

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка

Кафедра математики

Олексій БАЛЮНОВ

ПРАКТИКУМ

з математичного аналізу

Частина 3

Диференціальне числення функції багатьох змінних

Чернігів 2026

УДК 517(07)

М 89

Рецензенти:

М. А. Синенко – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри кібербезпеки та математичного моделювання Національного університету «Чернігівська політехніка»

Л. Г. Філон – кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри математики Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка

М 89 Олексій БАЛЮНОВ. Практикум з математичного аналізу. Частина 3. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Навчальний посібник. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2026. 69 с.

УДК 517(07)

Навчальний посібник укладений відповідно до програми навчальної дисципліни «Математичний аналіз». Він містить матеріали для самоконтролю теоретичних питань та підготовки до практичних занять, зразки розв'язання типових вправ, завдання для самостійного розв'язування, які стосуються змістового модуля «Диференціальне числення функції багатьох змінних».

Практикум призначений для студентів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) першого рівня вищої освіти. Також він може бути корисний здобувачам інших спеціальностей, що опановують курс вищої математики, викладачам відповідних дисциплін закладів вищої освіти, фахової передвищої освіти, а також вчителям математики ЗЗСО.

Рекомендовано до друку вченою радою
природничо-математичного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка
(Протокол № 12 від 18 травня 2026 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Змістовий модуль 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

Тема 5.1. Поняття функції багатьох змінних, границя, неперервність.

1. Означення функції багатьох змінних. Области визначення та значень.
2. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції багатьох змінних.

Тема 5.2. Частинні похідні та диференціал функції багатьох змінних.

1. Поняття частинної похідної функції n змінних. Диференційовність функції багатьох змінних.
2. Повний диференціал. Похідні складної функції. неявно задана функція та її похідна. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
3. Частинні похідні та диференціали вищих порядків та техніка їх знаходження. Формула Тейлора.

Тема 5.3. Екстремуми функції багатьох змінних.

1. Поняття екстремуму функції n змінних, необхідні умови його наявності. Достатні умови екстремуму функції n змінних. Умовний екстремум.
2. Найбільше і найменше значення функції n змінних на обмеженій області та його відшукування.
3. Метод найменших квадратів.

ВСТУП

Одним із головних факторів в математичній підготовці вчителя математики займає навчальна дисципліна «Математичний аналіз». Вона є нормативною дисципліною циклу професійної підготовки освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)» підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти предметної спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) галузі знань А Освіта в Національному університеті «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. За відповідним навчальним планом здобувачі освіти її опановують впродовж 1-4 семестрів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є основні поняття та методи математичного аналізу, основи теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, основи теорії рядів, основи теорії поля.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є забезпечення фундаментальних знань основних понять, законів і методів математичного аналізу, їх практичного застосування, що є основою формування математичної та методичної компетентностей майбутніх педагогічних фахівців, а також засобом вивчення інших математичних курсів та суміжних дисциплін природничого циклу.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Математичний аналіз» є:

- засвоєння студентами фундаментальних понять математичного аналізу, що стосуються теорії функцій декількох змінних, а також методів їх дослідження;

-

- формування здатності використання математичних методів дослідження під час підготовки курсових робіт; підготовка студентів до науково-дослідної роботи,

- формування математичної та методичної компетентності майбутнього вчителя математики.

Програма навчальної дисципліни складається з наступних змістових модулів (ЗМ):

ЗМ 1. Вступ до математичного аналізу

ЗМ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної

ЗМ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної

ЗМ 4. Ряди

ЗМ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних

ЗМ 6. Інтегральне числення функції багатьох змінних

ЗМ 7. Поверхневі інтеграли. основи теорії поля

Навчальний посібник містить матеріали для опанування здобувачами освіти змістового модуля 5. Матеріал змістового модуля структуровано за темами відповідно до програми. В рамках кожної теми виокремлено питання, які розкривають її зміст.

З метою організації якісного засвоєння студентами питань теми у навчальному посібнику представлені: понятійний апарат, опорні твердження, питання для самоконтролю, джерела для самопідготовки. Значний масив матеріалів становлять приклади розв'язання типових вправ з кожної теми та завдання для самостійного розв'язування. У додатках наведено структура дисципліни «Математичний аналіз» та схема оцінювання навчальних досягнень студентів.

Розроблені матеріали мають на меті допомогти студентам-другого курсу якісно опанувати програмовий матеріал даного змістового модуля, зорієнтувати стосовно базових теоретичних питань теми, здійснювати самоконтроль знань теоретичного матеріалу. Розроблені практичні завдання допоможуть у підготовці до практичних занять та виконання індивідуальних завдань.

Практикум сприятиме самоорганізації систематичної самостійної роботи здобувачів освіти, зокрема в умовах дистанційного навчання.

Посібник стане у нагоді студентам, що вивчають курс математичного аналізу, викладачам закладів вищої освіти у процесі підготовки та викладання даної або аналогічної навчальної дисципліни та викладачам математики закладів фахової передвищої освіти.

Змістовий модуль 5

Диференціальне числення функції багатьох змінних

Тема 5.1. Поняття функції багатьох змінних, границя, неперервність

1. Означення функції багатьох змінних. Області визначення та значень.

Понятійний апарат: області визначення та значень, способи завдання функції, лінії та поверхні рівня.

Опорні твердження: графік функції двох змінних, алгоритм побудови ліній та поверхонь рівня.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 3, § 3 (п.п. 3.17, 3.18); [3] розділ 11 (п. 11.1); [4] розділ 2 (п. 2.1); [5] розділ 8 (п.п. 8.1, 8.1.2); [6], § 1.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення функції двох змінних.
2. Дайте пояснення області визначення функції двох змінних, в тому числі, застосовуючи геометричну інтерпретацію.
3. Що є графіком функції двох змінних?
4. Сформулюйте означення функції багатьох змінних.
5. Вкажіть способи задання функції багатьох змінних.
6. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

7. Що називається поверхнею рівня функції $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$?
7. Вкажіть процедуру побудови ліній, поверхонь рівня.
8. Як за допомогою ліній рівня можна отримати уявлення про характер зміни функції $z = f(x, y)$?
9. Наведіть приклади ліній рівня.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Розв'язання

Областю визначення функції є множина всіх точок, для яких вираз $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ визначено, тобто

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

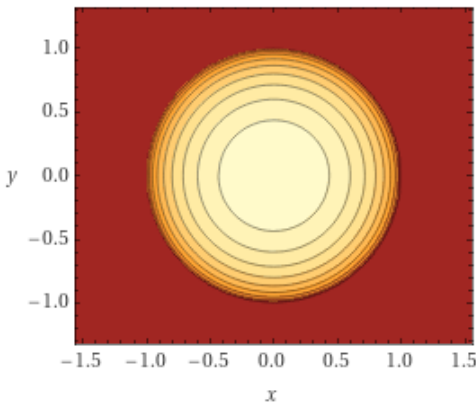


Рис. 1

Множина точок площини, координати яких задовольняють цю нерівність, є круг разом із його границею із центром в початку координат $(0; 0)$ радіуса 1 (Рис. 1).

