НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» імені Т. Г. Шевченка

Кафедра математики

Л. О. Соколенко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності А4 Середня освіта (Інформатика)
та спеціальності F3 Комп'ютерні науки

«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ»

Чернігів
2026

УДК 517 (075.8)
С 59

Рецензенти:

Лось В. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Ботузова Ю. В. – доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, вчитель математики КЗ «Ліцей «Науковий» Кропивницької міської ради».

С 59 **Соколенко Л. О. Математичний аналіз** : Навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності F3 Комп'ютерні науки. **«Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди»**. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2026. 108 с.

УДК 517 (075.8)

Навчальний посібник для навчання курсу «Математичний аналіз». Укладено на основі програми навчальної дисципліни «Математичний аналіз» підготовки бакалаврів галузі знань А Освіта, спеціальності А4 Середня освіта (Інформатика) та галузі знань F Інформаційні технології, спеціальності F3 Комп'ютерні науки. Розрахований на здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, першого курсу спеціальності А4 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності F3 Комп'ютерні науки денної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку вченою радою природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка (протокол № 10 від 24 березня 2026 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Ви продовжуєте вивчати навчальну дисципліну ***«Математичний аналіз»***, метою вивчення якої для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які опановують освітньо професійні програми А4 Середня освіта (Інформатика) та F3 Комп'ютерні науки, є оволодіння математичним апаратом, необхідним для аналізу, моделювання та розв'язування теоретичних і практичних інженерних задач.

Навчальна дисципліна ***«Математичний аналіз»*** вивчається протягом двох семестрів першого курсу. На її вивчення відводиться 9 кредитів ECTS, по 4,5 кредити у кожному семестрі.

Знання та вміння здобуті у 1-му семестрі допоможуть вам у засвоєнні наступних змістових модулів курсу:

4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

5. Диференціальні рівняння.

6. Ряди.

Викладання дисципліни ***«Математичний аналіз»*** для студентів інформатичного напряму у ЗВО передбачає застосування *інтерактивних технологій навчання*.

Під *інтерактивними технологіями навчання* розуміють сукупність методів, засобів і форм організації навчання, що забезпечують активний характер взаємодії учасників навчального процесу на засадах співпраці та співтворчості й спрямованих на досягнення поставлених дидактичних цілей.

Інтерактивна технологія навчання як *система* містить: 1) чітко сплановані цілі навчання, 2) спеціально відібраний та структурований зміст навчання, 3) інтерактивні форми, методи та прийоми, 4) розумові і навчальні дії та процеси у вигляді системи пізнавальних завдань, за допомогою яких студенти можуть досягти запланованих результатів, 5) організаційні та психолого-педагогічні умови, що дозволяють ефективно спланувати та реалізувати інтерактивне навчання.

У відповідності до складових інтерактивної технології навчання і побудований **навчальний посібник «Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди».** Він призначений для навчання 4-6 змістових модулів курсу.

Проведений нами аналіз застосування згаданих технологій в процесі викладання курсу математичний аналіз переконує в ефективності таких технологій навчання: 1) діалогово-дискусійних, 2) аналізу ситуацій, 3) тренінгу, 4) фасилітаційного навчання, 5) використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ).

Саме їх ми і радимо застосовувати під час навчання **курсу «Математичний аналіз».**

Автор висловлює глибоку вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Лосю В. М., доктору педагогічних наук, доценту Ботузовій Ю. В. за цінні поради під час підготовки навчального посібника до друку.

II. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

II СЕМЕСТР

Змістовий модуль 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Тема 11. Функції багатьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних. Поняття n-вимірного евклідового простору. Множини точок n-вимірного евклідового простору. Відстань між точками в n-вимірному точковому просторі. Околи точок. Поняття функції багатьох змінних. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Теорема Вейєрштрасса. Теорема Больцано-Коші.

Тема 12. Частинні похідні, диференційовність і диференціал функції багатьох змінних. Означення частинних похідних та їх знаходження. Диференційовність функції в точці. Диференціал функції. Поняття частинних похідних вищих порядків.

Тема 13. Екстремуми функції багатьох змінних. Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму. Достатні умови локального екстремуму. Дослідження функцій двох змінних на екстремуми.

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема 14. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Поняття про диференціальне рівняння. Задача практичного змісту математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння. Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь 1-го порядку. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння органічного зростання (спадання). Моделювання процесів диференціальними рівняннями.

Тема 15. Деякі типи диференціальних рівнянь другого порядку. Означення диференціального рівняння 2-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні). Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння гармонічних коливань.

Змістовий модуль 6. Ряди

Тема 16. Числові ряди. Поняття числового ряду. Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Збіжність додатних рядів. Перша та друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів. Ознака Коші збіжності додатних рядів. Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів. Інтегральна ознака Коші збіжності додатних рядів. Збіжність довільних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Теорема Лейбніца. Сполучна властивість збіжних рядів. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.

Тема 17. Функціональні ряди. Поняття функціональної послідовності. Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності. Поняття функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду. Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Веєрштрасса*). Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Тема 18. Степеневі ряди. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Поняття степеневого ряду. Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду. Проміжок збіжності степеневого ряду. Властивості суми степеневого ряду.

Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Розвинення в степеневі ряди функцій e^x, $sin\ x$, $cos\ x$. Біномний ряд. Розвинення в степеневі ряди функції $ln(1+x)$, $arctg\ x$. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

ІІІ. ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС

Змістовий модуль 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 11 . ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Мета навчання: розглянути окремі випадки n-вимірного евклідового простору, відомі зі шкільного курсу математики, та на основі їх означити поняття «n-вимірного точкового простору»; означити поняття «відстань між точками в n-вимірному точковому просторі» та розглянути властивості відстані. Ввести поняття «зв'язна множина», «область простору R_n», «межова точка», «межа», «замкнена область простору R_n», «обмежена множина», «необмежена множина», «функція багатьох змінних», «границя функції багатьох змінних». Розглянути еквівалентні означення поняття «неперервність функції багатьох змінних у точці», означення «неперервність функції багатьох змінних в області $D \subset R_n$», «неперервність функції багатьох змінних в замкненій області $\overline{D} \subset R_n$», теореми Вейєрштрасса та Больцано-Коші.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття n-вимірного евклідового простору. Множини точок n-вимірного евклідового простору.	[2] Р1 § 1.1; [8] Р1 § 1.11.
2	Відстань між точками в n-вимірному точковому просторі. Властивості відстані.	[2] Р1 § 1.1; [8] Р1 § 1.11.
3	Околи точок.	[2] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.
4	Поняття функції багатьох змінних.	[2] Р1 § 1.3; [8] Р1 § 1.11.
5	Границя функції багатьох змінних.	[2] Р1 § 1.3; [8] Р1 § 1.11.
6	Неперервність функції багатьох змінних.	[2] Р1 § 1.3; [8] Р1 § 1.11.
7	Теорема Вейєрштрасса. Теорема Больцано-Коші.	[2] Р1 § 1.3; [8] Р1 § 1.11.

Математичні поняття та їх властивості:

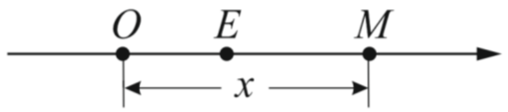
<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Поняття n-вимірного евклідового простору.
Множини точок n-вимірного евклідового простору</td></tr>
<tr><td colspan="2">Окремими випадками поняття n-вимірного евклідового простору є відомі вам поняття «числової прямої», «числової площини» і «числового простору».</td></tr>
<tr><td><u>Означення 1.</u> Пряма з вибраними на ній точкою O – початком відліку, точкою E – одиничною точкою і додатним напрямом від точки O до точки E називається координатною прямою.
Точка O розбиває координатну пряму на два промені, один з них має додатний напрям і називається додатним променем, а другий – від'ємним.</td><td>Кожне дійсне число x можна зобразити певною точкою M координатної прямої.
<u>Означення 2.</u> Число x, зображенням якого на координатній прямій є точка M, називається координатою точки M і те, що точка M має координату x, записують так: $M(x)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

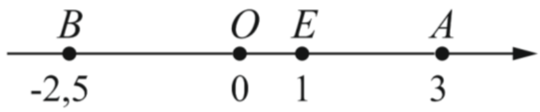
Рис. 1


Рис. 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Твердження 1. Будь-якому дійсному числу x відповідає єдина точка M координатної прямої, а саме точка $M\,(x)$.
Твердження 2. Будь-якій точці M координатної прямої відповідає єдине дійсне число x.
Твердження 1 і 2 показують, що між множиною R і множиною точок координатної прямої встановлено взаємно однозначну відповідність.
Множину R дійсних чисел часто називають числовою прямою, а її елементи (числа) – точками числової прямої. Для числової прямої вживають також позначення $\mathbf{R}_1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Властивість неперервності.</u> Якщо X і Y – непорожні підмножини множини R, які мають ту властивість, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ виконується нерівність $x \leq y$, то існує таке $c \in \mathbf{R}$, що $x \leq c \leq y$ для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ (рис. 3).
Про число c, яке фігурує в цій властивості, говорять, що воно відокремлює множини X і Y.
Зміст властивості неперервності полягає в тому, що у множині R не має не тільки таких «стрибків», як, наприклад, у множині N, але і таких «дірок», як у множині Q.</td></tr>
</table>

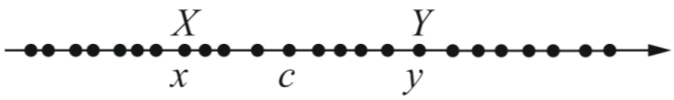


Рис. 3

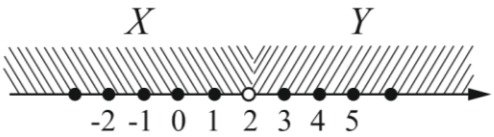


Рис. 4

<u>Означення 3.</u> Площину з вибраною на ній прямокутною системою координат називають ***координатною площиною*** і позначають Oxy.

Вісь абсцис і вісь ординат ділять координатну площину на чотири ***координатні кути*** (або ***квадранти***), які нумерують так, як показано на (**рис. 5).**

Кожній точці координатної площини ставлять у відповідність певну пару дійсних чисел, які називають ***координатами*** цієї точки.

Будь-якій точці M координатної площини відповідає єдина упорядкована пара дійсних чисел $(x;\ y)$.

Навпаки, будь-якій упорядкованій парі дійсних чисел $(x;\ y)$ відповідає єдина точка M координатної площини, а саме точка $M(x;\ y)$.

Два останні твердження показують, що *між множиною точок координатної площини і множиною упорядкованих пар дійсних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність*.

Множину впорядкованих пар дійсних чисел часто називають ***числовою площиною*** і позначають $\mathbf{R}_2$, а будь-яку впорядковану пару дійсних чисел – ***точкою числової площини.***

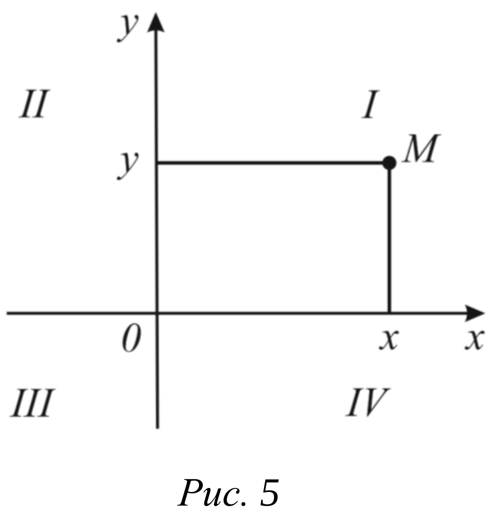


Рис. 5

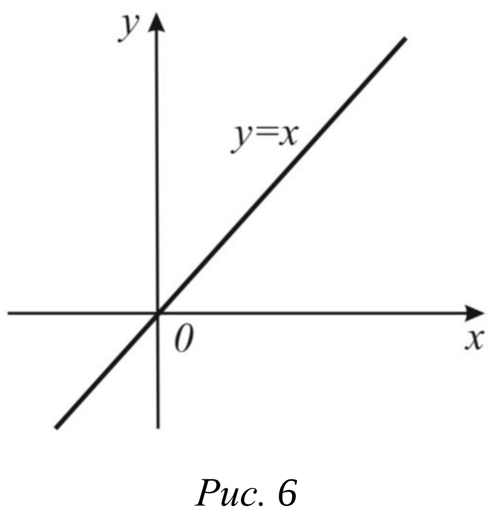


Рис. 6

<u>Означення 4.</u> ***Графіком*** *функції* $y = f(x),\ x \in X,$ називають множину точок $(x;\ y)$ координатної площини, де $x \in X$, а $y = f(x)$.

<u>Приклад.</u> Графіком функції, заданої формулою $y = x,\ \ x \in R$ (рис. 6), є бісектриса першого і третього координатних кутів.

Будь-якій точці M координатного простору відповідає єдина упорядкована трійка дійсних чисел $(x;\ y;\ z)$.

Навпаки, будь-якій упорядкованій трійці дійсних чисел $(x;\ y;\ z)$ відповідає єдина точка M координатного простору, а саме точка $M(x;\ y;\ z)$.

Два останні твердження показують, що *між множиною точок координатного простору і множиною упорядкованих трійок дійсних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність*.

Множину впорядкованих трійок дійсних чисел часто називають **числовим простором** і позначають **R**₃, а будь-яку впорядковану трійку дійсних чисел – *точкою числового простору*.

Означення 5. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Упорядковану множину n дійсних чисел $(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$, де x_1 – на першому місці, x_2 – на другому, ..., x_n – на n-му, називають ***n-вимірною точкою*** і позначають однією буквою, наприклад, x, тобто $x = (x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$.

Множину n-вимірних точок називають ***n-вимірним точковим простором.***

Для точки $x = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$ числа $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ називають її ***координатами.***

Першою координатною віссю називається множина точок $x = (x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$, в яких x_1 може набувати будь-якого дійсного значення, а $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$. Аналогічно означається ***i-та координатна вісь***, *i* = 2, 3, ..., *n*.

Точку $O(0; 0; \dots; 0)$ називають ***початком координат цього простору.***

Відстань між точками в *n*-вимірному точковому просторі. Властивості відстані

Відстань $\rho(x;\ y)$ між двома довільними точками x і y координатної прямої, координатної площини та координатного простору визначається за такими формулами:

$$\rho(x;\ y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|, \qquad (1)$$

де x і y – **точки координатної прямої**;

$$\rho(x;\ y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \qquad (2)$$

де $x = (x_1;\ x_2)$ і $y = (y_1; y_2)$ – **точки координатної площини**;

$$\rho(x;\ y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}, \qquad (3)$$

де $x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ і $y = (y_1;\ y_2;\ y_3)$ – **точки координатного простору**.

Для двох довільних точок $x = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$ і $y = (y_1; y_2;\ \dots; y_n)$ n-вимірного точкового простору можна ввести за аналогією з формулами (1)–(3) поняття **відстані** $\boldsymbol{\rho(x;\ y)}$ **між ними**:

$$\rho(x;y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \qquad (4)$$

<u>Означення 6.</u> Якщо відстань $\boldsymbol{\rho(x;\ y)}$ між двома довільними точками x *і* y n-вимірного точкового простору визначається за формулою (4), то його називають ***n-вимірним евклідовим простором*** і позначають $\mathbf{R}_n$.	Відстань $\rho(x;\ y)$ між двома довільними точками x *і* y простору $\mathbf{R}_n$ має такі ***властивості.*** 1°. $\rho(x;\ y) \geq 0$, причому $\rho(x;\ y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$, тобто коли $x_i = y_i$; для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. 2°. $\rho(x;\ y) = \rho(y; x)$. 3°. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$. (тут $x,\ y,\ z$ – довільні точки простору $\mathbf{R}_n$) *(нерівність трикутника).*

Околи точок

<u>Означення 7.</u> Нехай $a = (a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n)$ – деяка точка простору $\mathbf{R}_n$ і число $\varepsilon > 0$. Множину точок $x = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$ простору $\mathbf{R}_n$ таких, що $\rho(a;\ x) < \varepsilon$ називають ***n-вимірною кулею з центром а і радіусом*** **ε** та позначають $U(a;\ \varepsilon)$. Будь-яку кулю $U(a;\ \varepsilon)$ називають ***ε-околом*** (або просто *околом*) ***точки а.*** Отже, $U(a;\ \varepsilon) = \{x \mid x \in R_n,\ \rho(a;\ x) < \varepsilon\}$.	При $\boldsymbol{n=1}$ (випадок простору $\mathbf{R}_1$) $a = a_1$ і на основі формули (1) маємо $U(a;\varepsilon) = \{x \mid x \in R,\ \lvert x - a_1\rvert < \varepsilon\}$. Ця множина точок є ***<u>звичайним інтервалом</u>*** $(a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon)$. При $\boldsymbol{n=2}$ (випадок простору $\mathbf{R}_2$) $a = (a_1; a_2)$ і на основі виразу (2) маємо $U(a;\varepsilon) = \left\{(x;y) \middle\vert \begin{array}{l} x \in R,\ y \in R, \\ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < \varepsilon^2 \end{array}\right\}$ Ця множина є звичайним ***<u>кругом з центром (а₁; а₂) і радіусом ε</u>,*** з якого вилучене коло з тими самими центром і радіусом. При $\boldsymbol{n = 3}$ (випадок простору $\mathbf{R}_3$) $a = (a_1; a_2; a_3)$ і на основі виразу (3) маємо:

$$U(a;\varepsilon) = \left\{(x;y;z) \middle\vert \begin{array}{l} x \in R,\ y \in R, z \in R, \\ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 < \varepsilon^2 \end{array}\right\}.$$

Ця множина є ***<u>звичайною кулею з центром (а₁;а₂;а₃) і радіусом ε</u>,*** з якої вилучена сфера з тими самими центром і радіусом.

<u>Означення 8.</u> Нехай D – деяка множина точок простору $\mathbf{R}_n$. Точку $x \in D$ називають ***внутрішньою точкою множини D***, якщо існує окіл цієї точки, який міститься у множині D.

Множину D називають ***відкритою***, якщо кожна її точка є внутрішньою для неї.

Приклад 1. Множина $A = \{x|\ x \in R,\ 0 < x < 1\}$ є відкритою, бо кожна її точка є внутрішньою для неї (рис. 7).

Приклад 2. Множина $B = \{x|\ x \in R,\ 2 \le x \le 5\}$ не є відкритою, бо точки 2 і 5 належать цій множині і не є внутрішніми для неї (рис. 8).

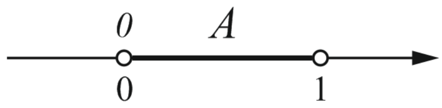


Рис. 7

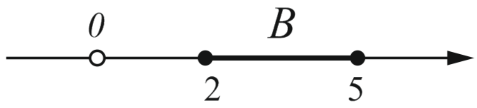


Рис. 8

<u>Означення 9.1.</u> Множину $D \subset \mathbf{R}_n$ називають ***зв'язною***, якщо будь-які дві її точки можна сполучити неперервною кривою, що складається з точок множини D.

<u>Означення 9.2.</u> Зв'язну відкриту множину $D \subset \mathbf{R}_n$ називають ***областю простору*** $\mathbf{R}_n$.

<u>Означення 9.3.</u> Точку $x \in \mathbf{R}_n$ називають ***межовою точкою*** області $D \subset \mathbf{R}_n$, якщо в будь-якому околі цієї точки є точки $\mathbf{R}_n$ як ті, що належать D, так і ті, що не належать D.

Множину межових точок області $D \subset \mathbf{R}_n$ називають її ***межею***.

<u>Означення 10.</u> Область $D \subset \mathbf{R}_n$ разом з її межею називають ***замкненою областю простору*** $\mathbf{R}_n$; вона позначається символом $\overline{D}$.

У прикладі 2 множина B – замкнена область простору $\mathbf{R}_1$.

<u>Означення 11.</u> Множину $D \subset \mathbf{R}_n$ називають ***обмеженою***, якщо існує n-вимірна куля, яка містить цю множину.

Множину $D \subset \mathbf{R}_n$, що не є обмеженою, називають ***необмеженою***.

Поняття функції багатьох змінних

<u>Означення 12.</u> Розглянемо функцію $y = f(x), x \in X$ де $X \subset R_n$ і $Y_f = \{y|y = f(x),\ x \in X\} \subset R_1 = R$.

Оскільки точка $x \in \mathbf{R}_n$ описується n дійсними числами – своїми координатами: $x = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$, то замість $y = f(x), x \in X \subset R_n$, пишуть також $y = f(x_1, x_2,\ \dots,\ x_n)$, $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in X \subset R_n$, і називають *функцію* ***f функцією n змінних*** $x_1; x_2; \dots; x_n$, кожна з яких набуває вже значень з множини $\mathbf{R}$.

<u>Приклад.</u> Формула $u = 5x^2 - 7y^3 + 4xz$ задає аналітично функцію трьох змінних x, y і z область визначення цієї функції – простір $\mathbf{R}_3$.

Якщо $n>1$, то функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***функцією багатьох змінних,*** *а* точка $x = (x_1; x_2; \dots ; x_n)$ і її координати $x_1; x_2; \dots; x_n$ називаються ***аргументами функції f.***
<u>Зауваження.</u> Якщо якась функція n змінних $x_1; x_2; \dots; x_n$ задана аналітично (за допомогою формули) і при цьому не вказана її область визначення (множина X, що фігурує у вище розглянутому означенні функції n змінних), то остання збігається з множиною тих значень аргументу $x = (x_1; x_2; \dots ; x_n)$, для кожного з яких за даною формулою можна знайти (обчислити) відповідне значення функції.

