освіту. Реформування загальної середньої освіти, впровадження концепції «Нова українська школа», перехід до профільного навчання у старших класах висувають нові вимоги до організації навчально-виховного процесу. У центрі уваги сучасної педагогіки перебуває особистість учня, його самобутність, унікальність та неповторність. Саме тому одним із пріоритетних завдань школи є створення таких умов навчання, які б забезпечували максимальний розвиток кожного здобувача освіти відповідно до його нахилів, здібностей, інтересів та життєвих планів. Традиційна класно-урочна система, яка тривалий час панувала в освіті і була орієнтована на так званого «середнього» учня, сьогодні виявляє свою недостатню ефективність. Усереднення вимог, темпу навчання та методів викладання призводить до того, що значна частина учнів не може реалізувати свій потенціал: обдаровані діти втрачають інтерес до навчання через відсутність належного інтелектуального навантаження, а учні, які потребують більше часу та педагогічної підтримки, втрачають віру у власні сили і мотивацію до здобуття знань. Вирішення цієї складної педагогічної проблеми можливе лише через широке впровадження диференційованого підходу, який розглядається як один із фундаментальних принципів гуманізації та демократизації освіти.

Проблема диференціації навчання не є новою для педагогічної науки, проте її актуальність не зменшується, а навпаки, зростає в умовах сьогодення. Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури свідчить про те, що різні аспекти диференціації досліджувалися багатьма вітчизняними та зарубіжними вченими. У педагогічному словнику за редакцією С. У. Гончаренка поняття «диференційоване навчання» (від латинського *differentia* – різниця, відмінність) трактується як форма організації навчального процесу, за якої створюються умови для вибору учнями глибини та рівня вивчення навчального матеріалу відповідно до їхніх здібностей, інтересів та потреб [14, с. 96]. Таке визначення акцентує увагу на тому, що диференціація – це не просто механічний поділ учнів на групи, а створення гнучкої, адаптивної системи, яка підлаштовується під потреби дитини, а не змушує дитину підлаштовуватися під жорсткі рамки системи.

Відома дослідниця методики навчання математики З. І. Слєпкань дає більш розгорнуте визначення, розглядаючи диференційоване навчання як таку організацію навчального процесу, за якої, з одного боку, враховуються типові індивідуальні особливості учнів, а з іншого – створюються сприятливі умови для їхнього розвитку [45, с. 124]. Вона наголошує, що основною метою диференціації є не сегрегація учнів, а надання кожному з них можливості досягти максимально можливих для нього результатів. При цьому важливо розуміти, що йдеться не про зниження вимог чи спрощення змісту освіти для окремих категорій учнів, а про диференціацію допомоги, яку надає вчитель, диференціацію методів і прийомів навчання, а також диференціацію вимог до глибини і обсягу засвоєння матеріалу, які, однак, не повинні бути нижчими за визначений державний стандарт.

У науковій літературі також зустрічається поняття індивідуалізації навчання, яке тісно пов’язане з диференціацією, але не тотожне їй. Якщо індивідуалізація передбачає врахування особливостей кожного окремого учня, що в умовах масової школи з великою наповнюваністю класів реалізувати в чистому вигляді вкрай важко, то диференціація розглядається як урахування особливостей типологічних груп учнів. Тобто диференціація є, по суті, шляхом до реалізації принципу індивідуалізації в реальних умовах шкільного навчання. О. С. Чашечникова у своїх працях пропонує розглядати диференційоване навчання математики як цілісну систему, що враховує психічні й індивідуально-психологічні особливості учнів, їхні навчальні досягнення з математики, професійну зорієнтованість і загальнокультурну підготовку [54, с. 190]. Такий підхід дозволяє охопити не лише когнітивну сферу (знання та вміння), але й особистісну (мотивацію, інтереси, цінності), що є надзвичайно важливим для формування гармонійно розвиненої особистості.

Реалізація диференційованого підходу в сучасній школі базується на низці дидактичних принципів. Насамперед, це принцип гуманізації, який передбачає визнання цінності кожної дитини, повагу до її особистості, створення атмосфери психологічного комфорту та довіри. Другим важливим принципом є принцип демократизації, який означає надання учням права вибору – вибору рівня вивчення предмета, вибору профілю навчання, вибору форм і методів роботи на уроці. Третім принципом є принцип наступності, який забезпечує логічний зв'язок між різними етапами навчання, поступове ускладнення навчальних завдань та розширення самостійності учнів. Крім того, важливу роль відіграє принцип варіативності, який передбачає наявність різноманітних навчальних програм, підручників, методичних комплексів, що дозволяє вчителю конструювати індивідуальні освітні траєкторії для різних груп учнів.

У теорії та практиці навчання прийнято виділяти два основні види диференціації: зовнішню (або профільну) та внутрішню (або рівневу). Ця класифікація ґрунтується на способі організації навчальних груп та специфіці змісту навчання. Зовнішня диференціація передбачає створення спеціальних класів, шкіл або груп, де навчання здійснюється за різними навчальними планами і програмами. Це дозволяє врахувати професійні наміри старшокласників, їхні стійкі інтереси до певних галузей знань та забезпечити поглиблене вивчення окремих предметів, зокрема математики. Профільне навчання у старшій школі є яскравим прикладом зовнішньої диференціації, яка дає можливість учням зосередитися на тих дисциплінах, які є для них пріоритетними у контексті майбутнього професійного вибору. М. І. Бурда зазначає, що структура і зміст профільного навчання математики повинні бути гнучкими і варіативними, щоб задовольнити різноманітні освітні потреби учнів [10, с. 4].

Внутрішня диференціація, яку також називають рівневою, реалізується в межах одного класу, де учні навчаються за єдиною програмою, але засвоюють матеріал на різних рівнях: від обов’язкового (базового) до поглибленого. Такий підхід є більш демократичним і гнучким, оскільки дозволяє уникнути ранньої сегрегації учнів, даючи їм можливість змінювати рівень складності завдань залежно від теми, поточного рівня підготовки чи навіть настрою. Внутрішня диференціація базується на тому, що вчитель, працюючи з усім класом, виділяє групи учнів за рівнем навчальних можливостей і організовує роботу так, щоб кожна група отримала завдання відповідного рівня складності. Це вимагає від педагога високої майстерності, вміння розподіляти увагу, оперативно реагувати на ситуацію в класі та надавати адресну допомогу тим, хто її потребує. Т. І. Дейніченко у своїх дослідженнях переконливо доводить, що диференціація навчання в процесі групової форми його організації є одним із найефективніших шляхів реалізації внутрішньої диференціації, оскільки сприяє не лише кращому засвоєнню знань, але й розвитку комунікативних навичок та вміння працювати в команді [16, с. 8].

Психологічним підґрунтям необхідності впровадження диференційованого підходу є об’єктивно існуючі відмінності між учнями. Як зазначається у посібнику з вікової та педагогічної психології за редакцією О. В. Скрипченка, кожен учень має свій індивідуальний темп психічного розвитку, свій тип нервової системи, свої особливості сприймання, пам’яті, мислення та уваги [11, с. 215]. Особливо це стосується підліткового та раннього юнацького віку, коли відбувається суттєва перебудова розумової діяльності, формується індивідуальний когнітивний стиль. У старших класах яскраво проявляється диференціація інтересів: одні учні тяжіють до гуманітарних наук, інші – до природничо-математичних, треті – до технічних чи мистецьких. Ігнорування цих відмінностей, намагання навчити всіх однаково і всьому в однаковому обсязі є не лише педагогічно недоцільним, але й шкідливим для розвитку особистості. В. П. Кутішенко підкреслює, що саме в юнацькому віці відбувається становлення світогляду, професійне самовизначення, тому освіта повинна бути максимально орієнтована на підтримку цих процесів [30, с. 128].

Специфіка математики як навчального предмета також диктує необхідність застосування диференційованого підходу. Математика традиційно вважається однією з найскладніших шкільних дисциплін через високий рівень абстракції, логічну строгість та ієрархічність будови. Прогалини в знаннях з попередніх тем унеможливлюють засвоєння нового матеріалу, що призводить до накопичення труднощів і втрати інтересу до предмета. Крім того, математичні здібності учнів є дуже різними: від здатності до швидкого узагальнення і згортання мислення у одних до необхідності розгорнутих, поетапних дій з опорою на наочність у інших. Тому уніфікований підхід до навчання математики є завідомо програшним. Диференціація дозволяє врахувати ці особливості, пропонуючи учням різні шляхи до досягнення навчальних цілей: для когось це буде розв’язування стандартних алгоритмічних задач, а для когось – виконання творчих завдань дослідницького характеру.

Основними цілями впровадження диференційованого підходу, як зазначає у своєму дисертаційному дослідженні О. І. Буковська, є створення оптимальних умов для виявлення задатків, розвитку інтересів і здібностей кожного учня, задоволення їхніх пізнавальних потреб, а також вирішення нагальних проблем шкільної освіти шляхом впровадження нових методичних систем [8, с. 45]. Досягнення цих цілей вимагає від учителя серйозної підготовчої роботи. По-перше, необхідно здійснити діагностику навчальних можливостей учнів, визначити рівень їхньої готовності до вивчення нової теми, виявити прогалини в знаннях. По-друге, потрібно структурувати зміст навчального матеріалу, виділивши в ньому обов’язкове ядро, яке мають засвоїти всі учні, та додатковий матеріал для поглибленого вивчення. Потретє, слід розробити систему різнорівневих завдань, які б забезпечували поступове просування учнів від репродуктивного до творчого рівня діяльності.

Важливим аспектом реалізації диференційованого підходу є правильне поєднання колективних, групових та індивідуальних форм роботи на уроці. Фронтальна робота є ефективною на етапі актуалізації знань та пояснення нового матеріалу, коли вчитель ставить перед класом спільну мету. Однак на етапі закріплення знань та формування вмінь доцільно переходити до групової та індивідуальної роботи. Групи можуть бути як гомогенними (однорідними за рівнем підготовки), так і гетерогенними (змішаними). Робота в гомогенних групах дозволяє вчителю диференціювати складність завдань та ступінь своєї допомоги. Наприклад, група учнів з високим рівнем підготовки може працювати над складними задачами самостійно, тоді як учитель приділяє більше уваги учням, які потребують підтримки. Робота в гетерогенних групах має великий виховний потенціал, оскільки сильніші учні можуть виконувати роль консультантів, допомагаючи своїм товаришам розібратися в матеріалі, що сприяє глибшому засвоєнню знань обома сторонами (навчаючи інших, навчаєшся сам).

Окремої уваги заслуговує питання організації самостійної роботи учнів в умовах диференційованого навчання. Самостійна робота є тим видом навчальної діяльності, де індивідуальні особливості учнів проявляються найбільш яскраво. Ю. І. Овсієнко наголошує, що диференційована самостійна робота повинна передбачати не лише різний обсяг і складність завдань, але й різний ступінь інструктивної допомоги [41, с. 65]. Для учнів з низьким рівнем навчальних досягнень доцільно пропонувати завдання з детальними інструкціями, алгоритмами виконання, зразками розв’язання, опорними схемами. Учням із середнім рівнем можна давати завдання з меншою кількістю підказок, спонукаючи їх до самостійного пошуку шляхів розв’язання. А учням з високим рівнем підготовки слід пропонувати творчі завдання, які вимагають нестандартного мислення, перенесення знань у нові ситуації, проведення міні-досліджень.

У контексті нашого дослідження, яке присвячене вивченню теми «Степенева функція», диференціація набуває особливого значення. Ця тема є однією з ключових у курсі алгебри і початків аналізу, оскільки вона узагальнює знання учнів про функції, отримані в основній школі, і створює базу для подальшого вивчення показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій. Складність теми полягає в тому, що властивості степеневої функції суттєво залежать від показника степеня (парний чи непарний, цілий чи дробовий, додатний чи від'ємний), що вимагає від учнів уміння класифікувати, порівнювати, узагальнювати. Диференційований підхід дозволяє розподілити цей складний матеріал на доступні для засвоєння порції, забезпечити багаторазове повторення та закріплення основних понять на різних рівнях складності.

Важливо також звернути увагу на те, що диференціація навчання математики не обмежується лише урочною діяльністю. Вагомим компонентом системи диференційованого навчання є позакласна робота, яка включає факультативи, гуртки, курси за вибором, наукові товариства учнів. Математичний гурток, як зазначають методисти, є однією з найефективніших форм роботи, що дозволяє поглибити знання зацікавлених учнів, вийти за межі шкільної програми і розвивати творчі здібності [46, с. 302]. При цьому принципово важливим є дотримання принципу добровільності участі, що забезпечує високу внутрішню мотивацію учнів. Факультативні заняття, своєю чергою, дозволяють більш системно працювати над складними темами, розглядаючи нестандартні задачі, методи розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, що часто залишаються поза увагою на звичайних уроках через брак часу. Для теми «Степенева функція» факультативні заняття можуть бути присвячені, наприклад, побудові графіків складних функцій за допомогою геометричних перетворень або застосуванню степеневих функцій для моделювання реальних процесів у фізиці, економіці, біології.

І. В. Лов'янова розглядає диференціацію як цілісну систему навчання, що найбільшою мірою сприяє професійній орієнтації молоді [31, с. 15]. У старшій школі це реалізується через профільне навчання, яке є інституційною формою зовнішньої диференціації. Однак навіть у профільних класах (наприклад, фізико-математичного профілю) рівень підготовки учнів може суттєво різнитися. У класі можуть бути учні, які планують вступати на математичні спеціальності університетів, і ті, для яких математика є лише інструментом для вивчення фізики чи інформатики. Це зумовлює необхідність поєднання профільної та рівневої диференціації. Вчитель повинен бути готовим до гнучкого реагування на потреби учнів, застосовуючи різнорівневі завдання та індивідуальні консультації навіть у межах відібраного за профілем учнівського колективу.

Нормативно-правовою базою впровадження диференційованого підходу в Україні є Закон України «Про освіту» [20] та Державний стандарт базової середньої освіти [18]. Ці документи визначають стратегічний курс на створення особистісно орієнтованої системи освіти, яка забезпечує рівний доступ до якісних освітніх послуг для всіх громадян. Диференціація розглядається як механізм реалізації цього права, що дозволяє кожній дитині знайти своє місце в освітньому просторі, розвинути свої таланти та підготуватися до самостійного життя. Відповідно до Концепції профільного навчання [27] старша школа має функціонувати як профільна, що передбачає можливість вибору учнями напряму навчання та переліку предметів для поглибленого вивчення.

Впровадження диференційованого підходу висуває нові вимоги до професійної компетентності вчителя математики. Він повинен володіти не лише глибокими предметними знаннями, але й ґрунтовною психолого-педагогічною підготовкою, вміти здійснювати діагностику навчальних можливостей учнів, проектувати різнорівневий навчальний процес, володіти технологіями групової та індивідуальної роботи. Вчитель має виступати не лише транслятором знань, а й організатором пізнавальної діяльності учнів, фасилітатором, тьютором, який допомагає кожному учневі вибудувати власну освітню траєкторію. Особливо це важливо в умовах дистанційного та змішаного навчання, коли роль самостійної роботи учнів зростає, а можливості безпосереднього педагогічного впливу обмежені. У таких умовах диференціація завдань, надання індивідуальних консультацій та підтримка зворотного зв'язку стають критично важливими факторами успішності навчання.

Ефективність диференційованого навчання значною мірою залежить також від якості навчально-методичного забезпечення. Підручники, збірники задач, дидактичні матеріали повинні містити достатню кількість різнорівневих завдань, щоб учитель мав можливість вибору. Сучасні підручники з математики для 10-11 класів ([2], [22], [23], [32], [33], [39]), як правило, побудовані з урахуванням принципів рівневої диференціації. Вони містять завдання різних рівнів складності (початкового, середнього, достатнього, високого), рубрики для допитливих, історичні довідки, що дозволяє організувати роботу з учнями різного рівня підготовки. Однак учителю часто доводиться самостійно розробляти додаткові дидактичні матеріали (картки, тести, презентації), щоб адаптувати зміст підручника до особливостей конкретного класу.

Не менш важливим є питання оцінювання навчальних досягнень учнів в умовах диференційованого навчання. Оцінювання має бути об'єктивним, прозорим і стимулюючим. Воно повинно враховувати не лише кінцевий результат, але й динаміку розвитку учня, докладені ним зусилля. При використанні різнорівневих завдань важливо, щоб критерії оцінювання були зрозумілими для учнів: виконання завдань базового рівня гарантує отримання оцінки середнього рівня, а для отримання високої оцінки необхідно впоратися із завданнями підвищеної складності. Це створює здорову конкуренцію і мотивує учнів до підвищення свого рівня.

Підсумовуючи вищевикладене, можна стверджувати, що диференційований підхід у сучасній школі є не просто методичним прийомом, а цілісною педагогічною філософією, яка ставить у центр навчального процесу Дитину з її унікальним внутрішнім світом. Він базується на визнанні права кожного учня на індивідуальний темп розвитку і власну освітню траєкторію. Реалізація цього підходу вимагає від школи гнучкості, варіативності та відкритості до змін. Для вчителя математики це означає необхідність постійного професійного самовдосконалення, пошуку нових форм і методів роботи, які б дозволили зробити складний світ математики доступним і цікавим для кожного учня. У контексті вивчення теми «Степенева функція» диференціація є ключем до успішного засвоєння матеріалу, оскільки дозволяє врахувати різний рівень абстрактного мислення учнів і забезпечити міцне підґрунтя для подальшого математичного розвитку. Тільки через гармонійне поєднання профільної та рівневої диференціації, через створення атмосфери співпраці та підтримки можна досягти головної мети сучасної освіти – виховання компетентної, творчої особистості, здатної до самореалізації в динамічному світі.

1.2. Профільна та рівнева диференціація у старшій школі

Реформування системи загальної середньої освіти в Україні, яке відбувається на сучасному етапі державотворення, тісно пов’язане з переходом старшої школи на профільне навчання. Цей процес зумовлений об’єктивними потребами суспільства у формуванні соціально активної, професійно компетентної особистості, здатної до свідомого вибору життєвого шляху та самореалізації в умовах ринкової економіки. Профільна диференціація розглядається як один із ключових механізмів забезпечення якості освіти, її індивідуалізації та наближення до потреб кожного учня. Вона виступає формою зовнішньої диференціації, яка передбачає створення спеціалізованих класів або навчальних закладів, де зміст, методи і форми навчання адаптуються до пізнавальних інтересів та професійних намірів старшокласників.

Теоретико-методологічні засади профільного навчання ґрунтовно висвітлені в нормативних документах, зокрема в Законі України «Про освіту» [20], Державному стандарті базової середньої освіти [18] та Концепції профільного навчання в старшій школі [27]. Згідно з цими документами, профільне навчання – це вид диференціації та індивідуалізації навчання, що дає змогу за рахунок змін у структурі, змісті й організації освітнього процесу повніше враховувати інтереси, нахили і здібності учнів, створювати умови для навчання старшокласників відповідно до їхніх професійних інтересів і намірів щодо продовження освіти. Головною метою профільного навчання є забезпечення рівного доступу до якісної освіти, створення умов для професійного самовизначення молоді, формування готовності до свідомого вибору майбутньої професії та продовження навчання впродовж життя.