Приклад 2. Знайдіть область визначення функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y}.$$

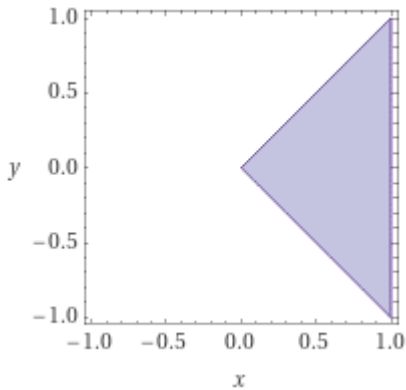


Рис. 2

Розв'язання

Дана функція визначена, якщо $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x, \\ x \geq y. \end{cases}$

Отже, областю визначення D є частина правої півплощини між прямими $y = -x$, $y = x$, не включаючи точки прямої $y = -x$ (Рис. 2).

Приклад 3. Що є графіком функції:

а) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; б) $z = x^2 + y^2$?

Розв'язання

а) Графіком функції є верхня частина сфери радіуса $R = 1$ із центром в початку координат (Рис. 3).

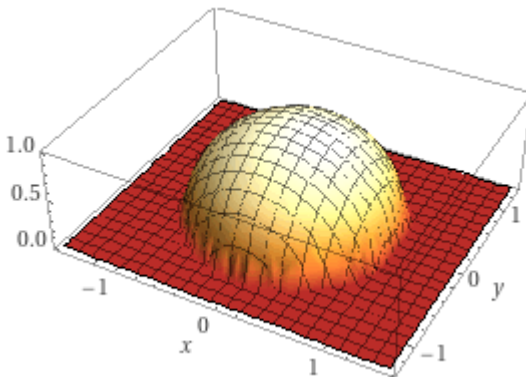


Рис. 3

б) Графіком функції є параболоїд обертання, утворений обертанням навколо осі OZ параболі, що лежить у площині YOZ , з рівнянням $z = y^2$ (Рис. 4).

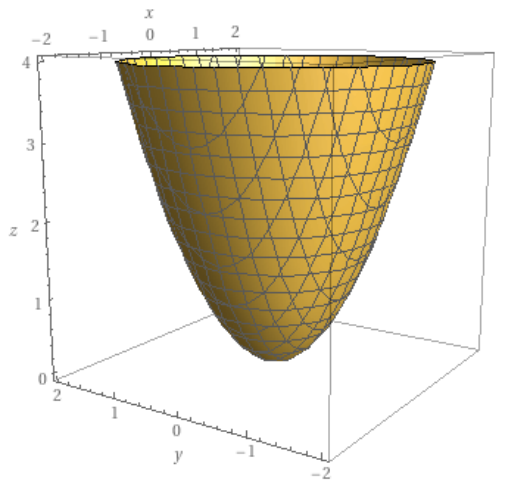


Рис. 4

Приклад 4. Побудуйте лінії рівня функції:

а) $z = x^2 + y^2 - 2y$; б) $z = \sqrt{xy}$.

Розв'язання

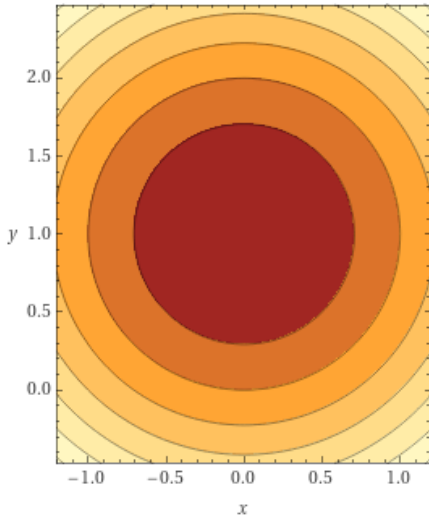


Рис. 5

а) За означенням, лінії рівня задаються рівністю $x^2 + y^2 - 2y = C$, $C = \text{const}$. Звідси, виділяючи повний квадрат, маємо $x^2 + (y - 1)^2 = C + 1$. Дане рівняння задає сімейство концентричних кіл із центром в точці $(0; 1)$ радіуса $R = \sqrt{C + 1}$, $C \geq -1$ (Рис. 5). Сама точка $(0; 1)$ є виродженою лінією рівня.

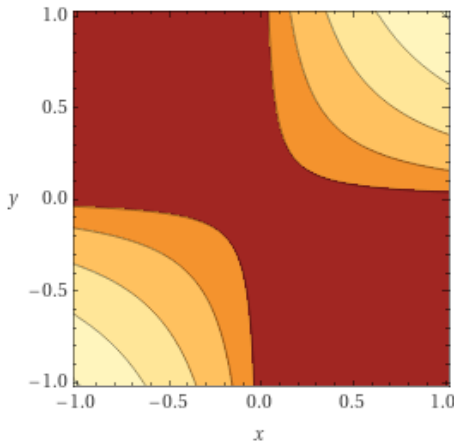


Рис. 6

б) Зазначимо, що $D(z): \{x, y \geq 0 \cup x, y \leq 0\}$. Рівняння лінії рівня визначимо із рівності $\sqrt{xy} = C$, або $xy = C^2$, $y = C^2/x$. Це рівняння сімейства гіпербол, розташованих у I та III чвертях (Рис. 6).

Приклад 5. Побудуйте поверхні рівня функції $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Розв'язання

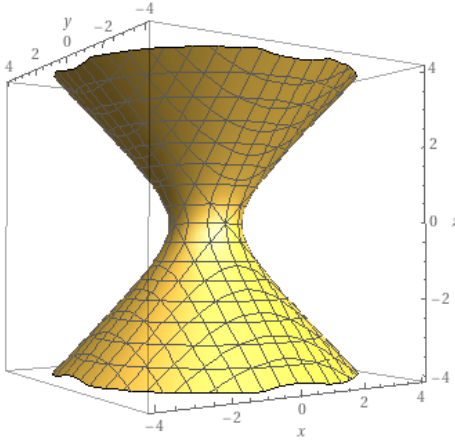


Рис. 7

Рівняння поверхні рівня визначимо із рівності $x^2 + y^2 - z^2 = C$. Це рівняння задає сімейство однопорожнинних гіперболоїдів обертання навколо осі OZ , один з яких для значення сталої $C = 1$ зображений на рисунку 7.

Приклад 6. Побудуйте ізотерми як лінії рівня функції $T = T(P, V)$ для двох значень температури повітря $t = 0^\circ\text{C}$, $t = 15^\circ\text{C}$, розглядаючи повітря як ідеальний газ.