Границя функції багатьох змінних	
<u>Означення 1.</u> Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена в деякому околі точки $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$, крім, можливо, самої точки a. Число A називається ***границею функції f в точці a***, якщо: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$ $(\forall x,\ 0 < \rho(x, a) < \delta)\colon |f(x) - A| < \varepsilon$. (1) Позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$.	**<u>Зауваження.</u>** Для існування границі функції f в точці a потрібно (згідно з означенням цього поняття), щоб при будь-якому способі прямування x до a змінна $f(x)$ прямувала до одного й того самого числа A. Тому для існування згаданої границі може виявитись недостатнім існування таких рівностей: $\lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(a_1, x_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = \dots = \lim\limits_{x_n \to a_n} f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, x_n) = A.$ **Контрприклад 1.** Для функції $f(x;\ y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, визначеної на множні $R_2 \backslash \{(0; 0)\}$ маємо $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Отже, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$. Проте границі цієї функції в точці (0; 0) не існує [2, с. 19–20].

Неперервність функції багатьох змінних

Означення 2. Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в деякому околі точки $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Функція f називається ***неперервною в точці a***, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad (2)$$

Останню рівність можна записати також у вигляді

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \ldots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad (3)$$

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x^4-x^2y^2}{x-y}$.

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x^4 - x^2y^2}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x^2(x^2-y^2)}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} x^2(x+y) = 2.$$

Поняття неперервності функції в точці може бути сформульованим і на мові приростів.

Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в деякому околі точки $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ і нехай $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ – довільна точка з цього околу, відмінна від точки $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

Величину $\Delta x_i = x_i - a_i, i = \overline{1, n}$, (4)

називають ***приростом незалежної змінної*** x_i

$x_i = a_i + \Delta x_i$.

$$\Delta f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_n+\Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad (5)$$

Величину $\Delta f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називають ***приростом*** або ***повним приростом функції*** $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***в точці*** $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, що відповідає приростам $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Означення 3. Функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначена в деякому околі точки $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, називається *неперервною в точці a*, якщо має місце рівність

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \ldots\\ \Delta x_n\to 0}} \Delta f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \qquad (6)$$

Приклад. Функція $z = x^2 + y^2$ неперервна в довільній точці $(a; b) \in R_2$.

Дійсно, для довільної точки $(a; b) \in R_2$ маємо приріст функції

$$\Delta z = (a+\Delta x)^2 + (b+\Delta y)^2 - (a^2+b^2) = 2a\Delta x + 2b\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

тому $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$.

Далі скористаємось означенням 3.

Доводять еквівалентність означення 2 та означення 3.

Зауваження. Неперервність функції n змінних *«за сукупністю змінних»* є дещо більше, ніж неперервність цієї функції *«за всіма змінними нарізно»*. Функція $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ може бути такою, що функція $f(x_1, a_2,a_3,\ldots, a_{n-1},a_n)$ як функція змінної x_1 неперервна в точці a_1, функція $f(a_1, x_2, a_3, \ldots, a_{n-1},a_n)$ як функція змінної x_2 неперервна в точці a_2 функція $f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1},x_n)$ як функція змінної x_n неперервна в точці a_n, а сама функція $f(x)=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ не є неперервною в точці $a=(a_1; a_2; \ldots; a_n)$.	**Контрприклад 2.** Для функції $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{якщо } x=y=0,\end{cases}$ маємо $f(x,0)=f(0,y)=0$. Тому функція $\varphi_1(x)=f(x,0)$ неперервна в точці $x=0$, а функція $\varphi_2(y)=f(0,y)$ неперервна в точці $y=0$. Проте $\Delta f(0{,}0)=f(x,y)-f(0{,}0)=f(x,y)$ не має границі, коли $x\longrightarrow 0,\ y\longrightarrow 0$ (див. контрприклад 1), і тому представлена функція не є неперервною в точці (0;0).

Означення 4. Функція $f(x)=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ називається ***неперервною в області*** $D\subset \mathbf{R}_n$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення 5. Функція $f(x)=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ називається ***неперервною в замкненій обмеженій області*** $\overline{D}\subset \mathbf{R}_n$, якщо вона неперервна в області D, і для будь-якої точки $a=(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ межі області має місце рівність

$$\lim_{D\ni x\to a} f(x)=f(a).$$

Поняття, введені двома останніми означеннями, є перенесенням на випадок функцій n змінних понять неперервності функції однієї змінної в інтервалі і на відрізку.

Теорема (*теорема Вейерштрасса*). Якщо функція n змінних неперервна в замкненій обмеженій області простору $\mathbf{R}_n$, то вона обмежена в цій множині, і серед її значень у даній множині існує найменше і найбільше.

Теорема (*теорема Больцано-Коші*). Функція n змінних, неперервна в області простору $\mathbf{R}_n$, набуваючи яких-небудь двох значень, набуває і будь-яке проміжне між ними.

Тема 12. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ, ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ І ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Мета навчання: Ввести поняття «частинний приріст функції багатьох змінних в точці», «частинна похідна функції», «функція диференційовна в точці». Розглянути необхідні умови диференційовності функції двох змінних у точці простору R_2, достатню умову диференційовності функції двох змінних у точці простору R_2. Ввести поняття «диференціал», «частинні похідні вищих порядків». Розглянути приклади та контрприклади.

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення частинних похідних та їх знаходження.	[2] P2 § 2.1; [8] P1 § 1.11.
2	Диференційовність функції в точці.	[2] P2 § 2.1 ; [8] P1 § 1.11.
3	Диференціал функції.	[2] P2 § 2.1; [8] P1 § 1.11.
4	Поняття частинних похідних вищих порядків.	[2] P2 § 2.5; [8] P1 § 1.11.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Означення частинних похідних та їх знаходження</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в деякому околі точки $a = (a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$.
Візьмемо точку $\left(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{j-1};\ a_j + \Delta x_j;\ a_{j+1};\ a_{j+2};\ \ldots;\ a_n\right)$ з цього околу, відмінну від точки $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$.
Величину
$$\Delta x_j f(a_1,\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \\ = f\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,a_{j-1},\ a_j + \Delta x_j,\ a_{j+1},\ a_{j+2},\ \ldots,\ a_n\right) - \\ - f\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_j,\ \ldots,\ a_n\right) \qquad (1)$$
навивають частинним простором функції $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$, що відповідає приросту Δx_j незалежної змінної x_j. Тут $j = \overline{1,\ n}$.</td></tr>
</table>

Означення 1. Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в деякому околі точки $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$ і нехай $\Delta\, x_j\ f(a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n)$, $j = \overline{1,\ n}$ – частинний приріст функції $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$, що відповідає приросту $\Delta\, x_j$ незалежної змінної x_j.

Якщо відношення $\frac{\Delta x_j f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\Delta x_j}$ має границю при $\Delta\, x_j \to 0$, то ця границя називається ***частинною похідною функції*** $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***по змінній*** x_j ***в точці*** $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$ і позначається $f'_{x_j}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ (читається «f штрих по x_j в точці $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$»).

Зауваження. З існування всіх частинних похідних функції в точці не випливає неперервність цієї функції в розглядуваній точці.

Приклад 1. Для функції $f(x, y) =$

$$= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0, \end{cases}$$

маємо

$$f'_x(0{,}0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0{,}0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(0+\Delta x)\cdot 0}{(0+\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

використано рівність $f(\Delta x, 0) = 0$ і $f'_y(0{,}0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0{,}0)}{\Delta y} = 0$ (використано рівність $f(0,\ \Delta y) = 0$.

Однак ця функція не є неперервною в точці (0;0).

Таким чином, за означенням

$$f'_{x_j}(a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_{x_j} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\Delta x_j} \qquad (2)$$

Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначена на множині $X \subset \mathbf{R}_n$, має частинну похідну по змінній x_j, $j = \overline{1,\ n}$, в кожній точці множини X_j, $\varnothing \neq X_j \subset X$.

Якщо кожній точці $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots\ ; x_n)$ поставити у відповідність число $f'_{x_j}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, то утвориться функція, відмінна, взагалі кажучи, від $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, з областю визначення X_j.

Зауваження. Оскільки, згідно з виразом (2), частинна похідна $f'_{x_j}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ є звичайною похідною функції $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що розглядається як функція тільки змінної x_j при фіксованих $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n$, то для знаходження $f'_{x_j}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, функцію $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, треба продиференціювати як функцію однієї змінної x_j, вважаючи змінні

Ця функція називається ***частинною похідної функції*** $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***по змінній*** x_j і позначається $f'_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (читається «f штрих по x_j від $x_1, x_2, \ldots, x_n$»), або $f'_{x_j}(x)$; $\frac{df}{dx_j}$ (читається «де f по де x_j»).	$x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n$ сталими. **<u>Приклад 2.</u>** Знайти частинні похідні функцій: 1) $z = x^2 y$. ***Розв'язання.*** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2yx$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$. 2) $z = x^y$. ***Розв'язання.*** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ \ln x$.

Диференційовність функції в точці

Надалі обмежимось випадком ***функції двох змінних***, хоча всі положення цього змістового модуля справедливі і для функцій $n\,(n \geq 3)$ змінних.

<u>Означення 2.</u> Функція $f(x, y)$, визначена в деякому околі точки $(a; b)$, називається ***диференційовною в точці*** $(a; b)$, якщо для її повного приросту $\Delta f(a; b)$, що відповідає приростам Δx і Δy незалежних змінних x і y, має місце зображення $$\Delta f(a,b) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \quad (3)$$ де A і B – деякі числа, що не залежать від Δx і Δy (але взагалі залежать від a і b), і $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0,$$ $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$	**<u>Приклад 3.</u>** Довести за означенням диференційованість на всій площині функції $z = x + 2y$. ***Доведення.*** Для довільної точки $(a;\ b) \in R_2$ маємо $\Delta z = z\ (a + \Delta x;\ b + \Delta y) - z(a; b) =$ $= (a + \Delta x) + 2\ (b + \Delta y) - (a + 2b) =$ $= \Delta x + 2\Delta y$. Отже, $A = 1$, $B = 2$. За означенням 2 функція диференційована на всій площині.

Необхідні умови диференційовності функції двох змінних у точці простору R₂.

Теорема 1. Якщо функція двох змінних ***диференційовна*** в деякій точці простору **R_2**, то вона ***неперервна*** в цій точці.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ диференційовна в точці $(a; b)$, то в цій точці існують частинні похідні цієї функції по змінних x і y, причому, якщо повний приріст функції $f(x, y)$ в точці $(a; b)$, що відповідає приростам Δx і Δy незалежних змінних x і y, записаний у вигляді (3), то

$$\boldsymbol{f'_x(a,b) = A,\ f'_y(a,b) = B}.$$

Відомо, що для *функцій однієї змінної* існування похідної в точці є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції в цій точці. Саме тому для функцій однієї змінної поняття «існує похідна» та «функція диференційовна» ототожнюються.

Зв'язок між існуванням обох частинних похідних функції двох змінних та її диференційовністю дещо складніший.

У **теоремі 2** стверджується, що існування обох частинних похідних функції двох змінних є **необхідною умовою** диференційовності цієї функції. Проте ця умова не є достатньою.

Контрприклад. Функція

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{якщо } x=y=0, \end{cases}$$

має обидві частинні похідні в точці (0;0) і не є неперервною в цій точці (доведено раніше). Остання властивість даної функції разом з теоремою 1 дають змогу стверджувати, що ця функція не є диференційовною в точці (0;0).

Достатня умова диференційовності функції двох змінних.

Теорема 3. Якщо функція двох змінних має в деякій точці простору $\mathbf{R}_2$ **неперервні обидві частинні похідні**, то вона диференційовна в цій точці.

Диференціал функції

Означення 3. Нехай функція $f(x,y)$ диференційовна в точці $(a;b)$. Лінійний відносно Δx і Δy доданок $A\Delta x + B\Delta y$, що фігурує в (3), називають ***диференціалом*** або ***повним диференціалом функції*** $f(x,y)$ ***в точці*** $(a;b)$, що відповідає приростам Δx і Δy незалежних змінних x і y, і позначають $df(a,b)$ (читають «де f в точці $(a;b)$»).

Таким чином, за означенням

$$df(a,b) = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (4)$$

Диференціал функції двох змінних у точці простору $\mathbf{R}_2$ називають ***головною частиною приросту цієї функції у цій точці*** і користуються наближеною рівністю

$$\Delta f(a,b) \approx df(a,b). \qquad (5)$$

$$d\,f(a,b) = f'_x(a,b)dx + f'_y(a,b)dy. \qquad (6)$$

Врахувавши (6), наближену рівність (5) можна переписати так:

$$f(a+\Delta x,\ b+\Delta y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y. \qquad (7)$$

Поняття частинних похідних вищих порядків

<u>Означення 4.</u> Частинну похідну по змінній x від частинної похідної першого порядку $f'_x(x,y)$ називають ***частинною похідною другого порядку*** функції $f(x,y)$ по змінній x і позначають $f''_{xx}(x,y)$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (читається «де два штрих f по де x квадрат»).

Отже, за означенням $f''_{xx}(x,y) = (f'_x)'_x(x,y),\ (x,y) \in X_{11}$.

Аналогічно означаються ***частинні похідні другого порядку*** $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$.

Наприклад, $f''_{xy}(x,y)$ – частинна похідна другого порядку функції $f(x,y)$ по змінних x і y, вона визначається рівністю

$$f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y(x,y), (x,y) \in X_{12}.$$

Частинні похідні від частинних похідних другого порядку називаються ***частинними похідними третього порядку*** розглядуваної функції.

Їх буде вісім:

$$f'''_{xxx}(x,y),\ f'''_{xxy}(x,y),$$
$$f'''_{xyx}(x,y),\ f'''_{xyy}(x,y),$$
$$f'''_{yxx}(x,y),\ f'''_{yxy}(x,y),$$
$$f'''_{yyx}(x,y),\ f'''_{yyy}(x,y).$$

<u>Означення 5.</u> Частинні похідні вищих порядків, у яких диференціювання (відшукання частинних похідних) здійснюється по різних змінних, називаються ***мішаними частинними похідними.***

<u>Означення 6.</u> Частинні ж похідні, які містять диференціювання лише по одній змінній, називаються ***чистими частинними похідними.***

Далі можна означити *частинні похідні четвертого, п'ятого, n–го порядку*, $n = 1, 2, \ldots$. Частинні похідні порядку $n>1$ називають ***частинними похідними вищих порядків.***

<u>Приклад 4.</u> $f''_{xy}(x,y)$, $f'''_{xyx}(x,y)$ – мішані частинні похідні, а $f''_{yy}(x,y)$, $f'''_{yyy}(x,y)$ – чисті частинні похідні.

Згідно з означенням частинних похідних вищого порядку, процес знаходження їх полягає в послідовному диференціюванні функцій.

<u>Приклад 5.</u> Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = xy^2 - e^x$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні функції $z = xy^2 - e^x$ ***першого порядку***:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - e^x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy.$$

	2) Знайдемо частинні похідні функції $z = xy^2 - e^x$ ***другого порядку***: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y.$

Області визначення частинних похідних в цьому прикладі збігаються з $\mathbf{R}_2$.

У розглянутому прикладі мішані частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які відрізняються тільки порядком диференціювання, рівні між собою.

Зауваження. У загальному випадку $f''_{xy}(x, y) \neq f''_{yx}(x, y)$; проте, якщо похідні $f''_{xy}(x, y)$ і $f''_{yx}(x, y)$ неперервні в точці (a, b), то $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Тема 13. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Мета навчання: Ввести поняття «точка максимуму (мінімуму) функції двох змінних», «максимум (мінімум) функції в точці», «стаціонарна точка». Розглянути необхідні умови локального екстремуму, достатні умови локального екстремуму, приклади дослідження функцій двох змінних на екстремуми.

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму.	[2] Р2 § 2.7; [8] Р1 § 1.11.
2	Достатні умови локального екстремуму.	[2]Р2 § 2.7; [8] Р1 § 1.11.
3	Дослідження функцій двох змінних на екстремуми.	[2] Р2 § 2.7; [8] Р1 § 1.11.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Означення 1.</u> Нехай функція $f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $(a;\ b)$. Точка $(a;\ b)$ називається точкою мінімуму (максимуму) функції $f(x,y)$, а $f(a,b)$ – мінімумом (максимумом) цієї функції в точці $(a;b)$, якщо існує такий окіл точки $(a;b)$, що для всіх точок (x,y) з цього околу, відмінних від точки $(a;b)$, виконується нерівність $f(a,b) < f(x,y) \big(f(a,b) > f(x,y)\big)$.
Точки мінімуму і максимуму функції називають її точками екстремуму, а максимум і мінімум функції в точці – екстремумом цієї функції в цій точці.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 1 (необхідна умова екстремуму).
Якщо точка $(a;b)$ є точкою екстремуму функції $f(x,y)$ і якщо в цій точці існують частинні похідні цієї функції по змінних x і y, то ці частинні похідні дорівнюють нулю: $f_x'(a,b) = 0,\ f_y'(a,b) = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Означення 2.</u> Точка простору R$_2$, в якій існують обидві частинні похідні якоїсь функції двох змінних, кожна з яких дорівнює нулю, називається стаціонарною для цієї функції.
У <u>теоремі 1</u> стверджується, що всі точки екстремуму функції двох змінних, яка має частинні похідні по обох змінних в деякій області простору R$_2$, утворюють підмножину множини її стаціонарних точок.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Достатні умови локального екстремуму</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 2. (достатні умови екстремуму).
Нехай функція $f(x,y)$ в деякому околі своєї стаціонарної точки $(a;b)$ має неперервні всі частинні похідні другого порядку.
Якщо
$f_{x\,x}''(a,b)\ f_{y\,y}''(a,b) - \left(f_{x\,y}''(a,b)\right)^2 > 0$, (1)
то точка $(a;b)$ є точкою екстремуму функції $f(x,y)$,
причому точкою мінімуму, якщо $f_{x\,x}''(a,b) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f_{x\,x}''(a,b) < 0$.
Якщо ж
$f_{x\,x}''(a,b)\ f_{y\,y}''(a,b) - \left(f_{x\,y}''(a,b)\right)^2 < 0$, (2)
то точка $(a;b)$ не є точкою екстремуму функції $f(x,y)$.</td></tr>
</table>

Дослідження функцій двох змінних на екстремуми

Задача. Дослідити на максимум і мінімум функцію двох змінних.

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Дослідження.

1. Знайдемо чистинні похідні функції $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$:

$\frac{\partial\ z}{\partial\ x} = 6x^2 - y^2 + 10x,$ $\frac{\partial\ z}{\partial\ y} = -2xy + 2y = 2y(1-x),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial\ x^2} = 12x + 10,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial\ y^2} = -2x + 2,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = -2y.$

2. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0, \\ 2y\ (1-x) = 0, \end{cases}$ для знаходження стаціонарних точок.

Одержимо наступні точки $(1; -4)$, $(1; 4)$, $(0; 0)$, $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

3. Перевіримо виконання умови (1) з ***достатньої умови екстремуму:***

Вираз $(12x + 10)(-2x + 2) - 4y^2$ у точках $(1; -4)$, $(1; 4)$, $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ набуває від'ємних значень, а в точці $(0; 0)$ – додатне значення.

Отже, **точка $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$ є точкою екстремуму.**

4. Оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial\ x^2} = 12x + 10$ в точці $(0; 0)$ додатна, то точка $(0; 0)$ є **точкою мінімуму.**

Змістовий модуль 5.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 14. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ

Мета навчання: Ввести поняття «диференціальне рівняння», «розв’язок диференціального рівняння». Розглянути задачу практичного змісту математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння. Ввести поняття «диференціальне рівняння 1-го порядку». Розглянути теорему про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння (задачу Коші), поняття «загальний розв’язок диференціального рівняння», «частинний розв’язок диференціального рівняння», «розв'язати диференціальне рівняння». Ввести поняття «диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними», «однорідне диференціальне рівняння», «лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку», «рівняння органічного зростання (спадання)», розглянути способи їх розв’язування. На окремих прикладних задачах зупинитись на моделюванні природничих процесів диференціальними рівняннями.

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Поняття про диференціальне рівняння. Задача практичного змісту математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння.	[2] Р8 § 8.1; [8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.1, 1.3.
2	<u>Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь 1-го порядку.</u> Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння.	[2] Р8 § 8.1-8.4; [8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.1.
3	Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.	[2] Р8 § 8.5; [8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.2.
4	Однорідні диференціальні рівняння.	[2] Р8 § 8.6; [8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.4.
5	Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.	[2] Р8 § 8.7; [8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.5.
6	Рівняння органічного зростання (спадання).	[8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.1.
7	Моделювання процесів диференціальними рівняннями.	[8] Р1 § 1.14; [5] Р1 § 1.3.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	Приклад
Поняття про диференціальне рівняння. Задача практичного змісту математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння	
Нехай функція $y = y(x)$ є кількісною характеристикою деякого явища (процесу). Часто, розглядаючи таке явище, не можна безпосередньо виявити характер залежності $y = y(x)$, а можна виявити залежність між величинами x і y і похідними функції $y\ (x)$: $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. У результаті досліджуване явище (процес) описується співвідношенням, що зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ та її похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. ***Означення 1.*** Співвідношення виду $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, (1) що зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ і її похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ називається ***диференціальним рівнянням.*** Порядком диференціального рівняння (1) називається максимальний порядок похідної, що входить до цього рівняння. ***Розв'язком диференціального рівняння*** (1) називається будь-яка n разів диференційовна функція, яка при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.	**Задача.** Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, пропорційною часу руху. Знайдіть рівняння руху тіла, якщо від початку відліку часу воно проходить *20 м* за *10 с*, а *35 м* за *20 с*. Який шлях пройде тіло за *1 хв 40 с*? ***Розв'язання.*** Положення тіла, яке рухається вздовж прямої, визначається координатою $x(t)$ – відстанню його від фіксованої точки O прямої в момент часу t. Оскільки тіло рухається зі швидкістю, пропорційною часу руху, то рівняння руху має вигляд $x'(t) = kt$, де k – стале дійсне число. Множина функцій $x(t) = \frac{kt^2}{2} + C$, де C – довільна стала, є загальним розв'язком даного диференціального рівняння. Але для визначення шляху, який пройде тіло за *1 хв 40 с*, необхідно знати його окремий розв'язок – розв'язок диференціального рівняння при певних значеннях довільної сталої. Значення цієї сталої знаходиться з допомогою початкових умов $x(10) = 20,\ x(20) = 35$ (умов, яким має задовольняти окремий розв'язок даного диференціального рівняння).