Аналіз науково-педагогічної літератури свідчить, що впровадження профільної диференціації базується на низці принципів, які визначають специфіку організації навчального процесу в старшій школі. До них, зокрема, належать принципи фуркації (розподілу учнів за напрямами підготовки), варіативності (можливості вибору змісту і форм навчання), діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів для обґрунтованої орієнтації на певний профіль), наступності та неперервності (зв'язок між допрофільною підготовкою, профільним навчанням і професійною освітою) [27]. Реалізація цих принципів вимагає від школи гнучкості, відкритості до змін та готовності до задоволення різноманітних освітніх запитів учнів та їхніх батьків.

У структурі змісту профільної освіти виділяють інваріантну та варіативну складові. Інваріантна складова забезпечує загальноосвітню підготовку учнів і є обов'язковою для всіх профілів. Вона включає перелік базових предметів, які вивчаються на рівні стандарту. Варіативна складова формується навчальним закладом з урахуванням обраного профілю та індивідуальних потреб учнів. Вона включає профільні предмети, які вивчаються поглиблено, а також курси за вибором, факультативи та спецкурси. Саме варіативна складова дозволяє реалізувати диференційований підхід, наповнити зміст освіти матеріалом, який відповідає інтересам учнів і сприяє їхній професійній орієнтації.

М. І. Бурда у своїх дослідженнях наголошує на тому, що профільне навчання математики має забезпечувати не лише глибоке засвоєння предметних знань, але й формування специфічних для кожного профілю компетентностей [10, с. 3]. Учений пропонує класифікувати профілі навчання математики за трьома основними напрямами: загальнокультурним, теоретичним та прикладним. Загальнокультурний напрям (гуманітарний, філологічний, художньо-естетичний профілі) орієнтований на формування в учнів уявлення про математику як елемент загальнолюдської культури, засіб пізнання світу та розвитку логічного мислення. Теоретичний напрям (фізико-математичний профіль) передбачає глибоке вивчення математичних теорій, методів доведення, формування абстрактного мислення та підготовку до продовження освіти за математичними спеціальностями. Прикладний напрям (технологічний, природничий, економічний профілі) спрямований на опанування математичного апарату, необхідного для розв'язування задач у суміжних галузях знань та майбутній професійній діяльності.

Розглянемо детальніше особливості навчання математики в класах різних профілів, оскільки це безпосередньо стосується теми нашого дослідження – вивчення степеневої функції. У класах фізико-математичного профілю математика є профільним предметом, на вивчення якого відводиться значна кількість годин (до 9 годин на тиждень). Навчання здійснюється за програмою поглибленого вивчення [35]. Основною метою тут є формування глибоких і міцних знань, розвиток математичного мислення, інтуїції та творчих здібностей. При вивченні теми «Степенева функція» акцент робиться на строгому математичному обґрунтуванні властивостей функцій, доведенні теорем, розгляді складних випадків (наприклад, степенева функція з ірраціональним показником), розв'язуванні нестандартних задач, рівнянь та нерівностей з параметрами. Учні вчаться досліджувати функції методами математичного аналізу, будувати графіки складних функцій за допомогою геометричних перетворень, використовувати метод мажорант та інші евристичні прийоми. Вчитель у таких класах виступає в ролі наукового керівника, який спрямовує дослідницьку діяльність учнів, стимулює їх до самостійного пошуку істини.

У класах природничого профілю (біологічний, хімічний, географічний) математика вивчається на профільному рівні або рівні стандарту, залежно від специфіки навчального плану. Тут математика розглядається як потужний інструмент дослідження природи. При вивченні степеневих функцій особлива увага приділяється їх застосуванню для моделювання природних процесів. Наприклад, розглядаються залежності між фізичними величинами, які описуються степеневими функціями (закони руху, закон всесвітнього тяжіння, залежність об’єму кулі від радіуса тощо), задачі на обчислення популяцій у біології, розрахунки хімічних реакцій. Важливим аспектом є формування вмінь працювати з реальними даними, будувати графіки за результатами експериментів, інтерпретувати математичні моделі мовою природничих наук. Як зазначає Ю. І. Овсієнко, навчання математики в таких класах має бути професійно спрямованим, демонструвати прикладний потенціал математичних методів [41, с. 115].

У класах технологічного профілю (інформаційно-технологічний, технологічний) математика є базою для опанування спеціальних дисциплін. Тут вивчення степеневих функцій тісно пов’язане з інформатикою та програмуванням. Учні можуть створювати комп’ютерні програми для побудови графіків функцій, дослідження їх властивостей, наближеного обчислення значень. Акцент робиться на алгоритмічному підході, вмінні формалізувати задачу, використовувати сучасні програмні засоби (Gran, GeoGebra, Excel) для математичного моделювання. Важливим є розуміння комп’ютерної реалізації математичних обчислень, похибок наближення, особливостей роботи з великими числами. Вчитель має демонструвати зв'язок математики з технікою, інженерією, сучасними інформаційними технологіями.

У класах суспільно-гуманітарного профілю (філологічний, історичний, правовий) математика вивчається на рівні стандарту [36]. Головна мета навчання тут – формування математичної грамотності, логічного мислення, вміння оперувати інформацією, поданою в різних формах (графіки, таблиці, діаграми). При вивченні степеневих функцій акцент зміщується з формально-оперативного на наочно-образний рівень. Теоретичний матеріал подається в ознайомчому плані, без громіздких доведень, з опорою на інтуїцію та життєвий досвід учнів. Більше уваги приділяється історичним аспектам розвитку поняття функції, естетиці математичних графіків, ролі математики в розвитку цивілізації. Як зазначають автори підручника з математики для рівня стандарту [3], важливо показати гуманітаріям красу і гармонію математики, її внутрішню логіку, не перевантажуючи їх складними технічними вправами [3, с. 5]. Завдання мають бути посильними, цікавими, практично орієнтованими, щоб учні не втрачали мотивацію до вивчення предмета.

І. В. Лов'янова у своєму дисертаційному дослідженні переконливо доводить, що ефективність профільного навчання математики залежить від системності впровадження диференційованого підходу [31, с. 22]. Вона виділяє такі компоненти методичної системи профільного навчання: цільовий (диференціація цілей навчання для різних профілів), змістовий (відбір і структурування навчального матеріалу), процесуальний (вибір методів, форм і засобів навчання), контрольно-оцінювальний (диференціація вимог до результатів навчання). Автор наголошує на необхідності створення навчально-методичних комплексів нового покоління, які б забезпечували варіативність навчання і дозволяли вчителю конструювати освітній процес з урахуванням профілю класу.

Важливим елементом системи профільної диференціації є курси за вибором та факультативи. Вони дозволяють розширити і поглибити зміст базових та профільних предметів, задовольнити специфічні пізнавальні інтереси учнів. Для математичних класів це можуть бути спецкурси з розв'язування олімпіадних задач, основ теорії ймовірностей, математичного аналізу. Для гуманітарних класів доцільними є курси «Математика в мистецтві», «Логіка», «Математичні основи економіки». Щодо теми «Степенева функція», то в рамках курсів за вибором можна розглядати такі питання, як «Побудова графіків функцій з модулями», «Функціональні рівняння», «Застосування функцій в економіці». Наявність широкого спектра курсів за вибором дозволяє кожному учневі сформувати індивідуальний навчальний план, що є найвищим рівнем реалізації диференційованого підходу.

Однак, як зазначає З. І. Слєпкань, профільна диференціація не повинна призводити до зниження загальноосвітнього рівня підготовки випускників [45, с. 126]. Незалежно від обраного профілю, кожен учень має оволодіти системою математичних знань і вмінь, необхідних для повноцінного життя в сучасному суспільстві. Це так званий математичний мінімум, зафіксований у Державному стандарті. Він включає вміння виконувати обчислення, перетворювати вирази, розв'язувати прості рівняння і нерівності, будувати і читати графіки елементарних функцій, застосовувати математичні знання в практичних ситуаціях. Завдання профільної школи – забезпечити засвоєння цього мінімуму всіма учнями і надати можливість для поглибленого вивчення математики тим, хто цього прагне.

Успішність реалізації профільного навчання значною мірою залежить від якості допрофільної підготовки в основній школі (8–9 класи). Цей етап є перехідним від базової до профільної освіти. Його мета – виявити інтереси і здібності учнів, допомогти їм у виборі профілю навчання, ліквідувати прогалини в знаннях. На етапі допрофільної підготовки доцільно використовувати рівневу диференціацію, пропонувати учням проби сил у різних видах діяльності, проводити профорієнтаційну роботу. В. К. Кірман зазначає, що саме у 8–9 класах формується стійкий інтерес до математики, тому важливо використовувати на уроках елементи дослідницької діяльності, проблемного навчання, показувати красу і логіку математичних доведень [26, с. 12]. Відсутність якісної допрофільної підготовки часто призводить до помилкового вибору профілю, що негативно впливає на подальше навчання і професійне становлення учня.

Психологічні аспекти профільного навчання ґрунтовно проаналізовані в роботах В. П. Кутішенко [30] та інших психологів. Вибір профілю в юнацькому віці є складним процесом самовизначення, на який впливають багато чинників: власні інтереси і здібності, думка батьків і вчителів, престижність майбутньої професії, вплив однолітків. Часто цей вибір є неусвідомленим або ситуативним. Тому педагогічний супровід профільного навчання має включати психологічну діагностику, консультації, тренінги особистісного зростання. Вчитель математики повинен бути не лише предметником, а й психологом, який розуміє вікові особливості старшокласників, вміє підтримати їх у ситуації вибору, створити ситуацію успіху.

У контексті реформи «Нова українська школа» передбачається перехід до трирічної старшої профільної школи (10–12 класи). Це створить сприятливіші умови для реалізації профільної диференціації, оскільки дозволить розвантажити навчальні програми, збільшити час на вивчення профільних предметів, запровадити інтегровані курси. Профільні ліцеї, які створюються в рамках реформи, мають стати осередками якісної профільної освіти, забезпеченими сучасною матеріально-технічною базою та кваліфікованими педагогічними кадрами. Організація навчання в таких ліцеях базується на принципах академічної свободи, виборності освітніх компонентів, поєднанні теорії і практики.

Аналізуючи стан впровадження профільного навчання в практику роботи шкіл, слід зазначити, що поряд з позитивними зрушеннями існує низка проблем. Серед них: недостатнє навчально-методичне забезпечення окремих профілів, формальний підхід до формування профільних класів, неготовність частини вчителів до роботи в умовах профільної диференціації, перевантаження учнів навчальними предметами. Часто профільне навчання зводиться лише до збільшення кількості годин на вивчення певних предметів без зміни методики викладання. Вирішення цих проблем потребує спільних зусиль науковців, методистів, управлінців і вчителів-практиків.

Особливої уваги потребує проблема поєднання профільної та рівневої диференціації. Навіть у класі, відібраному за певним профілем, рівень навчальних можливостей учнів не є однаковим. Тому вчитель математики повинен використовувати технології рівневої диференціації в межах профільного класу. Наприклад, у фізико-математичному класі можна виділити групу «олімпіадників», які працюють за індивідуальною траєкторією, і групу учнів, які опановують програму на нормативному для даного профілю рівні. У гуманітарному класі також можуть бути учні, які цікавляться математикою і бажають вивчати її глибше, ніж це передбачено стандартом. Завдання вчителя – створити умови для задоволення освітніх потреб кожного учня.

Щодо вивчення теми «Степенева функція» в умовах профільної диференціації, то тут вчитель має широке поле для методичної творчості. Для класів фізико-математичного профілю доцільно використовувати лекційно-семінарську систему, пропонувати завдання дослідницького характеру, проекти з використання комп’ютерних математичних пакетів для побудови і аналізу графіків. Для класів природничого профілю акцент слід робити на міжпредметних зв’язках, розв’язуванні прикладних задач з фізичним, біологічним, хімічним змістом. Для гуманітарних класів ефективним є використання історичного матеріалу, наочності, ігрових технологій, завдань на розвиток логічного мислення. У кожному випадку методика навчання має бути адаптована до особливостей сприймання і мислення учнів даного профілю.

Н. А. Тарасенкова у монографії «Організація навчання математики у старшій профільній школі» [42] підкреслює, що диференціація не повинна призводити до втрати системності знань. Вона пропонує структурувати навчальний матеріал у вигляді модулів, кожен з яких має інваріантну частину (ядро) і варіативну оболонку. Це дозволяє забезпечити єдність вимог до математичної підготовки випускників школи і водночас врахувати специфіку профільного навчання. Такий підхід є особливо продуктивним при вивченні функціональної лінії, де є фундаментальні поняття (область визначення, множина значень, монотонність, парність), які мають бути засвоєні всіма учнями, і специфічні властивості окремих видів функцій, глибина вивчення яких може варіюватися.

Отже, профільна диференціація у старшій школі є об’єктивною необхідністю і закономірним етапом розвитку системи освіти. Вона дозволяє вирішити протиріччя між уніфікованим характером середньої освіти та індивідуальними потребами особистості. Реалізація профільного навчання математики вимагає від учителя високого професіоналізму, володіння різноманітними методиками і технологіями, вміння проектувати освітній процес з урахуванням специфіки профілю та індивідуальних особливостей учнів. Успішне впровадження диференційованого підходу при вивченні теми «Степенева функція» передбачає гармонійне поєднання профільної та рівневої диференціації, використання адаптованих навчальних програм і підручників, широке залучення засобів ІКТ та прикладних задач. Тільки за таких умов математична освіта в старшій школі зможе виконати свою головну місію – забезпечити інтелектуальний розвиток молоді та підготувати її до успішної самореалізації в обраній професійній сфері.

1.3. Стан розроблення проблеми реалізації диференційованого навчання математики

Проблема диференціації навчання математики, попри свою тривалу історію дослідження, залишається однією з найбільш динамічних та багатогранних у сучасній педагогічній науці. Це зумовлено не лише зміною освітніх парадигм та переходом до компетентнісного підходу, але й необхідністю постійного пошуку ефективних механізмів адаптації навчального процесу до індивідуальних потреб учнів в умовах стрімкої інформатизації суспільства та оновлення змісту математичної освіти. Аналіз значного масиву науково-методичної літератури, дисертаційних досліджень, монографій та статей у фахових виданнях дозволяє стверджувати, що питання впровадження диференційованого підходу у процес навчання математики перебувають у фокусі уваги широкого кола провідних вітчизняних науковців. Серед них варто виокремити фундаментальні та прикладні праці таких дослідників, як І. А. Акуленко, М. І. Бурда, І. М. Богатирьова, К. В. Власенко, Л. С. Голодюк, Т. А. Грицик, Т. І. Дейніченко, Л. В. Жовтан, В. К. Кірман, Є. П. Нелін, Ю. І. Овсієнко, С. П. Семенець, З. О. Сердюк, З. І. Слєпкань, Ю. Л. Сморжевський, Т. М. Сукач, Н. А. Тарасенкова, Т. М. Хмара, О. С. Чашечникова, В. О. Швець, С. Є. Яценко та багатьох інших. Кожен із зазначених учених зробив унікальний внесок у розробку теоретичних та практичних аспектів диференціації, розглядаючи її крізь призму різних методичних систем та освітніх рівнів.

Значний пласт наукових досліджень присвячено проблемам профільної диференціації, яка розглядається як стратегічний напрям реформування старшої школи та забезпечення якості математичної освіти. Фундаментальні праці М. І. Бурди заклали концептуальні підвалини розуміння сутності профільного навчання математики, його структури, змісту та функцій. У своїх дослідженнях учений акцентує увагу на тому, що профільне навчання не може зводитися лише до збільшення кількості годин на вивчення предмета. Воно має забезпечувати формування специфічних для кожного профілю компетентностей, розвиток математичної культури та мислення, які відповідають майбутнім професійним потребам учнів [10, с. 3]. М. І. Бурда переконливо доводить, що ефективність профілізації безпосередньо залежить від якості навчально-методичного забезпечення, зокрема підручників, які мають бути диференційованими за змістом і рівнем складності. Він обґрунтовує необхідність створення різнорівневих навчальних комплектів, які б дозволяли реалізувати індивідуальні освітні траєкторії учнів у межах одного класу.

Важливим джерелом для глибокого розуміння теоретичних засад організації навчання математики у сучасній профільній школі є колективна монографія за загальною редакцією Н. А. Тарасенкової [42]. Автори цієї фундаментальної праці здійснюють всебічний аналіз як теоретичних, так і практичних аспектів організації освітнього процесу в умовах профілізації. У монографії детально розкрито психолого-педагогічні особливості навчання старшокласників, обґрунтовано наукові принципи відбору та структурування змісту навчального матеріалу для різних профілів (фізико-математичного, природничого, економічного тощо), запропоновано інноваційні підходи до методики проведення уроків математики. Особлива увага в роботі приділяється питанню наступності між основною та старшою школою, що є критично важливим для забезпечення цілісності та неперервності математичної освіти. Науковці наголошують на необхідності створення гнучкої, варіативної системи навчання, яка б дозволяла учням змінювати освітню траєкторію без втрати якості знань та психологічного дискомфорту.

Системний та глибокий аналіз теоретико-методичних засад вивчення математики у старшій профільній школі здійснено у докторському дисертаційному дослідженні І. В. Лов’янової [31]. Дослідниця розглядає диференціацію як складну, багатокомпонентну систему навчання, яка включає взаємопов'язані елементи: мету, зміст, методи, форми та засоби навчання. Особливу увагу в її дослідженні приділено професійній спрямованості навчання математики як засобу мотивації та професійного самовизначення учнів. І. В. Лов’янова переконливо доводить, що математична підготовка старшокласників має бути тісно інтегрована з їхніми майбутніми професійними інтересами. Це означає, що при вивченні таких фундаментальних тем, як «Степенева функція», вчитель повинен не лише формувати абстрактні математичні поняття, а й систематично демонструвати їх застосування у різних галузях знань – економіці (моделювання попиту і пропозиції), фізиці (закони руху, термодинаміка), біології (зростання популяцій), техніці. Такий прикладний підхід сприяє підвищенню мотивації учнів, формуванню стійкого пізнавального інтересу та розумінню ролі математики в сучасному світі.

На сучасному етапі розвитку педагогічної науки важливим стратегічним завданням є реалізація розвивального навчання математики, спрямованого на формування та розвиток творчого мислення, дослідницьких здібностей та інтелектуального потенціалу учнів. Цьому питанню присвячено низку ґрунтовних досліджень. Методичні особливості формування і розвитку творчого мислення школярів у процесі диференційованого навчання математики глибоко та всебічно досліджені у працях О.С. Чашечникової [54]. Методист у своєму дослідженні вдало та органічно поєднала реалізацію профільної та рівневої диференціації навчання математики. Вона обґрунтовує думку про те, що творчий потенціал учня може бути повною мірою розкритий лише за умови створення відповідного розвивального освітнього середовища, яке спонукає до пошуку нестандартних рішень, висунення та перевірки гіпотез, самостійного конструювання математичних об'єктів. О.С. Чашечникова пропонує розроблену систему задач творчого характеру, яка диференційована за рівнями складності та враховує індивідуальні особливості пізнавальної діяльності учнів. Її підхід є особливо цінним для нашого дослідження, оскільки вивчення степеневих функцій надає широкі можливості для організації навчально-дослідницької діяльності старшокласників, зокрема через дослідження властивостей функцій залежно від показника степеня.