Розв'язання

З рівняння стану ідеального газу Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu}RT$, де P, V, T відповідно тиск, об'єм і абсолютна температура газу, m, μ – маса і молярна маса (для повітря $\mu = 28,98 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$),

$R = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала, отримаємо функцію двох змінних $T = \frac{\mu}{mR}PV$. Припустимо, що маса повітря m становить 2 г. Враховуючи, що задані в умові температури в абсолютних величинах складають $0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ К}$, $15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ К}$, будемо графіки ліній рівня функції $T = T(P, V)$ (Рис. 8):

$$д) z = y(x^2 + 1); \quad е) z = \sqrt{16 - x^2 - 9y^2}.$$

4. Визначте поверхні рівня функції:

$$а) u = x + y + z; \quad б) u = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$в) u = x^2 + y^2 - z^2; \quad г) u = x^2 + y^2 - z;$$

2. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції багатьох змінних

Понятійний апарат: δ -окіл точки у просторі $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$; границя функції двох змінних; наближення до точки по різних траєкторіях; повторні границі функції; неперервність функції в точці; неперервність функції в області D ; точки, лінії розриву функції двох змінних; частинний та повний приріст функції; означення неперервності функції за допомогою границі повного приросту в точці.

Опорні твердження: відстань між точками у просторі $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$; незалежність границі від траєкторії наближення до точки; теорема про єдиність границі функції, теорема про обмеженість функції, що має границю; теореми про арифметичні дії з границями; теорема про існування найбільшого та найменшого значення в області D .

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 3, § 4 (п. 4.4), § 5 (п. 5.5); [2] розділ 14 (§ 14.1-14.3); [3] розділ 11 (п. 11.1); [4] розділ 2 (п. 2.4); [5] розділ 8 (п. 8.1.3); [6], § 2-3.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають δ -околом точки у просторі розмірності $n \geq 2$?
2. Як визначити відстань між двома точками у просторі розмірності $n \geq 2$?
3. Дайте означення границі функції двома способами: мовою ε, δ (Коші) та мовою послідовностей (Гейне).
4. Як знайти повторні границі функції двох змінних?

5. Як знайти похідну неявно заданої функції?
6. Сформулюйте теореми про функції, що мають границю.
7. Сформулюйте означення функції, неперервної в точці.
8. Сформулюйте означення функції, неперервної в області $D \subset \mathbb{R}^2$.
9. Які точки називаються точками розриву?

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть границю функції:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2}; & \text{б) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{b - \sqrt{b^2 + xy}}; \\
 \text{в) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{xy}{\operatorname{tg}(xy)}; & \text{г) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{x}{\sin(xy)}; & \text{д) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}; \\
 \text{е) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \text{є) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.
 \end{array}$$

Розв'язання

а) Нехай наближення до точки $(0; 0)$ відбувається по прямій $y = kx$. Тоді $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^3 + 2k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k^2}{1 + k^2}$, тобто значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, по якій відбувається наближення до точки $(0; 0)$. Отже, границя не існує.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{b - \sqrt{b^2 + xy}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy(b + \sqrt{b^2 + xy})}{b^2 - b^2 - xy} = \\
 &= -2b.
 \end{aligned}$$

$$в) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{xy}{tg(xy)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{tg(xy)}{xy}} =$$

$$[\text{Скористаємось наслідком із першої чудової границі}] = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg(t)}{t} \right]^{-1} = 1.$$

$$г) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{x}{\sin(xy)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{y \sin(xy)}{xy}} = \frac{1}{5}.$$

$$д) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = [1^\infty] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}} \right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$= e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{k^2x^4}{x^2+k^2x^2}} = e^0 = 1.$$

$$е) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\frac{0}{0} \right]. \text{ Скористаємось еквівалентно малою}$$

функцією $e^y - 1 \sim y$, якщо $y \rightarrow 0$. Тоді, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+y+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2$.

$$е) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]. \text{ Скористаємось полярними}$$

координатами $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, тоді умова $(x; y) \rightarrow \infty \sim r \rightarrow \infty$ і $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{r(\cos \phi + \sin \phi)}{r^2(1 - \cos \phi \sin \phi)} =$

$= \frac{\cos \phi + \sin \phi}{r(1 - \cos \phi \sin \phi)}$. Функція $\frac{\cos \phi + \sin \phi}{1 - (\sin 2\phi)/2}$ обмежена, $\frac{1}{r} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отже, $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0$.

Приклад 2. Знайдіть повторні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ та

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ функцій:

- а) $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$;
 б) $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2x+3y}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$;
 в) $f(x, y) = \frac{\sin 3x - tg 2y}{6x+3y}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$;
 г) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{x+2y}$, $x_0 = \infty, y_0 = \infty$.

Розв'язання

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$;
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$.
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(x+y)}{2x+3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1/2$;
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+y)}{2x+3y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{3y} = 1/3$.
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - tg 2y}{6x+3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x} = 1/2$;
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - tg 2y}{6x+3y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{tg 2y}{3y} = -2/3$.

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{x+2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{\infty} = 0;$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{x+2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{1 + \frac{2y}{x}} = 0.$$

Приклад 3. Чи існує границя та повторні границі функції:

а) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$;

б) $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$, $x_0 = 0, y_0 = 0$?

Розв'язання

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = -1,$

отже, повторні границі існують, проте $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} =$

$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0;kx)} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ приймає різні значення для

різних траєкторій, тому границя не існує.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin y}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$ повторні границі існують

і рівні, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\sin x + \sin y}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x + y}{x + y} = 1,$ отже, границя існує

і дорівнює 1.

Приклад 4. Знайдіть точки або лінії розриву функцій:

а) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; б) $z = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$; в) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$;

г) $z = \sin \frac{1}{xy}$; д) $u = \frac{1}{xyz}$; е) $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

Розв'язання

а) Область визначення функції $D(z) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \neq 0\}$, в точці $O(0; 0)$ функція не визначена, отже, вона є точкою розриву.

б) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 \neq y^2\}$, $|x| \neq |y|$, отже, прямі $y = \pm x$ є лініями розриву. Зауважимо, що множина значень функції $E(z) = \{z \in \mathbb{R}: |z| \geq 1\}$, графік функції показано на рисунку 9.