Виокремлюють **найпростіші диференціальні рівняння** виду $y'(x) = f(x)$, де $f(x)$ – відома, а $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x. Розв’язки цього рівняння називають **первісними функціями** для функції $f(x)$.

Склавши і розв’язавши систему рівнянь $\begin{cases} 20 = 50k + C, \\ 35 = 200K + C\text{’} \end{cases}$ визначимо, що $k = 0{,}1$, $C = 15$. Отже, рівняння руху тіла має вигляд $x(t) = \frac{1}{20}t^2 + 15$, звідки $x(100) = 515$ *м* – шлях, який пройде тіло за *1хв 40 с*.

Мати безліч розв’язків – *характерна властивість* диференціальних рівнянь. Тому, розв’язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка властива саме цьому процесу, треба мати додаткову інформацію, наприклад знати початковий стан процесу. Без цієї додаткової умови задача невизначена.

Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння.

Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь є знаходження розв'язків диференціальних рівнянь. У найпростіших випадках ця задача зводиться до знаходження інтегралів, тому процес відшукання розв'язків диференціального рівняння називається ***інтегруванням*** цього ***рівняння.***

Означення 2. Диференціальне рівняння 1-го порядку в загальному випадку має вигляд $F(x, y, y') = 0$. Якщо його можна розв'язати відносно y', то воно набирає вигляду

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Співвідношення типу (2) називається ***диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язним відносно похідної*** $\boldsymbol{y'}$.

Диференціальне рівняння ***рівносильне*** якомусь іншому, якщо множини розв'язків цих рівнянь однакові.

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то диференціальному рівнянню (2) рівносильне ***рівняння в диференціальній формі***

$$dy = f(x,\ y)\ dx, \qquad (3)$$

в якому шуканою функцією вважається y.

Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння (2). **Теорема** (*теорема Коші*). Якщо функція $f(x,y)$ та її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені і неперервні в деякій області $D \subset \mathbf{R}_2$ і $(a;b)$ – довільна фіксована точка області D, то існує єдина функція $y(x)$, визначена і диференційовна в деякому околі точки a, яка є розв'язком диференціального рівняння (2), що задовольняє умову $y(a) = b.$ (4)	*Геометрично теорема Коші* означає, що для кожної точки $(a;b)$ області D існує і причому єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (2), графік якого (мається на увазі графік функції $y(x)$) проходить через точку $(a;b)$. З цієї теореми випливає, що диференціальне рівняння (2) має нескінченну кількість розв'язків (наприклад, розв'язки, графіки яких проходять через точку $(a;b)$, точку $(a;b_1)$ і т. д., якщо тільки ці точки є точками області D). Кожна функція множини $\{y = x^2 + c \mid c \in R\}$ є розв'язком рівняння $y' = 2x$.

Задача відшукання розв'язку диференціального рівняння (2), що задовольняє умову (4), називається ***задачею Коші***, а умова (4) – ***початковою***.

Означення 3. Функція $y(x,c)$, де c – довільна стала, називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння (2), якщо:

1) при будь-якому конкретному значенні сталої c вона є розв'язком цього диференціального рівняння;

2) для будь-якої початкової умови (4) такої, що $(a;b)$ – точка області D, згаданої в теоремі Коші, сталу c можна підібрати так, що функція $y(x,c)$ задовольнятиме цю початкову умову.

Означення 4. Будь-яка функція, яка утворюється із загального розв'язку диференціального рівняння (2) при конкретному значенні сталої c, називається ***частинним розв'язком*** цього рівняння.

Іноді у процесі відшукання загального розв'язку диференціального рівняння (2) приходять до співвідношення

$$\Phi\,(x,y,c) = 0, \qquad (5)$$

яке не можна розв'язати відносно y. У цьому разі рівність (5) називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (2). Якщо у співвідношенні (5) сталій c надати конкретного значення, то дістанемо ***частинний інтеграл*** диференціального рівняння (2).

Проінтегрувати або, як часто кажуть, ***розв'язати*** диференціальне рівняння (2), означає знати його загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкова умова не задана), або знайти той частинний розв'язок, або частинний інтеграл рівняння, який задовольняє задану початкову умову (якщо така є).

<table>
<tr><th colspan="2">Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними</th></tr>
<tr><td>

Означення 5. Диференціальне рівняння типу

$$y' = g(x)\ h(y) \qquad (6)$$

називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними.***

Для диференціального рівняння (6) рівносильним є рівняння в диференціальній формі

$$dy = g(x)\ h(y)\ dx, \qquad (7)$$

в якому шуканою є функція y.

Припускаючи, що $h(y) \neq 0$ для всіх y з області визначення функції $h(y)$, з (7) знаходимо

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння (8) називається **рівнянням *з відо-кремленими змінними*** (у ньому множник при dy є функцією, залежною тільки від y, а множник при dx є функцією, залежною тільки від x), а перехід від диференціального рівняння (6) до диференціального рівняння (8) – ***відокремленням змінних*** у рівнянні (6).

</td><td>

<u>Приклад 1.</u> Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$y\ \frac{dy}{dx} + x = 1.$$

Розв'язання. $y\ \frac{dy}{dx} = 1 - x,$

$$ydy = (1 - x)dx,$$

$$\int ydy = \int (1 - x)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y^2 = 2x - x^2 + 2C,$$

$$y^2 = -(x^2 - 2x + 1) + 2C + 1,$$

$$y^2 = -(x - 1)^2 + C_1,$$

Отже, $y = \sqrt{C_1 - (x - 1)^2}$.

Відповідь. $y = \sqrt{C_1 - (x - 1)^2}$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Обидві частини диференціального рівняння (8) є диференціалами функцій від змінної x, або $y = y(x)$. Оскільки диференціали рівні, то

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c, \qquad (9)$$

де під інтегралами розуміють деякі відповідні первісні (вважаємо, що вони існують), а c – довільна стала.

Отже, будь-який розв'язок y диференціального рівняння (8) міститься у співвідношенні (9).

Якщо це співвідношення містить всі розв'язки диференціального рівняння (6), то воно є *загальним інтегралом* цього диференціального рівняння.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Однорідні диференціальні рівняння</th></tr>
<tr>
<td>

Означення 6. Функція $f(x,y)$, для якої виконується тотожність

$$f(tx,\ ty)=t^k f(x,y)$$

при всіх можливих $t\neq 0$, де k – деяке число, називається ***однорідною функцією*** ступеня однорідності k.

</td>
<td>

<u>**Приклад 2.**</u>

$f(x,y)=\sqrt[5]{x^3+y^3}$ – однорідна функція ступеня однорідності $k=\frac{3}{5}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Означення 7. Диференціальне рівняння виду $y'=f(x,y)$ (2) називається ***однорідним відносно змінних x і y***, якщо $f(x,y)$ – однорідна функція нульового ступеня однорідності (ступеня однорідності $k=0$), тобто має місце тотожність

$$f(tx,\ ty)=f(x,y) \qquad (10)$$

при всіх можливих $t\neq 0$.

Поклавши в тотожності (10) $t=\frac{1}{x}$, дістанемо $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (у цьому ланцюгу рівностей остання є позначенням), тобто <u>однорідну функцію нульового ступеня однорідності можна зобразити як функцію відношення $\frac{y}{x}$</u>.

Тому однорідне диференціальне рівняння (2) можемо переписати у вигляді

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (11)$$

Виконавши підстановку

$$y=ux, \qquad (12)$$

де u – невідома функція від x, що має похідну, рівняння (11) запишемо у вигляді

$$u'x+u=\varphi(u),$$

або $\frac{du}{dx}x=\varphi(u)-u$.

</td>
<td>

<u>**Приклад 3.**</u>

Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

Дане диференціальне рівняння є однорідним відносно змінних x і y.

Застосуємо підстановку $y=ux$.

Розв'язання.

$$y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}, \qquad u'x+u=\frac{1+u}{1-u}.$$

Здійснимо рівносильні перетворення останнього рівняння.

$$u'x=\frac{1+u}{1-u}-u,$$

$$u'x=\frac{1+u-u+u^2}{1-u},\ u'x=\frac{u^2+1}{1-u}.$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^2+1}{1-u}.$$

Відокремимо змінні.

$$\frac{1-u}{u^2+1}du=\frac{dx}{x}+\ln C,$$

$$\int\frac{du}{u^2+1}-\int\frac{udu}{u^2+1}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,$$

$$arctgu-\frac{1}{2}\ln|u^2+1|=\ln C\,x,$$

$$arctg\ u=\ln\ \ Cx\sqrt{u^2+1},$$

Зробимо зворотню заміну.

$$arctg\frac{y}{x}=\ln C\,x\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1},$$

Остаточно матимемо

$$arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{y^2+x^2}.$$

Відповідь.

$arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{y^2+x^2}$.

</td>
</tr>
</table>

Останнє рівняння є диференціальним рівнянням ***з відокремлюваними змінними.*** Інтегруючи його і підставляючи замість u відношення $\frac{y}{x}$, прийдемо до загального розв'язку, або загального інтеграла диференціального рівняння (11).	

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку
Означення 8. Диференціальне рівняння типу $$y' + p(x)y = q(x) \qquad (13)$$ називається ***лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку.***

Алгоритм розв'язання. **1)** Розв'язок диференціального рівняння (13) шукатимемо у вигляді добутку $y = uv,$ (14) де u і v – невідомі функції від x, кожна з яких має одну похідну. **2)** Одну з цих функцій можна вибрати довільно, друга має бути означена так, щоб функція (14) була розв'язком рівняння. **3)** Знайдемо похідну $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази для y' і y в диференціальне рівняння (13) $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$. (15) **4)** Винесемо u за дужки $u'v + u\ (v' + p(x)v) = q(x)$ (16) та прирівняємо до нуля вираз, що стоїть у дужках: $v' + p(x)v = 0$ (17) **5)** Для розв'язування рівняння (17) відокремимо змінні та проінтегруємо: $\frac{dv}{dx} = -v\ p(x),$	<u>**Приклад 4.**</u> Проінтегрувати диференціальне рівняння $y' + x^2y = x^2$. ***Розв'язання.*** Розв'язок данного диференціального рівняння шукатимемо у вигляді добутку $y = uv$, де u і v – невідомі функції від x, кожна з яких має одну похідну. Тоді $u'v + uv' + x^2uv = x^2$, Винесемо за дужки u $u'v + u(v' + x^2v) = x^2$ (*) Виберемо функцію v так, щоб $v' + x^2v = 0$ Або $\frac{dv}{dx} + x^2v = 0.$ Відокремимо змінні, матимемо $\frac{dv}{v} = -x^2dx.$ Проінтегруємо $\int \frac{dv}{v} = \int -x^2dx,$ $ln\|v\| = -\frac{x^3}{3} + ln\ C_1$, C_1 – додатна стала. $ln\|v\| - ln\,C_1 = -\frac{x^3}{3},$

$\frac{dv}{v} = -p(x)dx,$ $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$ $ln\|v\| = -\int p(x)dx,$ $v = e^{-\int p(x)dx}.$ (18) **6)** Підставивши цей вираз для v в рівняння (16) дістанемо $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x).$ $\frac{du}{dx} = q(x)\ e^{\int p(x)dx},$ $du = q(x)\ e^{\int p(x)dx}dx,$ $u = \int q(x)\ e^{\int p(x)dx}dx + C$ (19) **7)** Підставивши знайдені вирази для v та u (18), (19) у формулу (14) знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (13).	$ln\frac{\|v\|}{C_1} = -\ \frac{x^3}{3},$ $\frac{\|v\|}{C_1} = e^{-\frac{x^3}{3}},$ $\|v\| = C_1e^{-\frac{x^3}{3}}.$ Нехай $C_1 = 1$ (частковий випадок). Тоді $v = e^{-\frac{x^3}{3}}$ Функцію u знайдемо з рівняння $(*)$. $u'e^{-\frac{x^3}{3}} = x^2,$ $\frac{du}{dx} \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = x^2.$ Відокремимо змінні $du = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot x^2dx,$ $\int du = \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot x^2dx,$ $\int du = \int e^{\frac{x^3}{3}}d\frac{x^3}{3},$ $u = e^{\frac{x^3}{3}} + C$, C –довільна стала. $y = uv = \left(e^{\frac{x^3}{3}} + C\right) \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} =$ $= 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$, де C –довільна стала. ***Відповідь.*** $y = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$, C – довільна стала.

Рівняння органічного зростання (спадання)

Вважатимемо, що функція $f(x)$ диференційовна в своїй області визначення. Тоді рівність $\Delta f = kf\Delta x$, разом з означенням похідної функції дає

$$f'(x) - kf(x) = 0 \qquad (20)$$

Дістали ***лінійне диференціальне рівняння першого порядку.***

Загальним розв'язком диференціального рівняння (20) є функція

$f(x) = ce^{kx}$, де с – довільна стала.

Диференціальне рівняння (20), яке називають *рівнянням органічного зростання.*

Моделювання процесів диференціальними рівняннями

<u>Проблема 1.</u> Кількість світла, що поглинається при переході через тонкий шар води, пропорційна товщині шару та кількості світла, що попадає на його поверхню. Якщо при переході через шар товщиною 3 *м* поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?

Розв'язання.

I. <u>Створення математичної моделі.</u>

Нехай j – кількість світла, яка доходить до глибини x, а Δj – кількість світла, що поглинається при переході через шар води, товщина якого Δx.

За умовою $\Delta j = -k \cdot j \cdot \Delta x$ (знак «-» свідчить про те, що j зменшується зі збільшенням x.

Звідси, $\frac{\Delta j}{\Delta x} = -k \cdot j$. Переходячи в останній рівності до границі, при $\Delta x \to 0$, одержуємо диференціальне рівняння

$$j'(x) = -k \cdot j(x). \qquad (1)$$

II. <u>Дослідження математичної моделі.</u>

Математичною моделлю даної задачі є рівняння виду $f'(x) = k \cdot f(x)$, де k – стала (диференціальне рівняння **показникового зростання (спадання)**).

$f(x) = Ce^{kx}$, де C довільна стала – загальний розв'язок цього рівняння.

<u>Обгрунтуємо це для рівняння (1)</u>:

Оскільки $j(x) > 0$, то поділивши обидві частини рівняння (1) на $j(x)$ дістанемо

$$\left(\ln\ j(x)\right)' = -k.$$

Звідси $\ln j(x) = -kx + C_1$, де C_1 – довільна стала. Нехай $C_1 = \ln\ C$ $(C > 0)$.

З останнього рівняння маємо $\ln j(x) = -kx + \ln C$.

$\ln j(x) - \ln C = -kx$. За властивістю логарифмів $\ln \frac{j(x)}{C} = -kx$.

За означенням логарифма $\frac{j(x)}{C} = e^{-kx}$. Звідси одержуємо ***загальний розв'язок рівняння*** $j(x) = Ce^{-kx}$, де C = const.

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес проходження світла через шар води, використаємо <u>початкову умову</u> $j_0 = j(0)$ – кількість світла, яке попадає на поверхню води.

Маємо $j(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} = C = j_0$.

Отже, $j(x) = j_0 \cdot e^{-kx}$.

Використовуючи <u>другу початкову умову</u> $j(3) = \frac{1}{2}j_0$, визначимо e^{-k}.

Для цього складемо і розв’яжемо рівняння $\frac{1}{2}j_0 = j_0(e^{-k})^3$.

Останньому рівнянню рівносильне рівняння $\frac{1}{2} = (e^{-k})^3$. Звідки маємо $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Отже, $j(x) = j_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ – ***частинний розв’язок*** диференціального рівняння.

III. <u>Інтерпретація розв’язків.</u>

$j(x) = j_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ – кількість світла, яка доходить до глибини x шару води.

Знайдемо відношення $\frac{j(30)}{j_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$.

Відповідь. $\frac{1}{1024}$ частина дійде до глибини 30 м.

Тема 15. ДЕЯКІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета навчання: Ввести поняття «диференціальне рівняння 2-го порядку». Розглянути теорему про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння 2-го порядку, поняття «загальний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку», «частинний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку», «розв'язати диференціальне рівняння 2-го порядку». Ввести поняття «лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні)». Розглянути теорему про структуру загального розв’язку однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку та теорему про структуру загального розв’язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку. Розглянути суть методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа) та застосування методу на прикладі розв’язування лінійного диференціального рівняння 2-го порядку.

Означити поняття лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Розглянути знаходження загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення диференціального рівняння 2-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння.	[2] Р10 § 10.1; [8] Р1 § 1.14; [5] Р2 § 2.2.
2	Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні).	[2] Р10 § 10.2, 10.4; [8] Р1 § 1.14; [5] Р2 § 2.2, 2.3.
3	Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.	[2] Р10 § 10.3; [8] Р1 § 1.14; [5] Р2 § 2.5, 2.6.
4	Рівняння гармонічних коливань.	[2] Р10 § 10.5; [8] Р1 § 1.14.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Означення диференціального рівняння 2-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння	
Означення 1. Диференціальне рівняння другого порядку в загальному випадку має вигляд $F(x, y, y', y'') = 0$. Якщо його можна розв'язати відносно y'', то воно набирає вигляду $y'' = f(x, y, y')$. (1) Співвідношення (1) називається ***диференціальним рівнянням другого порядку***, *розв'язаним відносно другої похідної*.	
Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння виду (1). ***Теорема*** (*теорема Коші*). Якщо функція $f(x, y, y')$ і її частинні похідні $f'_y(x, y, y')$ і $f'_{y'}(x, y, y')$ визначені і неперервні в деякій області $D \subset \mathbf{R}_3$ і $(a; b; c)$ – довільна фіксована точка області D, то існує єдина функція $y(x)$, визначена і двічі диференційовна в деякому околі точки a, яка є розв'язком рівняння (1), що задовольняє умови: $y(a) = b,\ \ y'(a) = c$ (2)	
Геометрично теорема 2 означає, що для кожної точки $(a; b; c)$ області D існує і притому єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (1), графік якого проходить через точку $(a; b)$, за умови, що кутовий коефіцієнт дотичної до цього графіка в цій точці дорівнює c. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (1), що задовольняє умови (2), називається *задачею Коші*, а умови (2) – ***початковими***.	

Означення 2. Функція $y\ (x, c_1, c_2)$, де c_1 і c_2 – довільні сталі, називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння (1), якщо: 1) при будь-яких конкретних значеннях сталих c_1 і c_2 вона є розв'язком цього диференціального рівняння; 2) для будь-яких початкових умов (2) таких, що $(a; b; c)$ – точка області *D*, яка фігурує в теоремі 2, сталі c_1 і c_2 можна підібрати так, щоб функція $y(x, c_1, c_2)$ задовольняла ці початкові умови.
Означення 3. Будь-яка функція, яка утворюється з загального розв'язку диференціального рівняння (1) при конкретних значеннях сталих c_1 і c_2, називається ***частинним розв'язком*** цього рівняння.
Іноді в процесі відшукання загального розв'язку диференціального рівняння (2) приходять до співвідношення виду $$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2) = 0, \qquad (3)$$ яке не можна розв'язати відносно y. У цьому разі рівність (3) називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (1). Якщо у співвідношенні (3) сталим c_1 і c_2 надати конкретних значень, то дістанемо ***частинний інтеграл*** диференціального рівняння (1).
Проінтегрувати **(*розв'язати*)** диференціальне рівняння (1) – це означає знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкові умови не задані), або знайти той частинний розв'язок чи частинний інтеграл рівняння, який задовольняє задані початкові умови (якщо такі є).
Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні)
Означення 4. Диференціальне рівняння типу $$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (4)$$ називається ***лінійним диференціальним рівнянням другого порядку***. Функції $p(x)$ і $q(x)$ називаються ***коефіцієнтами*** цього рівняння, а функція $r(x)$ – його ***правою частиною***. Якщо права частина $r(x)$ диференціального рівняння (4) не є сталою, що дорівнює нулю, то це рівняння називається ***неоднорідним лінійним* диференціальним рівнянням другого порядку.** Якщо ж права частина $r(x)$ диференціального рівняння (4) є сталою, що дорівнює нулю, то це рівняння має вигляд $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (5)$$ і називається ***однорідним лінійним* диференціальним рівнянням другого порядку.** Диференціальне рівняння (5) з тими самими коефіцієнтами, що й неоднорідне диференціальне рівняння (4), називають ***однорідним рівнянням***, яке відповідає рівнянню (4).

Теорема 3 (про структуру загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку).

Нехай дано однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку (5), обидва коефіцієнти якого функції неперервні в інтервалі $(a; b)$, скінченному чи нескінченному.

Якщо дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, визначені в інтервалі $(a; b)$, є розв'язками диференціального рівняння (5) такими, що

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0 \text{ для всіх } x \in (a; b), \quad (6)$$

то ***загальним розв'язком,*** диференціального рівняння (5) є функція

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (7)$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

Теорема 4 (про структуру розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку).

Нехай дано неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку (4), обидва коефіцієнти і права частина якого – функції неперервні в інтервалі $(a; b)$, скінченному чи нескінченному. Якщо функція $y^*(x)$, визначена в інтервалі $(a; b)$, є яким-небудь розв'язком диференціального рівняння (4) і функція $y(x)$, що визначається рівністю (7), є загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння (5), то загальним розв'язком диференціального рівняння (4) є функція

$$y = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (8)$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

Нехай маємо *неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку* (4), обидва коефіцієнти і права частина якого є функціями, неперервними в інтервалі $(a; b)$, скінченному чи нескінченному, і нехай функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, визначені в інтервалі $(a; b)$, є розв'язками відповідного однорідного диференціального рівняння (5) такими, що виконується співвідношення (6). Тоді можна знайти розв'язок диференціального рівняння (4), скориставшись так званим ***методом варіації довільних сталих*** (***методом Лагранжа***).