Особливе місце у теорії розвивального навчання належить питанням формування прийомів евристичної діяльності, які є основою творчого мислення. Саме ці аспекти досліджує Ю. Л. Сморжевський [47] шляхом впровадження диференційованого підходу на уроках стереометрії. Хоча його дослідження безпосередньо стосується геометричного матеріалу, виявлені ним закономірності та запропоновані методичні прийоми мають загальнодидактичне значення і можуть бути ефективно трансформовані для навчання алгебри та початків аналізу. Зокрема, ідея про необхідність поетапного формування евристичних умінь (від репродуктивного відтворення до частково-пошукового і, нарешті, до самостійного дослідницького пошуку) є універсальною. Ю.Л. Сморжевський наголошує на важливості цілеспрямованого навчання учнів загальнонауковим методам пізнання: аналогії, узагальненню, конкретизації, моделюванню, що є вкрай актуальним при вивченні властивостей різних класів функцій, побудові їх графіків та розв'язуванні рівнянь.

Значний пласт наукових робіт присвячено дослідженню організаційних форм, методів та засобів реалізації диференційованого навчання. Зокрема, Т.І. Дейніченко [16; 17] ґрунтовно та детально розглядає групову форму організації диференційованого навчання математики як ефективний засіб індивідуалізації навчального процесу. Автор переконливо доводить, що робота в гетерогенних (різнорівневих) та гомогенних (однорівневих) групах сприяє не лише кращому та глибшому засвоєнню навчального матеріалу, але й розвитку важливих соціальних навичок: комунікативних компетентностей, уміння працювати в команді, навичок співпраці, взаємоконтролю та взаємодопомоги. Т.І. Дейніченко розробила детальну методику комплектування груп, розподілу ролей між учасниками та оцінювання результатів групової роботи, яка може бути успішно застосована при вивченні теми «Степенева функція», особливо на етапах закріплення знань, розв’язування задач та виконання практичних робіт.

Методичні особливості організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у поглибленому курсі геометрії у рамках реалізації диференційованого підходу розглядає у своєму дослідженні О.І. Буковська [8]. Дослідниця акцентує увагу на тому, що в умовах профільного навчання суттєво зростає роль самостійної роботи учнів, яка має бути належним чином організована, методично забезпечена та педагогічно супроводжувана. Вона пропонує систему різнорівневих завдань для самостійної роботи, методичні рекомендації щодо їх виконання, алгоритми самоконтролю та критерії оцінювання. Ідеї О. І. Буковської щодо індивідуалізації самостійної роботи, надання учням права вибору завдань, темпу їх виконання та засобів навчання є надзвичайно важливими для нашого дослідження, оскільки сприяють формуванню суб’єктної позиції учня в навчальному процесі та розвитку навичок самоосвіти.

Дисертаційне дослідження Ю.І. Овсієнко [41] стосується диференційованого навчання математики студентів вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю. Хоча дане дослідження формально включає вищу школу, його теоретична база, методологічні підходи та принципи добору змісту можуть бути ефективно використані і у старшій профільній школі, особливо в класах технологічного та природничого профілів. Ю.І. Овсієнко розглядає професійно спрямовані задачі як потужний засіб реалізації прикладної функції математики та мотивації навчання. Вона пропонує методику добору та складання таких задач, яка базується на врахуванні специфіки майбутньої професійної діяльності. Цей підхід є актуальним для шкільної освіти, оскільки дозволяє наочно продемонструвати учням практичне значення математичних знань, зокрема застосування степеневих функцій для моделювання реальних процесів у біології (ріст рослин), фізиці, хімії, економіці.

Важливе місце у системі наукових досліджень належить методичним розробкам практичного спрямування, які присвячені вивченню конкретних, найбільш складних розділів шкільної математики. Це, наприклад, дослідження Т.А. Грицик [15], що безпосередньо пов’язане з вивченням тригонометрії в умовах диференційованого навчання у старшій профільній школі. Автор розробила цілісну методичну систему, яка включає диференційовані цілі навчання, різнорівневий зміст, адаптовані методи та форми організації навчальної діяльності. Т.А. Грицик експериментально довела ефективність блочно-модульного структурування навчального матеріалу, що дозволяє учням бачити цілісну картину теми, встановлювати внутрішньопредметні зв'язки та систематизувати знання. Її досвід є надзвичайно цінним для розробки методики вивчення степеневих функцій, оскільки обидві ці теми (тригонометрія та степеневі функції) характеризуються значним обсягом теоретичного матеріалу, складністю графічних побудов та різноманіттям типів рівнянь і нерівностей.

Створенням методичної системи вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю займався відомий методист В.К. Кірман [26]. У своєму дисертаційному дослідженні він пропонує підхід, що базується на фундаментальному, поглибленому вивченні властивостей функцій, використанні функціонального методу при розв'язуванні рівнянь та нерівностей, а також широкому застосуванні графічних методів аналізу. В.К. Кірман наголошує на необхідності формування в учнів узагальнених умінь досліджувати функції, будувати їх графіки, виконувати перетворення графіків та інтерпретувати отримані результати. Його методичні рекомендації щодо використання геометричних перетворень графіків функцій, дослідження функцій на монотонність, екстремуми, опуклість є безпосередньою теоретичною та методичною основою для нашого дослідження, особливо в частині вивчення графіків степеневих функцій.

Деякі роботи присвячені методиці навчання математики в основній школі, що є фундаментом для успішного навчання у старших класах. Реалізацією диференційованого підходу при вивченні рівнянь та нерівностей у 7–9 класах займалася Т. М. Сукач [50]. Автор розробила систему завдань, яка дозволяє враховувати різні рівні підготовки учнів та поступово підвищувати складність матеріалу від репродуктивного до творчого. Її підхід до класифікації рівнянь, виділення ключових задач та методів їх розв'язування може бути використаний при вивченні ірраціональних рівнянь, які є невід'ємною частиною теми «Степенева функція». Методику вивчення властивостей трикутника в умовах рівневої диференціації досліджувала Л.С. Голодюк [13]. Дослідниця акцентує увагу на важливості візуалізації навчального матеріалу, використанні опорних конспектів, схем, таблиць, що сприяє кращому запам'ятовуванню, розумінню та систематизації геометричних фактів. Цей принцип наочності є не менш важливим і в алгебрі, особливо при вивченні властивостей функцій та побудові їх графіків, де візуальний образ відіграє ключову роль у розумінні абстрактних залежностей.

Аналіз наукової літератури свідчить, що останнім часом почали з'являтися випускні кваліфікаційні роботи магістрів, присвячені вивченню степеневих функцій у старшій профільній школі, зокрема роботи В.В. Головацького [12] та М.О. Жерновникова [19]. Це свідчить про зростання інтересу молодих дослідників до даної теми та її беззаперечну актуальність в умовах оновлення змісту освіти. Проте, детальний аналіз цих робіт показує, що вони часто носять описовий, фрагментарний характер, не містять глибокого теоретичного обґрунтування пропонованих методик та не враховують повною мірою сучасні тенденції розвитку освіти, такі як компетентнісний підхід, цифровізація навчання та вимоги Нової української школи. Більшість з них зосереджена на окремих, вузьких аспектах теми, не пропонуючи цілісної, науково обґрунтованої методичної системи, яка б охоплювала всі компоненти навчального процесу.

Таким чином, незважаючи на значну кількість різнопланових досліджень, присвячених проблемі диференціації навчання математики, питання системного впровадження диференційованого підходу саме при вивченні теми «Степенева функція» у старшій школі залишаються недостатньо розробленими. Зокрема, потребують уточнення, конкретизації та методичного наповнення такі аспекти:

1. Інтеграція профільної та рівневої диференціації. Більшість існуючих досліджень розглядають ці види диференціації відокремлено, тоді як у реальному навчальному процесі профільної школи вони тісно переплітаються. Існує нагальна потреба у розробці методичних рекомендацій, які б дозволяли вчителю органічно поєднувати профільну

спрямованість навчання з урахуванням індивідуальних рівнів підготовки учнів у межах одного класу, забезпечуючи гнучкість освітнього процесу.

2. Диференціація змісту та методів навчання для різних профілів. Існуючі методичні розробки часто є уніфікованими і не враховують специфіку різних профілів навчання (гуманітарного, природничого, технологічного, фізико-математичного). Необхідно розробити варіативні конспекти уроків, сценарії навчальних занять, які б відображали відмінності у цілях, змісті, методах та засобах навчання степеневих функцій для різних категорій учнів, враховуючи їхні пізнавальні стилі та інтереси.

3. Створення системи диференційованих завдань. Хоча у підручниках і посібниках міститься велика кількість задач, вони не завжди систематизовані за рівнями складності та типами навчальної діяльності. Відсутні цілісні комплекси завдань, спрямовані на розвиток дослідницьких умінь, критичного мислення та формування ключових компетентностей засобами теми «Степенева функція». Особливо це стосується задач прикладного, практичного змісту, які б демонстрували застосування степеневих функцій у реальному житті та професійній діяльності.

4. Методика використання ІКТ в умовах диференціації. Сучасні цифрові інструменти (динамічні математичні середовища GeoGebra, Desmos, графічні калькулятори, онлайн-платформи) відкривають нові потужні можливості для візуалізації властивостей функцій, моделювання та організації дослідницької роботи учнів. Проте методика їх диференційованого використання при вивченні степеневих функцій потребує ґрунтовного розроблення та адаптації до потреб різних груп учнів.

5. Діагностика та корекція навчальних досягнень. Важливим аспектом є розробка інструментарію для діагностики рівня засвоєння теми та виявлення типових помилок, які допускають учні при побудові графіків, розв’язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей. Необхідно систематизувати ці помилки та розробити методику їх попередження та усунення, яка б враховувала індивідуальні особливості учнів.

Отже, аналіз стану розроблення проблеми дозволяє зробити висновок, що, незважаючи на вагомі здобутки вітчизняної педагогічної науки у галузі диференціації навчання математики, методика диференційованого вивчення теми «Степенева функція» у старшій школі потребує подальшого вдосконалення, оновлення та систематизації. Існуючі дослідження створюють надійний теоретичний фундамент, але не вичерпують усіх аспектів проблеми, особливо в контексті сучасних викликів освіти, таких як впровадження компетентнісного підходу, цифровізація та профілізація старшої школи. Це зумовлює об'єктивну необхідність розробки науково обґрунтованої методичної системи, яка б забезпечувала ефективне засвоєння теми учнями різних профілів, сприяла розвитку їхньої математичної компетентності, формуванню стійкого інтересу до вивчення математики та підготовці до успішної самореалізації. Саме на вирішення цих актуальних завдань і спрямоване наше магістерське дослідження.

1.4. Психолого-педагогічні умови впровадження диференційованого навчання математики у старшій профільній школі

Ефективність впровадження будь-якої інноваційної педагогічної технології чи методичної системи, зокрема й диференційованого навчання математики, неможлива без урахування та створення комплексу сприятливих умов. У педагогічній науці під умовами зазвичай розуміють сукупність обставин, факторів та середовищних чинників, які суттєво впливають на перебіг освітнього процесу та визначають його результативність. Коли йдеться про психолого-педагогічні умови, то акцент зміщується на закономірності психічного розвитку особистості, особливості міжособистісної взаємодії учасників освітнього процесу та специфіку організації навчальної діяльності, що відповідає віковим та індивідуальним можливостям учнів. Впровадження диференційованого підходу у старшій школі вимагає від учителя не лише глибоких предметних знань, але й ґрунтовної психологічної компетентності, розуміння внутрішнього світу старшокласника, мотивів його поведінки та механізмів пізнання.

Аналіз наукової літератури, зокрема праць З. І. Слєпкань [45], В. П. Кутішенко [30] та інших дослідників, дозволяє виокремити ключову групу умов, дотримання яких є критично важливим для успішної реалізації диференційованого навчання математики. Першою і, безумовно, найважливішою умовою є глибоке врахування вікових психологічних особливостей учнів старшого шкільного віку. У віковій психології цей період (15–17 років) визначається як рання юність. Це час завершення фізичного дозрівання організму, переходу від дитинства до дорослості, що супроводжується складними процесами становлення самосвідомості, формуванням світогляду та життєвих планів.

Для ранньої юності характерний якісний стрибок у розвитку когнітивної сфери. Мислення старшокласників набуває рис теоретичного, абстрактно-логічного. Вони стають здатними до складних аналітико-синтетичних операцій, висунення гіпотез, аргументованого доведення своїх думок, встановлення причинно-наслідкових зв’язків. Зростає критичність мислення: юнаки та дівчата вже не сприймають інформацію на віру, а прагнуть перевірити її, зрозуміти суть явищ, знайти логічні обґрунтування. Це створює сприятливе підґрунтя для вивчення складних математичних понять, зокрема функціональної залежності, границі, похідної. При вивченні теми «Степенева функція» вчитель має спиратися на ці особливості, пропонуючи завдання, що вимагають узагальнення, класифікації (наприклад, властивостей функцій залежно від показника степеня), побудови логічних ланцюжків міркувань.

Водночас розвиток мислення у старшокласників відбувається нерівномірно і має індивідуальну специфіку. У деяких учнів переважає словесно-логічне мислення, вони легко оперують знаками, символами, формулами, тяжіють до теоретизування. Інші ж зберігають виражену схильність до наочно-образного мислення, їм для розуміння абстракцій потрібна візуальна опора, графічні інтерпретації, конкретні приклади. Диференційований підхід, як зазначає О.С. Чашечникова, дозволяє врахувати ці відмінності в когнітивних стилях [54, с. 205]. Для учнів-«аналітиків» процес навчання може будуватися на основі строгого доведення властивостей степеневих функцій, виведення формул, аналітичного дослідження. Для учнів-«візуалів» (яких часто більше у гуманітарних класах) доцільно йти від графічного образу до формули, використовувати комп'ютерне моделювання, динамічні креслення, що дозволяють «побачити» математичну закономірність.

Другою важливою психолого-педагогічною умовою є врахування особливостей пам'яті та уваги старшокласників. У цьому віці пам'ять стає переважно логічною та довільною. Учні вже не просто механічно запам'ятовують матеріал, а намагаються його структурувати, виділити головне, встановити логічні зв'язки. Обсяг пам'яті зростає, але ефективність запам'ятовування прямо залежить від розуміння та зацікавленості. Увага стає більш стійкою, зростає здатність до її переключення та розподілу. Старшокласники можуть тривалий час зосереджуватися на розв'язуванні складної задачі, якщо вона є для них значущою. Однак монотонна, одноманітна діяльність швидко викликає втому і зниження уваги. Тому організація диференційованого навчання має передбачати зміну видів діяльності, чергування напруженої розумової праці з елементами релаксації, використання інтерактивних методів, що підтримують довільну увагу.

Третьою умовою є врахування типологічних особливостей нервової системи та темпераменту учнів. В одному класі навчаються діти з різною силою, рухливістю та врівноваженістю нервових процесів. Учні з сильним і рухливим типом нервової системи (сангвініки, холерики) здатні швидко включатися в роботу, працювати у високому темпі, легко переключатися з одного завдання на інше. Вони активні, ініціативні, але можуть бути неуважними до деталей і поверховими. Учні зі слабким або інертним типом (меланхоліки, флегматики) потребують більше часу на «входження» в урок, працюють повільніше, але часто більш ґрунтовно і ретельно. В умовах фронтальної роботи, коли темп задає вчитель або «середній» учень, «швидкі» діти починають нудьгувати, а «повільні» не встигають, нервують і втрачають нитку міркувань. Диференціація дозволяє вирішити цю проблему шляхом надання учням можливості працювати в індивідуальному темпі. Наприклад, при виконанні самостійної роботи з теми «Побудова графіків степеневих функцій» учні з високою лабільністю нервових процесів можуть виконати більшу кількість завдань або перейти до завдань підвищеної складності, тоді як учні з інертною нервовою системою зосередяться на якісному виконанні обов'язкового мінімуму, не відчуваючи стресу через брак часу.

Четвертою, надзвичайно важливою умовою є формування стійкої позитивної мотивації до вивчення математики. У ранній юності відбувається зміна домінуючих мотивів навчання. Якщо для підлітків важливою була оцінка з боку однолітків та вчителів, то для старшокласників на перший план виходять мотиви, пов'язані з майбутнім професійним самовизначенням. Навчання набуває для них особистісного смислу: «Я вчу це тому, що це потрібно мені для вступу до університету», «Це знадобиться мені в майбутній професії». Ця особливість є ключовою для реалізації профільного навчання. У класах фізико-математичного та технологічного профілів мотивація до вивчення математики зазвичай є високою, оскільки учні усвідомлюють її як профільний предмет. Тут ефективними будуть методи, що підкреслюють наукову значущість математики, її роль у розвитку техніки і технологій.

Значно складнішою є ситуація в класах гуманітарного або художньо-естетичного профілю, де математика часто сприймається як другорядний, складний і «непотрібний» предмет. У таких випадках для створення позитивної мотивації вчитель має використовувати інші стимули: показувати красу і гармонію математичних законів, їх прояв у мистецтві, архітектурі, музиці, природі. При вивченні степеневих функцій можна продемонструвати, як графіки парабол та гіпербол використовуються в дизайні, архітектурних формах, як закони пропорційності працюють у живописі. Важливо переконати гуманітаріїв, що математика розвиває логіку, вміння аргументувати, критично мислити – якості, необхідні юристу, історику, філологу. Диференційований підхід дозволяє підібрати для таких учнів завдання прикладного та загальнокультурного змісту, які будуть їм цікавими і зрозумілими.

П’ятою умовою є забезпечення психологічного комфорту та створення ситуації успіху для кожного учня. Математика – предмет, який часто викликає в учнів тривожність, страх помилки, невпевненість у собі. Це особливо стосується тих дітей, які мали негативний досвід у попередніх класах. Страх отримати погану оцінку або виглядати некомпетентним в очах однокласників блокує пізнавальну активність. Диференційоване навчання створює умови для подолання цього бар’єру. Коли учень отримує завдання, яке відповідає його рівню підготовки (знаходиться в «зоні найближчого розвитку»), він здатен з ним впоратися. Успішне виконання завдання викликає позитивні емоції, підвищує самооцінку, формує віру в свої сили. Поступове підвищення складності завдань дозволяє учневі рухатися вперед, відчуваючи радість від подолання інтелектуальних перешкод. Вчитель повинен підтримувати цей процес, акцентуючи увагу на досягненнях учня, порівнюючи його результати не з результатами інших, а з його власними попередніми досягненнями.

Шостою умовою є розвиток навичок самостійної навчальної діяльності та самоконтролю. Профільна школа – це етап підготовки до навчання у вищому навчальному закладі, де самостійна робота є домінуючою. Тому важливо навчити старшокласників не лише розв’язувати задачі за зразком, але й самостійно здобувати знання, працювати з підручником, довідковою літературою, електронними ресурсами. Диференційоване навчання надає широкі можливості для цього. Учням можна пропонувати індивідуальні домашні завдання, теми для проектів, рефератів, досліджень. Важливою складовою є формування навичок самоконтролю та самооцінки. Учень повинен вміти об’єктивно оцінити рівень своїх знань, виявити прогалини і спланувати роботу щодо їх усунення. Для цього можна використовувати листи самоконтролю, різнорівневі тести з ключами для самоперевірки, рефлексивні анкети.