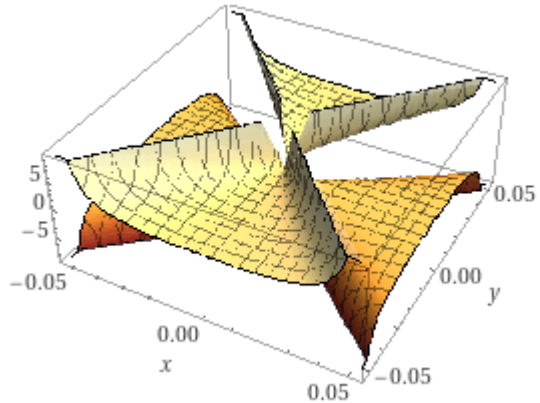


Рис. 9

в) Точки, в яких функція невизначена, знаходимо із нерівності $4 - x^2 - y^2 > 0$, $x^2 + y^2 < 4$. Таким чином, точками розриву є всі точки круга з центром в початку координат, радіуса 2, не включаючи його границі. Враховуючи,

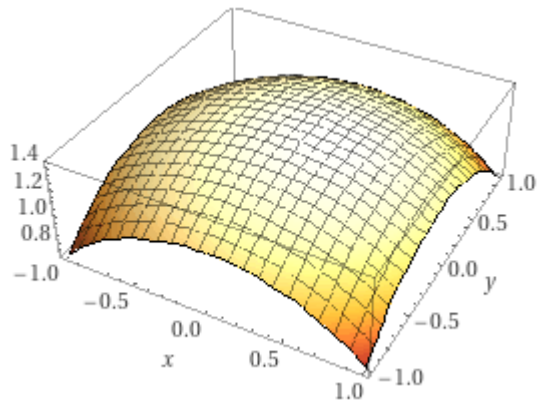


Рис. 10

що множина значень функції $E(z) = \{z \in \mathbb{R}: z \leq \ln 4\}$, графік функції має вигляд, як показано на рисунку 10.

г) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x \neq 0 \cap y \neq 0\}$. Лініями розриву функції є координатні осі.

д) $D(u) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x \neq 0 \cap y \neq 0 \cap z \neq 0\}$. Поверхнями розриву є координатні поверхні.

е) $D(u) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \neq 0\}$. Отже, всі точки розриву утворюють конічну поверхню обертання навколо осі OZ : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, графік якої показано на рисунку 11.

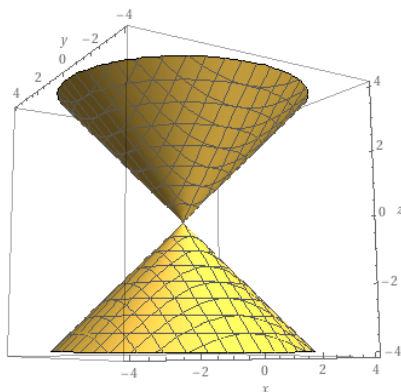


Рис. 11

Приклад 5. Дослідіть функції на неперервність:

а) $z = x - y^2$;

б) $u = x^2 - y^2 + 4z^2$.

Розв'язання

а) Функція задана однозначно, область визначення $D(z) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2\}$. Тому, вона є неперервною на всій площині XOY .

б) Функція задана однозначно, область визначення $D(u) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3\}$. Тому, вона є неперервною на всьому просторі XYZ .

Приклад 6. Дослідіть функції на неперервність в точці $(0; 0)$:

$$\text{а) } z = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & (x; y) = (0; 0); \end{cases} \quad \text{б) } z = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & (x; y) = (0; 0); \end{cases}$$

Розв'язання

а) Знайдемо $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0;kx)} \frac{x^3 k^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk^2}{1+k^2} = 0 = z(0;0)$. Отже, за означенням функція є неперервною в точці $(0; 0)$.

б) Знайдемо $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0;kx)} \frac{x^3 k^2}{x^3 + k^3 x^3} = \frac{k^2}{1+k^3}$, приймає різні значення для різних k , границя в точці $(0; 0)$ не існує, отже, функція в цій точці має розрив.

Приклад 7. Користуючись поняттям повного приросту функції, дослідіть на неперервність функцію, що описує параболоїд обертання навколо осі OZ , дотичний до площини XOY в початку координат.

Розв'язання

Вказана в умові поверхня описується рівнянням

$z = x^2 + y^2$. За означенням повний приріст

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2.$$

Скористаємось означенням неперервності $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0;0)} \Delta z = 0$ та

знайдемо границю повного приросту:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0;0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0;0)} (2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) = 0, \text{ отже,}$$

функція є неперервною.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайдіть границю функції:

а) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\sin 2xy}{xy}$; б) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\sqrt{1+x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}$;

$$в) \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{Вказівка: перейти до полярних}$$

координат та скористатися заміною на еквівалентно малу функцію, або правилом Лопітала);

$$г) \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad д) \lim_{y=x^2 \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y+x^2};$$

$$е) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty; \infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

2. Доведіть, що $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{3xy^2}{x^3 + y^3}$ не існує.

3. Знайдіть повторні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ та

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ функцій:

$$а) f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}, \quad x_0 = 0, y_0 = 0;$$

$$б) f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad x_0 = 0, y_0 = \infty;$$

$$в) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad x_0 = \infty, y_0 = \infty;$$

$$г) f(x, y) = \frac{x^y}{1+xy}, \quad x_0 = \infty, y_0 = +0.$$

4. Чи існує границя та повторні границі функції $f(x, y) = \log_x(x+y)$, $x_0 = 1, y_0 = 0$?

5. Знайдіть точки або лінії розриву функцій:

$$а) z = \frac{y^3}{x^2 + y^2}; \quad б) z = \frac{xy}{x+y}; \quad в) z = \frac{1}{\sin x \sin y};$$

$$г) u = \frac{2}{z^2 - x^2 - y^2}; \quad д) u = \frac{x+y+z}{z-xy}; \quad е) u = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 + z^2).$$

6. Дослідіть функції на неперервність:

$$а) z = x^2 + y^2; \quad б) u = x + y + z.$$

7. Дослідіть функції на неперервність в точці $(0; 0)$:

$$\text{а) } z = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & (x; y) = (0; 0); \end{cases} \quad \text{б) } z = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & (x; y) = (0; 0); \end{cases} .$$

Тема 5.2. Частинні похідні та диференціал функції багатьох змінних

1. Поняття частинної похідної функції n змінних.

Диференційованість функції багатьох змінних

Понятійний апарат: частинні похідні першого порядку функції двох змінних та n змінних; означення функції, диференційованої в точці.

Опорні твердження: теореми про необхідні та достатні умови диференційованості функції двох змінних.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 4 (§ 13, § 15); [2], розділ 15 (§ 15.1-15.2); [3] розділ 11 (п. 11.2); [4] розділ 2 (п. 2.4); [5] розділ 8 (п. 8.1.3); [6], § 2-3.

Питання для самоконтролю:

1. Вкажіть зв'язок між диференційованістю та існуванням частинних похідних.

2. Сформулюйте фізичний зміст частинних похідних.

2. Сформулюйте теореми про необхідні та достатні умови диференційованості функції двох змінних.

3. Сформулюйте наслідок із достатньої умови диференційованості функції в точці про неперервність функції в цій точці.

4. Наведіть геометричний зміст диференційованості функції двох змінних. Чи можливо це зробити для випадку $n > 2$?

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. За означенням знайдіть частинні похідні функції

а) $z = xy^2$; б) $u = \sin x \cos y \operatorname{tg} z$.