Суть методу варіації довільних сталих (***методу Лагранжа***)

Згідно з теоремою 3 загальним розв'язком диференціального рівняння (5) є функція (7). Розв'язок $y*$ неоднорідного диференціального рівняння (4) шукатимемо у вигляді (7), вважаючи при цьому c_1 і c_2 не сталими, а невідомими функціями від x, визначеними в інтервалі $(a; b)$, тобто

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \ x \in (a; b). \quad (9)$$

Для цього потрібно скласти та розв'язати наступну систему рівнянь, використовуючи теорему Крамера.

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = r(x), \end{cases} \qquad (10)$$

де $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$ невідомі функції.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = sin\, x$.

Розв'язання.

1) Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + y = 0 \qquad (*)$$

Маємо $y_1 = cos\, x$, $y_2 = sin\, x$ розв'язки цього рівняння.

Оскільки

$y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) = cos\, x \cdot cos\, x - (-sin\, x) \cdot sin\, x = 1$, то за **теоремою 3** *загальним розв'язком диференціального рівняння* $(*)$ є функція

$$y = c_1 \cdot cos\, x + c_2 \cdot sin\, x,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

2) Складемо для данного рівняння систему (10).

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot cos\, x + c_2'(x) \cdot sin\, x = 0, \\ c_1'(x) \cdot (-sin\, x) + c_2'(x) \cdot cos\, x = sin\, x\,. \end{cases}$$

Нехай $c_1'(x) = a,\ c_2'(x) = b$.

Після заміни отримаємо систему 2-х рівнянь з 2-ма невідомими.

$$\begin{cases} cos\, x \cdot a + sin\, x \cdot b = 0, \\ (-sin\, x) \cdot a + cos\, x \cdot b = sin\, x\,. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, використовуючи теорему Крамера.

$\Delta = \begin{vmatrix} cos\, x & sin\, x \\ -sin\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1,$

$\Delta_a = \begin{vmatrix} 0 & sin\, x \\ sin\, x & cos\, x \end{vmatrix} = -sin^2 x = \frac{1}{2} cos\, 2\, x - \frac{1}{2},$

$\Delta_b = \begin{vmatrix} cos\, x & 0 \\ -sin\, x & sin\, x \end{vmatrix} = sin\, x\, cos\, x = \frac{1}{2} sin\, 2\, x.$

Отже, $a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{1}{2} cos\, 2\, x - \frac{1}{2}$. $b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{1}{2} sin\, 2\, x$.

Зробивши зворотну заміну матимемо $c_1'(x) = \frac{1}{2} cos\, 2\, x - \frac{1}{2}$; $c_2'(x) = \frac{1}{2} sin\, 2\, x$.

3) Проінтегрувавши, знайдемо $c_1(x)$ і $c_2(x)$.

$c_1(x) = \int \left(\frac{1}{2} cos 2\, x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2xd\, x - \frac{1}{2} \int dx =$

$= \frac{1}{4} \int cos\, 2\, xd(2x) - \frac{1}{2} x = \frac{1}{4} sin 2x - \frac{1}{2} x.$

$c_2(x) = \frac{1}{2} \int sin\, 2\, xdx = \frac{1}{4} \int sin\, 2\, xd(2x) = -\frac{1}{4} cos\, 2\, x.$

4) Скориставшись рівністю (9) отримаємо:

$$y^* = \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\right)\cdot\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\cdot\sin x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\cos x - \frac{1}{2}x\cdot\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\cdot\sin x.$$

За теоремою 4 (формула (8)) робимо висновок, що загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = \frac{1}{4}\sin 2x\cdot\cos x - \frac{1}{2}x\cdot\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами

Означення 1. Диференціальне рівняння типу

$$y'' + py' + qy = r(x), \qquad (1)$$

де p і q – числа, називається ***лінійним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.***

Будь-яке диференціальне рівняння виду (1) є і диференціальним рівнянням виду $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

Тому всі факти, що викладені в попередніх пунктах теми 14, стосуються і лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Знаходження загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами

Розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами, тобто диференціального рівняння типу

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

де p і q – числа, шукатимемо у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ – стала.

Оскільки $y' = \lambda\, e^{\lambda x}$, а $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, то, підставивши вирази для y, y' і y'' в диференціальне рівняння (2), дістанемо $e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$. Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (3)$$

Отже, функція $y = e^{\lambda x}$ буде розв'язком диференціального рівняння (2), якщо λ – розв'язок квадратного рівняння (3).

Рівняння (3) називають ***характеристичним*** для диференціального рівняння (2).

Можливі три випадки:

1) розв'язки характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 дійсні і різні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) λ_1 і λ_2 дійсні і рівні: $\lambda_1 = \lambda_2$;

3) λ_1 і λ_2 – комплексно-спряжені: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Означення 2. Числа виду $a+bi$, де a, $b \in \mathbf{R}$, а $i = \sqrt{-1}$, називають ***комплексними***. Комплексні числа $a+bi$ та $a-bi$ називають ***спряженими***.

Коли рівняння (3) не має дійсних розв'язків (при $\frac{p^2}{4} - q < 0$), його розв'язками вважають комплексні числа $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\sqrt{-1} = \alpha \pm \beta i$ (в останній рівності цього їх ланцюга α і β є позначеннями відповідно дійсних чисел $-\frac{p}{2}$ і $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$).

Оскільки останні розв'язки є спряженими комплексними числами, то їх називають ***комплексно-спряженими***.

Розглянемо ***кожний з цих випадків***.

1. Нехай λ_1, λ_2 – дійсні і різні розв'язки характеристичного рівняння. Тоді функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ є розв'язками диференціального рівняння (2).

Оскільки для цих розв'язків y_1 і y_2 вираз типу функції $y_1(x)y_2'(x) - -y_1'(x)y_2(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$, а останній правий вираз при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ відмінний від нуля для всіх $x \in \mathbf{R}$, то за теоремою 3 загальним розв'язком диференціального рівняння (2) в розглядуваному випадку є функція

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{4}$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

Приклад 1.

Розв'язати однорідне рівняння: $y'' - y' - 2y = 0$.

Розв'язання. У рівнянні $p = -1$, $q = -2$.

Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Оскільки характеристичне рівняння має два різні дійсні розв'язки $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = -1$, то функції $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$ є розв'язками однорідного рівняння.

Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

Відповідь. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

<table>
<tr>
<td>

2. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2$. Тоді функція $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ є розв'язком диференціального рівняння (2).

Покажемо, що в даному випадку функція $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ також є розв'язком диференціального рівняння (2).

Оскільки $y_2' = e^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x)$, а $y_2'' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}(2 + \lambda_1 x)$, то, підставивши вирізи для y_2, y_2' і y_2'' в диференціальне рівняння (2), дістанемо наступне рівняння

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 x}(2 + \lambda_1 x) + \\ +pe^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x) + qxe^{\lambda_1 x} = 0$$

Йому рівносильне наступне рівняння

$$xe^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) + \\ +e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + p) = 0.$$

Остання рівність правильна, бо $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ і $2\lambda_1 + p = 0$.

Оскільки для цих розв'язків y_1 і y_2 вираз

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \\ = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x) - \\ -\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot xe^{\lambda_1 x} = \\ = e^{2\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x - \lambda_1 x) = e^{2\lambda_1 x},$$

а останній вираз відмінний від нуля для всіх $x \in \mathbf{R}$, то за теоремою 3 загальним розв'язком диференціального рівняння (2) в розглядуваному випадку є функція

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, \qquad (5)$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

</td>
<td>

Приклад 2. Розв’язати однорідне рівняння: $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв’язання. У рівнянні $p = 6,\ q = 9$.

Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Оскільки $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, то функції $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$ є розв’язками однорідного рівняння.

Загальним розв’язком однорідного рівняння є функція $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$.

Відповідь. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Нехай $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$. Тоді функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ є розв'язками диференціального рівняння (2).

</td>
<td>

Приклад 3. Розв’язати однорідне рівняння: $y'' + 6y' + 13y = 0$.

</td>
</tr>
</table>

Оскільки для цих розв'язків y_1 і y_2 вираз $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \beta e^{2\alpha x}$, а останній вираз відмінний від нуля для всіх $x \in \mathbf{R}$, то за теоремою 3 загальним розв'язком диференціального рівняння (2) в розглядуваному випадку є функція $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$, (6) де c_1 і c_2 – довільні сталі.	***Розв'язання.*** У рівнянні $p = 6,\ q = 13$. Оскільки характеристичне рівняння має два спряжені комплексні корені $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm$ $\pm\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\sqrt{-1} = -3 \pm 2i$, то функції $y_1 = e^{-3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-3x}\sin 2x$ є розв'язками однорідного рівняння. Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція $y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$. ***Відповідь.*** $y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.
Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, тобто диференціального рівняння виду (1), де p і q – дійсні числа, а права частина $r(x)$ не є сталою, що дорівнює нулю, можна знаходити способом, розглянутим у попередньому пункті, який базується на теоремі 4 і *методі варіації довільних сталих*.	

Змістовий модуль 6.
РЯДИ

Тема 16. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Мета навчання: Ввести поняття «числовий ряд», «члени ряду», «загальний член ряду», «часткові суми», «збіжний ряд», «сума ряду». Навести приклади збіжних та розбіжних рядів. Розглянути найпростіші властивості збіжних рядів, необхідну умову збіжності ряду та достатню умову розбіжності ряду. Ввести поняття «додатний ряд», розглянути першу та другу порівняльні ознаки збіжності додатних рядів, ознаку Коші та ознаку Д'Аламбера.

Розглянути питання про збіжність рядів, члени яких можуть мати довільні знаки. Ввести поняття «абсолютно збіжний ряд», «умовно збіжний ряд», «знакозмінний ряд». Розглянути теорему Лейбніца та її застосування, сполучну властивість збіжних рядів, переставну властивість абсолютно збіжних рядів, теорему Рімана.

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття числового ряду. Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів.	[1] Р10 § 10.1-10.2; [8] Р1 § 1.14.
2	Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду.	[1] Р10 § 10.3; [8] Р1 § 1.14.
3	Збіжність додатних рядів. Перша та друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів.	[1] Р10 § 10.3; [8] Р1 § 1.14.
4	Ознака Коші збіжності додатних рядів та її застосування.	[1] Р10 § 10.3; [8] Р1 § 1.15.
5	Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів та її застосування.	[1] Р10 § 10.3; [8] Р1 § 1.15.
6	Збіжність довільних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду.	[1] Р10 § 10.5-10.6; [8] Р1 § 1.15.
7	Абсолютно і умовно збіжні ряди.	[1] Р10 § 10.6; [8] Р1 § 1.15.
8	Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Приклади застосування.	[1] Р10 § 10.5; [8] Р1 § 1.15.
9	Сполучна властивість збіжних рядів.	[1] Р10 § 10.7; [8] Р1 § 1.15.
10	Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.	[1] Р10 § 10.7; [8] Р1 § 1.15.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Поняття числового ряду. Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів	
Означення 1. Нехай дано числову послідовність **(a_n).** Вираз вигляду $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1) або, що те саме, вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***числовим рядом*** (або просто ***рядом***). Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються ***членами ряду,*** a_1 – перший член, a_2 – другий член, …,	**Приклад 1.** Одним з найпростіших прикладів рядів є **геометрична прогресія.** Ряд вигляду $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ $(a \neq 0)$ (4) називається ***геометричною прогресією***, число q при цьому називається ***знаменником прогресії.***

a_n – ***n*-ий** член або ***загальний член ряду***. Для того, щоб задати ряд (1), досить задати його загальний член.

Кожному ряду вигляду (1) будемо ставити у відповідність суми

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \qquad (2)$$

які називаються ***частковими сумами*** цього ряду.

Часткові суми утворюють деяку числову послідовність (S_n).

<u>**Означення 2.**</u> Ряд (1) називається ***збіжним,*** якщо збігається послідовність його часткових сум (S_n), тобто якщо існує

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (3)$$

де S – число. Число S при цьому називають ***сумою ряду*** (1) і записують $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ або $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При цьому вважають також, що ***ряд*** (1) ***збігається до числа S.***

Якщо ж послідовність часткових сум (2) ряду (1) розбіжна, то ряд (1) називається ***розбіжним.*** У цьому випадку **ряд не має суми.**

<u>**Зауваження.**</u> Якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, то іноді кажуть, що розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ має нескінченну суму і записують $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty(+\infty, -\infty)$.

<u>**Твердження.**</u> Геометрична прогресія (4) збігається тоді й тільки тоді, коли її знаменник за модулем менший від одиниці:

$$|q| < 1. \qquad (5)$$

Якщо $|q| < 1$, то

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \qquad (6)$$

При $|q| \geq 1$ ряд **розбігається.**

Приклад 2. Важливим в теорії рядів є так званий **гармонічний ряд.**

Ряд вигляду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \qquad (7)$$

називається **гармонічним рядом.**

<u>**Твердження.**</u> Гармонічний ряд розбіжний.

Приклад 3. ***Узагальнений гармонійний ряд (ряд Діріхле).***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

При $\alpha > 1$ ряд **збігається.**

При $\alpha \leq 1$ ряд розбігається.

При $\alpha = 1$ маємо ряд (7).

Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду

Якщо в ряді

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

відкинути перші n членів, то отримаємо ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots, \qquad (8)$$

який називають ***n–м залишком ряду*** (1).

Теорема 1. Ряди (1) і (8) одночасно збіжні або розбіжні, причому якщо ряд (1) збігається до S, то ряд (8) збігається до

$$R_n = S - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \qquad (9)$$

Твердження 1. Із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (8).

Твердження 2. Із розбіжності ряду (8) випливає розбіжність ряду (1).

Суму ряду (8), якщо він збігається, позначимо символом $\boldsymbol{R_n}$, вказуючи індексом після якого члену ряду (1) береться його залишок (8). $R_n = S - S_n$.

Зауваження. Іншими словами теорема 1 свідчить про те, що відкидання скінченного числа початкових членів ряду або приєднання на початку його декількох нових членів не відображується на поведінці ряду (в розумінні його збіжності або розбіжності).

Теорема 2. Нехай c – число. Якщо ряд (1) збіжний, то збіжним є і ряд

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots, \qquad (10)$$

що називається добутком ряду (1) на число c, причому, якщо S – сума ряду (1), то сумою ряду (10) є число cS.

Теорема 3. Якщо обидва ряди

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

і

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (11)$$

збіжні і мають відповідно суми A і B, то ряд

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots, \qquad (12)$$

що називається **сумою даних рядів**, також збіжний і його сумою є число $A + B$.

Терема 4 (необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд (1) збіжний, то для його n-го члена a_n має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (13)$$

Достатня ознака розбіжності ряду. Ряд (1) розбіжний, якщо для його n-го члена a_n не виконується рівність (13). **<u>Зауваження.</u>** Якщо ж для даного ряду (1) умова (13) виконується, то питання про збіжність цього ряду залишається ще не з'ясованим.	**<u>Приклад.</u>** Дослідити питання про збіжність ряду $\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\frac{4}{11}+\ldots+\frac{n}{3n-2}+\ldots$ ***Розв'язання.*** Знайдемо границю для n-го члена ряду $a_n=\frac{n}{3n-2}$. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$. Згідно з достатньою ознакою розбіжності ряду даний ряд розбіжний. **<u>Контрприклад</u>**. Гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, розбіжний, а для його n-го члена $a_n=\frac{1}{n}$ виконується умова (13).

Збіжність додатних рядів. Перша та друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів

Означення. Ряди, всі члени яких невід'ємні, називають ***додатними рядами.***

Нехай ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (14)$$

є додатним, тобто $a_n\geq 0$, n=1, 2, ….

Тоді, очевидно, для послідовності (S_n) часткових сум ряду (14) маємо

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n,\ n=1, 2, \ldots,$$

тобто послідовність (S_n) неспадна.

Теорема 5. Додатний ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

завжди має суму; ця **сума буде скінченною** (і, отже, ряд – **збіжним**), якщо часткові суми ряду є послідовністю, обмеженою зверху, і **нескінченною** (а ряд – **розбіжним**) в противному випадку.

<u>Збіжність або розбіжність додатного ряду</u> часто встановлюють шляхом порівняння його з іншим рядом, відносно якого заздалегідь відомо збіжний він чи розбіжний.

В основі цього порівнювання лежить така теорема.

Теорема 6. (перша порівняльна ознака збіжності додатних рядів).

Нехай дано два додатні ряди

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

і

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad \text{(B)}$$

Якщо, починаючи з деякого номера n (наприклад, для всіх $n > n_0$, $n_0 \in \mathbf{N}$) мають місце нерівності

$$a_n \leq b_n, \qquad (15)$$

то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A) або – що те саме – із розбіжності ряду (A) випливає розбіжність ряду (B).

Приклад 4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 1}$ на збіжність, використовуючи **першу порівняльну ознаку** збіжності додатних рядів.

Розв'язання. $\frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5^n}$ $(\forall n \in N)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ збігається (його члени утворюють нескінченну геометричну прогресію, знаменник якої $q = \frac{1}{5} < 1$).

Отже, за **1-ю порівняльною ознакою збіжності додатних рядів** і заданий ряд збігається.

Іноді в практичних випадках зручнішою є теорема, що випливає з попередньої.

Теорема 7. (**друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів**).

Нехай $a_n > 0$, $b_n > 0$, n=1, 2, … і нехай

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha. \qquad (16)$$

Якщо $0 < \alpha \leq +\infty$, то обидва ряди (A) і (B) одночасно збігаються або розбігаються.

Приклад 5. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 4}$ на збіжність, використовуючи **другу порівняльну ознаку** збіжності додатних рядів.

Розв'язання. $a_n = \frac{n}{3n^2+4}$, $n \in N$.

Порівняємо заданий ряд із рядом $b_n = \frac{1}{n} > 0$, $n \in N$ (розбіжним гармонійним).

За **другою порівняльною ознакою збіжності додатних рядів (у граничній формі)** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n^2+4} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+4} = \frac{1}{3} > 0$.

Отже, даний ряд розбіжний.

Ознака Коші збіжності додатних рядів та її застосування

Теорема 8. (ознака Коші збіжності додатних рядів). Нехай (А) – додатний ряд і нехай

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha, \qquad (17)$$

де α – скінченне чи нескінченне число.

Якщо α<1, то ряд (А) збіжний.

Якщо 1<α≤+∞, то ряд (А) розбіжний.

Якщо ж α=1, то питання про збіжність ряду (А) залишається відкритим (ряд (А) може бути збіжним, може бути й розбіжним).

Приклад 6. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$ на збіжність, використовуючи ознаку Коші.

Розв'язання. Знаходимо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1$. За ознакою Коші ряд збіжний.

Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів та її застосування

Теорема 9. (ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів).

Нехай $a_n > 0$, n=1, 2, …, і нехай

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha, \qquad (18)$$

де α – скінченне чи нескінченне число.

Якщо α<1, то ряд (А) збіжний.

Якщо 1<α≤+∞, то ряд (А) розбіжний.

Якщо ж α=1, то питання про збіжність ряду (А) залишається відкритим.

Приклад 7. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ на збіжність, використовуючи ознаку Д'Аламбера.

Розв'язання. $a_n = \frac{n}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Знайдемо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

Збіжність довільних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду

Розглянемо питання про **збіжність рядів, члени яких можуть мати довільні знаки.**

Питання *про збіжність ряду* (1) тотожнє з питанням *про існування скінченної границі для послідовності частинних сум*

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \qquad (3)$$

ряду (1).

Критерій Коші збіжності послідовності дає загальну умову (умову Коші), необхідну і достатню для збіжності послідовності.

Теорема 1 (*критерій Коші збіжності послідовності*).

Для того, щоб послідовність (x_n) була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для довільного числа $\varepsilon > 0$ існувало таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n,\ m > n_0$, виконується нерівність

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \qquad (19)$$

Про послідовність (x_n), про яку йде мова в цій теоремі, кажуть, що вона задовольняє *умову Коші*.

Умову Коші формулюють і в такій формі: для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \qquad (20)$$

Перефразувавши цей критерій по відношенню до послідовності (3), приходять до наступної теореми.

Теорема 2 (критерій Коші збіжності числового ряду).

Для того, щоб числовий ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для довільного числа $\varepsilon > 0$ існувало таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконувалась нерівність

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon. \qquad (21)$$

Наслідком цієї теореми є **теорема 3**.

Задача. Довести розбіжність гармонічного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

за допомогою критерію Коші.

Доведення. Поклавши у виразі типу лівої частини нерівності (21), записаному для гармонічного ряду, $p = n$, дістанемо

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Для числа $\varepsilon \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ тут не існує натурального числа $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такого, щоб для всіх натуральних $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконувалась нерівність

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon.$$

Дійсно, ця нерівність внаслідок $(*)$ не виконується для всіх $p = n$ при будь-якому $n = 1, 2, \ldots$.

Цим розбіжність гармонічного ряду доведено.

Теорема 3 (наслідок теореми 2). Якщо ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (22)$$

збіжний, то збіжним є і ряд (1).

Оскільки безпосереднє застосування розглянутого вище критерія Коші частіше всього викликає труднощі, то існує інтерес вивчення класів випадків, коли питання розв'язується з допомогою більш простих засобів.

Абсолютно і умовно збіжні ряди

Для додатних рядів збіжність встановлюється порівняно просто, оскільки є достатня кількість зручних у використанні ознак, представлених у п. 3-5 даної теми.

Тому природно розпочати з тих розгляду **випадків**, *коли питання про збіжність даного ряду зводиться до питання про збіжність додатного ряду:*

1. Якщо члени ряду не всі додатні, але, починаючи з деякого номера, стають додатними, то, відкинувши достатню кількість початкових членів ряду *(див. зауваження до теореми 1 з п.2)*, зведемо справу до дослідження додатного ряду.