Сьома умова стосується особливостей педагогічного спілкування та стилю керівництва навчальним процесом. В юнацькому віці змінюється характер взаємин між учителем та учнями. Старшокласники прагнуть до рівноправного партнерства, поваги до їхньої думки, самостійності. Авторитарний стиль керівництва, який базується на примусі і жорсткому контролі, викликає у них протест і відчуження. Ефективним є демократичний стиль, що передбачає співпрацю, діалог, спільний пошук істини. Вчитель має виступати не як єдине джерело знань і контролер, а як фасилітатор, тьютор, наставник. В умовах диференційованого навчання це означає готовність учителя надати індивідуальну консультацію, допомогти у виборі рівня складності завдань, підтримати ініціативу учня. Важливою є атмосфера доброзичливості, толерантності до помилок, адже помилка – це не привід для покарання, а етап процесу пізнання.

Восьмою умовою є врахування гендерних особливостей учнів. Хоча сучасна психологія спростовує міфи про вроджену нездатність дівчат до математики, певні відмінності у стилях навчання та інтересах все ж існують. Дослідження показують, що хлопці часто схильні до ризику, нестандартних рішень, змагальності, тоді як дівчата віддають перевагу роботі за алгоритмом, акуратності, старанності, співпраці. У профільних фізико-математичних класах, де часто переважають хлопці, вчителю важливо підтримувати впевненість дівчат у своїх здібностях, не допускати гендерних стереотипів. Диференціація дозволяє врахувати ці нюанси, пропонуючи різні формати роботи (групові дискусії, індивідуальні проекти, творчі завдання), які дозволяють розкритися представникам обох статей.

Окремою, дев’ятою умовою, слід виділити наявність належного навчально-методичного та матеріально-технічного забезпечення. Диференційоване навчання неможливе без різнорівневих дидактичних матеріалів: підручників, збірників задач, карток із завданнями, тестів.

Учитель повинен мати у своєму розпорядженні банк завдань різного рівня складності для кожного етапу уроку. Особливого значення набуває використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Сучасні програмні засоби (GeoGebra, Desmos, Gran) дозволяють візуалізувати математичні поняття, проводити комп'ютерні експерименти, що є особливо ефективним при вивченні властивостей функцій. Наявність комп'ютера та проектора в класі, доступ до Інтернету дозволяють вчителю демонструвати динамічні моделі, використовувати освітні онлайн-платформи, організовувати дистанційне навчання.

Десята умова – це діагностико-прогностичний супровід навчального процесу. Ефективна диференціація неможлива без постійного моніторингу навчальних досягнень та психологічного стану учнів. Вчитель повинен систематично проводити діагностику рівня засвоєння знань, виявляти типові помилки та труднощі, відстежувати динаміку розвитку кожного учня. Це дозволяє вчасно коригувати навчальний процес, переводити учнів з однієї типологічної групи в іншу, надавати своєчасну допомогу. Психолого-педагогічна діагностика також допомагає виявити професійні схильності учнів, що є важливим для профільної орієнтації.

У контексті вивчення теми «Степенева функція» реалізація цих умов набуває конкретного змісту. Врахування когнітивних стилів означає використання різних способів подання функції: аналітичного (формула), графічного (графік), табличного, словесного опису. Для учнів з розвиненим абстрактним мисленням акцент робиться на аналізі формули та загальних властивостях, для «візуалів» – на побудові та перетворенні графіків. Мотивація забезпечується через демонстрацію прикладного значення степеневих функцій: розв'язування задач на обчислення об'ємів, площ, фізичних процесів, економічних показників (складні відсотки, еластичність попиту). Створення ситуації успіху досягається через систему різнорівневих вправ: від елементарних завдань на читання графіка до складних задач з параметрами.

Диференційовані завдання мають бути не занадто легкими (щоб не викликати нудьгу і зупинку в розвитку) і не занадто складними (щоб не викликати фрустрацію і відмову від діяльності). Вони мають вимагати від учня певного інтелектуального напруження, але бути посильними при наданні певної допомоги з боку вчителя. Саме в цьому процесі відбувається розвиток. Рівнева диференціація дозволяє підібрати для кожного учня саме такі завдання, які потрапляють у його зону найближчого розвитку.

Психолого-педагогічні умови впровадження диференційованого навчання тісно пов'язані з проблемою формування ключових компетентностей. У процесі роботи над темою «Степенева функція» розвивається не лише математична компетентність (володіння математичним апаратом), але й інші: спілкування державною мовою (вміння грамотно формулювати математичні твердження), основні компетентності у природничих науках і технологіях (розуміння функцій як моделей реальних процесів), інформаційно-цифрова компетентність (вміння використовувати програмні засоби), уміння вчитися впродовж життя (навички самостійної роботи, пошуку інформації). Створення сприятливих умов для розвитку цих компетентностей є завданням сучасної школи.

Особливу роль відіграє також профілактика перевантаження учнів. Старші класи характеризуються значним навчальним навантаженням, підготовкою до ЗНО/НМТ. Диференціація дозволяє оптимізувати цей процес. Учні профільного рівня отримують глибокі знання, необхідні для вступу, тоді як учні, для яких математика не є профільною, засвоюють необхідний мінімум без надмірного напруження, що зберігає їхнє фізичне та психічне здоров'я. Н. М. Токарева у посібнику з педагогічної психології зазначає, що хронічне перевантаження та стрес є основними факторами зниження навчальної мотивації та погіршення здоров'я школярів [52, с. 88]. Диференційований підхід виступає як здоров'язбережувальна технологія, що дозволяє досягати освітніх цілей без шкоди для дитини.

Необхідно також згадати про роль рефлексії в навчальному процесі. Старшокласники мають вчитися аналізувати свою діяльність, усвідомлювати свої сильні та слабкі сторони, причини успіхів і невдач. Вчитель повинен спонукати учнів до рефлексії після виконання контрольних робіт, завершення вивчення теми. Запитання типу «Що було найважчим?», «Які завдання вдалося виконати найкраще?», «Яких знань не вистачило?» допомагають учневі стати суб’єктом свого навчання. В умовах диференціації рефлексія допомагає учневі свідомо обирати рівень складності завдань та планувати своє вдосконалення.

Ще однією умовою є взаємодія сім’ї та школи. Батьки повинні розуміти суть профільного та диференційованого навчання, підтримувати вибір дитини, допомагати їй у професійному самовизначенні. Вчитель має проводити роз’яснювальну роботу з батьками, інформувати їх про успіхи та проблеми дітей, надавати рекомендації. Узгодженість дій педагогів та батьків створює сприятливе виховне середовище.

Узагальнюючи викладене, можна стверджувати, що впровадження диференційованого навчання математики у старшій профільній школі є складним процесом, який потребує системного підходу та дотримання комплексу психолого-педагогічних умов. До цих умов належать: урахування вікових та індивідуально-типологічних особливостей старшокласників (особливостей мислення, пам’яті, уваги, темпераменту); формування стійкої позитивної мотивації та професійного інтересу; забезпечення психологічного комфорту та ситуації успіху; розвиток навичок самостійності та самоконтролю; використання адекватного стилю педагогічного спілкування; належне навчально-методичне та матеріально-технічне забезпечення; систематична діагностика навчальних досягнень.

Реалізація цих умов дозволяє перетворити процес навчання з простої трансляції знань на процес розвитку особистості, де кожен учень має можливість реалізувати свій потенціал. Стосовно теми «Степенева функція» це означає створення такої методичної системи, яка б дозволяла учням з різними здібностями та інтересами опанувати цей важливий математичний матеріал на рівні, що відповідає їхнім потребам і можливостям, сформувати цілісне уявлення про функцію як математичну модель та підготуватися до подальшого навчання і професійної діяльності. Ігнорування будь-якої з названих умов може знизити ефективність диференціації та призвести до формалізму в навчанні. Тому вчитель математики має постійно працювати над створенням та підтримкою сприятливого психолого-педагогічного середовища на своїх уроках.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РЕАЛІЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ПІДХОДУ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ»

2.1. Аналіз навчальних програм та чинних підручників за темою дослідження

Фундаментом для побудови ефективної методичної системи навчання будь-якої теми шкільного курсу математики, зокрема й теми «Степенева функція», є детальний аналіз нормативної бази та навчально-методичного забезпечення. В умовах реформування української школи, переходу до профільного навчання та впровадження компетентнісного підходу, вимоги до змісту математичної освіти та результатів навчальної діяльності учнів суттєво трансформуються. Для реалізації диференційованого підходу вчитель повинен чітко розуміти відмінності у вимогах програм різних рівнів (рівня стандарту, профільного рівня та поглибленого вивчення математики) та вміти ефективно використовувати потенціал сучасних підручників.

На сьогоднішній день навчання математики в 10–11 класах закладів загальної середньої освіти здійснюється за навчальними програмами [35], [36], [37], затвердженими Міністерством освіти і науки України (наказ № 1407 від 23 жовтня 2017 року). Ці програми побудовані на засадах особистісно орієнтованого, компетентнісного та діяльнісного підходів. Тема «Степенева функція» входить до функціональної змістової лінії, яка є наскрізною для всього шкільного курсу математики. Її вивчення має на меті не лише формування уявлень про властивості степеневих функцій та навичок їх графічного зображення, а й розвиток функціонального мислення, вміння використовувати математичні моделі для опису реальних процесів.

Проведемо порівняльний аналіз змісту навчального матеріалу та державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учнів з теми «Степенева функція» за програмами рівня стандарту та профільного рівня.

У програмі рівня стандарту [36] тема «Функції, їхні властивості та графіки» розглядається в 10 класі. На її вивчення відводиться орієнтовно 15 годин. Змістове наповнення теми включає:

- понятття числової функції, її області визначення та множини значень;
- основні властивості функцій (нулі, проміжки знакосталості, зростання і спадання, парність і непарність);
- поняття кореня n-го степеня та його властивості;
- степінь з раціональним показником та його властивості;

- степенева функція, її властивості та графік.

Важливо зазначити, що на рівні стандарту не передбачено детального вивчення обернених функцій, складних перетворень графіків, а також поняття границі та неперервності. Основний акцент робиться на наочно-інтуїтивному сприйманні властивостей функцій, вмінні читати графіки та застосовувати їх для розв'язування простих прикладних задач. Очікувані результати навчальної діяльності передбачають, що учень: розпізнає степеневі функції серед інших; наводить приклади степеневих функцій; формулює означення кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником; будує графіки степеневих функцій (для натурального показника, а також для показників $1/2, -1$); описує властивості функцій за їх графіками.

Суттєво глибшим та змістовнішим є підхід до вивчення цієї теми у програмі профільного рівня [35]. Тут тема «Степенева функція» вивчається значно детальніше, на неї виділяється близько 30–35 годин (залежно від розподілу годин учителем та варіативної складової).

Державні вимоги до рівня підготовки учнів профільного рівня є значно вищими. Учні повинні розв'язувати складні ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами, використовувати функціональний метод при розв'язуванні задач. Особлива увага приділяється формуванню графічної культури та вмінню виконувати евристичні дії.

Ще більш глибоким є зміст програми для класів з поглибленим вивченням математики [37]. Тут тема «Степенева функція» розглядається як база для подальшого вивчення математичного аналізу. Вводяться поняття границі функції в точці, асимптот графіка функції. Розглядаються степеневі функції з довільним дійсним показником (хоча строге означення дається пізніше, при вивченні показникової функції). Система задач включає завдання олімпіадного рівня, дослідницькі проєкти.

Така суттєва різниця у змісті та вимогах програм створює передумови для реалізації профільної диференціації. Однак на практиці вчитель часто стикається з ситуацією, коли в одному класі (навіть профільному) навчаються діти з різним рівнем підготовки та мотивації. Це вимагає використання підручників, які б дозволяли реалізувати рівневу диференціацію, надаючи матеріал різної глибини та складності.

Розглянемо, як реалізується диференційований підхід у чинних підручниках з алгебри і початків аналізу для 10 класу, рекомендованих МОН України. Для аналізу ми обрали підручники [1], [2], [23], [33], [39], [40]. Ці підручники є найбільш поширеними в українських школах і представляють різні методичні школи.

1. Аналіз підручників [1], [2], [33].

Підручники (як для рівня стандарту [33], так і для профільного рівня [1], [2]) вирізняються високим науковим рівнем, логічною строгістю викладу та фундаментальністю. Вони фактично стали класикою сучасної української навчальної літератури з математики.

Підручник для профільного рівня [1] характеризується чіткою структурою: теоретичний матеріал поділено на пункти, кожен з яких завершується запитаннями для самоконтролю та великим масивом задач. Введення поняття степеневої функції здійснюється поетапно. Спочатку розглядаються функції $y = x^n$ для натуральних n, потім для цілих від'ємних, згодом вводиться поняття кореня n-го степеня та степеня з раціональним показником, і нарешті узагальнюється поняття степеневої функції. Така поступовість відповідає принципу наступності та дозволяє учням адаптуватися до зростання рівня абстракції.

Реалізація диференціації: Сильною стороною є потужна система задач, яка чітко диференційована за рівнями складності. Автори використовують кольорове маркування номерів вправ:

- прості задачі (початковий та середній рівень) – для відпрацювання базових навичок;
- задачі достатнього рівня – для закріплення та поглиблення знань;
- задачі високого рівня (позначені зірочкою «*») – для учнів, які прагнуть знати більше;

- надскладні задачі (рубрика «Коли зроблено уроки», позначка «лампочка» або «сова») – задачі олімпіадного характеру, які вимагають нестандартного мислення.

У темі «Степенева функція» підручник пропонує широкий спектр завдань: від простої побудови графіків за точками до дослідження функцій з модулями та параметрами. Наприклад, пропонується побудувати графік функції $y = \sqrt[4]{(x-3)^4} + |x+1|$. Це завдання вимагає від учня не лише знання властивостей кореня парного степеня ($\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$), але й уміння розкривати модулі та будувати графік методом інтервалів або геометричних перетворень. Такі задачі стимулюють аналітичне мислення і готують до виконання завдань високого рівня складності на ЗНО.

Теоретичний матеріал також подано диференційовано. Основний текст містить обов'язкові для вивчення теореми та їх доведення. Проте є рубрики «Для тих, хто хоче знати більше», де розглядаються тонкощі математичного аналізу, наводяться альтернативні доведення або історичні довідки. Наприклад, при введенні степеня з ірраціональним показником автори дають строге означення через границю послідовностей раціональних наближень, що є матеріалом університетського рівня, адаптованим для школярів. Це дозволяє вчителю працювати з обдарованими учнями, не виходячи за межі підручника.

Варто відзначити увагу авторів до графічної культури. Підручник містить велику кількість якісних ілюстрацій графіків функцій, що допомагає учням сформувати правильні візуальні образи. Особливо цінним є розгляд поведінки степеневих функцій на проміжку $(0;1)$ та $(1;+\infty)$ для різних показників степеня. Автори пропонують порівняти графіки функцій $y = x^3$, $y = x^{0.5}$, $y = x^{-2}$ на одному рисунку, що сприяє глибокому розумінню відмінностей у швидкості зростання/спадання функцій.

Однак, з точки зору учня гуманітарного складу мислення або учня, який має прогалини в знаннях, підручник Мерзляка може здатися занадто складним і «сухим». Академічний стиль викладу вимагає від читача високої концентрації уваги та розвиненого логічного мислення. Деякі пояснення є досить лаконічними, розрахованими на те, що учень самостійно відновить пропущені кроки міркувань. Тому вчителю, який працює з класом середнього рівня, доведеться додатково «розжовувати» матеріал або підбирати простіші підготовчі вправи.

2. Аналіз підручників [39], [40]

Підручники (профільний рівень [39], рівень стандарту [40]) представляють іншу методичну концепцію. Автор відомий своїм системним підходом до структурування навчального матеріалу за допомогою опорних конспектів, таблиць та схем. Це є головною відмітною рисою його підручників і потужним засобом диференціації.

Реалізація диференціації: У темі «Степенева функція» Є. П. Нелін широко використовує табличну форму подання інформації. На початку кожного параграфа або розділу наводиться узагальнююча таблиця, де систематизовано означення, властивості та графіки функцій. Наприклад, в одній таблиці зведені властивості функцій $y = x^n$ для парного і непарного n, для додатного і від'ємного показника. Такий підхід ідеально підходить для учнів з переважанням логічного та візуального мислення, допомагає їм «розкласти по поличках» великий обсяг інформації. Таблиці слугують опорою при розв'язуванні задач, дозволяють швидко знайти потрібну властивість.

Особливістю методики Є. П. Неліна є акцент на алгоритмізації навчальної діяльності. Автор пропонує чіткі алгоритми (орієнтири) для розв'язування стандартних задач: алгоритм знаходження області визначення функції, алгоритм дослідження функції на парність, алгоритм розв'язування ірраціональних рівнянь певного типу. Для учнів середнього рівня це є «рятівним колом», яке дає впевненість у своїх діях. Вони можуть просто діяти за інструкцією і отримувати правильний результат.

Для учнів високого рівня підручник пропонує глибокий аналіз методів розв'язування нестандартних задач. У ньому детально розглянуто методи розв’язування ірраціональних рівнянь: метод піднесення до степеня з аналізом рівносильності, метод заміни змінної, функціонально-графічний метод, метод оцінки лівої і правої частин. Причому автор не просто показує *як* розв’язати, а пояснює *чому* виникають сторонні корені або відбувається втрата коренів. Це формує в учнів критичне мислення та розуміння суті математичних перетворень.

Також варто відзначити наявність у підручнику завдань, спрямованих на підготовку до вступних випробувань. Автор часто наводить приклади завдань із ЗНО минулих років, аналізує типові помилки абітурієнтів. Диференціація завдань у підручнику [39] також присутня, але вона менш явно виражена графічно, ніж у [2]. Задачі згруповані за темами і методами розв’язання, що дозволяє вчителю формувати тематичні блоки завдань.

Проте, певною проблемою може стати перенасиченість сторінок інформацією. Велика кількість схем, таблиць, виділень шрифтом може розпорошувати увагу деяких учнів. Крім того, підручник орієнтований на досить високий рівень самостійності учнів у роботі з теоретичним текстом. Для слабких учнів мова підручника може бути дещо складною, а схеми – занадто абстрактними без детального усного пояснення вчителя.

3. Аналіз підручників [22], [23]

Підручники (профільний рівень [23], рівень стандарту [22]) позиціонуються як доступні та «учнєцентричні». Автор намагається подавати матеріал максимально простою, зрозумілою мовою, уникаючи надмірного теоретизування там, де це можливо без втрати науковості.

Реалізація диференціації: Головною особливістю підручників [22], [23] є чітка, розгалужена система диференціації вправ. Усі задачі поділені на чотири рівні складності, які позначені відповідними символами:

1. Початковий рівень (усні вправи, прості тестові завдання) – для перевірки розуміння основних означень.