Розв'язання

а) Знайдемо частинні прирости функції $\Delta_x z, \Delta_y z$ в точці $M(x; y)$: $\Delta_x z = (x + \Delta x)y^2 - xy^2 = \Delta x y^2$, $\Delta_y z = x(y + \Delta y)^2 - xy^2 = 2xy\Delta y + \Delta y^2$. Складемо відношення частинних приростів до приростів незалежних змінних та перейдемо до границь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x y^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y^2 = y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2xy\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (2xy + \Delta y) = 2xy.$$

б) Частинні прирости функції:

$$\Delta_x u = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cos y \operatorname{tg} z;$$

$$\Delta_y u = -2 \sin \frac{2y + \Delta y}{2} \sin \frac{\Delta y}{2} \sin x \operatorname{tg} z;$$

$$\Delta_x u = \sin x \cos y \frac{\sin \Delta x}{\cos(z + \Delta z) \cos z}.$$

знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \operatorname{tg} z \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \cos x \cos y \operatorname{tg} z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \operatorname{tg} z \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\sin\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}{\frac{\Delta y}{2}} \right] = -\sin x \sin y \operatorname{tg} z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin x \cos y \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \Delta z}{\Delta z} \frac{1}{\cos(z + \Delta z) \cos z} \right] = \sin x \cos y \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Приклад 2. Знайдіть частинні похідні функції:

а) $z = \frac{\cos x}{\cos y}$;

б) $z = \operatorname{tg}(x + y)e^{x/y}$;

в) $z = xy \ln(xy)$;

г) $u = x^{y^z}$.

Розв'язання

а) При відшуванні $\frac{\partial z}{\partial x}$ функцію z розглядаємо як складну функцію однієї змінної x , змінна y має фіксоване значення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\cos y} (\cos x)'_x = -\frac{\sin x}{\cos y}. \text{ Аналогічно, } \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \left(\frac{1}{\cos y}\right)'_y = \\ &= \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = (tg(x+y))'_x e^{x/y} + tg(x+y) \left(e^{x/y} \right)'_x = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \frac{1}{y} tg(x+y) e^{x/y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (tg(x+y))'_y e^{x/y} + tg(x+y) \left(e^{x/y} \right)'_y = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} - \frac{x}{y^2} tg(x+y) e^{x/y}.$$

$$\text{в) } \frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\ln(xy) + \frac{x}{xy} y \right) = y(\ln(xy) + 1);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \left(\ln(xy) + \frac{y}{xy} x \right) = x(\ln(xy) + 1).$$

г) Для знаходження частинних похідних застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u(x, y, z) (\ln u(x, y, z))'_x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x^{y^z} (y^z \ln x)'_x = \frac{y^z}{x} x^{y^z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u(x, y, z) (\ln u(x, y, z))'_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} (y^z \ln x)'_y = z y^{z-1} \ln x x^{y^z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u(x, y, z) (\ln u(x, y, z))'_z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} (y^z \ln x)'_z = y^z \ln x \ln y x^{y^z}.$$

Приклад 3. Доведіть, що функція

$$z(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 0, & (x; y) = (0; 0); \end{cases}$$

має в точці $O(0; 0)$ частинні похідні, але не диференційована в цій точці.

Доведення

За означенням частинних похідних в точці $O(0; 0)$

$$z'_x(0; 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x; 0) - z(0; 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$z'_y(0; 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z(0; y) - z(0; 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = 1.$$

Для дослідження диференційованості запишемо приріст функції

$$\text{в точці } O(0; 0): z(x; y) - z(0; 0) = \frac{x^2 + y^2}{x + y} = x + y +$$

$+ \left(\frac{x^2+y^2}{x+y} - x - y \right) = z'_x(0; 0) x + z'_y(0; 0) y + \alpha(x; y) \sqrt{x^2 + y^2}$, де
 $\alpha(x; y) = \frac{2xy}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}$ - нескінченно мала функція, якщо
 $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, тобто при $(x; y) \rightarrow (0; 0)$. Покладемо $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; таким чином, $(x; y) \rightarrow (0; 0)$ при $n \rightarrow \infty$. Відповідна послідовність значень функцій $\alpha(1/n; 1/n) = \frac{2/n^2}{2\sqrt{2}/n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, не є нескінченно малою при $n \rightarrow \infty$. Тобто, $\alpha(x; y) \sqrt{x^2 + y^2} \neq o(\sqrt{x^2 + y^2})$ при $(x; y) \rightarrow (0; 0)$, і функція z не диференційована в точці $O(0; 0)$.

Приклад 4. Чи задовольняє функція $z = \arcsin \frac{x-y}{x+y}$ рівняння $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$?

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 \text{Знайдемо частинні похідні: } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \\
 &= \frac{y}{(x+y)\sqrt{xy}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)\sqrt{xy}} \quad .
 \end{aligned}$$

Підставимо в рівняння: $\frac{xy}{(x+y)\sqrt{xy}} - \frac{xy}{(x+y)\sqrt{xy}} = 0 \equiv 0$. Отже, функція задовольняє рівняння.

Приклад 5. Складіть рівняння в частинних похідних, якому задовольняє функція $z(x, y) = x f\left(\frac{x}{y^2}\right)$, f - довільна диференційована функція.

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 \text{Знайдемо частинні похідні: } \frac{\partial z}{\partial x} &= f + f' \cdot \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x f' \cdot \left(-\frac{x}{y^3}\right) = \\
 &= -\frac{x^2 f'}{y^3}. \text{ Тоді вказана функція задовольняє рівняння}
 \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Завдання для самостійного розв'язування

- За означенням знайдіть частинні похідні функції:
 - $z = x \cos y$;
 - $z = \sin x \cos y$.
- Знайдіть частинні похідні функції:
 - $z = x^3 + y^4 - 3x^2y$;
 - $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
 - $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
 - $z = tg \frac{y}{x^2}$;
 - $u = \sin(xy + yz)$;
 - $u = x^y y^z z^x$.
- Обчисліть значення частинних похідних u'_x, u'_y, u'_z функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$:
 - $u = -\frac{2x}{\sqrt{y^2+z^2}}, M_0(3; 0; 1)$;
 - $u = ze^{-(x^2+y^2)/2}, M_0(0; 0; 1)$;
 - $u = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2, M_0(0; 4; 1)$.
- Доведіть, що функція $z(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ має в точці $O(0; 0)$ частинні похідні, але не диференційована в цій точці.
- Чи задовольняє функція $z = z(x, y)$ вказане рівняння:
 - $z = \ln(x^2 + y^2), y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
 - $z = \arctg \frac{y}{x}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
 - $z = \frac{y}{(x^2+y^2)^5}, \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
- Складіть рівняння в частинних похідних, якому задовольняє функція $z(x, y) = x + f(xy)$, f – довільна диференційована функція.

2. Повний диференціал. Похідні складної функції. неявно задана функція та її похідна. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Понятійний апарат: частинні та повний диференціали функції двох змінних, інваріантність форми першого диференціала; складна функція двох змінних; приріст функції у даному напрямку, похідна за напрямом, градієнт, його фізичний та геометричний зміст; дотична площина та нормаль до поверхні; неявно задані функції.