2. Якщо члени ряду від'ємні або, принаймні, з деякого номера стають від'ємними, то можна повернутися до вже розглянутих випадків шляхом заміни знаків всіх членів (*див. теорему 2 з п.2*).

Таким чином, істотно **новим випадком** буде той, коли серед членів ряду є нескінченна кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Враховуючи теорему 3 (п.6), природним є таке означення.

Означення 1. Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

називається ***абсолютно збіжним***, якщо збіжним є ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (23),$$

складений з модулів членів даного ряду.

За **теоремою 3**, абсолютно збіжний ряд збігається. Однак *не всі збіжні ряди є абсолютно збіжними.*

Означення 2. Ряд (1) називається ***умовно збіжним***, якщо він збіжний, а ряд (23), складений з модулів даного ряду, є розбіжним.

Будь-яка ознака збіжності додатного ряду може служити достатньою ознакою для абсолютної збіжності ряду з довільними членами.

Наприклад, ряд (1) збігається абсолютно, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1. \qquad (24)$$

Справді, якщо виконана умова (24), то, за ознакою Коші, збігається ряд (22), а це означає, що ряд (1) абсолютно збіжний.

Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Приклади застосування.

Означення 3. Ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + \\ +(-1)^{n+1}a_n + \ldots, \qquad (25)$$

в якому $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, називається **знакозмінним.**

Теорема 4 (теорема Лейбніца). Якщо послідовність модулів членів знакозміного ряду (25) незростаюча:

$$a_{n+1} \leq a_n,\ n = 1, 2, \ldots \ (26)$$

і має границею число нуль:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (27)$$

то ряд (25) збіжний.

<u>Наслідок.</u> Модуль n-го залишку знакозмінного ряду (25), що задовольняє всі умови теореми Лейбніца, не перевищує модуля (n+1)-го члена цього ряду, тобто

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1},$$
$$n = 1, 2, \ldots \qquad (26)$$

Приклад. Встановити, як збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}$, **абсолютно** чи **умовно**.

Розв'язання.

Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1. $\dfrac{1}{2\ (n+1)+1} = \dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+1}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0.$

Оскільки всі умови теореми Лейбніца виконуються, то даний ряд **збіжний.**

Складемо тепер ряд з абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$.

$$a_n = \frac{1}{2n+1},\ n \in N. \quad (*)$$

Порівняємо заданий ряд з розбіжним гармонійним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (**)$$

За 2-ю порівняльною ознакою збіжності додатних рядів (у гармонічній формі)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0.$$

	Оскільки ряд (∗∗) розбігається, то і ряд (∗) розбігається. **Відповідь.** даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ **умовно збіжний.**

Сполучна властивість збіжних рядів

Теорема 5. (сполучна властивість збіжних рядів).

Якщо ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

збігається до числа S, то збігається до цього числа S і ряд

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + \\ +(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots, \qquad (27)$$

утворений з даного ряду (1) розстановкою дужок, тобто об'єднанням членів даного ряду довільним способом у групи, без зміни при цьому їх розміщення.

Помічаємо повну аналогію зі звичайними сумами; але ця аналогія порушиться, якщо спробуємо застосувати сполучну властивість, так мовити, в зворотному порядку. Якщо дано збіжний ряд (27), кожний член якого окремо представляє собою суму скінченного числа доданків, то, опустивши дужки, отримаємо новий ряд (27), який може виявитись і розбіжним.	**Контрприклад.** Ряд (1–1)+(1–1)+(1–1)+… очевидно, збіжний, а отриманий з нього зняттям дужок ряд 1–1+1–1+1–1+… розбіжний.

Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана

Теорема 6 (переставна властивість абсолютно збіжних рядів).

Якщо ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

абсолютно збіжний і має суму S, то ряд

$$a_1^* + a_2^* + \ldots + a_n^* + \ldots, \qquad (28)$$

утворений з ряду (1) перестановкою його членів, також абсолютно збіжний і має ту ж суму S.

Теорема 7 (теорема Рімана).

Якщо ряд (1) умовно збіжний, то для будь-якого наперед заданого числа S можемо так переставити члени цього ряду, що утворений після такої перестановки ряд матиме своєю сумою це цисло S.

Тема 17. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Мета навчання: Ввести поняття функціональної послідовності, границі функціональної послідовності, функціонального ряду. Розглянути питання збіжності та рівномірної збіжності функціональної послідовності та функціонального ряду. Ознайомитись з достатньою ознакою рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознакою Веєрштрасса*) та прикладами її застосування. Вивчити властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття функціональної послідовності.	[1] Р11 §11.1; [8] Р1 § 1.15.
2	Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності.	[1] Р11 §11.1; [8] Р1 § 1.15.
3	Поняття функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду.	[1] Р11 §11.1; [8] Р1 § 1.15.
4	Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Веєрштрасса*). Приклади застосування.	[1] Р11 §11.1; [8] Р1 § 1.15.
5	Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.	[1] Р11 §11.2; [8] Р1 § 1.15.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Поняття функціональної послідовності	
Якщо кожному натуральному числу n за деяким законом поставлена у відповідність деяка функція $f_n(x)$, визначена на деякій множині E, то вважають, що на множині E задана ***функціональна послідовність***, або ***послідовність функцій*** $(f_n(x))$.	
Якщо число $x \in E$ **фіксувати**, поклавши $x = x_0 \in E$, то функціональна послідовність $(f_n(x))$ стане *числовою послідовністю* $(f_n(x_0))$.	
Вважають, що функціональна послідовність $(f_n(x))$ ***збігається*** (***розбігається***) ***в точці*** $x = x_0 \in E$, якщо збігається (розбігається) *числова послідовність* $(f_n(x_0))$. Вважають, що функціональна послідовність ***збігається*** (***розбігається***) ***на множині E***, якщо вона збігається (розбігається) в кожній точці цієї множини.	

<table>
<tr>
<td>Для різних $x \in E$ границя функціональної послідовності $(f_n(x))$, взагалі кажучи, буде різною, тобто границя функціональної послідовності, збіжної на множині E, є деякою функцією $f(x)$, визначеною на цій множині:
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in E.$</td>
<td>Приклад 1. Функціональна послідовність $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots,$ збігається на проміжку (−1;1] до функції
$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{якщо } \quad x = 1, \end{cases}$
і розбігається в точках, відмінних від точок цього проміжку.</td>
</tr>
</table>

Зазначимо, що члени функціональної послідовності $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots,$ є неперервними функціями на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ і, зокрема, на проміжку (−1;1], а її гранична функція $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{якщо } \quad x = 1, \end{cases}$ розривна в точці $x = 1$.

Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності

Означення 1. Функціональна послідовність $(f_n(x))$ називається ***збіжною*** **на множині *E* до функції** $f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, залежне від ε і від $x \in E$, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ x \in E.$$

Кажуть, що функціональна послідовність $(f_n(x))$ ***збігається до функції f(x) рівномірно на множині E,*** якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, не залежне від $x \in E$, що для всіх натуральних $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ для будь-якого } x \in E. \qquad (2)$$

Означення 2. Функціональна послідовність $(f_n(x))$ називається ***рівномірно збіжною*** на множині E, якщо існує функція $f(x)$, до якої вона рівномірно збігається на множині E.

Геометрична інтерпретація

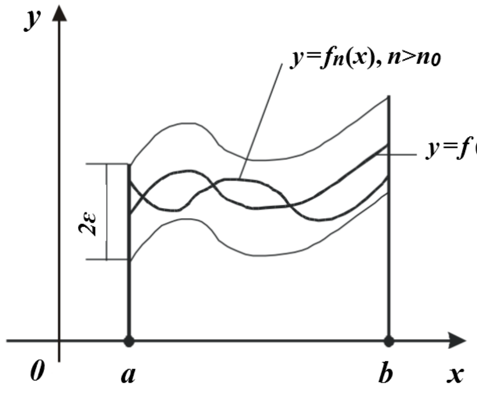


Рис. 1

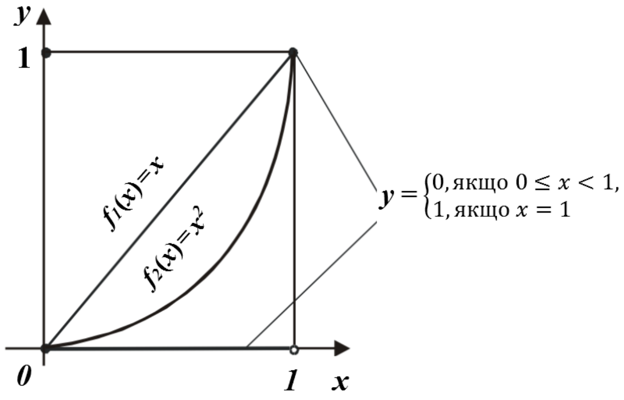


Рис.2

Якщо функціональна **послідовність $(f_n(x))$ збігається до функції $f(x)$ рівномірно на множині $E = [a; b]$,** то на геометричній мові це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, не залежне від x, що для всіх натуральних $n > n_0$ графіки функцій $f_n(x)$ цілком містяться в смузі ширини 2ε, яка оточує графік функції $f(x)$ (рис. 1).

Приклад 2. Функціональна послідовність

$f_n(x) = \sin x + \frac{\sin nx}{n}$, $n = 1, 2, \dots$,

збігається до функції $f(x) = \sin x$ рівномірно на **R**.

Доведення. Для будь-якого $x \in R$ маємо

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Тут для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, не залежне від $x \in R$ і таке, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для будь-якого $x \in R$.

Послідовність $f_n(x)$ збігається до функції $f(x)$ рівномірно на **R**.

Кажуть, що функціональна послідовність збігається до своєї граничної функції на деякій множині ***нерівномірно***, якщо ця збіжність не є рівномірною.

Приклад 3 [1, с.315]. Функціональна послідовність

$f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$,

збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } & 0 \leq x < 1, \\ 1, \text{ якщо } & x = 1 \end{cases}$$

на відрізку [0;1] **нерівномірно.**

Поняття функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду	
Нехай дано функціональну послідовність $(f_n(x))$, $x \in E$. Вираз вигляду $$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \qquad (3)$$ або, що те саме, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ називається ***функціональним рядом.***	
Означення 3. Функціональний ряд (3) називається ***збіжним до функції*** $\boldsymbol{F(x)}$ ***на множині*** E, якщо на цій множині збігається до $F(x)$ послідовність його ***часткових сум*** $$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ n = 1, 2, \ldots,$$ тобто $$F(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$	
Інакше кажучи, ***функціональний ряд*** (3) ***збігається до функції*** $\boldsymbol{F(x)}$ ***на множині*** $\boldsymbol{E}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, залежне від ε і від $x \in E$, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність $$\lvert S_n(x) - F(x)\rvert < \varepsilon. \qquad (4)$$	
Означення 4. Функціональний ряд (3) називається ***рівномірно збіжним до функції*** $\boldsymbol{F(x)}$ ***на множині*** $\boldsymbol{E}$, якщо на цій множині послідовність його часткових сум $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігається до функції $F(x)$, тобто якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, <u>не залежне</u> від x, що для всіх натуральних $n > n_0$ виконується нерівність $\lvert S_n(x) - F(x)\rvert < \varepsilon\ (\forall\ x \in E) \qquad (5)$	**Приклад 4.** Дослідити на збіжність функціональний ряд $x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots +$ $+(x^n - x^{n-1}) + \ldots \qquad (*)$ *Розв'язання.* Послідовність часткових сум цього ряду запишемо у вигляді $S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Вище (приклад 1) було встановлено, що ця послідовність збігається на проміжку $(-1;1]$ до функції $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$$ однак збіжність тут нерівномірна (цей висновок зроблено на основі прикладу 3). Отже, досліджуваний ряд збігається на проміжку $(-1;1]$ до функції $f(x)$, однак збігається він тут **нерівномірно.**

Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (ознака Веєрштрасса). Приклади застосування	
Теорема 1 (ознака Вейерштрасса). Функціональний ряд (3) збігається абсолютно і рівномірно на множині E, якщо існує додатний збіжний числовий ряд $$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots \qquad (5)$$ такий, що $$\lvert f_n(x)\rvert\le\alpha_n \qquad (6)$$ для всіх $n=1,2,\ldots$ і всіх $x\in E$.	
<u>Зауваження.</u> Кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***мажорує*** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ якщо для будь-якого n $$a_n\le b_n.$$	**Приклад.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ $(*)$ мажорує ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(**)$, або ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ є ***мажорантним*** по відношенню до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
Приклад 5. Знайти область збіжності функціонального ряду $$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$$ *Розв'язання.* Для всіх $n=1,2,\ldots$ і всіх $x\in\mathbf{R}$ $-1\le\sin nx\le 1$. $$\left\lvert\frac{\sin nx}{n^2}\right\rvert\le\frac{1}{n^2}.$$ Таким чином, додатний збіжний ряд (узагальнений гармонійний, $\alpha=2>1$) $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$ *мажорує* функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ на всій числовій прямій, а отже, за ознакою Вейерштрасса останній збігається рівномірно для всіх $x\in R$.	
Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів	
Теорема 2. Якщо функціональний ряд $$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (7)$$ рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$, а члени цього ряду $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, є неперервні функції на цьому відрізку, то сума $F(x)$ ряду (7) є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$.	

Теорема 3. Якщо функціональний ряд (7) із сумою $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ збігається рівномірно, а члени цього ряду $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, є неперервні функції на цьому відрізку, то

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx + \ldots \quad (8)$$

Теореми 3 дає змогу стверджувати, що рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$ функціональний ряд неперервних функцій можна інтегрувати почленно в тому розумінні, що для такого ряду правильна рівність (8). Цього, взагалі кажучи, не можна сказати відносно функціональних рядів, збіжних нерівномірно.

Теорема 4. Нехай функції $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, неперервні на відрізку $[a;b]$ разом із своїми похідними першого порядку. Тоді якщо на цьому відрізку збіжний не тільки функціональний ряд (7), а й рівномірно збіжний функціональний ряд

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots, \quad (9)$$

то і сума $F(x)$ ряду (7) має на відрізку $[a;b]$ похідну, причому

$$F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) \ldots . \quad (10)$$

Теореми 2–4 встановлюють аналогію між функціональними рядами і сумами скінченного числа функцій. Ця аналогія обмежена відомими умовами, в характеристиці яких рівномірна збіжність займає визначне місце.

Тема 18. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯД ТЕЙЛОРА. РОЗВИНЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Мета навчання: Ввести поняття степеневого ряду, його області збіжності. Розглянути теорему Абеля, означити поняття радіус, інтервал та проміжок збіжності степеневого ряду. Ознайомитись з правилом відшукання області збіжності степеневого ряду з дійсними членами та прикладами його застосування на практиці. Розглянути властивості суми степеневого ряду.

Розглянути необхідну умову розвинення функції в інтервалі у степеневий ряд (ряд Тейлора). Зупинитись на питанні розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Розглянути біноміальний ряд та розвинення у степеневі ряди функцій $ln(1 + x)$, $arctgx$. Зупинитись на питанні застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття степеневого ряду.	[1] Р11 §11.3; [8] Р1 § 1.15.
2	Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус збіжності та інтервал збіжності степеневого ряду. Проміжок збіжності степеневого ряду.	[1] Р11 §11.3; [8] Р1 § 1.15.
3	Властивості суми степеневого ряду.	[1] Р11 §11.4; [8] Р1 § 1.15.
4	Ряд Тейлора.	[1] Р11 §11.5; [8] Р1 § 1.15.
5	Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди.	[1] Р11 §11.5; [8] Р1 § 1.15.
6	Розвинення в степеневі ряди функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$.	[1] Р11 §11.5; [8] Р1 § 1.15.
7	Біномний ряд.	[1] Р11 §11.5; [8] Р1 § 1.15.
8	Розвинення в степеневі ряди функції $\ln(1+x)$, $arctgx$.	[1] Р11 §11.5; [8] Р1 § 1.15.
9	Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.	[1] Р11 §11.6; [8] Р1 § 1.15.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Поняття степеневого ряду	
Означення 1. ***Степеневим рядом*** називається функціональний ряд вигляду $$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \quad (1)$$ або, що те саме, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, де a_n, $n = 1,2,\ldots$, – сталі дійсні числа, що називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду*** (1), а x_0 – довільне фіксоване дійсне число. Якщо в ряді (1) $x_0 = 0$, то він набуде вигляду $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (2)$$	
Зауваження. Вивчення степеневих рядів обмежимо рядами вигляду (2), оскільки ряд (1) зводиться до ряду (2) заміною змінної $x - x_0 = y$ з наступним перенайменуванням y на x. Щойно сказана обставина дає змогу теореми, доведені для степеневих рядів вигляду (2), автоматично перенести на степеневі ряди вигляду (1).	

Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус збіжності та інтервал збіжності степеневого ряду. Проміжок збіжності степеневого ряду

Означення 2. ***Областю збіжності степеневого ряду*** називають множину $X = \{\overline{x}\}$ тих точок $\overline{x}$, в яких ряд (2) збігається.

Теорема 1 (*теорема Абеля*). Якщо степеневий ряд (2) збігається в точці $\overline{x}$, $\overline{x} \neq 0$, то він абсолютно збігається в будь-якій точці x, для якої $|x| < |\overline{x}|$.

В точці $x = 0$ збігається, очевидно, будь-який ряд $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$ (2.1).

Але є степеневі ряди, які – крім цього – не збігаються в жодній точці x. Такі ряди називають ***скрізь розбіжними рядами.***

Приклад 1. Ряд

$1!\,x + 2!\,x^2 + \ldots + n!\,x^n + \ldots$.

є скрізь розбіжним рядом.

Доведення. $a_n = n\,!\ x^n$. $a_{n+1} = (n+1)\,!\ x^{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,!\ x^{n+1}}{n\,!\ x^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)\ x = \infty.$$

За ознакою Д'Аламбера $\alpha = \infty$ і ряд є скрізь розбіжним.

Подібні ряди не представляють інтересу.

Теорема 2. Для кожного степеневого ряду (2), якщо тільки він не є скрізь розбіжним, існує таке додатне число **R** (воно може бути і +∞), що ряд абсолютно збігається в інтервалі $(-R; R)$ і ряд розбігається в будь-якій точці x, для якої $|x| > R$ (якщо $R < +\infty$).

При цьому число **R** та інтервал $(-R; R)$ називаються відповідно ***радіусом*** та ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду.

Для скрізь розбіжного ряду вважають $R = 0$; його ***проміжок збіжності*** зводиться до точки $x = 0$.

Приклад 2. Знайти проміжок збіжності ряду

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Розв'язання.

Оскільки степеневий ряд в інтервалі збіжності збігається абсолютно (див. теорему 2), то для знаходження цього інтервалу скористаємось ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} : \frac{x^n}{n\,!}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

для будь-якого $x \in \mathbf{R}$.

	Оскільки $0 < 1$, то досліджуваний ряд збігається в будь-якій точці $x \in \mathbf{R}$. Отже, проміжком збіжності даного ряду є інтервал $(-\infty;+\infty)$.

Приклад 3. Знайти проміжок збіжності ряду

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

Розв'язання.

1. Знайдемо **інтервал збіжності** цього ряду.

Оскільки степеневий ряд в інтервалі збіжності збігається абсолютно (див. теорему 2), то для знаходження цього інтервалу скористаємося достатньою ознакою Д'Аламбера абсолютної збіжності числового ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{x^n}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,n^2}{(n+1)^2}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=|x|.$$

Отже, ряд збігається, якщо $|x|<1$, і розбігається, якщо $|x|>1$.

Радіус збіжності досліджуваного ряду дорівнює ***R*=1**, а його **інтервалом збіжності** є інтервал $(-1;1)$.

2. З'ясуємо тепер поведінку ряду *на кінцях проміжку* $(-1;\ 1)$.

Підставивши в даний ряд замість x число 1, отримаємо узагальнений гармонійний ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

В цьому ряді $\alpha=2>1$, тому він збігається.

Підставивши в даний ряд замість x число -1, отримаємо знакозмінний ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots. \qquad (*)$$

Використовуючи теорему Лейбніца, з'ясовуємо, що послідовність модулів членів знакозмінного ряду спадна: $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, то ряд $(*)$ збіжний.

Складемо тепер ряд з абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Отримали узагальнений гармонійний ряд. В цьому ряді $\alpha=2>1$, тому він збігається.

Отже, ***проміжком збіжності*** є відрізок $[-1;1]$, ряд збігається абсолютно і при $x=\pm1$.

Зауваження. Все сказане зберігає силу і для степеневого ряду вигляду (1), лише роль точки 0 відіграє точка x_0: проміжок збіжності має кінці $x_0 - R$ і $x_0 + R$ (зі включенням кінців чи ні, дивлячись за випадком).

Означення 3. ***Інтервалом збіжності*** степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \qquad (1)$$

з дійсними членами називають інтервал $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, у якому цей ряд збігається абсолютно, а поза ним (у його зовнішній частині) – розбігається.

Число $R \in [0;\ +\infty)$ називають при цьому ***радіусом збіжності*** даного степеневого ряду.

Радіус і круг (інтервал) збіжності можна знайти за допомогою *ознак Д'Аламбера* чи *Коші* або *за допомогою однієї з формул*:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (3.1) \qquad \text{або} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (3.2)$$

Правило відшукання <u>області збіжності степеневого ряду</u>
з дійсними членами
(у випадку, коли існують границі у формулах (3.1), (3.2))

1) знайти радіус R збіжності ряду;

2) записати інтервал збіжності $(x_0 - R;\ x_0 + R)$;

3) дослідити поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x_0 - R$ і $x_0 + R$;

4) записати проміжок (область) збіжності.

Приклад 4. Визначити радіус, інтервал та область (проміжок) збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^n$.

Розв'язання. Маємо степеневий ряд, у якого $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$ і $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+3}$.

1) За формулою (3.1) знаходимо радіус збіжності $R = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Отже, $R = \frac{1}{2}$.