2. Середній рівень – типові задачі на пряме застосування формул і властивостей (побудувати графік $y = x^3$, обчислити $\sqrt[3]{-8}$).

3. Достатній рівень – задачі, що вимагають комбінування кількох дій, аналізу умови (розв'язати ірраціональне рівняння з перевіркою коренів).

4. Високий рівень – задачі творчого характеру, підвищеної складності (рівняння з параметрами, доведення нерівностей).

Такий поділ є дуже зручним для вчителя при плануванні уроку та домашнього завдання. Вчитель може легко вказати: «Група А виконує номери 1–3 (середній рівень), група Б – номери 4–5 (достатній рівень)». Це полегшує і самооцінку учнів: вони бачать, завдання якого рівня вони можуть виконати.

Окрім рівневої диференціації, автор використовує рубрику «Вправи для повторення», яка допомагає актуалізувати знання, необхідні для вивчення нової теми. Це особливо важливо для степеневої функції, де потрібно постійно звертатися до властивостей степенів, вивчених у 7–9 класах. Також є рубрика «Математика навколо нас» (або «Життєва математика»), де пропонуються задачі прикладного змісту. Наприклад, розрахунок об'єму резервуара кубічної форми, обчислення складних відсотків. Це сприяє підвищенню мотивації та реалізації компетентнісного підходу.

У підручнику для профільного рівня [23] також приділяє увагу методам розв'язування нестандартних задач, але робить це більш дозовано, ніж [2], [39]. Пояснення методів розв'язування ірраціональних нерівностей подаються з детальним коментуванням кожного кроку, що робить їх зрозумілими для самостійного опрацювання. Графічний матеріал у підручнику якісний, кольоровий, що сприяє кращому сприймманню.

Слабким місцем можна вважати меншу кількість завдань "суперолімпіадного" рівня порівняно з підручником [39]. Для роботи з обдарованими дітьми в класах з поглибленим вивченням математики вчителю може знадобитися залучення додаткових збірників задач. Однак для загальноосвітніх класів та класів технологічного чи природничого профілю підручник Істера є, мабуть, найбільш збалансованим варіантом за співвідношенням «складність/доступність».

Порівняльна характеристика підходів до вивчення ключових понять теми.

Для глибшого розуміння методичних особливостей порівняємо, як розглядаються окремі складні моменти теми у різних підручниках.

1. Введення поняття кореня n-го степеня.

- [2]: Дає строге означення. Одразу акцентує увагу на різниці між коренем парного і непарного степеня. Вводить поняття арифметичного кореня. Велика увага приділяється тотожності $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.
- [39]: Використовує таблицю для порівняння властивостей коренів парного і непарного степеня. Наголошує на області допустимих значень (ОДЗ).
- [23]: Починає з простих числових прикладів, поступово підводячи до означення. Пояснення більш описове.

2. Степінь з раціональним показником.

- [2]: Чітко визначає, що основа степеня з дробовим показником має бути додатною ($\mathrm{a} > 0$). Пояснює, чому не можна розглядати від’ємну основу (суперечність основній властивості степеня). Пропонує задачі-пастки на цю тему.
- [39]: Акцентує увагу на розширенні поняття степеня. Використовує схеми для демонстрації зв’язку між коренями і степенями.
- [23]: Зосереджується на техніці обчислень. Багато вправ на перетворення виразів типу $\mathrm{a}^{1/2} \cdot \mathrm{a}^{1/3}$.

3. Розв’язування ірраціональних рівнянь.

- [2]: Пропагує метод рівносильних перетворень. Вимагає запису системи умов (ОДЗ + умова піднесення до квадрата). Метод перевірки розглядається як допоміжний.
- [39]: Детально класифікує рівняння за типами ($\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \mathrm{g(x)}$, $\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}}$ тощо) і для кожного типу дає схему розв’язання.

- [23]: Рекомендує метод перевірки як найбільш надійний для учнів середнього рівня, щоб уникнути помилок з ОДЗ. Рівносильні перетворення вводяться для складніших випадків.

Висновки щодо аналізу підручників

Проведений аналіз дозволяє зробити висновок, що всі розглянуті підручники відповідають чинним навчальним програмам, але мають суттєві відмінності у методичних підходах, що дає вчителю можливість вибору залежно від профілю класу та рівня підготовки учнів.

2.2. Методичні особливості вивчення степеневих функцій в умовах диференційованого навчання

Методика вивчення степеневої функції у старшій школі є складною педагогічною системою, яка вимагає від учителя глибокого розуміння не лише математичної сутності поняття, але й психолого-дидактичних закономірностей його засвоєння учнями з різним рівнем підготовки. Специфіка цієї теми полягає в її узагальнюючому характері: вона інтегрує знання про степені та функції, отримані учнями в основній школі (7–9 класи), і піднімає їх на якісно новий рівень абстракції. Якщо в основній школі учні розглядали лише окремі випадки степеневих функцій (лінійну, квадратичну, кубічну, обернену пропорційність), то в 10 класі вони мають сформувати цілісне уявлення про клас степеневих функцій $y = x^p$, де показник p може бути будь-яким дійсним числом. Цей перехід від частинного до загального, від дискретних знань до системної теорії часто викликає в учнів когнітивні труднощі, подолання яких можливе лише за умови вмілої реалізації диференційованого підходу.

Реалізація диференційованого навчання при вивченні степеневої функції базується на кількох методичних лініях, які вчитель має розгортати паралельно: диференціація змісту теоретичного матеріалу, диференціація методів введення нових понять, диференціація системи вправ та диференціація вимог до результатів навчальної діяльності. Розглянемо детально методичні особливості роботи над кожним з етапів вивчення теми, спираючись на аналіз підручників [2], [23], [39].

Першим етапом є актуалізація опорних знань та мотивація навчальної діяльності. В умовах диференціації цей етап має свої особливості. Для учнів, які навчаються на рівні стандарту (або мають середній рівень підготовки), актуалізація має відбуватися на наочно-оперативному рівні. Доцільно використовувати таблиці зі знайомими графіками ($y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$), пропонуючи учням згадати їхні властивості. Тут ефективним є підхід О.С. Істера, який пропонує прості візуальні вправи на розпізнавання графіків. Для учнів профільного рівня та класів з поглибленим вивченням математики актуалізація повинна мати більш теоретичний характер: повторення означень степеня з натуральним та цілим показником, властивостей дій зі степенями, абстрактного поняття функції як відповідності. Вчитель може поставити проблемне запитання: «Ми знаємо, як виглядає графік $y = x^2$. А як буде виглядати графік $y = x^{100}$? Чим вони схожі, а чим відрізняються?». Таке запитання одразу налаштовує сильних учнів на аналітичну діяльність, на пошук закономірностей.

Методика введення поняття степеневої функції з натуральним показником ($y = x^n$, $n \in N$) також має бути диференційованою. Для учнів гуманітарного та природничого профілів найкращим є індуктивний шлях: від розгляду конкретних прикладів ($y = x^4$, $y = x^5$) до узагальнення. Вчитель пропонує побудувати графіки цих функцій по точках, порівняти їх з відомими параболою та кубічною параболою і зробити висновок про те, що всі функції з парним показником мають графік, схожий на параболу, а з непарним – на кубічну параболу. Для фізико-математичного профілю доцільнішим є дедуктивний шлях: спочатку аналітично доводяться загальні властивості функції $y = x^n$ (область визначення, множина значень, парність/непарність, проміжки монотонності), і лише потім будуються ескізи графіків. Такий підхід формує культуру математичного доведення.

Особливої уваги потребує поняття парності та непарності функцій. У підручниках [39] це питання подається через чіткі алгоритми дослідження та схематичні зображення симетрії графіків (відносно осі ординат або початку координат). Це дуже зручно для учнів, які мислять алгоритмічно. Водночас у підручниках [2] акцент робиться на строгому доведенні: учень має показати, що $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого x з області визначення. У процесі диференційованого навчання вчитель може запропонувати слабшим учням перевірити парність на конкретних числах або за графіком, тоді як сильні учні виконують аналітичне доведення. Важливим методичним моментом є розгляд функцій, які не є ні парними, ні непарними (наприклад, $y = (x-1)^2$). Типовою помилкою учнів є автоматичне перенесення властивості парності функції $y = x^2$ на функцію $y = (x-1)^2$. Попередження таких помилок вимагає від учителя ретельного підбору контрприкладів.

Наступним складним етапом є вивчення степеневої функції з цілим від'ємним показником ($y = x^{-n},\ n \in N$). Головна методична трудність тут полягає у появі розриву функції в точці $x = 0$ та поняття асимптоти. Для учнів рівня стандарту поняття асимптоти вводиться на інтуїтивному рівні: «пряма, до якої графік наближається, але не перетинає». Вчитель демонструє це на прикладі гіперболи, пропонуючи обчислити значення функції для дуже великих x (графік притискається до осі Ox) та для дуже малих x (графік притискається до осі Oy). У профільному навчанні, особливо за підручниками поглибленого рівня, це поняття має бути формалізоване через граничний перехід, навіть якщо строга теорія границь ще не вивчалася. Вчитель повинен пояснити поведінку функції мовою «наближення». Тут доцільно використати диференційовані завдання: для групи А – побудувати графік за точками і описати його вигляд; для групи Б – дослідити поведінку функції при $x \to 0$ та $x \to \infty$; для групи В (високий рівень) – довести, що функція є непарною при непарному n і парною при парному n, використовуючи означення.

Надзвичайно важливим і дискусійним у методичному плані є питання вивчення функції кореня n-го степеня ($y = \sqrt[n]{x}$) та степеневої функції з дробовим показником. Тут виникає суттєва розбіжність у трактуванні області визначення функції $y = x^{1/n}$ у різних підручниках, що створює значні труднощі для вчителів та учнів. Згідно з класичним означенням, степінь з раціональним показником $x^{m/n}$ визначений лише для $x > 0$ (або $x \geq 0$, якщо показник додатний). Проте функція кореня непарного степеня $y = \sqrt[2k+1]{x}$ визначена для всіх дійсних чисел x. Ця колізія ($x^{1/3}$ визначено тільки для $x \geq 0$, а $\sqrt[3]{x}$ – для всіх x) є каменем спотикання.

В умовах диференційованого навчання вчитель має дуже обережно підходити до цього питання. Для учнів рівня стандарту (підручник [23]) доцільно уникати глибокого теоретичного аналізу цієї суперечності, зосередившись на правилі: якщо приклад записано через радикал, то область визначення для непарного степеня – R; якщо через дробовий показник – то $(0; +\infty)$. Це спрощений, прагматичний підхід, який дозволяє уникнути помилок на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО/НМТ), де ці нюанси чітко регламентовані.

Для учнів профільного та поглибленого рівнів [2], [39] необхідно дати глибоке пояснення причини такого обмеження. Вчитель має пояснити, що обмеження $x > 0$ для дробового степеня вводиться для того, щоб зберегти властивості степеня (зокрема, властивість $(a^m)^n = a^{mn}$). Можна продемонструвати парадокс: якщо припустити, що від'ємні числа можна підносити до дробового степеня, то отримаємо суперечність: $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2/2} = ((-1)^2)^{1/2} = 1^{1/2} = 1$. Отже, $-1 = 1$. Розгляд такого парадоксу викликає жвавий інтерес у сильних учнів і сприяє глибокому розумінню математичної теорії. Методично правильно буде запропонувати сильним учням дослідити це питання, порівнявши означення в різних джерелах, що реалізує дослідницький метод навчання.

Особливості формування графічної культури при вивченні степеневих функцій також залежать від профілю навчання. У класах технологічного та природничого профілів акцент слід робити на використанні ІКТ. Програми GeoGebra, Desmos [Додаток А] дозволяють миттєво будувати графіки функцій з різними показниками, спостерігати за їх зміною в динаміці. Вчитель може організувати лабораторну роботу: «Дослідити, як змінюється графік функції $y = x^a$ при зміні параметра a від 0 до 1, від 1 до ∞, від -1 до $-\infty$». Учні візуально фіксують результати: «графік вигинається вгору», «графік притискається до осей». Це формує стійкі візуальні образи.

У класах фізико-математичного профілю, окрім комп'ютерного моделювання, обов'язковим є формування навичок ескізної побудови графіків та застосування геометричних перетворень. Учні повинні вміти без побудови таблиці значень зобразити графік функції $y = (x-2)^3 + 1$. Методика навчання геометричних перетворень (паралельне перенесення, розтяг/стиск, відображення) детально розроблена у підручниках [2], [39]. Для диференціації навчання тут доцільно використовувати різнорівневі картки-завдання.

- *Рівень А:* Побудувати графік $y = x^2 - 2$ (зсув униз).
- *Рівень Б:* Побудувати графік $y = (x+1)^3 - 2$ (комбінація зсувів).
- *Рівень В:* Побудувати графік $y = |(x-2)^3 - 1|$ (зсуви + модуль).

Окремим методичним блоком є навчання розв'язування ірраціональних рівнянь, які тісно пов'язані з темою «Степенева функція». Тут існують два основні методичні підходи: метод рівносильних перетворень та метод наслідків (з перевіркою коренів). Для учнів із середнім рівнем підготовки та гуманітарного профілю (підручник О. С. Істера) найбільш надійним є метод наслідків. Учні підносять обидві частини рівняння до степеня, знаходять корені, а потім обов'язково виконують перевірку підстановкою. Цей метод є алгоритмічно простим, зрозумілим і захищає від помилок, пов'язаних з неправильним визначенням області допустимих значень (ОДЗ) або появою сторонніх коренів. Вчитель має наполягати на тому, що слово «перевірка» є обов'язковим елементом розв'язання.

Для учнів, що навчаються за програмою профільного рівня (підручники [2], [39]) основним має бути метод рівносильних перетворень. Це вимагає від учнів вищої математичної культури: вміння записувати умови рівносильності переходу від ірраціонального рівняння до системи. Наприклад, рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі: $f(x) = (g(x))^2$ та $g(x) \geq 0$. Вчитель повинен пояснити, чому ми накладаємо умову невід'ємності саме на праву частину $(g(x))$, і чому умова $f(x) \geq 0$ виконується автоматично. Розбір таких тонкощів розвиває логічне мислення. Диференціація тут може полягати в тому, що слабші учні в профільному класі можуть користуватися опорними схемами-таблицями ([39]), де виписані всі типи рівнянь і відповідні системи, тоді як сильні учні повинні виводити ці системи самостійно, розуміючи логіку переходу.

Значну увагу слід приділити розв'язуванню ірраціональних нерівностей, що традиційно є однією з найскладніших тем. Тут ефективним є метод інтервалів, який є універсальним. Однак для його застосування потрібно бездоганно знаходити область визначення функції. Типовою помилкою учнів є забування про ОДЗ кореня парного степеня. Методично доцільно привчити учнів починати розв'язання будь-якої нерівності зі слів «Знайдемо область визначення». Для профільного рівня варто розглянути також метод рівносильних перетворень систем нерівностей, який, хоча і є більш громіздким, дає точний результат без необхідності перевірки пробних точок у кожному інтервалі. У [1] для поглибленого рівня пропонуються також задачі з параметрами, де розв'язування ірраціональної нерівності залежить від значення параметра. Це найвищий пілотаж шкільної математики, який вимагає індивідуальної роботи вчителя з обдарованими учнями.

Диференціація домашніх завдань є ще однією важливою складовою методики. Домашнє завдання не повинно бути однаковим для всіх. Воно має складатися з обов'язкової частини (базовий рівень) та варіативної (творчої, поглибленої).

- *Обов'язкова частина:* відпрацювання навичок побудови графіків, обчислення значень виразів, розв'язування простих рівнянь.
- *Варіативна частина:* завдання на доведення властивостей, побудову графіків складних функцій, задачі прикладного змісту. Наприклад, вчитель може запропонувати завдання: «Для тих, хто планує здавати математику на високому рівні: дослідити, скільки коренів має рівняння $x^4 = a$ залежно від параметра a». Або творче завдання: «Підготувати презентацію про застосування параболічних антен (властивість параболи фокусувати промені)».

Організація уроку в умовах диференціації також має свої особливості. Ефективним є використання групової роботи. Клас можна поділити на гетерогенні (змішані) або гомогенні (однорівневі) групи. При роботі в гомогенних групах вчитель може дати групам різні завдання: група «Базис» працює над заповненням таблиці властивостей функції за підручником (під керівництвом вчителя), група «Профіль» розв'язує складніші задачі самостійно, група «Еврика» (найсильніші) – працює над олімпіадною задачею або доведенням теореми. Важливо, щоб вчитель періодично підходив до кожної групи, контролював процес і надавав консультації. При роботі в гетерогенних групах сильні учні виступають у ролі тьюторів для слабших. Завдання підбирається так, щоб воно мало кілька етапів складності. Наприклад, дослідження функції та побудова графіка. Слабші учні обчислюють координати точок, середні – будують графік, сильні – виконують аналіз властивостей та узагальнення. Така співпраця корисна для всіх: сильні учні, пояснюючи матеріал, краще його усвідомлюють, а слабші отримують індивідуальну допомогу.

Впровадження диференційованого підходу вимагає від вчителя також специфічної методики контролю та оцінювання. Контрольні роботи [Додаток Б] мають бути різнорівневими. Можна використовувати систему, де завдання поділені на блоки: блок А (початковий і середній рівень, оцінка до 6 балів), блок Б (достатній рівень, оцінка до 9 балів), блок В (високий рівень, оцінка до 12 балів). Учень має право вибирати, завдання якого блоку він буде виконувати, або виконувати їх послідовно. Це знімає психологічну напругу і страх перед контрольною. Важливим є використання формувального оцінювання: короткі самостійні роботи («п'ятихвилинки»), діагностичні картки, самооцінювання.

Розглянемо більш детально методику навчання перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником. Це технічна частина теми, яка часто викликає помилки через неуважність. У підручнику [23] пропонується велика кількість однотипних тренувальних вправ, що є виправданим для формування стійкої навички. Методика «покрокового тренажера» тут працює найкраще: спочатку відпрацьовуємо множення степенів з однаковими основами, потім – піднесення степеня до степеня, потім – винесення множника за дужки. Для сильних учнів (за підручником [2]) цікавими будуть завдання на спрощення виразів, де показники степенів є змінними або параметрами, наприклад, скоротити дріб $\frac{a^{1.5}-b^{1.5}}{a^{0.5}-b^{0.5}}$. Тут учень має побачити формулу різниці кубів, приховану у дробових показниках: $(a^{0.5})^3-(b^{0.5})^3$. Це розвиває гнучкість мислення.

Окремий методичний аспект – це пропедевтика поняття похідної при вивченні степеневої функції. У класах фізико-математичного профілю вже на етапі вивчення властивостей функції $y=x^n$ вчитель може звертати увагу на швидкість зростання функції. Порівнюючи графіки $y=x^2$ і $y=x^4$, учні бачать, що $y=x^4$ «крутіше» йде вгору при $x>1$. Вчитель може ввести поняття дотичної на інтуїтивному рівні. Це підготує ґрунт для майбутнього вивчення диференціального числення. У підручниках поглибленого рівня часто розглядаються задачі на знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку без застосування похідної (використовуючи монотонність), що є важливою методичною складовою.