Опорні твердження: застосування диференціала для наближеного обчислення значень функцій; теорема про диференціювання складної функції; алгоритм відшукування похідної функції, заданої неявно; теорема про перпендикулярність вектора градієнта до лінії рівня функції.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 4 (§ 15- 19); [2] розділ 15 (§15.1-15.2, §15.5); [3] розділ 11 (п.п. 11.3, 11.4); [4] розділ 2 (п.п. 2.7, 2.9, 2.11); [5] розділ 8 (п.п. 8.2.4, 8.2.5, 8.2.7, 8.4.4); [6], §§ 7, 8, 12.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають диференціалом функції двох змінних? Дайте узагальнення на функцію трьох, n змінних.
2. В чому полягає інваріантність форми першого диференціала?
3. Сформулюйте алгоритм застосування диференціала для наближеного обчислення значень функцій.
4. Який вигляд має складна функція двох змінних?
5. Дайте означення похідної за напрямом.
6. Дайте означення градієнта, вкажіть його фізичний та геометричний зміст.
7. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
8. Сформулюйте алгоритм диференціювання функції, заданої неявно.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть частинні диференціали функції:

а) $z = \operatorname{arctg}(x/y)$; б) $u = x^{yz}$.

Розв'язання

$$\text{а) } d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{1}{1+(x/y)^2} \frac{1}{y} dx = \frac{y dx}{x^2+y^2},$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{1+(x/y)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) dy = -\frac{x dy}{x^2+y^2}.$$

$$\text{б) } d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx = yz x^{yz-1} dx,$$

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy = z \ln(x) x^{yz} dy,$$

$$d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz = y \ln(x) x^{yz} dz.$$

Приклад 2. Обчисліть повний приріст та повний диференціал функції $u = ze^{-xy}$ в точці $M_0(0; 1; 1)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$; $\Delta z = 0,3$.

Розв'язання

$$\Delta u = (z + \Delta z)e^{-(x+\Delta x)(y+\Delta y)} - ze^{-xy},$$

$$\Delta u_{M_0} = 1,3 e^{-1,3} - e^0 \approx -0,65;$$

$$du = -zye^{-xy} dx - zxe^{-xy} dy + e^{-xy} dz,$$

$$du_{M_0} = -1 \cdot 0,1 + 0 + 1 \cdot 0,3 = 0,2.$$

Приклад 3. Знайдіть повний диференціал функції:

а) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $u = \operatorname{tg}(3x - 5y + z)$.

Розв'язання

$$\text{а) } dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} dy = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2};$$

$$\text{б) } du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = \frac{3dx - 5dy + dz}{\cos^2(3x - 5y + z)}.$$

Приклад 4. Обчисліть наближене значення виразу:

$$\text{а) } 0,97^{1,05}; \quad \text{б) } \frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98^4 \sqrt[4]{1,05^3}}}.$$

Розв'язання

а) Якщо функція $z(x, y)$ диференційована в точці $M_0(x_0, y_0)$, то її приріст $\Delta z = dz + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, де $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, тобто $\Delta z \approx dz$, звідки $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$.

Розглянемо функцію $z(x, y) = x^y, x > 0$. Нехай $x_0 = 1, y_0 = 1$. Тоді, $\Delta x = 0,97 - 1 = -0,03$, $\Delta y = 1,05 - 1 = 0,05$. Знайдемо $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = \ln x \cdot x^y$, $z(x_0, y_0) = z(1, 1) = 1$, $z'_x(x_0, y_0) = 1$, $z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Тоді, $0,97^{1,05} \approx 1 + 1 \cdot (-0,03) = 0,97$.

б) Розглянемо функцію $u(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y^4 \sqrt{z^3}}}$ і точку

$M_0(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. Тоді, $\Delta x = 1,03 - 1 = 0,03$, $\Delta y = 0,98 - 1 = -0,02$, $\Delta z = 1,05 - 1 = 0,05$.

$$u'_x = 2xy^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, \quad u'_y = \left(-\frac{1}{3}\right)x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{1}{4}}, \quad u'_z = \left(-\frac{1}{4}\right)x^2y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{5}{4}}.$$

Тоді, $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98^4 \sqrt{1,05^3}}} \approx 1 + 2 \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 - \frac{1}{4} \cdot 0,05 = 1,054$.

Приклад 5. Обчисліть значення похідної складної функції $u = u(x, y)$, де $x = x(t), y = y(t)$ у точці $t = t_0$:
 $u = \arctg(xy), x = t + 3, y = e^t, t_0 = 0$.

Розв'язання

Скористаємось формулою для диференціювання складної функції, заданої у вигляді $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$. Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y}{1+(xy)^2} + \frac{xe^t}{1+(xy)^2}, \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{1+3^2} + \frac{3}{1+3^2} = 0,4.$$

Приклад 6. Знайдіть частинні похідні складної функції $z = \ln(uv^2)$, де $u = 2x + y$, $v = \sqrt{xy}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2v^2}{uv^2} + \frac{2uv}{uv^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{2x+y} + \frac{1}{x} = \frac{4x+y}{2x^2+xy}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v^2}{uv^2} + \frac{2uv}{uv^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{y} = \frac{2x+2y}{2x^2+xy}. \end{aligned}$$

Приклад 7. Покажіть інваріантність форми першого диференціала функції $z = 3x^2y$, якщо $x = t \sin s$, $y = s \operatorname{tg}(2t)$.

Розв'язання

Повний диференціал функції $dz = z'_t dt + z'_s ds$, та, враховуючи правила диференціювання складної функції, матимемо:

$$\begin{aligned} dz &= (z'_x x'_t + z'_y y'_t) dt + (z'_x x'_s + z'_y y'_s) ds = \\ &= (6xy \sin s + 6x^2 s / \cos^2(2t)) dt + (6xy t \cos s + 3x^2 \operatorname{tg}(2t)) ds = \\ &= 6xy(\sin s dt + t \cos s ds) + 3x^2(2s dt / \cos^2(2t) + \\ &+ \operatorname{tg}(2t) ds). \end{aligned}$$

Вирази у дужках $\sin s dt + t \cos s ds = dx$, $\frac{2s dt}{\cos^2(2t)} + \operatorname{tg}(2t) ds = dy$, тому $dz = 6xy dx + 3x^2 dy$. Цей самий результат отримаємо, якщо розглядатимемо функцію z як функцію незалежних змінних x, y , що доводить інваріантність (незмінність) форми першого диференціала.

Приклад 8. Користуючись наближеними обчисленнями, знайдіть, на скільки зміниться площа ромба із діагоналями

$x = 3$ м, $y = 5$ м, якщо перша діагональ зменшиться на 1 мм, а друга – збільшиться на 3 мм ?

Розв'язання

Зауваження. У випадках, коли необхідно визначити значення функції при мінімальній зміні параметрів задачі, немає потреби у відшуванні точного значення. Натомість, з невеликою похибкою можна оцінити зміну значення функції, використовуючи меншу кількість обчислень.