2) Тоді **інтервалом збіжності** є $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3) Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x = -\frac{1}{2}$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad (**)$$

Використовуючи теорему Лейбніца, з'ясовуємо, що послідовність модулів членів знакозмінного ряду спадна: $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, то ряд $(**)$ збіжний.

При $x = \frac{1}{2}$ дістаємо ряд $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}. \qquad (***)$$

Для цього ряду $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Порівняємо ряд $(***)$ із рядом $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$ (розбіжним гармонійним). За 2-ю порівняльною ознакою збіжності додатних рядів у граничній формі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} > 0$.

Отже, ряд $(***)$ розбіжний.

4) **Областю збіжності** заданого ряду є пів відрізок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

<u>Приклад 5</u>. Визначити радіус, інтервал та область (проміжок) збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

Розв'язання. Для визначення R зручно скористатись формулою (3.2).

Маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, ряд збігається лише в точці $x = 0$.

Властивості суми степеневого ряду

Теорема 3. Сума $f(x)$ степеневого ряду
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2)$$
з *додатним радіусом збіжності* R є функцією *неперервною* в його інтервалі збіжності $(-R; R)$.

Лема. Степеневий ряд (2) з додатним радіусом збіжності R збігається рівномірно на кожному відрізку $[-r; r]$, якщо $0 < r < R$.

Теорема 4. Нехай степеневий ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і нехай $f(x)$ – його сума. Тоді для будь-якого $x \in (-R; R)$ правильна рівність
$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots \qquad (4)$$

Теорема 5. Нехай степеневий ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і нехай $f(x)$ – його сума. Тоді для будь-якого $x \in (-R; R)$ правильна рівність
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (5)$$

<u>Зауваження до теорем 3 – 5.</u> В теоремах 4 і 5 стверджується, що ряди (4) і (5) збігаються в інтервалі

<u>Приклад 6</u>. Знайти суму ряду $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$.

$(-R; R)$, отже, їх радіуси збіжності не менші R. Але, в свою чергу, ряд (2) одержується почленним диференціюванням ряду (4) і почленним інтегруванням ряду (5), отже і R не може бути меншим згаданих радіусів збіжності. В сукупності із сказаного випливає, що *радіуси збіжності всіх трьох рядів* (2), (4), (5) *рівні між собою*. Все сказане у цьому пункті зберігає силу і для степеневого ряду вигляду (1).	***Розв'язання.*** Візьмемо відому рівність (сума геометричної прогресії із знаменником x) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ $(-1 < x < 1)$. Степеневий ряд у його інтервалі збіжності можна диференціювати почленно (теорема 5). Тому $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x +$ $+3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ $(-1 < x < 1)$. Помноживши праву і ліву частини останньої рівності на x ($\lvert x \rvert < 1$), дістанемо $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots =$ $= \frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1 < x < 1)$.

Ряд Тейлора

У попередньому пункті теми були розглянуті властивості степеневих рядів, які багато в чому подібні до многочленів. **Частинними сумами степеневих рядів** є *многочлени*, що робить степеневі ряди зручним засобом для наближених обчислень. У зв'язку з усім цим дуже важливим є питання про можливість *наперед задану функцію розвити за степенями* x (*у більш загальному випадку, за степенями* $(x - x_0)$), тобто зобразити її у вигляді суми степеневого ряду вигляду (2) або (1) або, що те саме, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, де a_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ – сталі дійсні числа, що називаються ***коефіцієнтами степеневого ряду*** (1), а x_0 – довільне фіксоване дійсне число.

Зупинимось на подібному розвиненні по відношенню до елементарних функцій. Шлях до розв'язання поставленої проблеми відкривають остання **теорема 5** (див. попередній пункт) і раніше вивчена **формула Тейлора** (див. тема 7 [17, с.64-65]).

Теорема 1 (*необхідна умова*). Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ розвивається в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

то цей ряд єдиний і є **рядом Тейлора** цієї функції $f(x)$:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (6)$$

Висновок. Щоб написати ряд Тейлора (6) функції $f(x)$, досить, щоб ця функція була визначена в деякому околі точки x_0 і в точці x_0 мала похідні всіх порядків.

Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди

Виникає **питання:** коли ряд Тейлора (6) функції $f(x)$ в деякому інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ збігається до функції $f(x)$?

Інакше кажучи, при яких умовах, накладених на функцію $f(x)$, визначену в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ буде правильною рівність

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (7)$$

За теоремою 1, якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ розвивається в степеневий ряд вигляду (1), то для такої функції рівність (7) правильна.

Оскільки ряд Тейлора є степеневий ряд, то з рівності (7), правильної для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, внаслідок теореми 1, випливає існування у функції $f(x)$ похідних всіх порядків в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Однак існування похідних всіх порядків у функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, будучи ***необхідною умовою*** для правильності рівності (7), ***не є достатнім.***

Розглянемо, що дає формула Тейлора (див. тема 7 [17, с.64-65]).

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_{n+1}(x) \qquad (8)$$

з *додатковим членом у* ***формі Лагранжа***

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (9)$$

(тут покладено $a = x_0$).

Із сказаного вище відносно суми степеневого ряду і з формули Тейлора (8) випливає така теорема.

Теорема 2 (*необхідна й достатня умова***).** Для того, щоб ряд Тейлора (7) функції $f(x)$ збігався до $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто для того, щоб мала місце рівність

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \text{ для всіх } x \in (x_0 - R; x_0 + R), \qquad (10)$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і щоб додатковий член $r_{n+1}(x)$ у формулі Тейлора (8) у формі Лагранжа (9) прямував до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з цього інтервалу.

Застосуємо **теорему 2** до розвинення елементарних функцій у степеневі ряди, які внаслідок **теореми 1**, будуть рядами Тейлора відповідних функцій.

Елементарні функції розвиватимемо в ряд Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (11)$$

який ще називають ***рядом Маклорена***.

Теорема 3 (*достатня умова*). Рівність (11) виконується, якщо в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M,\ M > 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Розвинення в степеневі ряди функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$

Розвинення у степеневий ряд функції $f(x) = e^x$.

Скористаємось результатами, представленими у прикладі теми 7 [17, с. 64-65].

Додатковий член формули Тейлора у формі Лагранжа для функції $f(x) = e^x$ має вигляд $r_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Нехай R – довільне фіксоване додатне число. Якщо $x \in (-R; R)$, то

$$|r_{n+1}(x)| \le \frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1}. \qquad (12)$$

Позначивши через $a_n = \frac{e^R R^{n+1}}{(n+1)!}$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^R \cdot R^{n+2}}{(n+2)\,!}\cdot\frac{(n+1)\,!}{e^R \cdot R^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{R}{n+2} = 0.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ збіжний $(\alpha < 1)$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Звідси із (12) маємо

$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1}(x) = 0 \qquad (13)$$

для всіх $x \in (-R; R)$. Оскільки число R було взяте довільним, то рівність (13) правильна для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

За теоремою 2, функція $f(x) = e^x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ розвивається в степеневий ряд (11), який для даної функції має вигляд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (14)$$

Розвинення у степеневий ряд функції $f(x) = \sin x$.

Функція $f(x) = \sin x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ розвивається в степеневий ряд (11), який для даної функції має вигляд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \qquad (15)$$

Доведення представлено у підручниках [1] Р11 §11.5, с. 374-375; [8] Р1 § 1.15, с. 374.

Розвинення у степеневий ряд функції $f(x) = cos\,x$.

Аналогічно можна зробити і при розвиненні в степеневий ряд функції $f(x) = cos\,x$. Однак простіше скористатись теоремою 5 (див. властивості суми степеневих рядів), згідно з якою степеневий ряд в інтервалі збіжності можна диференціювати почленно. Продиференціювавши почленно ряд (15), дістанемо

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad (16)$$

Біномний ряд

Візьмемо функцію $f(x) = (1 + x)^\alpha$, де α – не натуральне число і не нуль.

Оскільки:

1. Якщо $\alpha \in$ **N,** то випадок відомий:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + x^n$$

(біном Ньютона).

2. Якщо $\alpha = 0$, то випадок тривіальний.

Доводять [1, с. 337-338], що в інших випадках ***Ряд Маклорена*** для функції $f(x) = (1 + x)^\alpha$ має вигляд

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$(-1 < x < 1). \qquad (17)$$

Степеневий ряд (17) називають ***біноміальним***, а його коефіцієнти – *біномінальними*.

Розвинення в степеневі ряди функції $ln(1 + x)$, $arctgx$

Розвинення у степеневий ряд функції $f(x) = ln(1 + x)$.

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x < 1). \qquad (18)$$

Доведення.

Розглянемо суму геометричної зі знаменником, що дорівнює $-x$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1) \qquad (19)$$

За теоремою 4 (див. властивості суми степеневих рядів) степеневий ряд (19) можна почленно інтегрувати на проміжку з кінцями 0 і x, де $-1 < x < 1$.

Зробивши це, дістанемо

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots$$

і оскільки

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = ln(1 + x) \quad (-1 < x < 1),$$

то з двох останніх рівностей отримуємо рівність (18), яку треба було довести.

Розвинення у степеневий ряд функції $f(x) = arctgx$.

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (-1 < x < 1) \qquad (20)$$

Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях

Якщо в формулі (11) позначити

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = S_n(x)$$

і

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \ldots = R_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то вона набуде вигляду

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $S_n(x)$ і $R_n(x)$ є відповідно n-*ою частковою сумою* і n-*им залишком ряду* (11).

Якщо тут відкинути n-ий залишок $R_n(x)$ ряду (11), то дістанемо наближену формулу

$$f(x) \approx S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (21)$$

яка замінює функцію складної природи її ***многочленом Маклорена*** (так називають праву частину рівності (21)).

Абсолютна похибка наближеної рівності (21) дорівнює абсолютній величині n-го залишку $R_n(x)$ ряду (11). Саме цим і користуються при відшуканні числа n членів правої частини рівності (21), яке достатнє для здобуття наперед заданої точності.

Приклад. Знайти $sin\,18°$ з точністю до 0,00001.

Розв'язання.

Користуючись формулою (15), можемо написати:

$$sin\,18° = sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k-1}}{10^k \cdot (2k-1)!} + \ldots$$

Оскільки $\frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} < 0{,}00001 < \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!}$, то $sin\,18° \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!}$ з точністю до 0,00001.

IV. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
(типові задачі та КЗСР)

Змістовий модуль 4.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практичне заняття 1.

Тема. **ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Питання. 1) Внутрішня точка множини. Відкрита множина. Розв'язування задач. 2) Зв'язна множина, область простору R_n, межова точка. Розв'язування задач. 3) Функції багатьох змінних. Знаходження області визначення функцій двох змінних.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 4)
1	№1, №2 (а-в), №3 (б).	№3 (а, в).
2	№№4, 5.	
3	№6 (а, в-е, з-і).	№6 (б, є, ж).

1) <u>Внутрішня точка множини. Відкрита множина. Розв'язування задач.</u>

№1. Повторіть означення «внутрішньої точки множини» та означення «відкритої множини».

№2. З'ясуйте чи є наступні множини відкритими. Відповідь обґрунтуйте.

а) $C = \{(x;y)|x,\ y \in R,\ x^2 + y^2 > 4\}$.

б) $D = \{(x;y)|x,\ y \in R,\ 1 \le (x-4)^2 + (y-3)^2 \le 4\}$.

в) $E = \{(x,y,z)|x,y,z \in R,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1\}$.

№3. Доведіть, що множина:

а°) $A = \{(x;y)|x, y \in R,\ y \ge x\}$ не є відкритою,

б) $D = \left\{(x;y)\ \middle|\ x, y \in R,\ \begin{cases} y \ge \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}\right\}$ не є відкритою. Знайдіть межові точки цієї множини, зобразіть це графічно.

в°) $A = \{(x;y)|x, y \in R,\ 4 \le x^2 + y^2 \le 100\}$ не є відкритою. Знайдіть межові точки цієї множини, зобразіть це графічно.

2) Зв'язна множина, область простору R_n, межова точка. Розв'язування задач.

№4. Повторіть означення «зв'язної множини», «області простору R_n», «межової точки».

№5. Доведіть, що множина $M=\left\{(x;y)\,\middle|\,x\in R,\ y\in R,\ \begin{cases}x+y>2,\\ x^2+y^2<25\end{cases}\right\}$, є областю в просторі R_2. Знайти межові точки області.

№6. Знайдіть область визначення функції z зробіть відповідний рисунок, якщо:

а) $z=x^2+y^2$,

б°) $z=\sqrt{x-y}$,

в) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}$,

г) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,

д) $z=\sqrt{x^2+y^2-3}$,

е) $z=\sqrt{x}+\sqrt{-y}$,

є°) $z=arcsin\ \frac{y}{x}$,

ж°) $z=\sqrt{y\sin x}$,

з) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{ln(1-x^2-y^2)}$,

и) $z=ln\,xy$,

і) $z=ln\,x+ln\,y$.

Практичне заняття 2.

Тема. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Питання. 1) Границя функції багатьох змінних. Обчислення границь функцій двох змінних. 2) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи спосіб переходу до полярних координат. 3) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи визначні границі. 4) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи допоміжні нерівності. 5) Задачі на доведення. 6) Неперервність функції багатьох змінних.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 4)
1	№1 (а).	№1 (б).
2	№2 (а, б).	№2 (в).
3	№3 (а, в).	№3 (б).
4	№4 (а, б).	№4 (в).
5	№5 (а, в).	№5 (б).
6	№6 (а), №7.	№6 (б).

1) Границя функції багатьох змінних. Обчислення границь функцій двох змінних.

№1. Повторіть означення границі функції багатьох змінних. Знайдіть границі функцій двох змінних.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}} \frac{x-y}{x^2+3x-xy-3y}$, б°) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{\boldsymbol{x^2-y^2}}{\boldsymbol{x^2-xy-x+y}}$.

2) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи спосіб переходу до полярних координат.

№2. Знайти границі функцій, використовуючи спосіб переходу до ***полярних координат***.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, в°) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Спосіб переходу до полярних координат зручно використовувати при обчисленні границь в точці $(0;\ 0)$.

Розв'язання №2 а.

1) Зробимо заміну x та y на $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\,sin\,\varphi$, де $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ і перетворимо вираз:

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\frac{\rho^2\left(cos^2\varphi+sin^2\varphi\right)}{\sqrt{\rho^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)+1}-1}=\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}$$

$\rho\to 0$ при $(x,y)\to(0;0)$.

2) Обчислимо границю:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)=2.$$

Відповідь. 2.

3) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи визначні границі.

№3. Знайти границі функцій, використовуючи визначні границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\,sin\frac{3}{x^2+y^2}$, б°) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{sin\ xy}{x}$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Розв'язання 3 а.

Нехай $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\,sin\,\varphi$, де $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$. Тоді $x^2+y^2=\rho^2$.

Маємо $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\ \ sin\ \ \frac{3}{\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{3\ \ sin\frac{3}{\rho^2}}{\frac{3}{\rho^2}}=3\cdot 1=3$

Відповідь. 3.

4) Знаходження границь функцій двох змінних, використовуючи допоміжні нерівності.

№4. Знайти границі функцій, використовуючи допоміжні нерівності:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$. в°) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

Розв'язання 4 а.

Перетворимо істинну нерівність $(x-y)^2 \geq 0$ на рівносильну їй нерівність $x^2-xy+y^2 \geq xy$. При $x \neq 0,\ y \neq 0$, маємо $0 \leq \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}$.

За теоремою про границю проміжної функції отримуємо $0 \leq \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right) = 0$. Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

Відповідь. 0.

5) Задачі на доведення.

№5. Довести, що для функції $z = f(x,\ y)$ не існує границі у точці $(0;\ 0)$, якщо:

а) $z = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, б°) $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, в) $z = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

6) Неперервність функції багатьох змінних.

№6. Довести, що для функція $z = f(x,y)$ неперервна в будь-якій точці $(a;\ b)$, якщо:

а) $z = x + y$; б°) $z = x^2 - y^2$.

Доведення 6 а.

Для довільної точки $(a;\ b) \in R_2$ маємо приріст функції:

$$\Delta z = (a + \Delta x) + (b + \Delta y) - (a + b) = \Delta x + \Delta y.$$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \Delta\, z = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} (\Delta x + \Delta y) = 0.$

За означенням (3) функція $z = f(x,y)$ неперервна в будь-якій точці $(a;\ b) \in R_2$.

№7. Знайти точки розриву функції $z = f(x,y)$, якщо:

а) $z = \frac{1}{2x^2+3y^2}$, б) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, в) $z = \frac{2-xy}{y^2}$,

г) $z = \frac{2x-3}{x^2+y^2-4}$, д) $z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}$, е) $z = \frac{x+y}{x^3+y^3}$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№2 б) 0.** **<u>Вказівка.</u>** Покладіть $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\, sin\,\varphi$, де $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Тоді $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\rho \to 0$ при $(x;\ y) \to (0; 0)$. Зробіть заміну x та y і перетворіть вираз. **№3. б) <u>Вказівка.</u>** Використайте першу визначну границю. Покладіть $xy = t$. **в) *e*. <u>Вказівка.</u>** Покладіть $x^2 + y^2 = \alpha$. **№4 б) <u>Вказівка.</u>** Для отримання допоміжної нерівності $0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ поділіть почленно чисельник дробу на знаменник. **№5 а)** Покладіть $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\, sin\,\varphi$, де $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Тоді $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Зробіть заміну x та y і перетворіть вираз. З'ясуйте яка умова мала б виконуватися, щоб існувала границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x; y) = a$ та чи виконується ця умова.

Практичне заняття 3.

Тема. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ І ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Питання. 1) Частинні похідні. Розв'язування задач на обчислення і доведення. 2) Диференціювання функцій багатьох змінних. 3) Частинні похідні вищих порядків. Розв'язування задач на обчислення і доведення.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 4)
1	№1, №3.	№2, №4.
2	№5 (а,б), №6 (а-в).	№5 (в), №6 (г, д).
3	№7 (а-г), №8.	№7(д,е), №9.

1) <u>Частинні похідні. Розв'язування задач на обчислення і доведення.</u>

№1. Знайти частинні похідні 1-го порядку для наступних функцій.

а) $z = x^2y^3 + x^3y$,
б) $z = \frac{x+y}{x-y}$,
в) $z = e^{xy}$,
г) $u = x^{y^z}$,
д) $u = (xy)^z$,
е) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$,
є) $z = ln(x + ln\, y)$,
ж) $z = e^{-\frac{y}{x}}$.

№2. Знайти частинні похідні 1-го порядку для наступних функцій.

а) $z = x + y$, д) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

б) $u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^n$, е) $u = sin(x + y)$,

в) $z = \frac{xy}{x+y}$, є) $u = r\ \ cos\,\phi$,

г) $u = (xy)^z$, ж) $u = \frac{1}{x-y}$.

№3. $\boldsymbol{u = x^y \cdot y^x}$**.** Показати, що $x\ \frac{du}{dx} + y\ \frac{du}{dy} = (x + y + ln\,u) \cdot u$.

№4. $\boldsymbol{u} = ln(\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{e^y})$**.** Показати, що $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} = 1$.

2) <u>Диференціювання функцій багатьох змінних.</u>

№5. Довести за означенням диференційовність на всій площині даних функцій.

а) $z = x + 2y$, $(a; b) \in R_2$, в) $z = 2 - x - y$, $(a; b) \in R_2$.

б) $z = xy$, $(a; b) \in R_2$.

№6. Написати повні диференціали функцій:

а) $z = xy - x^2y^3 + x^3y$, г) $z = cos(xy)$,

б) $z = y^x$, д) $z = \frac{x+y+xy}{x^2+y^2}$.

в) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

3) <u>Частинні похідні вищих порядків. Розв’язування задач на обчислення і доведення.</u>

№7. Знайти частинні **другого порядку** функції z, якщо:

а) $z = y\,sin(y + x^2)$, г) $z = sin(xy)$,

б) $z = e^{x+y^2}$, д) $z = x^2y - xy^2 + 5$,

в) $z = (x + 1)\ e^{y+1}$, е) $z = (x^2 + y^2)^3$.

Розв’язання №7 а.

Знайдемо частинні похідні *першого порядку*:

$\frac{\partial z}{\partial x} = y\ \ cos(y + x^2) \cdot 2x = 2xy \cdot cos(y + x^2)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = sin(y + x^2) + y \cdot cos(y + x^2)$.

Знайдемо частинні похідні *другого порядку*:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy \cdot cos(y + x^2))'_x = 2y \cdot cos(y + x^2) +$

$+2xy \cdot (-\,sin(y + x^2)) \cdot 2x = 2y\,cos(y + x^2) - 4x^2y\,sin(y + x^2)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (sin(y + x^2) + y \cdot cos(y + x^2))'_y =$
$= cos \quad (y + x^2) + cos(y + x^2) + y \cdot (-sin(y + x^2)) =$
$= 2\,cos(y + x^2) - y\,sin(y + x^2).$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy \cdot cos(y + x^2))'_y = 2x \cdot cos(y + x^2) +$
$+2xy \cdot (-sin(y + x^2)) = 2x \cdot cos(y + x^2) - 2xy\,sin(y + x^2).$

№8. Перевірити рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, якщо $z = x^{y^2}$.

№9. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1{,}2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1{,}2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(1{,}2)$, якщо $z\ (x, y) = \frac{y}{y-x}$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№5.** **Вказівка.** Знайдіть $\Delta z = z(a + \Delta x;\ b + \Delta y) - z(a;\ b)$ для кожної з функцій, а потім скористайтесь означенням функції $f(x, y)$ диференційованої в точці (a, b).

Практичне заняття 4.

Тема. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Питання. 1) Дослідження функцій двох змінних на екстремуми. 2) Розв'язування прикладних задач на екстремуми.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 4)**
1	№1.	№2.
2	№3.	№4.

1) Дослідження функцій двох змінних на екстремуми.

№1. Дослідити на екстремуми функції:

а) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$, в) $z = 3\,ln\,x + xy^2 - y^3$,

б) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$, г) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$.