Важливу роль у методичній системі відіграє робота з типовими помилками. Аналіз досвіду показує, що найчастіше учні помиляються у:

1. Визначенні знака виразу $(-2)^{-2}$ (плутають з -2^{-2}). Методика виправлення: чітке розрізнення понять основи степеня і показника, запис у вигляді дробу.

2. Обчисленні значень коренів парного степеня з від'ємних чисел (пишуть $\sqrt{-4} = -2$). Методика: постійне нагадування означення арифметичного кореня (невід'ємне число!).

3. Розкритті кореня з квадрата: $\sqrt{x^2} = x$ замість $|x|$. Це класична помилка. Методика: розв'язування вправ типу «Спростити $\sqrt{(a-5)^2}$, якщо $a < 5$».

4. Втраті розв'язків при діленні обох частин рівняння на вираз зі змінною. Методика: розгляд рівнянь типу $x^3 = x$, де ділення на x призводить до втрати кореня $x = 0$. Вчитель повинен створити «банк типових помилок» і використовувати завдання «Знайди помилку» як ефективний методичний прийом.

Узагальнюючи методичні особливості, слід зазначити, що вивчення степеневої функції в класах суспільно-гуманітарного профілю має свої специфічні цілі. Тут головне – не техніка перетворень, а розуміння суті функціональної залежності як відображення процесів реального світу. Вчитель повинен більше розповідати про історію розвитку поняття степеня (від Вавилона до Декарта), про роль математичних позначень. Задачі мають бути максимально «гуманізовані». Наприклад, замість сухих графіків можна аналізувати діаграми росту населення, інфляції, поширення епідемій (що часто описуються степеневими або показниковими законами). Це дозволяє подолати відчуження гуманітаріїв від математики.

Натомість у класах природничого профілю методика має базуватися на інтеграції з фізикою, хімією, біологією. Вчитель повинен показувати, що формула $E = \frac{mv^2}{2}$ – це квадратична функція від швидкості, а закон Кулона

$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ – це степенева функція з показником -2 (обернена квадратична залежність). Розв'язування задач на вираження однієї величини через іншу з формул природничих наук є важливою складовою прикладної спрямованості навчання.

Таким чином, методичні особливості вивчення степеневих функцій в умовах диференційованого навчання полягають у гнучкому варіюванні змісту, методів і форм роботи залежно від профілю класу та індивідуальних особливостей учнів. Успіх залежить від уміння вчителя поєднати строгість математичної теорії з доступністю викладу, забезпечити баланс між формуванням алгоритмічних навичок і розвитком творчого мислення, та показати учням красу і практичну значущість досліджуваної теми. Тільки такий комплексний підхід дозволить досягти високої якості математичної освіти та сформувати в учнів компетентності, необхідні для успішного життя в сучасному світі.

2.3. Розробка уроків з теми «Степенева функція» для класів різного профілю

Ефективність засвоєння теми «Степенева функція» безпосередньо залежить від якості підготовки вчителя до навчальних занять та вміння сконструювати урок так, щоб він відповідав пізнавальним запитам та можливостям учнів конкретного профілю. Якщо у попередніх підрозділах ми розглядали теоретичні аспекти методики, то в цьому параграфі зосередимося на практичній реалізації диференційованого підходу через розробку розгорнутих сценаріїв уроків. Важливо розуміти, що урок у класі з поглибленим вивченням математики та урок на ту ж саму тему в гуманітарному класі – це, по суті, два різні педагогічні твори, які мають спільну тему, але кардинально відрізняються метою, структурою, методами та емоційним забарвленням.

Нижче наведено методичні розробки уроків, які демонструють специфіку викладання степеневої функції в умовах зовнішньої (профільної) та внутрішньої (рівневої) диференціації.

Модель уроку № 1. Фізико-математичний профіль

Тема уроку: Властивості та графіки степеневої функції з раціональним показником. Тип уроку: Урок засвоєння нових знань (урок-дослідження). Мета:

- *Навчальна:* сформувати системне уявлення про поведінку степеневої функції $y = x^r$ залежно від показника r; навчити досліджувати функції методами математичного аналізу; удосконалити навички побудови ескізів графіків.
- *Розвивальна:* розвивати абстрактне мислення, вміння висувати гіпотези та строго їх доводити, формувати евристичні навички.
- *Виховна:* виховувати культуру математичного запису, наполегливість у пошуку істини, критичне ставлення до отриманих результатів.

Хід уроку (методичний сценарій)

I. Організаційний етап та мотивація навчальної діяльності У класі фізико-математичного профілю мотивація не повинна будуватися лише на розважальних моментах. Учні цього профілю цінують інтелектуальний виклик. Вчитель розпочинає урок з проблемної ситуації, що містить когнітивний дисонанс. На дошці (або екрані) проектуються три графіки функцій без підписів: парабола ($y = x^2$), гілка параболи, покладена на бік ($y = \sqrt{x}$), і гіпербола ($y = 1/x$). Вчитель звертається до класу: «Перед вами графіки функцій, які ми вже вивчали. Усі вони описуються формулою $y = x^r$. Для першого графіка $r = 2$, для другого $r = 0.5$, для третього $r = -1$. Здавалося б, одна й та сама формула, але кардинально різна поведінка. Сьогодні ми маємо не просто запам’ятати, як виглядають ці графіки, а зрозуміти *закономірність*. Ми проведемо дослідження і створимо "мапу" всіх можливих степеневих функцій. Ваше завдання – стати дослідниками, які відкривають нові математичні землі».

II. Актуалізація опорних знань Оскільки учні мають високий рівень підготовки, актуалізація проводиться у формі комплексу вправ для усного рахунку «Степеневий тренажер» (Додаток В) або «математичного пінг-понгу» (швидкі запитання-відповіді). Вчитель: «Область визначення функції $y = x^{-2}$?» Учень: «Всі дійсні числа, крім нуля». Вчитель: «Чому виключено нуль?» Учень: «Бо від'ємний показник означає ділення на степінь, а на нуль ділити не можна». Вчитель: «Область значень функції $y = x^{1/2}$?» Учень: «Невід'ємні числа». Вчитель: «А якщо я запишу $y = \sqrt{x}$, щось зміниться?» Учень: «Ні, це тотожні функції на області визначення». Вчитель: «А якщо $y = x^{1/3}$ і $y = \sqrt[3]{x}$?» Тут виникає дискусія, яку вчитель свідомо провокує. Це ключовий момент для фізмату – розрізнення понять кореня непарного степеня (визначений на R) і степеня з дробовим показником (визначений на $(0; +\infty)$). Вчитель підсумовує дискусію, нагадуючи означення, введене в підручнику (наприклад, [2]), і наголошує на важливості області визначення.

III. Вивчення нового матеріалу (Робота в малих дослідницьких групах) Замість лекційного викладу вчитель організовує роботу в малих групах. Клас ділиться на 4 групи, кожна з яких отримує завдання дослідити певний клас показників степеня r.

- *Група 1:* Дослідити функції, де r – парне натуральне число $(2,4,6\ldots)$ та r – непарне натуральне число $(3,5,7\ldots)$.
- *Група 2:* Дослідити функції, де r – ціле від'ємне число (парне і непарне: $-1, -2, -3\ldots$).
- *Група 3:* Дослідити функції, де r – додатне неціле число (два випадки: $r > 1$ та $0 < r < 1$).
- *Група 4:* Дослідити функції, де r – від'ємне неціле число.

Кожна група отримує план дослідження:

1. Знайти область визначення $(D(y))$ та множину значень $(E(y))$.

2. Дослідити на парність/непарність.

3. Знайти проміжки зростання/спадання.

4. З'ясувати поведінку функції поблизу нуля та на нескінченності (поняття асимптот).

5. Побудувати ескізи графіків для кількох конкретних значень r в одній системі координат (щоб порівняти швидкість зростання).

Диференціація всередині груп: Вчитель формує групи так, щоб у кожній був лідер (сильний учень), який координує роботу, «генератор ідей» та «оформлювач». Це дозволяє залучити всіх. Вчитель підходить до Груп 3 і 4, оскільки їхні завдання складніші (поняття опуклості, поведінка при $0 < r < 1$), і надає навідні запитання: «Подивіться, як графік $y = x^{2.5}$ веде себе відносно прямої $y = x$? Він вище чи нижче на проміжку $(0; 1)$?».

IV. Презентація результатів та узагальнення Представники груп виходять до дошки і будують зведені графіки. В результаті на дошці з'являється повна класифікація. Важливий методичний момент: вчитель пропонує класу «провокаційні» запитання для перевірки глибини розуміння. – «Чому графіки всіх степеневих функцій проходять через точку $(1; 1)$?» (Відповідь: бо 1 у будь-якому степені 1). – «Яка функція зростає швидше при $x \to \infty$: $y = x^2$ чи $y = x^{2.1}$?» (Учні повинні зрозуміти, що навіть маленьке збільшення показника степеня дає значний приріст на нескінченності). – «Як зміниться графік, якщо основа степеня буде змінною, а показник – ірраціональним числом, наприклад $y = x^{\pi}$?» (Учні роблять висновок, що графік буде схожий на $y = x^3$, але визначений тільки для $x \geq 0$).

V. Первинне закріплення та розв'язування задач На цьому етапі реалізується рівнева диференціація через індивідуальну роботу. Вчитель пропонує набір задач трьох рівнів складності.

Рівень А (Базовий для профілю): Порівняти числа: $3.2^{1.5}$ і $3.5^{1.5}$; 0.7^{-2} і 0.8^{-2}. Завдання вимагає використання властивості монотонності. Вчитель вимагає повного обґрунтування: «Оскільки функція $y = x^{1.5}$ зростає на області визначення, а $3.2 < 3.5$, то...».

Рівень Б (Достатній): Знайти область визначення функції $y = (x^2 - 4x + 3)^{-1/3}$. Тут учні повинні перейти до розв'язування квадратної нерівності. Вчитель акцентує увагу: показник від'ємний дробовий, отже основа має бути строго додатною (> 0).

Рівень В (Високий/Олімпіадний): Побудувати ескіз графіка функції $f(x) = |x|^{2/3} + 1$. Це завдання для найбільш сильних учнів. Воно вимагає аналізу: функція парна (можна будувати тільки для $x \geq 0$, потім симетрично відобразити). При $x > 0$ маємо $y = x^{2/3} + 1$. Показник $0 < 2/3 < 1$, отже графік випуклий вгору, виходить з точки $(0; 1)$.

Вчитель працює біля дошки з учнем, який розв'язує задачу рівня Б, коментуючи нюанси, тоді як сильні учні працюють самостійно над рівнем В. Потім відбувається швидка перевірка задачі рівня В (учень показує ескіз на планшеті або маленькій дошці).

VI. Підсумок уроку та рефлексія Вчитель пропонує учням скласти «Сенкан» або коротку ментальну карту про степеневу функцію. Рефлексія: «Що було найскладнішим у дослідженні? Чи підтвердилася ваша інтуїція щодо графіків дробових степенів?». Домашнє завдання диференційоване:

1. Обов'язкове: номери з підручника (дослідження та побудова).
2. Творче: Дослідити (за допомогою GeoGebra), як виглядає графік функції $y = x^x$ (степенево-показникова функція) і знайти її мінімум.

Модель уроку № 2. Природничий (біолого-хімічний) профіль

Тема уроку: Степенева функція як інструмент моделювання реальних процесів. Тип уроку: Інтегрований урок (математика + фізика + біологія). Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання про властивості степеневих функцій; показати практичне застосування математичного апарату для опису законів природи; навчити розв'язувати прикладні задачі.

- *Розвивальна:* розвивати міжпредметну компетентність, уміння переносити знання з однієї галузі в іншу, аналізувати графіки реальних процесів.

- *Виховна:* формувати науковий світогляд, розуміння єдності законів природи.

Хід уроку

I. Мотивація. "Світ навколо нас – це функції" Вчитель починає не з формул, а з фактів. «Чи знаєте ви, чому миша їсть набагато більше відносно своєї маси, ніж слон? Чи замислювалися ви, як криміналісти визначають швидкість автомобіля за гальмівним шляхом? Або як астрономи дізналися відстані до планет, не літаючи до них? Відповідь на всі ці питання одна – степенева функція».

II. Актуалізація знань через прикладні моделі Вчитель пропонує розглянути три закони, записані мовою формул, і співставити їх з графіками степеневих функцій (які висять на дошці).

1. $S = \frac{gt^2}{2}$ (вільне падіння). Яка це залежність? (Квадратична, $y = kx^2$). Графік – вітка параболи.
2. $V = a^3$ (об'єм куба). Яка залежність? (Кубічна, $y = x^3$).
3. $I = \frac{U}{R}$ (Закон Ома: сила струму від опору при сталій напрузі). Яка залежність? (Обернена пропорційність, $y = x^{-1}$).

Це дозволяє учням «впізнати» абстрактні математичні об'єкти в реальних формулах.

III. Розв'язування компетентнісних задач (Робота в групах за інтересами) Клас ділиться на групи відповідно до профілю інтересів (наприклад, «Біологи», «Фізики», «Економісти»). Кожна група отримує кейс-завдання.

Кейс для "Біологів": Закон Клайбера. «Відомо, що швидкість основного обміну речовин R у тварин пов'язана з їхньою масою M законом Клайбера: $R = k \cdot M^{3/4}$. Завдання:

1. Побудувати схематичний графік цієї залежності (для $M > 0$).

2. Визначити, як зміниться обмін речовин, якщо маса тварини зросте у 16 разів?». *Методичний коментар:* Учні повинні підставити $16M$ у формулу: $(16M)^{3/4} = 16^{3/4} \cdot M^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 \cdot M^{3/4} = 2^3 \cdot M^{3/4} = 8 \cdot M^{3/4}$. Висновок: обмін речовин зросте у 8 разів. Це демонструє нелінійність біологічних процесів.

Кейс для "Фізиків/Астрономів": Третій закон Кеплера. «Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їхніх орбіт: $T^2 \propto a^3$, або $T = k \cdot a^{3/2}$. Завдання:

1. Який вигляд має графік залежності періоду T від відстані a? (Степенева функція з показником 1.5).

2. Обчислити період обертання планети, яка знаходиться у 4 рази далі від Сонця, ніж Земля». *Розв'язання:* $T_{new} = (4a)^{3/2} = 4^{1.5} \cdot a^{3/2} = (\sqrt{4})^3 \cdot a^{3/2} = 8 \cdot T_{earth}$. Тобто рік на цій планеті триватиме 8 земних років.

Кейс для "Економістів": Складні відсотки та інфляція. «Формула складних відсотків $A = P(1 + r)^n$ може розглядатися як степенева функція від часу n (показникова) або як степенева від ставки r, якщо зафіксувати час. Завдання: Дослідити, яку ставку r треба вибрати, щоб подвоїти капітал за 2 роки. Тобто розв’язати рівняння $2P = P(1 + r)^2$ відносно r».

IV. Обговорення результатів Групи презентують свої розв’язки. Вчитель акцентує увагу не на арифметиці, а на інтерпретації. Запитання до класу: «Подивіться на графік біологів ($y = x^{0.75}$) і графік фізиків ($y = x^{1.5}$). Обидві функції зростаючі. Але яка з них зростає "швидше"?». Учні аналізують опуклість графіків: $x^{1.5}$ вигинається вгору, а $x^{0.75}$ – вниз. Вчитель пояснює, що це означає на практиці: зі збільшенням розмірів тварини інтенсивність обміну речовин на одиницю маси падає (тому великі тварини живуть довше і повільніше), а от період обертання планет зростає дуже стрімко з відстанню.

V. Практикум з використанням ІКТ (якщо є можливість). Вчитель пропонує учням на смартфонах відкрити Desmos і побудувати графіки отриманих функцій, перевірити свої обчислення. Завдання: «Знайдіть на графіку точку, що відповідає масі слона (умовно 5000 кг) і миші (0.02 кг). Порівняйте значення функції». Це візуалізує масштаб відмінностей.

VI. Підсумок Учитель: «Сьогодні ми побачили, що степенева функція – це не просто "ікс в степені ен", це універсальна мова, якою природа спілкується з нами. Математика дає нам ключі до розуміння цих законів». Домашнє завдання: Знайти в Інтернеті ще один приклад застосування степеневої функції (в географії, медицині, екології) і оформити це як міні-задачу.

Модель уроку № 3. Суспільно-гуманітарний профіль

Тема уроку: Гармонія форм: графіки степеневих функцій. Тип уроку: Урок-подорож (візуалізація та естетичне сприйняття). Мета:

- *Навчальна:* ознайомити учнів із зовнішнім виглядом графіків основних степеневих функцій (парабола, кубічна парабола, гіпербола); навчити розпізнавати їх серед інших ліній.
- *Розвивальна:* розвивати образне мислення, естетичний смак, уміння бачити математичні форми в об'єктах мистецтва та архітектури.
- *Виховна:* долати «математичну тривожність», формувати позитивне емоційне ставлення до предмета.

Хід уроку

I. Емоційне налаштування Учитель починає урок з демонстрації слайдів архітектурних шедеврів: Ейфелева вежа, мости Калатрави, будівлі Захи Хадід, арки соборів. Учитель: «Архітектура – це застигла музика, казали філософи. А математики додають: це застигла геометрія і алгебра. Всі ці вигини, які милують наше око, – це лінії, які мають свої імена і свої формули. Сьогодні ми навчимося "читати" ці лінії».

II. Сприйняття нового матеріалу через асоціації Вчитель не пише на дошці сухих означень $D(y)$ чи $E(y)$. Він використовує метод асоціацій.

1. Парабола ($y = x^2$): "Чаша" або "Келих". Вчитель малює параболу. «Дивіться, це симетрична, гарна крива. Вона ніби обіймає простір. Де ми її бачимо?». *Приклади:* струмінь води у фонтані, провисання дротів (ланцюгова лінія, схожа на параболу), антени супутникового зв'язку. *Ключова властивість:* Симетрія. Вчитель пропонує учням скласти аркуш паперу навпіл і намалювати половину параболи, потім вирізати. Розгорнувши, учні бачать ідеальну симетрію. Це поняття парності функції.

2. Кубічна парабола ($y = x^3$): "Змія" або "Крісло". «Ця лінія стрімко летить вгору праворуч і падає вниз ліворуч. Вона не симетрична як дзеркало, але має центральну симетрію (поворот на 180 градусів)». *Приклади:* деякі елементи модерністських меблів, дороги серпантину.

3. Гіпербола ($y = 1/x$): "Дві розлучені половинки". «Це функція оберненої пропорційності. Чим більше ікс, тим менше ігрек. Де це зустрічається в житті? Чим більше людей купують торт, тим менший шматок дістанеться кожному. Чим швидше їдеш, тим менше часу витрачаєш». Вчитель показує графік гіперболи. «Гілки цієї кривої ніколи не перетинають осі. Вони вічно наближаються до них, як до мрії, але ніколи не торкаються. Це називається асимптота». Для гуманітаріїв така метафора запам'ятовується краще, ніж строге означення границі.