Площа ромба $S = \frac{xy}{2}$ є функцією двох змінних. Тоді
 $\Delta S \approx dS = \frac{1}{2}(y dx + x dy) = \frac{1}{2}(5 \cdot (-0,001) + 3 \cdot 0,005) = 0,005$.
 Отже, площа ромба збільшиться приблизно на 50 см².

Приклад 9. При вимірюванні основ трапеції та її висоти отримали наступні результати: $a = 3,4$ м $\pm 0,002$ м, $b = 5,1$ м $\pm 0,003$ м, $h = 2,1$ м $\pm 0,001$ м. З якою абсолютною похибкою і відносною похибкою може бути обчислена площа трапеції?

Розв'язання

Із умови, абсолютні похибки вимірювань основ і висоти трапеції складають $|\Delta a| = 0,002$, $|\Delta b| = 0,003$, $|\Delta h| = 0,001$. Площа трапеції $S = (a + b)h/2$ є функцією трьох змінних. Для малих приростів аргументів приріст функції (похибка) наближено дорівнює диференціалу $\Delta S \approx dS = S'_a \Delta a + S'_b \Delta b + S'_h \Delta h$.

Максимальна абсолютна похибка обчислюється за формулою $|\Delta S| = |S'_a| \cdot |\Delta a| + |S'_b| \cdot |\Delta b| + |S'_h| \cdot |\Delta h|$,

$$S'_a = S'_b = \frac{h}{2}, S'_h = (a + b)/2,$$

$$|\Delta S| = \frac{h}{2} (|\Delta a| + |\Delta b|) + \frac{a+b}{2} |\Delta h| =$$

$$= \frac{2,1}{2} (0,002 + 0,003) + \frac{3,4+5,1}{2} \cdot 0,001 = 0,0095. \text{ Таким чином,}$$

$$S_{\text{трап}} = 8,925 \pm 0,0095 \text{ м}^2. \text{ Відносна похибка } \delta S = \frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% =$$

$$\frac{0,0095}{8,925} \cdot 100\% \approx 0,11\%.$$

Приклад 10. Знайдіть частинні похідні від функції, заданої неявно: $z^2 = xy - z + x^2 - 5$.

Розв'язання

1-й спосіб. Для відшукування частинних похідних від функції вигляду $F(x, y, z) = 0$ використаємо формули:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Вихідний вираз запишемо у вигляді $xy - z^2 - z + x^2 - 5 = 0$.

$$\text{Тоді } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+2x}{-2z-1} = \frac{2x+y}{2z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{-2z-1} = \frac{x}{2z+1}.$$

2-й спосіб. Частинні похідні шукаємо від обох частин заданого виразу за правилом диференціювання складної функції, враховуючи, що z є функцією невідомих x, y :

$$2Z \frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial z}{\partial x} + 2x, \text{ звідси виражаємо } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ через } x, y: \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{2z+1},$$

$$2Z \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2z+1}.$$

Приклад 11. Знайдіть рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8$ в точці $M_0(1; 1; 0)$.

Розв'язання

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = z(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ відповідно мають вигляд:

$$z - z_0 = z'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + z'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0);$$

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y-y_0}{z'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Знайдемо частинні похідні в заданій точці:

$$2x - 2zz'_x + 6y - z'_x = 0, \quad z'_x = \frac{2x+6y}{2z+1}, \quad z'_x(1; 1; 0) = 8;$$

$$2y - 2zz'_y + 6x - z'_y = 0, \quad z'_y = \frac{6x+2y}{2z+1}, \quad z'_y(1; 1; 0) = 8,$$

підставимо у рівняння

$$z = 8(x - 1) + 8(y - 1), \quad 8x + 8y - z - 16 = 0 \quad - \text{рівняння}$$

дотичної площини,

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{-1} \quad - \text{рівняння нормалі до поверхні в заданій точці.}$$

Приклад 12. Знайдіть похідну функції $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точці $M_0(1; 1; 1)$ в напрямі точки $M_1(3; 2; 3)$.

Розв'язання

Похідна функції $u = u(x, y, z)$ в напрямі вектора \vec{l} обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad \text{де } \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma -$$

напрявні косинуси вектора \vec{l} . Знайдемо частинні похідні в точці M_0 :

$$u'_x = \frac{2x}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}} \left(-\frac{z}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}},$$

$$u'_x(1; 1; 1) = -\frac{1}{2};$$

$$u'_y = \frac{2y}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}} \left(-\frac{z}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}},$$

$$u'_y(1; 1; 1) = -\frac{1}{2};$$

$$u'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}, \quad u'_z(1; 1; 1) = \frac{1}{2}.$$

Напряв задається вектором $\overrightarrow{M_0M_1} = (2; 1; 2)$. Напрявні косинуси вектора суть його нормовані по довжині координати:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3} = \cos \gamma, \quad \cos \beta = \frac{1}{3}. \quad \text{Тому,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} < 0, \quad \text{що означає спадання}$$

функції в цій точці в даному напрямі.

Приклад 13. Знайти величину і напрям градієнта функції в точці M_0 :

а) $z = \sqrt{2xy + y^2}$, $M_0(3; 2)$;

б) $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(0; 0; 0)$.

Розв'язання

а) За означенням градієнтом скалярної функції називається вектор із координатами $grad z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Обчислимо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{2xy+y^2}}, z'_x(3; 2) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2}} = 1/2;$$

$$z'_y = \frac{1}{2} \frac{2x+2y}{\sqrt{2xy+y^2}}, z'_y(3; 2) = \frac{3+2}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2}} = 5/4.$$

$grad z = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ – напрям максимального зростання функції в даній точці;

$$|grad z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{29}}{4};$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}, \cos \beta = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

б) $u'_x = 2xze^{x^2+y^2+z^2}$, $u'_x(0; 0; 0) = 0$;

$u'_y = 2yze^{x^2+y^2+z^2}$, $u'_y(0; 0; 0) = 0$;

$u'_z = e^{x^2+y^2+z^2} + 2z^2e^{x^2+y^2+z^2}$, $u'_z(0; 0; 0) = 1$,

отже, $grad z = (0; 0; 1) = \vec{k}$ – одиничний напрямний вектор осі OZ .