№2. Дослідити на екстремуми функції:

а) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$, в) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$,

2) <u>Розв'язування прикладних задач на екстремуми.</u>

№3. Реакція $R\ (x,t)$ на x одиниць ліків через деякий час t год, після їх прийому описується залежністю $R\ (x,t) = x^2(a-x)\ t^2\ e^{-\,t}$. При якій кількості x реакція буде максимальною? Коли наступить ця максимальна реакція?

№4. При лікуванні деякого захворювання одночасно призначають два препарати. Реакція R (виражена у відповідних одиницях) на x одиниць першого препарату і y одиниць другого виражається залежністю $R\ (x,\ y) = x^2y^2(a-x)\ (b-y)$. Яка кількість y другого препарату спричиняє максимальну реакцію при фіксованій кількості x першого препарату?

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 а)** функція екстремумів не має, **б)** $(-2;0)$ – точка мінімуму, **в)** функція екстремумів не має, **г)** $(-1;-1)$ – точка максимуму.

№3. Реакція буде максимальною при $x = \frac{2a}{3}$ через 2 години після прийому ліків. <u>**Вказівка.**</u> Дана функція $R\ (x,t) = x^2(a-x)\ t^2\ e^{-\,t}$ диференційована в області $0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty$.
1. Знайдіть стаціонарні точки функцій $R\ (x,t)$ у вказаній області. $R(x,\ t) = (ax^2 - x^3)\ \ t^2e^{-t}$.

$\frac{\partial R}{\partial\, x} = e^{-t}t^2(2ax - 3x^2) = e^{-t}t^2 \cdot x(2a - 3x)$.

$\frac{\partial R}{\partial\, t} = x^2(a-x)(2te^{-t} - t^2e^{-t}) = e^{-t}x^2(a-x)\ t\ (2-t)$.

Складіть систему рівнянь $\begin{cases} e^{-t}t^2x(2a-3x) = 0, \\ e^{-t}x^2(a-x)t(2-t) = 0 \end{cases}$ і розв'яжіть її.

2. Знайдіть частинні похідні другого порядку.

3. Перевірте виконання достатньої умови екстремуму та зробіть висновок.

№4. $y = \frac{2b}{3}$**.**

Змістовий модуль 5.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практичне заняття 5.

Тема. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Питання. 1) Знаходження загальних розв'язків диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними. 2) Знаходження частинних розв'язків диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 5)**
1	№1 (а-д).	№1 (е-і).
2	№2 (а, в).	№2 (б, г).

1) Знаходження загальних розв'язків диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

№1. Знайти загальні розв'язки даних диференціальних рівнянь.

а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

б) $xyy' = 1 - x^2$;

в) $y\ y' = \frac{1-2x}{y}$;

г) $xy' + y = y^2$;

д) $y' = e^{x+y}$;

е) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$;

є) $(1 + 2y)xdx + (1 + x^2)dy = 0$;

ж) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;

з) $e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 1$;

і) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$.

2) Знаходження частинних розв'язків диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

№2. Знайти розв'язки, що задовольняють початковим умовам.

а) $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$;

б) $(2x + 1)dy + y^2dx = 0,\ y(4) = 1$;

в) $(1 + y^2)dx - xydy = 0,\ y(2) = 1$;

г) $2\sqrt{y}dx = dy,\ y(0) = 1$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 а)** $C\ (1-x^2)=y^2+1$. **<u>Вказівка.</u>** Відокремте змінні $\frac{xdx}{1-x^2}=-\ \frac{y\ dy}{y^2+1}$. **б)** $x^2+y^2=ln\,Cx^2$. **<u>Вказівка.</u>** Замініть y' на $\frac{dy}{dx}$ і відокремте змінні. **в)** $y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C}$**. г)** $\frac{y-1}{y}=Cx$**. д)** $y=-ln(C-e^x)$**.** **<u>Вказівка</u>.** Використайте властивість степенів. **е)** $\frac{y^2-x^2}{2}+y+x=ln\left|\frac{x+1}{y-1}\right|+C$**.** **<u>Вказівка</u>.** Розкладіть на множники і відокремте змінні. **№2. а)** $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}(e^x+1)$. **<u>Вказівка</u>.** Замініть y' на $\frac{dy}{dx}$ і відокремте змінні. Загальний розв’язок диференціального рівняння $\frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{2}}=ln\,C\ (\boldsymbol{e^x}+\mathbf{1})$. Враховуючи початкові умови $y(0)=1$ знайдіть частинний розв’язок диференціального рівняння. **б)** $ln\left(\frac{2x}{9}+\frac{1}{9}\right)=2\left(\frac{1}{y}-1\right)$**. в)** $x^2=2(1+y^2)$**.**

Практичне заняття 6.

Тема. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Питання. 1) Знаходження загальних розв’язків однорідних диференціальних рівнянь.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 5)**
1	№1 (а-д).	№1 (е-ж).

1) Знаходження загальних розв’язків однорідних диференціальних рівнянь.

№1. Розв’язати наступні однорідні диференціальні рівняння.

а) $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)\ dy=0$;

б) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$;

в) $(x^2+y^2)\ dx=2xydy$;

г) $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$;

д) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, y(-1)=0;

е) $y'=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$;

є) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$;

ж) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+ln\,y-ln\,x)$.

Розв'язання №1а.

Перетворимо рівняння ***1а*** до вигляду $y' = f(x,y)$.

$\left(2\sqrt{xy} - x\right)\ dy = -y\ dx, \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}} = \frac{\frac{y}{x}}{1-2\sqrt{\frac{y}{x}}},$

Отже, маємо рівняння $y' = \frac{\frac{y}{x}}{1-2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. Згідно з означенням воно є однорідним.

Нехай $\frac{y}{x} = u$. Тоді $y = ux$. Зробимо відповідну заміну

$u'x + u = \frac{u}{1-2\sqrt{u}}.$

Перетворимо $u'x = \frac{u}{1-2\sqrt{u}} - u, \frac{du}{dx}x = \frac{2u\sqrt{u}}{1-2\sqrt{u}}.$

Відокремимо змінні $\frac{1-2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}\ du = \frac{dx}{x}.$

Проінтегруємо

$\int \frac{1-2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}du = \int \frac{dx}{x},$

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u}} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$

$\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$

$-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{u}} - ln\ \ |u| = ln|x| + C,$

Звідси $-\ \frac{1}{\sqrt{u}} = ln|ux| + C.$

Зробимо зворотну заміну $u = \frac{y}{x}$. $\quad -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\frac{y}{x}}} = ln|y| + C.$

Перетворимо $-\sqrt{\frac{x}{y}} = ln|y| + C.$

Звідси отримаємо $\sqrt{\frac{x}{y}} + ln|y| + C = 0.$

Відповідь. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + C = 0.$

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 б)** $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$. **<u>Вказівка</u>.** Перетворіть рівняння ***1 б*** до вигляду $y'=f(x,y)$. Зробіть заміну $\frac{y}{x}=u$.

в) $y=\sqrt{x(x-C)}$. **г)** $C\cdot\sqrt{x^2+y^2}=e^{-\,arctg\,\frac{y}{x}}$. **д)** $y=x\sqrt{2\,ln|-x|}$.

<u>Вказівка</u>. Загальний розв'язок диференціального рівняння $Cx=e^{\frac{y^2}{2x^2}}$.

Практичне заняття 7.

Тема. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ ОРГАНІЧНОГО ЗРОСТАННЯ (СПАДАННЯ)

Питання. 1) Знаходження загальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку. 2) Знаходження частинних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку. 3) Розв'язування прикладних задач математичними моделями яких є рівняння органічного зростання (спадання).

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 5)
1	№1 (а-г).	№1 (д).
2	№2 (а)	№2 (б)
3	№3, №4	№5

1) Знаходження загальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку.

№1. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.

а) $y'+\frac{y}{x}=x$;

б) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;

в) $y'-y\,tgx=\frac{1}{\cos x}$;

г) $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{x^3}{1+x^2}$;

д) $y'-\frac{y}{x}=xe^x$.

Розв'язання №1а.

Перепишемо рівняння ***1а*** у вигляді $y'+p(x)y=q(x)$: $y'+\frac{1}{x}y=x$.

Це *лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.*

Розв'яжемо його за алгоритмом (див. тему 14, п.5).

1) Розв'язок диференціального рівняння ***1а*** шукатимемо у вигляді добутку

$$y = uv, \ (*)$$

де u і v – невідомі функції від x, кожна з яких має одну похідну.

2) Одну з цих функцій можна вибрати довільно, друга має бути означена так, щоб функція $(*)$ була розв'язком рівняння.

3) Знайдемо похідну $y' = u'v + uv'$ і підставимо вирази для y' та y в диференціальне рівняння *1а:* $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x$.

4) $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x$. Прирівняємо до нуля вираз у дужках: $v' + \frac{1}{x}v = 0$.

5) Для розв'язування останнього рівняння відокремимо змінні: $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$.

$ln|v| = -ln|x| + ln\,C$, звідси $|v| = \frac{C}{|x|}$.

Нехай $C = 1$. Тоді $v = \frac{1}{x}$. $(**)$

6) Підставимо останній вираз $v = \frac{1}{x}$ у рівняння з пункту (4): $u' \cdot \frac{1}{x} = x$. Маємо $u' = x^2$.

Розв'яжемо останнє рівняння. $\frac{du}{dx} = x^2$, $du = x^2dx$, $\int du = \int x^2 dx$.

Отже, $u = \frac{x^3}{3} + C$.

7) Підставивши знайдені вирази для v та u у формулу $(*)$ знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (1): $y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) \cdot \frac{1}{x}$.

Відповідь. $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$.

2) Знаходження частинних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку.

№2. Знайдіть частинні розв'язки диференціального рівняння 1-го порядку.

а) $xy' + y = e^x$, $y(a) = b$; б) $y' + \frac{y}{x+1} = x + 1$, $y(0) = 0$.

3) Розв'язування прикладних задач математичними моделями яких є рівняння органічного зростання (спадання).

№3. Популяція бактерій перебуває у сприятливих для розмноження умовах. Через який час кількість бактерій подвоюється?

№4. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна в даний момент часу кількості бактерій у момент, що розглядається, поділеній на 10. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

№5. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості x. Початкова кількість ферменту – a. Через годину вона подвоїлась. У скільки разів вона збільшиться через 3 години?

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 б)** $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}$. **в)** $y = \frac{x+C}{\cos x}$. **Вказівка.** Використайте табличний інтеграл $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$. **г)** $y = \frac{x^4+C}{4(1+x^2)}$. **№2. а)** $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$. **Вказівка.** Загальний розв'язок диференціального рівняння $y = \frac{e^x+C}{x}$. **б)** $y = \frac{(x+1)^2}{3} - \frac{1}{3(x+1)}$. **Вказівка.** Загальний розв'язок диференціального рівняння $y = \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{C}{x+1}$. **№3. Вказівка. I.** Створення математичної моделі: Нехай у початковий момент було m_0 бактерій. Позначимо через $m(t)$ кількість бактерій у момент часу t $(m(0) = m_0)$. Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за сприятливих умов пропорційна їхній кількості.

Цей біологічний експериментальний закон приводить до диференціального рівняння розмноження бактерій: $m'(t) = k \cdot m(t)$, $k > 0$.

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов в яких вони перебувають. **№4.** $p(t) = Ce^{0,1kt}$. **№5.** У 8 разів.

Практичне заняття 8.

Тема. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 2-ГО ПОРЯДКУ

Питання. 1) Лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку (неоднорідні, однорідні). 2) Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 5)**
1	№1.	№2.
2	№3-5.	№6-7.

1) Лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку (неоднорідні, однорідні).

№1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Розв'язання №1.

1. Знайдемо *загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння*

$$y'' + y = 0 \qquad (*)$$

Маємо $y_1 = cos\, x\, , y_2 = sin\, x$ розв'язки цього рівняння.

Оскільки

$y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) \cdot y_2(x) = cos\, x \cdot cos\, x - (-sin\, x) \cdot sin\, x = 1$,

то за **теоремою 3** *загальним розв'язком диференціального рівняння* $(*)$ є функція

$$y = c_1 \cdot cos\, x + c_2 \cdot sin\, x,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі.

2. Складемо для даного рівняння систему (10).

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = r(x), \end{cases} \qquad (10)$$

де $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$ невідомі функції.

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot cos\, x + c_2'(x) \cdot sin\, x = 0, \\ c_1'(x) \cdot (-sin\, x) + c_2'(x) \cdot cos\, x = \frac{1}{cos\, x} \end{cases}$$

Нехай $c_1'(x) = a,\ c_2'(x) = b$.

Після заміни отримаємо систему 2-х рівнянь з 2-ма невідомими.

$$\begin{cases} \cos x \cdot a + \sin x \cdot b = 0, \\ (-\sin x) \cdot a + \cos x \cdot b = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

<u>Завдання 1.</u> Розв'яжіть її, використовуючи теорему Крамера.

Маєте одержати $a = -tgx,\ b = 1.$

Отже, $c_1'(x) = -tgx, \quad c_2'(x) = 1.$

3. <u>Завдання 2.</u> Проінтегрувавши, знайдіть $c_1(x)$ і $c_2(x)$.

Підставте одержані функції у рівність

$$y^* = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (9).$$

4. <u>Завдання 3.</u> Скориставшись рівністю (8) з теореми 4 (тема 15)

$$y = y^*(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad (8)$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, зробіть висновок про загальний розв'язок цього рівняння.

Відповідь: $y = ln \ |\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x.$

№2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + y = -\sin 2x$ при $y\ (\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1.$

2) Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

№3. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння $y'' + 4y' = 0$ та знайти частинні розв'язки при $y(0) = 7,\ y'(0) = 8.$

№4. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння $4y'' + 4y' + y = 0$ та знайти частинні розв'язки при $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

№5. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння $3y'' + y = 0.$

№6. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

а) $2y'' + 5y' + 2y = 0,$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

№7. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = 3$ при $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№2.** $y = \frac{1}{3} sin\, 2\, x - cos\, x - \frac{1}{3} sin\, x$**.** Рівняння розв’язується за тим же алгоритмом, що і попереднє рівняння.

1. Скористайтесь розв’язками $y_1 = cos\, x$, $y_2 = sin\, x$ відповідного однорідного диференціального рівняння.

Складіть систему:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot cos\, x + c_2'(x) \cdot sin\, x = 0, \\ c_1'(x) \cdot (-\, sin\, x) + c_2'(x) \cdot cos\, x = -\, sin\, 2\, x. \end{cases}$$

2. Розв’язуючи систему, маєте одержати $c_1'(x) = sin\, x \cdot sin\, 2\, x$, $c_2'(x) = -\, cos\, x \cdot sin\, 2\, x$.

Скористайтесь формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму: $sin\, \alpha \cdot sin\, \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$, $sin\, \alpha \cdot cos\, \beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta))$.

$y^* = \frac{1}{3} sin\, 2\, x$. $y = \frac{1}{3} sin\, 2\, x + c_1\, cos\, x + c_2\, sin\, x$**.**

3. Використовуючи початкові умови $y\,(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$, знайдіть значення c_1, c_2.

№3. $y = 9 - 2\, e^{-4\, x}$**. №4.** $y = e^{-\frac{1}{2}\, x}(2 + x)$**.**

№5. $y = c_1\, cos\, \frac{1}{\sqrt{3}} x + c_2\, sin \frac{1}{\sqrt{3}} x$. **№7.** y=$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} cos2x + \frac{1}{2} sin2x$.

Змістовий модуль 6.
РЯДИ

Практичне заняття 9.

Тема. ПОНЯТТЯ РЯДУ І ЙОГО СУМИ. ЗБІЖНІСТЬ ДОДАТНИХ РЯДІВ

Питання. 1) Поняття числового ряду. 2) Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду. **3)** Доведення збіжності ряду безпосередньо за означенням. **4)** Дослідження рядів на збіжність, використовуючи першу порівняльну ознаку збіжності додатних рядів. **5)** Дослідження рядів на збіжність, використовуючи другу порівняльну ознаку збіжності додатних рядів. **6)** Дослідження рядів на збіжність, використовуючи ознаку Коші. **7)** Дослідження рядів на збіжність, використовуючи ознаку Д'Аламбера.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 6)
1	№1 (а), №2 (а-в, д)	№1 (б, в), №2 (г, е-ж)
2	№3, №4	№5 (б, в)
3	№5 (а), №6 (а)	№5 (б, в), №6 (б)
4	№7, №8 (а)	№8 (б, в)
5	№9, №10 (а)	№10 (б, в)
6	№11, №12 (а, д)	№12 (б-г)
7	№13, №14 (а)	№14 (б, в)

1) Поняття числового ряду.

№1. Назвіть кілька членів числового ряду, якщо задано його n-й член.

а) $c_n = \frac{2n}{n^2+3}$. б) $c_n = \frac{1}{n\,!}$. в) $c_n = \frac{1}{n+3^n}$.

<u>Розв'язання.</u> а) при $n = 1$ маємо $c_1 = \frac{2\cdot 1}{1^2+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; при $n = 2$ маємо $c_2 = \frac{2\cdot 2}{2^2+3} = \frac{4}{7}$. І так далі.

<u>Відповідь.</u> $\frac{1}{2}, \ \frac{4}{7}, \ \ \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \ \frac{8}{19}, \ \ \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

№2. Запишіть загальний член ряду:

а) $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots;$ д) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots;$

б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots;$ е) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\ldots;$

в) $1+\frac{5^2}{7}+\frac{5^3}{9}+\frac{5^4}{11}+\ldots;$ є) $cos\,\alpha+\frac{cos\,2\alpha}{8}+cos\frac{3\alpha}{27}+\ldots;$

г) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots;$ ж) $\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 8}+\ldots.$

Розв'язання.

а) Нескладно помітити, що у чисельниках знаходяться члени натурального ряду $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, а у знаменниках степені числа 10: $10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ldots,10^n$.

Отже, загальний член ряду $a_n=\frac{n}{10^n}$.

д) Розглянемо спочатку послідовність $1,\ 3,\ 5,\ \ldots$. Ці числа утворюють арифметичну прогресію, в якій $a_1=1,\ d=2$. За формулою n-го члена арифметичної прогресії $a_n=a_1+d(n-1)$ отримаємо $a_n=1+2\ (n-1)=2n-1$.

Розглянемо послідовність $3,\ 5,\ 7,\ \ldots$. Ці числа також утворюють арифметичну прогресію, в якій $a_1=3,\ d=2$. За формулою n-го члена арифметичної прогресії $a_n=a_1+d(n-1)$ отримаємо $a_n^{'}=3+2\ (n-1)=2n+1$.

Отже, загальний член ряду $c_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2) Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду.

№3. Згадайте **означення 1** (ряду та часткових сум ряду), **означення 2** (збіжного ряду, суми ряду, розбіжного ряду) (с. 44-45), **найпростіші властивості збіжних рядів** (с. 46) та **ознаки (необхідну умову збіжності ряду, достатню ознаку розбіжності ряду)** (с. 47)**:**

№4. Поясніть чому дані ряди розбіжні.

а) $3-3+3-3+\ldots;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1};$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n};$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}.$

Розв'язання.

а) $S_n = 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 3 = \begin{cases} 3, \textit{ якщо } \text{n - непарне}, \\ 0, \text{ якщо n - парне число}. \end{cases}$

А, отже, послідовність S_n розбіжна. Не існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, де S – число.

Тому ряд розбіжний.

б) Використаємо достатню ознаку розбіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1 \neq 0.$

Отже, ряд розбіжний.

3) Доведення збіжності ряду безпосередньо за означенням.

№5. Дослідіть на збіжність та знайдіть суми рядів.

а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)} + \ldots;$

б) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots;$

в) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots.$

Алгоритм розв'язання.

Для кожного з наступних рядів:

1) Знайти суму n перших членів ряду (S_n),

2) Довести збіжність ряду, безпосередньо за <u>**означенням 2.**</u>

3) Знайти суму S ряду.

Розв'язання **1 а.**

1) Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n\,(n+1)}$ представимо у вигляді $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2) Тоді часткову суму ряду можна записати так:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3) Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

За **означенням 2** ряд збіжний і його сума $S = 1$.

Відповідь. 1.

№6. Довести збіжність ряду, безпосередньо за означенням 2 (с. 45):

а) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n\ (n+3)}+\ldots$;

б) $\frac{1}{1\cdot7}+\frac{1}{3\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$.

Розв'язання **6 а.**

1) $a_n=\frac{1}{n\ (n+3)}$.

Представимо загальний член ряду у вигляді скінченної кількості елементарних раціональних дробів.

$$\frac{1}{n\ (n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A\ (n+3)+Bn}{n\ (n+3)}=\frac{(A+B)\ n+3A}{n\ (n+3)}.$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 3A=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отже, $a_n=\frac{1}{3n}-\frac{1}{3\ (n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$.

2)

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\begin{array}{l}1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+ \\ +\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

3) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$;

$$S=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}.$$

Відповідь. $\frac{11}{18}$.

4) Дослідження рядів на збіжність, використовуючи *першу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів.

№7. Повторити *першу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів (с. 47-48) та розглянути приклад її застосування. Звернути увагу на приклади 1-3 рядів (с. 44-45) (ряд утворений з членів геометричної прогресії, гармонійний ряд, узагальнений гармонійний ряд (ряд Діріхле).

№8. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи *першу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

5) Дослідження рядів на збіжність, використовуючи *другу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів.

№9. Повторити *другу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів (с. 48) та розглянути приклад її застосування.

№10. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи *другу порівняльну ознаку* збіжності додатних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

6) Дослідження рядів на збіжність, використовуючи *ознаку Коші*.

№11. Повторити *ознаку Коші* збіжності додатних рядів (с. 49) та розглянути приклад її застосування.

№12. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи *ознаку Коші* збіжності додатних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{5n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+2n+3}\right)^{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7) Дослідження рядів на збіжність, використовуючи ознаку Д’Аламбера.