III. Творча практична робота "Математичний дизайн" Учні отримують роздруківки з координатними площинами, на яких намічені контури відомих об'єктів (наприклад, логотип McDonald's – схожий на дві параболи, арка мосту). Завдання: Навести графіки кольоровими маркерами і спробувати підібрати (або вибрати з запропонованих) формули, які їх описують. *Диференціація:*

- *Група А (потребують допомоги):* отримують шаблони, де треба просто з'єднати точки і підписати «Це парабола».
- *Група Б (основна):* мають визначити, який графік «ширший», а який «вужчий» (коефіцієнт стиску $y = kx^2$).

- *Група В (творча):* намагаються намалювати власний ескіз вази або арки, використовуючи вивчені криві.

IV. Історична хвилинка Учитель розповідає історію Рене Декарта, який, лежачи в ліжку і спостерігаючи за мухою на стелі, придумав систему координат. Це показує, що математичні відкриття часто робляться людьми з гуманітарним складом розуму, філософами. Учитель: «Степенева функція – це інструмент опису змін. Все тече, все змінюється – казав Геракліт. А функція показує ЯК саме воно змінюється».

V. Рефлексія "Емоційний графік" Вчитель малює на дошці систему координат. Вісь X – це час уроку, вісь Y – настрій/інтерес. Пропонує кільком учням вийти і намалювати графік свого настрою під час уроку. – «Мій графік схожий на параболу: спочатку було страшно (низ), потім стало цікаво, і настрій пішов вгору». – «А мій – як пряма лінія, стабільно». Це дозволяє вчителю побачити зворотний зв’язок.

VI. Підсумок Учитель: «Виявляється, алгебра – це не тільки "знайти ікс". Це мова форм, гармонії і краси. Сьогодні ви навчилися бачити ці форми». Домашнє завдання: Зробити фотографію об’єкта в місті або вдома, який нагадує графік степеневої функції (арка, фонтан, тінь від лампи) і надіслати в класний чат.

Оцінювання рівня навчальних досягнень учнів здійснюється відповідно критеріїв оцінювання (Додаток Г).

Розроблені моделі уроків наочно демонструють сутність диференційованого підходу.

1. Цілепокладання: У фізмату цілі спрямовані на *доведення та дослідження* («чому це так?»), у природничому профілі – на *застосування* («як це працює?»), у гуманітарному – на *ознайомлення та естетичне сприйняття* («на що це схоже?»).

2. Зміст: Обсяг теоретичного матеріалу для профільного рівня є максимальним (включаючи тонкощі областей визначення і строгі доведення).

Для рівня стандарту матеріал адаптовано, спрощено, очищено від надмірної формалізації.

3. Методи:

- Фізмат: проблемно-пошуковий метод, дедуктивний підхід, строгий математичний формалізм.
- Природничий: метод математичного моделювання, інтеграція знань, індуктивний підхід.
- Гуманітарний: метод асоціацій, візуалізація, ігрові методи, історичні екскурси.

4. Роль вчителя: На уроці в маткласі вчитель – консультант і опонент у науковій суперечці. У природничому класі – організатор дослідницької роботи. У гуманітарному – екскурсовод у світ математичної культури, який надихає і знімає психологічні бар’єри.

Така варіативність дозволяє перетворити вивчення складної теми «Степенева функція» на цікавий і доступний процес для кожного учня, незалежно від його профілю навчання, що і є головною метою диференціації.

2.4. Система диференційованих завдань з теми «Степенева функція»

Розробка ефективної методики навчання математики у старшій профільній школі неможлива без створення цілісної системи задач, яка б відповідала дидактичним цілям, враховувала індивідуальні особливості учнів та забезпечувала реалізацію компетентнісного підходу. Система диференційованих завдань з теми «Степенева функція» виступає не лише засобом контролю знань, але й основним інструментом формування предметних та ключових компетентностей. Вона дозволяє вчителю гнучко керувати навчальною діяльністю, створюючи ситуацію успіху як для учнів, що мають труднощі в навчанні, так і для обдарованої молоді, яка прагне поглиблених знань.

Пропонована система завдань побудована на основі аналізу чинних підручників ([2], [23], [39]) та принципу нарощування складності. Вона структурована за змістовими лініями теми:

1. Степінь з раціональним показником та його властивості.
2. Властивості та графіки степеневих функцій.
3. Ірраціональні рівняння та системи.
4. Ірраціональні нерівності.
5. Задачі прикладного змісту (математичне моделювання).

Для кожного змістового блоку розроблено завдання трьох рівнів складності:

- Рівень А (Репродуктивний/Базовий): Завдання на безпосереднє застосування означень і формул, розпізнавання об’єктів, виконання дій за зразком. Цей рівень корелює з вимогами рівня стандарту [23].
- Рівень Б (Конструктивний/Достатній): Завдання, що вимагають аналізу умови, вибору методу розв’язання, комбінування кількох алгоритмів, встановлення логічних зв’язків. Цей рівень відповідає вимогам профільного навчання [39].
- Рівень В (Творчий/Високий): Завдання нестандартного характеру, задачі з параметрами, дослідницькі завдання, що вимагають евристичного мислення та глибокого розуміння математичної теорії [2].

Розглянемо детально зміст та методику використання завдань кожного блоку.

Блок 1. Степінь з раціональним показником та перетворення виразів

Цей блок є фундаментом для подальшого вивчення теми. Основна мета завдань – сформувати стійкі обчислювальні навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, що містять степені з дробовим показником та корені n-го степеня.

Рівень А (Базовий) Завдання цього рівня спрямовані на подолання психологічного бар’єру перед «дробовими показниками» та засвоєння основних властивостей степеня. У підручнику [23] велика увага приділяється саме таким вправам.

- *Тип завдання:* Обчислення значень числових виразів.

Приклад 1: Обчислити: а) $16^{\frac{1}{2}}$; б) $8^{\frac{2}{3}}$; в) $81^{-0.25}$. *Методичний коментар:* Типовою помилкою учнів є множення основи на показник (наприклад, $16 \cdot 0.5 = 8$) замість добування кореня. Вчитель повинен вимагати запису переходу до кореня: $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$. При виконанні прикладу (б) важливо показати два шляхи: $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ або $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, наголошуючи на перевагах першого способу (менші числа).

- *Тип завдання:* Подання виразу у вигляді степеня.

Приклад 2: Записати у вигляді степеня з основою a: $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$. *Методичний коментар:* Завдання перевіряє знання властивості $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Учні мають виконати додавання дробів $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Важливо звертати увагу на скорочення дробів у показнику.

Рівень Б (Достатній) Завдання цього рівня вимагають від учня бачити структуру алгебраїчного виразу, застосовувати формули скороченого множення до виразів із дробовими показниками. Такі вправи широко представлені у підручнику [39], де часто використовуються таблиці-підказки з формулами.

- *Тип завдання:* Спрощення виразів за допомогою формул скороченого множення.

Приклад 3: Спростити вираз: $\frac{x-y}{x^{0.5}+y^{0.5}}$. *Методичний коментар:* Учень повинен «побачити» формулу різниці квадратів у чисельнику, розглядаючи x як $(\sqrt{x})^2$, тобто $(x^{0.5})^2$. Розклад на множники $(x^{0.5} - y^{0.5})(x^{0.5} + y^{0.5})$ дозволяє виконати скорочення. Вчитель має акцентувати увагу на області допустимих значень (ОДЗ): $x \geq 0, y \geq 0$, знаменник $\neq 0$.

- *Тип завдання:* Винесення множника за дужки.

Приклад 4: Скоротити дріб: $\frac{a^{1.5}-a}{a^{0.5}-1}$. *Методичний коментар:* У чисельнику $a^{1.5} = a^1 \cdot a^{0.5}$. Учні часто не помічають спільного множника a або $a^{0.5}$. Найраціональніше винести a за дужки: $\frac{a(a^{0.5}-1)}{a^{0.5}-1} = a$. Або винести $a^{0.5}$: $\frac{a^{0.5}(a-a^{0.5})}{\dots}$ – цей шлях тупиковий. Тут формується вміння прогнозувати результат перетворень.

Рівень В (Високий) Завдання цього рівня [2] передбачають роботу з громіздкими виразами, що містять змінні у від'ємних дробових степенях, складні радикали та потребують виконання 4–5 логічних кроків.

- *Тип завдання:* Доведення тотожностей.

Приклад 5. Довести тотожність: $\left(\frac{a^{0.5}+2}{a+2a^{0.5}+1} - \frac{a^{0.5}-2}{a-1}\right) \cdot \frac{a^{0.5}+1}{a^{0.5}} = \frac{2}{a-1}$. *Методичний коментар:* Завдання вимагає високої концентрації уваги. Учень повинен: 1) розкласти квадратний тричлен у знаменнику першого дробу ($(\sqrt{a}+1)^2$); 2) розкласти різницю квадратів у знаменнику другого дробу; 3) звести до спільного знаменника; 4) виконати множення. Оцінюється раціональність шляху. Наприклад, помітити, що $a-1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$ значно ефективніше, ніж просто перемножувати дужки.

- *Тип завдання:* Обчислення складних числових виразів (звільнення від ірраціональності).

Приклад 6: Обчислити значення виразу $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. *Методичний коментар:* Це класична олімпіадна задача. Стандартні методи не працюють. Учень має здогадатися виділити повний куб під знаком кореня. Оскільки $20+14\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^3$, то корінь дорівнює $2+\sqrt{2}$. Аналогічно для другого доданка. Відповідь: 4. Вчитель пропонує також альтернативний метод: позначити вираз через x і піднести до куба, отримавши рівняння.

Блок 2. Властивості та графіки степеневих функцій

Цей блок є ключовим для формування функціонального мислення та графічної культури. Завдання диференціюються за рівнем абстракції та складністю геометричних перетворень.

Рівень А (Базовий) Мета – навчити розпізнавати графіки основних видів степеневих функцій ($y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = 1/x$) та читати їхні властивості за рисунком.

- *Тип завдання:* Графічний диктант [23].

Приклад 7: Серед наведених функцій ($y = x^5$, $y = x^{-2}$, $y = x^{1/2}$, $y = x^4$) виберіть ті, які: а) є парними; б) визначені тільки для $x \geq 0$; в) спадають на проміжку $(0; +\infty)$. *Методичний коментар:* Завдання формує вміння співставляти аналітичний запис (формулу) з візуальним образом. Учні можуть користуватися схематичними рисунками в зошиті або таблицями з підручника.

- *Тип завдання:* Побудова графіка за точками.

Приклад 8: Побудувати графік функції $y = x^3$ на проміжку $[-2; 2]$. *Методичний коментар:* Перевіряється базова навичка обчислення координат та нанесення їх на площину.

Рівень Б (Достатній) Мета – навчити будувати графіки за допомогою геометричних перетворень та проводити аналітичне дослідження властивостей без побудови.

Тип завдання: Побудова графіків методом перетворень [39].

Приклад 9: Побудувати графік функції $y = (x - 2)^4 - 3$. *Методичний коментар:* Учень повинен описати алгоритм: 1) будуємо базовий графік $y = x^4$ (схожий на параболу, але більш "притиснутий" до осі OX на інтервалі $(-1; 1)$ і більш стрімкий поза ним); 2) переносимо його на 2 одиниці праворуч; 3) переносимо на 3 одиниці вниз. Обов’язковою є вказівка координат вершини $(2; -3)$.

- *Тип завдання:* Порівняння значень функцій.

Приклад 10: Порівняти числа 1.2^{-3} і 0.9^{-3}. *Методичний коментар:* Завдання на розуміння монотонності. Учень міркує так: функція $y = x^{-3}$ (непарний від’ємний показник) спадає на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки $1.2 > 0.9$, то значення функції буде меншим. Отже, $1.2^{-3} < 0.9^{-3}$. Це перевіряє глибину розуміння, а не вміння тиснути кнопки калькулятора.

Рівень В (Високий) Мета – навчити досліджувати складні функції, що містять модулі, та будувати ескізи графіків степеневих функцій з дробовими показниками, аналізуючи опуклість.

- *Тип завдання:* Побудова графіків функцій з модулями.

Приклад 11: Побудувати графік функції $y = |(x+1)^{-2} - 2|$. *Методичний коментар:* Завдання вимагає виконання ланцюжка перетворень: гіпербола $1/x^2$ → зсув ліворуч на 1 → зсув униз на 2 → відображення частини графіка, що нижче осі Ox, вгору. Важливим моментом є знаходження точок перетину з осями (нулів функції), що вимагає розв'язання рівняння $(x+1)^{-2} = 2$.

- *Тип завдання:* Дослідницька задача [2].

Приклад 12: Визначити кількість коренів рівняння $x^{\alpha} = 2 - x$ залежно від значення параметра $\alpha > 0$. *Методичний коментар:* Це завдання на стику алгебри і геометрії. Учень має побудувати графік правої частини (пряма $y = 2 - x$) і проаналізувати поведінку степеневої функції.

a. Якщо $\alpha = 1$, графік – пряма, 1 корінь.

b. Якщо $\alpha > 1$ (опукла вниз), 1 корінь.

c. Якщо $0 < \alpha < 1$ (опукла вгору), 1 корінь. Але нюанс в області визначення! Якщо α – неціле, то розглядаємо тільки $x \geq 0$. Якщо α – парне натуральне, графік симетричний, може бути 2 корені (один додатний, один від'ємний). Це завдання розвиває варіативне мислення.

Блок 3. Ірраціональні рівняння

Розв'язування ірраціональних рівнянь є важливою складовою теми. Диференціація тут здійснюється за методами розв'язання: від стандартних алгоритмів до евристичних прийомів.

Рівень А (Базовий)

- *Тип завдання:* Найпростіші рівняння $x^n = a$ та $\sqrt[n]{x} = a$.

Приклад 13: Розв'язати рівняння: а) $x^3 = -27$; б) $x^4 = 16$; в) $\sqrt{x} = 5$; г) $\sqrt{x} = -2$. *Методичний коментар:* Тут важливо відпрацювати базові поняття. У прикладі (б) учні часто гублять корінь -2. Вчитель нагадує: парний степінь дає два корені. У прикладі (г) учні часто починають підносити до квадрата і отримують $x = 4$. Вчитель має привчити спочатку аналізувати умову: корінь не може дорівнювати від'ємному числу → розв'язків немає.

Рівень Б (Достатній)

- *Тип завдання:* Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ та заміна змінної.

Приклад 14: Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5} = x + 1$. *Методичний коментар:* Використовуємо підручник Неліна. Вчитель вимагає переходу до системи: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + 5 = (x+1)^2 \end{cases}$. Учні розв'язують квадратне рівняння і відкидають сторонні корені за умовою $x \geq -1$. Це виховує дисципліну мислення.

- *Тип завдання:* Метод заміни змінної.

Приклад 15: Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} - 3 = 0$. *Методичний коментар:* Учень має побачити, що $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2$. Заміна $t = \sqrt[6]{x}$, умова $t \geq 0$. Розв'язуємо квадратне рівняння відносно t, повертаємося до заміни.

Рівень В (Високий)

- *Тип завдання:* Використання властивостей функцій (монотонність).

Приклад 16: Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4$. *Методичний коментар:* Стандартний метод піднесення до квадрата приведе до громіздких обчислень. Учень профільного класу має помітити: ліва частина – сума двох зростаючих функцій, отже, вона зростає. Права частина – константа. Рівняння має не більше одного кореня. Підбором знаходимо $x = 3$
$(1 + 3 = 4)$. Доводимо, що інших немає.

- *Тип завдання:* Рівняння з параметрами.

Приклад 17: При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{x-a}=x+1$ має єдиний розв'язок? *Методичний коментар:* Завдання розв'язується графічно. У системі координат (x,y) будуємо графік правої частини ($y=x+1$) і сім'ю графіків лівої частини (гілка параболи $y=\sqrt{x}$, зсунута на a одиниць вправо). Аналізуємо взаємне розміщення прямої і параболи. Умова дотику або перетину в одній точці. Це завдання формує комплексне бачення математики.

Блок 4. Ірраціональні нерівності

Це одна з найскладніших тем шкільного курсу, де учні роблять найбільше помилок.

Рівень А (Базовий)

- *Тип завдання:* Найпростіші нерівності.

Приклад 18: Розв'язати нерівність $\sqrt{x}>3$. *Методичний коментар:* Підносимо до квадрата: $x>9$. ОДЗ ($x\geq 0$) виконується автоматично. *Приклад 19:* Розв'язати нерівність $\sqrt{x}<-2$. *Методичний коментар:* Аналіз: арифметичний корінь невід'ємний, тому меншим за -2 бути не може. Розв'язків немає. Жодних піднесень до квадрата!

Рівень Б (Достатній)

- *Тип завдання:* Нерівності виду $\sqrt{f(x)}<g(x)$ і $\sqrt{f(x)}>g(x)$.

Приклад 20: Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1}<x-2$. *Методичний коментар:* Використовуємо схему рівносильного переходу [39]:

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 \quad \text{(ОДЗ)} \\ x-2>0 \quad \text{(права частина має бути додатною).} \\ 2x-1<(x-2)^2 \end{cases}$$

Вчитель акцентує увагу на другій нерівності системи. Якщо $x-2<0$, то нерівність не має змісту (невід'ємне менше від'ємного).

Рівень В (Високий)

- *Тип завдання:* Метод інтервалів для функцій.

Приклад 21: Розв'язати нерівність $(x^2-4)\sqrt{x+1}\leq 0$. *Методичний коментар:* Це завдання-пастка. Стандартний метод інтервалів може призвести до втрати ізольованих розв'язків. Алгоритм:

d. Знаходимо ОДЗ: $x \geq -1$.

e. Знаходимо нулі функції: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$; $\sqrt{x+1} = 0$; $x = -1$.

f. Корінь $x = -2$ не входить в ОДЗ.

g. Наносимо на вісь точки -1 і 2.

h. Визначаємо знаки на інтервалах $(-1; 2)$ і $(2; +\infty)$.

i. Увага! Точка $x = -1$ робить вираз рівним нулю, що задовольняє умову ≤ 0. Точка $x = 2$ також. Відповідь: $\{-1\} \cup [-1; 2]$? Ні, ОДЗ $x \geq -1$. Тобто $[-1; 2]$. Але якби знак був суворий (< 0), то відповідь була б $(-1; 2)$, а точку -1 треба було б виколоти, але перевірити на рівність нулю. Задачі такого типу вимагають ретельного логічного аналізу граничних точок.

Блок 5. Прикладні задачі (компетентнісний підхід)

Відповідно до рекомендацій НУШ, математика має бути пов’язана з життям. Цей блок завдань спрямований на демонстрацію прикладної значущості степеневої функції.

Рівень А (Природничий/Гуманітарний профіль)

- *Завдання:* Тормозний шлях автомобіля обчислюється за формулою $S = kv^2$, де v – швидкість, k – коефіцієнт тертя.

j. Як зміниться тормозний шлях, якщо швидкість збільшити у 2 рази? (Відповідь: збільшиться у $2^2 = 4$ рази).

k. Водій помітив перешкоду за 40 метрів. Швидкість авто 60 км/год ($S = 30$ м). Чи встигне він загальмувати, якщо поїде зі швидкістю 80 км/год? *Методичний коментар:* Завдання демонструє небезпеку перевищення швидкості через квадратичну залежність. Це має великий виховний ефект.

Рівень Б (Економічний профіль)

- *Завдання:* Крива виробничих можливостей описується формулою $y = \sqrt{100 - x^2}$, де x – виробництво товару А, y – виробництво товару Б.

l. Побудувати графік (це чверть кола).

m. Знайти, скільки товару Б можна виробити, якщо вироблено 6 одиниць товару А.

n. Чи можна виробити одночасно 8 одиниць товару А і 8 одиниць товару Б? (Перевірка нерівності $8^2 + 8^2 > 100$).

Рівень В (Фізико-математичний профіль)

- *Завдання:* Задача на оптимізацію (без похідної). З круглого листа жерсті радіусом R потрібно вирізати прямокутник найбільшої площі. Нехай сторони прямокутника x і y. Тоді $x^2 + y^2 = 4R^2$. Площа $S = xy$. Виразимо $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Функція площі $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Дослідити функцію на максимум. *Методичний коментар:* Тут зручно досліджувати не $S(x)$, а $S^2(x) = x^2(4R^2 - x^2)$. Це квадратична функція відносно $t = x^2$. Парабола, вітки вниз, максимум у вершині. Це демонструє потужність методу заміни змінної у геометричних задачах.

Методичні рекомендації щодо впровадження системи завдань

Для ефективного використання запропонованої системи диференційованих завдань учителю рекомендується дотримуватися наступних принципів:

1. Принцип відкритості: Учні повинні знати критерії оцінювання та рівень складності кожного завдання. Завдання рівня А оцінюються максимально у 6 балів, рівня Б – у 9 балів, рівня В – у 12 балів. Це стимулює учнів обирати завдання, які відповідають їхнім амбіціям.

2. Принцип динамічності груп: Склад типологічних груп учнів не повинен бути застиглим. Якщо учень успішно впорався із завданнями рівня А, йому слід запропонувати спробувати сили на рівні Б (метод «сходинок»).

3. Індивідуалізація домашніх завдань: Не слід задавати всьому класу однакові номери. Доцільно формувати домашнє завдання у вигляді блоків: «Обов'язковий мінімум» + «Завдання на вибір».

4. Використання карток-інструкцій: Для учнів, які працюють на рівні А, варто підготувати картки з алгоритмами (опорами), де прописані

перші кроки розв'язання. Наприклад: «Щоб розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$, перевір, чи $a \geq 0$. Якщо так, піднеси до квадрата».

5. Робота над помилками: Завдання, у яких учні допустили помилки, повинні бути відпрацьовані. Вчитель може запропонувати аналогічне завдання (клон) для повторного розв'язання.

Розроблена система диференційованих завдань з теми «Степенева функція» є гнучким інструментом, що дозволяє реалізувати особистісно орієнтоване навчання. Вона охоплює всі ключові аспекти теми (обчислення, графіки, рівняння, нерівності, моделювання) і забезпечує просування учнів від репродуктивного рівня до творчого. Використання завдань різного рівня складності, прив'язаних до методичних підходів провідних підручників ([2], [23], [39]), дозволяє вчителю ефективно працювати в умовах як рівневої, так і профільної диференціації, забезпечуючи високу якість математичної підготовки старшокласників.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено теоретичне узагальнення та нове вирішення наукової проблеми реалізації диференційованого підходу до навчання алгебри і початків аналізу в старшій школі. На основі проведеного дослідження, метою якого було обґрунтування та експериментальна перевірка методики диференційованого вивчення теми «Степенева функція», сформульовано такі загальні висновки:

1. Здійснений аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури дозволив уточнити сутність диференційованого навчання як цілісної педагогічної системи, що забезпечує адаптацію навчального процесу до індивідуально-типологічних особливостей учнів. Встановлено, що в умовах реформування сучасної української школи пріоритетним є поєднання зовнішньої (профільної) диференціації, яка базується на врахуванні професійних інтересів старшокласників, та внутрішньої (рівневої) диференціації, що дозволяє реалізувати індивідуальні освітні траєкторії в межах одного класу. Визначено, що ефективність диференціації залежить від дотримання комплексу психолого-педагогічних умов, ключовими з яких є врахування когнітивних стилів учнів, формування позитивної мотивації та створення ситуації успіху.

2. Аналіз чинних навчальних програм та підручників з алгебри і початків аналізу [2], [23], [39] засвідчив, що тема «Степенева функція» має значний потенціал для реалізації компетентнісного підходу, проте її методичне забезпечення потребує вдосконалення. Виявлено суттєві відмінності у змісті та вимогах до навчальних досягнень учнів на рівнях стандарту, профільному та поглибленому. Встановлено, що більшість підручників орієнтовані на академічний виклад матеріалу, водночас відчувається дефіцит завдань прикладного характеру та вправ, спрямованих на розвиток дослідницьких умінь за допомогою засобів ІКТ.

3. Розглянуто теоретичні засади та розроблено методичні рекомендації диференційованого вивчення степеневих функцій, які

базуються на принципах варіативності, наступності та діяльності. Запропоновано методичні моделі вивчення теми для класів фізико-математичного, природничого та суспільно-гуманітарного профілів. Для фізико-математичного профілю визначено пріоритетним використання дедуктивного методу, строгого математичного доведення властивостей функцій та розв’язування задач високого рівня складності (ірраціональні рівняння з параметрами, дослідження функцій). Для природничого профілю акцент зроблено на інтеграції математичних знань з фізикою, біологією та хімією, використанні методу математичного моделювання. Для гуманітарного профілю обґрунтовано доцільність застосування наочно-інтуїтивних методів, візуалізації та історико-культурних асоціацій.

4. Розроблено систему диференційованих завдань з теми «Степенева функція», яка включає завдання трьох рівнів складності (репродуктивного, конструктивного, творчого) та охоплює основні змістові лінії: перетворення виразів зі степенями, побудова та дослідження графіків, розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, прикладні задачі. Впровадження цієї системи дозволяє вчителю гнучко керувати навчальною діяльністю учнів, забезпечуючи засвоєння базового стандарту всіма учнями та створюючи умови для поглибленого вивчення матеріалу мотивованими старшокласниками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибл. рівні з 8 кл. проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.

2. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Основа», 2018. 336 с.

5. Бевз В. Г. Історія математики. Харків: Вид. гр. «Основа», 2006. 176 с.

6. Благодир Л. А. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях: навчально-методичний посібник. Умань: ВПЦ «Візаві», 2018. 144 с.

7. Бондарець О. Л., Філон Л. Г. Реалізація рівневої диференціації у навчанні степеневої функції на профільному рівні. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання*: збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю (м. Чернігів, 18 листопада 2025 р.). Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2025. С. 83-84.

8. Буковська О. І. Диференційований підхід до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі поглибленого вивчення геометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2010. 287 с.

9. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики в умовах воєнного стану (методичні рекомендації). *Математика в рідній школі*. 2022. № 4–5. С. 6–15.

10. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики. *Математика в школі*. 2007. № 7. С. 3–6.

11. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчук та ін. Київ: Каравела, 2019. 400 с.

12. Головацький В. В. Методика вивчення теми «Степенева функція» в курсі математики 10 класу на академічному рівні: кваліфікаційна робота магістра. Кам'янець-Подільський, 2023. 64 с.

13. Голодюк Л. С. Методика вивчення властивостей трикутника в умовах рівневої диференціації в основній школі: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Кіровоград, 2004. 226 с.

14. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. Київ: Либідь, 1997. 376 с.

15. Грицик Т. А. Диференційоване вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2010. 209 с.

16. Дейніченко Т. І. Диференціація навчання в процесі групової форми його організації (на прикладі предметів природничо-математичного циклу): автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.09. Харків, 2006. 20 с.

17. Дейніченко Т. І., Мамай В. В, Чирка К. С. Диференціація навчання математики. *Збірник тез доповідей XX Всеукраїнської науково-методичної конференції «Наумовські читання»*. Харків, 2022. С. 99–102.

18. Державний стандарт базової середньої освіти: затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF

19. Жерновников М. О. Методика вивчення степеневої функції в класах з поглибленим вивчанням математики: кваліфікаційна робота магістра. Харків, 2024. 73 с.

20. Закон України «Про освіту» від 05.09.2017 № 2145-VIII. *Відомості Верховної Ради (ВВР)*. 2017. № 38–39. Ст. 380.

21. ЗНО 2021. Математика. Комплексне видання для підготовки до ЗНО і ДПА 2021 / А. Капіносов та ін. Тернопіль: Підручники і Посібники, 2020. 480 с.

22. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.

23. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 448 с.

24. Карпік В. В. Степінь з раціональним показником. Степенева функція: тестові завдання з алгебри та початків аналізу, 10 клас. *Математика в школах України*. 2011. № 32. С. 29–35.

25. Карпінська І. Й. Функції, їх властивості та графіки. Харків: Основа, 2009. 123 с.

26. Кірман В. К. Методична система вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Черкаси, 2010. 20 с.

27. Концепція профільного навчання в старшій школі: Наказ Міністерства освіти і науки України № 1456 від 21.10.2013.

28. Корольський В. В., Капіносов А. М., Лов'янова І. В. Технологія диференційованого навчання математики в основній школі. *Рідна школа*. 2010. № 7–8. С. 51–56.

29. Красницький М. П., Малишко О. О. Діагностика критеріїв рівневої диференціації на уроках стереометрії в класах фізико-математичного профілю. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. Донецьк, 2007. Вип. 27. С. 102–111.

30. Кутішенко В. П. Вікова та педагогічна психологія (курс лекцій): навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 128 с.

31. Лов’янова І. В. Теоретико-методичні засади навчання математики у профільній школі: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02. Черкаси, 2014. 648 с.

32. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда та ін. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.

33. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.

34. Методика навчання і наукових досліджень у вищій школі / С. У. Гончаренко та ін. Київ: Вища школа, 2003. 323 с.

35. Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10–11 класів загальноосвітніх шкіл: Наказ Міністерства освіти і науки України № 1407 від 23 жовтня 2017 року. URL: https://mon.gov.ua

36. Навчальна програма з математики (рівень стандарту) для 10–11 класів загальноосвітніх шкіл: Наказ Міністерства освіти і науки України № 1407 від 23 жовтня 2017 року. URL: https://mon.gov.ua

37. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу): Наказ Міністерства освіти і науки України № 1407 від 23 жовтня 2017 року.

38. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: навчальний посібник для учнів 7–11 класів. Харків: Світ дитинства, 1998. 116 с.

39. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 272 с.

40. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Видавництво «Ранок», 2018. 328 с.

41. Овсієнко Ю. І. Диференційоване навчання математики студентів вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2013. 284 с.

42. Організація навчання математики у старшій профільній школі: монографія / за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.

43. Синільник В. Д. Аналіз контрольної роботи «Степенева функція». *Математика в школах України*. 2007. № 13–14. С. 39–44.

44. Сисоєва С. О., Кристопчук Т. Є. Методологія науково-педагогічних досліджень: підручник. Рівне: Волинські обереги, 2013. 360 с.

45. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

46. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

47. Сморжевський Ю. Л. Диференційоване формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2008. 238 с.

48. Соколенко Л.О. Методика навчання наукових основ функціональної змістової лінії майбутніх вчителів математики. *Вісник Черкаського університету*. 2017. № 12. С. 77–86.

49. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.

50. Сукач Т. М. Диференційований підхід до навчання математики учнів 7–9 класів: на матеріалі рівнянь та нерівностей: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 1994. 20 с.

51. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: монографія. Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. 400 с.

52. Токарева Н. М. Основи педагогічної психології: навчально-методичний посібник. Кривий Ріг, 2013. 223 с.

53. Формування змісту профільного навчання: теоретико-методологічний аспект: кол. монографія / Г. О. Васьківська та ін. Київ: КОНВІ ПРІНТ, 2018. 260 с.

54. Чашечникова О. С. Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики: дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02. Суми, 2011. 542 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Інструктивна картка для учнів «Використання середовища GeoGebra для дослідження степеневих функцій»

Тема: Дослідження впливу показника степеня на вигляд графіка функції $y = x^n$.

Хід роботи:

1. Запустіть програму GeoGebra (на комп'ютері або у веб-браузері).
2. У рядку вводу (внизу екрана або зліва) створіть повзунок (слайдер) для показника степеня. Для цього введіть команду: *n = 1* Натисніть *Enter*.
3. Налаштуйте властивості повзунка:

- Клацніть правою кнопкою миші по повзунку → *Налаштування*.
- Встановіть інтервал: *Мін*: -5, *Макс*: 5, *Крок*: 0.1.

4. Введіть функцію, що залежить від цього повзунка. У рядку вводу напишіть: *y = x^n* Натисніть *Enter*. На екрані з'явиться графік прямої $y = x$.
5. Експеримент 1 (Натуральний показник): Рухайте повзунок, встановлюючи значення $n = 2{,}4{,}6$. *Завдання:* Опишіть спільні властивості цих графіків (симетрія, проходження через точки $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$).
6. Експеримент 2 (Непарний натуральний показник): Встановіть значення $n = 3{,}5$. *Завдання:* Як змінилася симетрія графіка? Чи проходить він через точку $(-1;1)$?
7. Експеримент 3 (Від'ємний показник): Встановіть значення $n = -1, -2$. *Завдання:* Що відбувається з графіком поблизу осі Oy? Як називаються прямі, до яких наближається графік?
8. Експеримент 4 (Дробовий показник): Встановіть значення $n = 0.5$ (це корінь квадратний). *Завдання:* Яка область визначення цієї функції? Порівняйте графік при $n = 0.5$ та $n = 0.3$.
9. Зробіть скріншот екрана з трьома різними графіками та вставте його у звіт.

Додаток Б

Текст підсумкової контрольної роботи з теми «Степенева функція»

Варіант 1

Частина 1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді (по 1 балу)

1. Обчисліть значення виразу $81^{-0,25}$. А) -3 Б) $\frac{1}{3}$ В) 3 Г) $-\frac{1}{3}$

2. Укажіть функцію, яка є степеневою. А) $y = 5^x$ Б) $y = x^5$ В) $y = \frac{5}{x}$ Г) $y = 5x$

3. Знайдіть область визначення функції $y = (x-2)^{\frac{1}{3}}$. А) $(-\infty; +\infty)$ Б) $[2; +\infty)$ В) $(2; +\infty)$ Г) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Частина 2. Завдання на встановлення відповідності (2 бали) 4. Установіть відповідність між функцією (1–3) та ескізом її графіка (А–Г).

4. $y = x^4$
5. $y = x^{-1}$
6. $y = x^{\frac{1}{2}}$

(Тут розміщено рисунки: А – парабола, Б – гіпербола (І і ІІІ чверть), В – вітка параболи (І чверть), Г – кубічна парабола)

Частина 3. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю 5. (2 бали) Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{2x+7} = x + 2$. 6. (2 бали) Спростіть вираз: $\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}} + a^{0,5}b^{0,5}$. 7. (3 бали) Розв'яжіть нерівність: $(x^2-9)\sqrt{x-2} \leq 0$.

Варіант 2

Частина 1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді (по 1 балу)

7. Обчисліть значення виразу $16^{0,75}$. А) 8 Б) 6 В) 12 Г) 4

8. Графік якої з наведених функцій проходить через початок координат? А) $y = x^{-2}$ Б) $y = (x-1)^2$ В) $y = x^{\frac{4}{3}}$ Г) $y = x^0$

9. Знайдіть множину значень функції $y = x^2 - 4$. А) $[0; +\infty)$ Б) $[-4; +\infty)$ В) $(-\infty; +\infty)$ Г) $[4; +\infty)$

Частина 2. Завдання на встановлення відповідності (2 бали) 4. Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та кількістю його коренів (А–Г).

10. $x^3 = 8$
11. $x^4 = 16$
12. $x^{-2} = -4$

А) Жодного Б) Один В) Два Г) Три

Частина 3. Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю 5. (2 бали) Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{3x+4} = 2 - x$. 6. (2 бали) Спростіть вираз: $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}} - \frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}}\right) \cdot \frac{a}{4}$. 7. (3 бали) Побудуйте графік функції $y = (x-3)^2 - 4$ та знайдіть проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень.

Додаток В

Комплекс вправ для усного рахунку «Степеневий тренажер» *(для використання на етапі актуалізації знань)*

Блок 1. «Парне чи непарне?» Визначити знак виразу, не виконуючи обчислень:

1. $(-5)^4$
2. $(-3)^3$
3. -2^6
4. $(-1)^{100}$
5. $-(-4)^2$

Блок 2. «Арифметика коренів» Обчислити швидко:

1. $\sqrt{49}$
2. $\sqrt[3]{-8}$
3. $\sqrt[4]{16}$
4. $\sqrt[5]{-1}$
5. $81^{0,5}$

Блок 3. «Знайди помилку» Знайти та пояснити помилку в міркуваннях:

1. $\sqrt{16} = \pm 4$ (Помилка: арифметичний корінь – число невід'ємне, правильно лише 4).
2. $2^{-3} = -8$ (Помилка: від'ємний показник не робить число від'ємним, правильно $\frac{1}{8}$).
3. $(a^2)^3 = a^5$ (Помилка: показники перемножуються, правильно a^6).
4. $3^{0.5} \cdot 3^{0.5} = 9^{0.5}$ (Помилка: при множенні основи не перемножуються, правильно $3^1 = 3$).

Додаток Г

Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з теми «Степенева функція»

Рівень навчальних досягнень	Бали	Загальна характеристика та вимоги до знань і вмінь учнів
I. Початковий	1	Учень розпізнає степеневі функції серед інших, але не може навести їх властивості.
	2	Учень виконує найпростіші обчислення зі степенями за зразком, допускаючи помилки в знаках або арифметиці.
	3	Учень будує графіки найпростіших функцій ($y = x^2$) за точками, але не може визначити їх властивості за графіком.
II. Середній	4	Учень відтворює означення кореня n-го степеня та степеня з раціональним показником, розв'язує простіші рівняння виду $x^n = a$.
	5	Учень знаходить область визначення найпростіших степеневих функцій, будує їх графіки, виконує перетворення простих виразів.
	6	Учень розв'язує ірраціональні рівняння стандартного вигляду методом піднесення до степеня, виконує перевірку коренів.
III. Достатній	7	Учень вільно володіє теоретичним матеріалом, самостійно будує графіки функцій за допомогою геометричних перетворень ($y = f(x + a) + b$).
	8	Учень розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, використовуючи метод рівносильних перетворень, спрощує вирази середньої складності.
	9	Учень досліджує властивості функцій (парність, монотонність) аналітично, розв'язує прикладні задачі, що зводяться до степеневих функцій.
IV. Високий	10	Учень володіє системними знаннями, вміє синтезувати матеріал, будує графіки функцій з модулями, розв'язує нерівності методом інтервалів з урахуванням ОДЗ.
	11	Учень розв'язує задачі підвищеної складності, використовує нестандартні методи (функціонально-графічний, метод оцінки), аналізує задачі з параметрами.
	12	Учень виконує творчі завдання, самостійно будує математичні моделі реальних процесів, проводить повне дослідження функцій, знаходить оригінальні способи розв'язання.