№13. Повторити *ознаку Д’Аламбера* збіжності додатних рядів (с. 49) та розглянути приклад її застосування.

№14. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи *ознаку Д’Аламбера* збіжності додатних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№5 б) <u>Вказівка.</u>** Загальний член ряду представте у вигляді $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$; **в) Вказівка.** Загальний член ряду представте у вигляді $a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$.

Практичне заняття 10.

Тема. ЗБІЖНІСТЬ ДОВІЛЬНИХ РЯДІВ

Питання. 1) Критерій Коші збіжності числового ряду та його застосування. 2) Абсолютно і умовно збіжні ряди. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Приклади застосування.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 6)**
1	№1, №2	№3
2	№4, №5 (а,є,ж)	№5 (б-е, з)

1) Критерій Коші збіжності числового ряду та його застосування.

№1. Повторити **критерій Коші збіжності числового ряду (с. 50-51)** та наслідок з нього (теорему 3, с. 51).

№2. Користуючись критерієм Коші, доведіть розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Розв'язання. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = n$.

Тоді нерівність $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$ $\quad (*)$

$$| \, a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} >$$

$$> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (**)$$

Для числа ε не існує $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ такого, щоб для всіх $n \in N$, $n > n_0$ і <u>для будь-якого</u> $p \in N$ виконувалась нерівність $(*)$

Нерівність $(*)$ внаслідок $(**)$ не виконується для всіх $p = n$, $n = 1, \; 2, \; \ldots$.

Цим і доведіться **розбіжність ряду** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

№3. Користуючись критерієм Коші, доведіть збіжність ряду $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos \; x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos \; x^n}{n^2} + \ldots$.

2) Абсолютно і умовно збіжні ряди. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Приклади застосування.

№4. Повторити поняття абсолютно і умовно збіжні ряди (с. 51-52) та знакозмінні ряди (с. 52), теорему Лейбніца (с. 52). Розглянути приклад її застосування (с.52-53).

№5. Встановити, які ряди збігаються **абсолютно**, які **умовно**.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$; є) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{3^{n+1}}\right)^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{n}(-1)^n \frac{1}{n^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{3^n}$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№3.** <u>**Алгоритм розв'язання.**</u> **1)** Знайдіть таке число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $n_0 \in N$, що $(\forall n > n_0,\ n \in N)$ і довільного $p \in N$ буде виконуватись нерівність $(*)$ $(\forall \varepsilon > 0)$. **2)** Доведіть, що виконується нерівність $\left|\frac{cos\ x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{cos\, x^{n+2}}{(n+2)^2} + \frac{cos\, x^{n+p}}{(n+p)^2}\right| < \frac{1}{n}$. **3)** Визначте n_0 і зробіть висновок про збіжність даного ряду за критерієм Коші.

Практичне заняття 11.

Тема. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Питання. 1) Поняття функціонального ряду. Збіжність, абсолютна та рівномірна збіжність функціонального ряду. Область збіжності функціонального ряду. 2) Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Вейєрштрасса*). Приклади застосувань.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 6)
1	№1, №2 (а-в)	№2 (г-е)
2	№3, №4, №5 (а, б)	№5 (в)

1) Поняття функціонального ряду. Збіжність, абсолютна та рівномірна збіжність функціонального ряду. Область збіжності функціонального ряду.

№1. Повторити означення функціональної послідовності, функціонального ряду, збіжного функціонального ряду, абсолютно збіжного функціонального ряду, області збіжності функціонального ряду (с. 54-57).

№2. Знайти область збіжності функціонального ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{2n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n x^n}$.

***Розв'язання* 2 а.**

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|x^{2n}\right|=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots$. Заданий ряд є геометричним рядом зі знаменником $q=x^2$. Він збігається, якщо $|q|<1$. $x^2<1$, якщо $|x|<1$.

Відповідь. $x\in(-1;1)$.

2) Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Вейєрштрасса*). Приклади застосувань.

№3. Повторити означення рівномірно збіжного функціонального ряду та достатню ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознаку Вейєрштрасса*) (с. 57–68).

№4. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, arctg\left(5nx+4\right)}{n!}$.

Розв'язання.

1. $\forall\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \forall x \in R$ виконується нерівність $-\frac{\pi}{2} < arctg(5nx+4) < \frac{\pi}{2}$. Звідси маємо $-\pi < 2arctg(5nx+4) < \pi$.

Отже, $\left|\frac{2arctg(5nx+4)}{n\ !}\right| < \frac{\pi}{n\ !}$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n!}$ є збіжним *мажорантним рядом* для даного функціонального ряду. Збіжність мажорантного ряду доводять, використовуючи ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{(n+1)\ !} \cdot \frac{n\ !}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}} = 0 < 1.$$

За ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд рівномірно збігається на всій числовій прямій.

Відповідь. $\boldsymbol{x} \in (-\infty;\ +\infty)$**.**

№5. Доведіть, що функціональний ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n + x}$ збігається рівномірно на проміжку $[0;+\infty)$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\cos^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+1}}$ збігається рівномірно на відрізку $[-3;\,0]$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi - x}{n\sqrt{3n+x^2}}$ збігається рівномірно на відрізку $[0;\,4\pi]$.

***ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ.* №5 а) <u>Вказівка.</u>** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ мажорує даний функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n + x}$. **№5 б) <u>Вказівки.</u> 1.** $f(x) = x+1$ – зростаюча функція на відрізку $[-3;\ 0]$, **2.** $|(x+1)\ cos^2\, n\, x| \le 2$, **3.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n^7}}$ мажорує даний в умові функціональний ряд. **№5 в) <u>Вказівки.</u>** 1. Внесіть n під знак кореня, 2. $f(x) = \pi - x$ – спадна функція на відрізку $[0;\ 4\pi]$, 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\pi}{\sqrt{n^3}}$ мажорує даний в умові функціональний ряд.

Практичне заняття 12.

Тема. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯД ТЕЙЛОРА. РОЗВИНЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Питання. 1) Поняття степеневого ряду. Область збіжності степеневого ряду. 2) Теорема Абеля. Радіус збіжності та інтервал збіжності степеневого ряду. Проміжок збіжності степеневого ряду. 3) Властивості суми степеневого ряду. 4) Ряд Тейлора. **5)** Розвинення у степеневі ряди функцій: а) $f(x) = e^x$, б) $f(x) = sin\, x$, в) $f(x) = cos\, x$, г) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in$**N**; д) $f(x) = ln(1+x)$, е) $f(x) = arctg\ x$. Розв'язування задач.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 6)
1	№1	
2	№2, №3, №4 (а,б,г,д,е)	№4 (в,є)
3	№5, №6	№7
4	№8	
5	№9, №10 (а, б), №11, №12, №13 (а), №14 (а)	№10 (в,г), №13 (б), 14 (б, в)

1) Поняття степеневого ряду.

№1. Повторити означення степеневого ряду, області збіжності степеневого ряду (с. 60-61).

2) Теорема Абеля. Радіус збіжності та інтервал збіжності степеневого ряду. Проміжок збіжності степеневого ряду.

№2. Повторити теорему 1 (**теорему Абеля**), теорему 2 (про радіус та інтервал збіжності степеневого ряду) (с.61-63).

№3. Розглянути **приклади 1-3**, формули (3.1), (3.2), **правило відшукання області збіжності степеневого ряду з дійсними членами** (с. 61-64) та приклади 4, 5.

№4. Визначити *радіус*, *інтервал* і *область збіжності* ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\, x^n}{2^n}$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{2n-1}$.

3) Властивості суми степеневого ряду.

№5. Повторити **властивості суми степеневого ряду** (теореми 3-5 с. 64-65) та розглянути приклад 6.

№6. Знайти суму ряду $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\ldots$, користуючись теоремою 4 (про почленне інтегрування степеневих рядів).

№7. Знайти суму ряду $2+6x+12x^2+\ldots+(n+1)\ (n+2)x^n+\ldots$

4) Ряд Тейлора.

№8. Повторити означення ряду Тейлора функції $f(x)$, теорему 1 (*необхідна умова*), формулу (6), теорему 2 (*необхідна й достатня умова*), теорему 3 (*достатня умова*) з теми 18.2 (с. 65-67).

5) Розвинення у степеневі ряди функцій: а) $f(x)=e^x$, б) $f(x)=\sin x$, в) $f(x)=\cos x$, г) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in$**N**; д) $f(x)=\ln(1+x)$, е) $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Розв'язування задач.

№9. Повторити **основні розвинення в степеневі ряди функцій** e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ (с. 67-69):

а) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

б) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots$

в) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$.

г) $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$, $(-1<x<1)$.

д) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots\ (-1<x<1)$.

е) $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ (-1<x<1)$.

№10. Розвинути в степеневий ряд за степенями x функції:

а) $f(x)=e^{\frac{x}{4}}$; в) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$;

б) $f(x)=\sin^2 x$; г) $f(x)=\cos^2 x$.

№11. Розвинути функцію $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ в степеневий ряд в околі точки $x_0=2$.

№12. Розвинути в ряд за степенями $x-\frac{\pi}{2}$ функцію $f(x)=sin\,x$.

Розв'язання.

1. Обчислимо значення заданої функції та її похідних при $x_0=\frac{\pi}{2}$:

$f(x)=sin\,x\,,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$ $\qquad f'(x)=cos\,x\,,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

$f''(x)=-sin\,x\,,\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$ $\qquad f'''(x)=-cos\,x\,,\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

$f^{(iV)}(x)=sin\ \ x,\ f^{(iV)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.\ \ldots$

2. Оскільки виконується достатня умова (теорема 3) при всіх $x\in R$: $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq 1$, то для всіх $x\in R$ за формулою $f(x)=$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (6)$$

дістаємо **відповідь:**

$$sin\ \ x=1-\frac{1}{2\,!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4\,!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)\,!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+\ldots$$

№13. Розвинути в ряд Тейлора за степенями x функції:

а) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4x+3}$; $\qquad$ б) $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2}$.

Розв'язання 13 (а).

1) Розкладемо заданий дріб $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ на елементарні:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-B}{(x-1)(x-3)}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях

$\begin{cases}A+B=1;\\-3A-B=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1;\\B=2.\end{cases}$ Отже, $\frac{x+1}{x^2-4x+3}=-\ \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}$.

2) Користуючись формулою суми членів спадної геометричної прогресії отримаємо:

$$-\ \frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ |x|<1.$$

$$\frac{2}{x-3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right),\ \frac{|x|}{3}<1.$$

При $|x|<1$ обидва допоміжних ряди збігаються, тому їх можна почленно додати.

Тоді, при $|x|<1$ дістанемо **відповідь**:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)x+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^2}\right)x^2+\ldots+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\right)x^n+\ldots$$

№14. Записати три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$ для функцій:

а) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 3;$ б) $f(x) = ln\, x\,,\ x_0 = 1;$

в) $f(x) = sin\, 3\, x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}.$

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№4 а). <u>Вказівка.</u>** Заданий ряд є геометричним рядом зі знаменником $q = \frac{x^3}{3}$. Скористайтесь цим для визначення **радіуса** та **інтервалу** збіжності. **б) <u>Вказівка.</u>** Для знаходження радіуса та інтервалу збіжності застосуйте ознаку Д'Аламбера. Областю збіжності цього ряду є відрізок. Обгрунтуйте це. **г) <u>Вказівка.</u> Радіус** збіжності знайдіть, використовуючи формулу (3.1). Областю збіжності цього ряду є інтервал. Обгрунтуйте це. **д) <u>Вказівка.</u>** Використайте **правило** відшукання області збіжності степеневого ряду з дійсними членами. **е) <u>Вказівка.</u> Радіус** збіжності знайдіть, використовуючи формулу (3.1). Областю збіжності цього ряду є півінтервал. Обгрунтуйте це. **№6.** $\ln 2$. **<u>Вказівки.</u> 1.** Розгляньте геометричний ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x},\ |x| < 1,$ проінтегруйте його на відрізку $[0; x] \subset (-1; 1)$, **2.** Покладіть, що $x = \frac{1}{2}$. **№7. <u>Вказівка.</u>** Користуючись <u>теоремою 5</u> (*про почленне диференціювання степеневих рядів*) продиференціюйте двічі ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. **№10 а) <u>Вказівка.</u>** Ряд для функції $e^{\frac{x}{4}}$ дістанемо з ряду для функції e^x (формула №9 а) заміною x на $\frac{x}{4}$. **б) <u>Вказівки.</u> 1.** $\boldsymbol{f(x)} = sin^2\, x = \frac{\mathbf{1 - cos\ 2x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{1}{2} cos\, \mathbf{2x}$ **.** **2.** Використайте формулу №9 в. **№11. <u>Вказівки.</u> 1.** Виконайте над заданою функцією тотожні перетворення, такі, щоб під знаком функції одержати вираз (x–2):

$$sin\frac{\pi}{4}x = sin\frac{\pi}{4}(x - 2 + 2) = sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{4}(x - 2).$$

2. Використайте формулу №9 в, в яку замість x підставте $\frac{\pi}{4}(x - 2)$.

V. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВИХ МОДУЛЯХ 4-6

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 4
«Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

1. Поняття n-вимірного евклідового простору. Множини точок n-вимірного евклідового простору. Відстань між точками в n-вимірному точковому просторі.

2. Околи точок. Поняття функції багатьох змінних.

3. Границя функції багатьох змінних.

4. Неперервність функції багатьох змінних. Теорема Вейєрштрасса. Теорема Больцано-Коші.

5. Означення частинних похідних та їх знаходження.

6. Диференційовність функції в точці. Диференціал функції.

7. Поняття частинних похідних вищих порядків.

8. Екстремуми функції багатьох змінних. Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму.

9. Достатні умови локального екстремуму. Дослідження функцій двох змінних на екстремуми.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 5
«Диференціальні рівняння»

10. Поняття про диференціальне рівняння. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння.

11. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

12. Однорідні диференціальні рівняння.

13. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння органічного зростання (спадання).

14. Моделювання процесів диференціальними рівняннями.

15.Означення диференціального рівняння 2-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв’язок диференціального рівняння.

16. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні).

17. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 6
«Ряди»

18. Числові ряди. Поняття числового ряду. Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду.

19. Збіжність додатних рядів. Перша та друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів. Ознака Коші збіжності додатних рядів. Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів.

20. Збіжність довільних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Теорема Лейбніца.

21. Сполучна властивість збіжних рядів. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.

22. Поняття функціональної послідовності. Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності.

23. Поняття функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду.

24. Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Веєрштрасса*). Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

25. Степеневі ряди. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус збіжності степеневого ряду. Властивості суми степеневого ряду.

26. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди.

27. Розвинення в степеневі ряди функцій e^x, $sin\,x$, $cos\,x$. Біномний ряд.

28. Розвинення в степеневі ряди функції $ln(1+x)$, $arctg\ x$. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

VI. ПРИКЛАДИ ВАРІАНТІВ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Змістовий модуль 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Варіант 1

І. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. В означенні **границі функції в точці** вставте слова, які пропущено: Нехай функція $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ визначена в деякому околі точки $a = (a_1; a_2;\ \dots\ ; a_n)$, крім, можливо, самої точки a.

Число *A* називається ***границею функції f в точці a***, якщо:

($\forall x$, 0<ρ(x,a)<δ): |*f*(*x*)–*A*|<ε

А	Б	В	Г
(∀ ε>0) (∀ δ=δ(ε)>0)	(∀ ε>0) (∃δ=δ(ε)>0)	(∃ε>0) (∃δ=δ(ε)>0)	(∃ε>0) (∀ δ=δ(ε)>0)

2. Стаціонарною точкою функції $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ називається точка $M_0(x_0; y_0)$, в якій:

А	$f'_x(x_0, y_0)$ не існує, $f'_y(x_0, y_0) = 0$
Б	$f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0)$ не існує
В	$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ не існують
Г	$f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$

3. Нехай функція $f(x, y)$ в деякому околі своєї стаціонарної точки (a, b) має неперервні всі частинні похідні другого порядку.

Точка (a, b) є ***точкою екстремуму*** функції $f(x, y)$, якщо

А	$f''_{xx}(a, b) \cdot f''_{yy}(a, b) - \left(f''_{xy}(a, b)\right)^2 = 0$
Б	$f''_{xx}(a, b) \cdot f''_{yy}(a, b) - \left(f''_{xy}(a, b)\right)^2 < 0$

В	$f''_{xx}(a,b)\cdot f''_{yy}(a,b)-\left(f''_{xy}(a,b)\right)^2>0$
Г	$f''_{xx}(a,b)\cdot f''_{yy}(a,b)-\left(f''_{xy}(a,b)\right)^2\leq 0$

4. Причому **точкою мінімуму,** якщо:

А	Б	В	Г
$f''_{xx}(a,\ b)>0$	$f''_{xx}(a,\ b)=0$	$f''_{xx}(a,\ b)<0$	$f''_{xy}(a,b)>0$

II. Знайдіть область визначення функції $z=arcsin\ \frac{x}{y^2}+arcsin\ \ (1-y)$, зробивши відповідні обґрунтування. Для виконання рисунку застосуйте комп'ютерну програму.

III. Знайдіть частинні похідні функції $z=(5x^2y-y^3+7)^3$ по кожній з незалежних змінних.

IV. Знайдіть повний диференціал функції $z=\frac{x+y}{x-y}$.

Змістовий модуль 5.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

<u>Варіант 1</u>

І. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. Диференціальним рівнянням називається співвідношення виду:

А	$F(x,\ y,\ dx,\ dy)=0$
Б	$F\left(x,\ y,\ y',y'',\ \dots\ ,\ y^{(n)}\right)=0$
В	$F\left(x,\ ln\,y\ ,\ y',y'',\ \dots\ ,\ y^{(n)}\right)=0$
Г	$F\left(y',y'',\ \dots\ ,y^{(n)}\right)=0$

2. Серед вказаних розв'язків виберіть **загальний розв'язок** *диференціального рівняння* $(1+2y)x\ dx+(1+x^2)\ dy=0$.

А	Б	В	Г
$\boldsymbol{y=\frac{(1+x^2)}{2}+\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{y=\frac{1+x^2}{3}-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{y=\frac{C}{2\ (1+x^2)}-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{y=\frac{C\ (1+x^2)}{2}-\frac{1}{2}}$

3. Диференціальне рівняння якого порядку записане $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x^3}{1+x^2}$?

А	Б	В	Г
1-го	2-го	3-го	це рівняння не диференціальне

II. Проінтегруйте диференціальне **рівняння з відокремлюваними змінними** $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$**.**

III. Проінтегруйте **однорідне диференціальне рівняння** 1-го порядку $xy' = y\,ln\frac{y}{x}$**.**

Змістовий модуль 6.
РЯДИ

Варіант 1

I. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то:

А	Б	В	Г
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} > 1$

2. Нехай дано два додатні ряди

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

і

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (B)$$

Якщо, починаючи з деякого номера n ($\forall n > n_0,\ n_0 \in \mathbf{N}$) мають місце нерівності $a_n \leq b_n$, то:

А	із збіжності ряду (А) випливає збіжність ряду (В)
Б	із збіжності ряду (В) випливає збіжність ряду (А)
В	обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно
Г	збіжність одного з рядів не залежить від збіжності іншого

3. Нехай

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

додатний ряд. Яка з умов гарантує його збіжність?

А	**Б**	**В**	**Г**
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

4. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ може бути знайдено за формулою:

А	**Б**	**В**	**Г**
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert$	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$	$R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$

II. Дослідіть ряд на збіжність, використовуючи ознаку Коші: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1} \right)^n$.

III. Встановіть ряд збігаться абсолютно чи умовно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n-1}$.

Завдання виконайте з повним обгрунтуванням, спираючись на відповідні ознаки.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.1. Функції однієї змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища шк., 1990. 383 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища шк., 1991. 366 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.3. Елементи теорії функцій і математичного аналізу. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища шк., 1992. 359с.
4. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: Навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. Київ: Вища шк., 1994. 455 с.
5. Дюженкова Л .І., Колесник Т. В., Ляшенко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. Київ: Вища шк., 2002. Ч.1. 462 с.
6. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 624с.
7. Свердан П. Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. Київ: Знання, 2008. 450 с.
8. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
9. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. Київ: Либідь, 2001. 248 с.
10. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: у 2-х ч.: 2-ге вид., перероб. і допов. / М. І. Шкіль. Київ: Вища школа, 1994. Ч. 1. 432 с.
11. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: у 2-х ч.: 2-ге вид., перероб. і допов. / М. І. Шкіль. Київ: Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.

Допоміжна література

12. Ботузова Ю. В. Диференціальне числення функції кількох змінних: розробки практичних занять в аспекті використання комп'ютерних, мобільних технологій та Інтернет-ресурсів у вивченні математичного аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2016.144 с.
13. Ботузова Ю. В. Ряди: розробки практичних занять в аспекті використання комп'ютерних, мобільних технологій та Інтернет-ресурсів у вивченні математичного аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2016. 132 с.
14. Дмитрієнко О. О. Прикладні задачі з математичного аналізу: навчальний посібник. Полтава: ТОВ «АСМІ», 2011. 117 с.
15. Призва Г. Й. Диференціальні рівняння та їх застосування. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища шк., 1992. 96 с.
16. Програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, спеціальностей A4 Середня освіта (Інформатика), F3 Комп'ютерні науки) / Упоряд. Соколенко Л. О. Чернігів, 2025. 6 с.
17. Соколенко Л. О. Математичний аналіз: Методичні рекомендації до навчання курсу «Математичний аналіз» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності 122 Комп'ютерні науки. Частина 1 «Вступ до аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної». [електронне видання] Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023. 152 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності А4 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності F3 Комп′ютерні науки

«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ»

[електронне видання]

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп′ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Рисунки *О. І. Полковник*

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 25.03.2026 р. Формат 60×90 1/16.
Ум. друк. арк. 6,28. Обл.-вид. 5,21. Зам. № 007.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
nuchk.tipograf@gmail.com