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайдіть частинні диференціали функції:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = \frac{y}{x^2}; & \text{б) } z = x \cos(3y); \\ \text{в) } u = x^2 yz + y^2 xz + z^2 xy; & \text{г) } u = e^{x^2+y^2+z^2}. \end{array}$$

2. Обчисліть повний приріст та повний диференціал функції:

$$\text{а) } z = x^2 y, M_0(1; 2), \Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2;$$

$$\text{б) } u = \sqrt{z} x^y, M_0(1; 2; 4), \Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2; \Delta z = 0,3.$$

3. Знайдіть повний диференціал функції:

$$\text{а) } z = \frac{y}{x^2}; \quad \text{б) } z = \ln \frac{x-y}{x+y};$$

$$\text{в) } u = xy + yz + zx; \quad \text{г) } u = x \arcsin \frac{y}{z}.$$

4. Обчисліть наближене значення виразу:

$$\text{а) } \sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ,$$

Вказівка: розглянути функцію $z = \sin x \operatorname{tg} y$ з точкою $M_0(x_0; y_0) = (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4})$;

$$\text{б) } 1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3.$$

5. Обчисліть значення похідної складної функції $u = u(x, y)$, де $x = x(t), y = y(t)$ в точці $t = t_0$:

$$\text{а) } u = \arcsin \frac{2x}{y}, x = \sin t, y = \cos t, t_0 = \pi;$$

$$\text{б) } u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}, x = \ln t, y = t^3, t_0 = 1;$$

$$\text{в) } u = \ln(e^{-x} + e^{-2y}), x = t^2, y = t^3/3, t_0 = 1.$$

6. Знайдіть частинні похідні складної функції:

$$\text{а) } z = \cos(uv), u = 2x + 3y, v = xy;$$

$$\text{б) } z = \ln(u^2 + v^2), u = x + y, v = xy.$$

7. Покажіть інваріантність форми першого диференціала функції:

$$\text{а) } z = 2xy^2, x = 2t s^3, y = t + s;$$

- б) $z = \frac{x}{y}, x = \frac{t}{s}, y = s/t;$
 в) $z = 3x + 2y, x = t^s, y = s^t.$

8. Користуючись наближеними обчисленнями, знайдіть:

а) Наближений приріст функції $z = \frac{2x+3y}{x^2-2y^2}$, якщо змінна x зміниться із значення $x_1 = 1,7$ до $x_2 = 2$, а y – з $y_1 = 1,1$ до $y_2 = 1,3$.

б) На скільки зміниться діагональ та площа прямокутника із сторонами $x = 9$ м, $y = 6$ м, якщо перша сторона зменшиться на 2 мм, а друга – збільшиться на 5 мм ?

в) На скільки зміниться площа бічної поверхні конуса з радіусом основи $R = 4$ м і висотою $H = 3$ м, якщо радіус збільшиться на 3 мм, а висота зменшиться на 4 мм ?

9. При вимірюванні основ трапеції та її висоти отримали наступні результати: $a = 3,4$ м $\pm 0,002$ м, $b = 5,1$ м $\pm 0,003$ м, $h = 2,1$ м $\pm 0,001$ м. З якою абсолютною похибкою і відносною похибкою може бути обчислена площа трапеції?

10. Знайдіть частинні похідні від функції, заданої неявно:

- а) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 5;$ б) $\ln z = x + 2y - z + \ln 2;$
 в) $x^2 + y^2 + z^2 = x - z;$ г) $e^{z^2} = \cos x \cos y \cos z.$

11. Знайдіть рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

- а) $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, M_0(1; -1; 2);$
 б) $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, M_0(1; 0; 1).$

12. Знайдіть похідну функції в точці M_0 в напрямі вектора \vec{l} та вкажіть поведінку функції в даній точці в даному напрямі:

- а) $z = x^2 - xy + y^2, M_0(1; 1), \vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j};$

$$\text{б) } u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), M_0(1; 2; 1), \vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

13. Знайти величину і напрям градієнта функції в точці M_0 :

а) $z = \operatorname{arctg} xy, M_0(1; 1);$

б) $u = xyz, M_0(2; 1; 1);$

в) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), M_0(1; 1; -1).$

3. Частинні похідні та диференціали вищих порядків та техніка їх знаходження. Формула Тейлора

Понятійний апарат: частинні похідні другого порядку від функції двох змінних, мішані частинні похідні; частинна похідна n -го порядку; диференціали вищих порядків; многочлен та формула Тейлора для функції двох змінних.

Опорні твердження: відшукання частинних похідних вищих порядків; теорема Шварца про рівність мішаних частинних похідних для функції двох змінних; теорема про достатню умову n -разів диференційованості функції в точці; алгоритм запису формули Тейлора для функції двох змінних; відшукання диференціалів вищих порядків.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 4, § 24 (п. 26.2); [2] розділ 15 (§15.4); [4] розділ 2 (п. п. 2.13, 2.14); [5] розділ 8 (п. п. 8.2.7, 8.2.8).

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення частинної похідної другого порядку від функції двох змінних, вкажіть їх кількість.

2. Які частинні похідні називаються мішаними?

3. Сформулюйте означення частинної похідної другого порядку для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по змінним x_i, x_j . За яких умов вона буде мішаною?

4. Запишіть формулу диференціала другого порядку для функції двох змінних.

5. Дайте означення диференціала n -го порядку.

6. Запишіть операторну формулу диференціала n -го порядку для функції двох змінних.

7. Сформулюйте формулу Тейлора для функції двох змінних.

8. Вкажіть алгоритм запису формули Тейлора для функції двох змінних.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть всі похідні другого порядку та перевірте, що $z''_{xy} = z''_{yx}$:

$$\text{а) } z = x^3 - 3x^2y - y^3; \quad \text{б) } z = \sin \sqrt{xy}.$$

Розв'язання

а) Знайдемо похідні першого порядку:

$$z'_x = 3x^2 - 6xy, \quad z'_y = -3x^2 - 3y^2;$$

знайдемо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = 6x - 6, \quad z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_x) = -6x,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = -6y, \quad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_y) = -6x. \text{ Як бачимо,}$$

мішані частинні похідні рівні.

$$\text{б) } z'_x = \frac{y \cos \sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}, \quad z'_y = \frac{x \cos \sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}};$$

$$z''_{xx} = -\frac{y^2 \sin \sqrt{xy}}{4(xy)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{y^2} \sin \sqrt{xy}}{4 \frac{3}{x^2}}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{3}{2} xy^{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{xy} - \frac{y^2}{2} \cos \sqrt{xy}}{y} =$$

$$= \frac{xy \sin \sqrt{xy} - \cos \sqrt{xy}}{4\sqrt{xy}};$$

$$z''_{yy} = -\frac{x^2 \sin \sqrt{xy}}{4(xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{x^2} \sin \sqrt{xy}}{4 \frac{3}{x^2}}, \quad z''_{yx} = \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{3}{2} yx^{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{xy} - \frac{x^2}{2} \cos \sqrt{xy}}{x} =$$

$$= \frac{xy \sin \sqrt{xy} - \cos \sqrt{xy}}{4\sqrt{xy}}.$$

Приклад 2. Перевірте, чи задовольняє функція

$$z = \ln(x^2 - y^2) \text{ диференціальне рівняння } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}, z''_{xx} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}, z'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}, z''_{yy} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Підставимо частинні похідні другого порядку в рівняння:

$$-\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = 0 \equiv 0, \text{ отримали тотожну рівність,}$$

отже, функція задовольняє диференціальне рівняння.

Приклад 3. Знайдіть частинні похідні вказаного порядку:

$$\text{а) } z = xe^{-y}, \frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}; \quad \text{б) } u = x^4 y^3 z^2, \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial z \partial x}.$$

Розв'язання

$$\text{а) } z'_x = e^{-y}, z''_{xy} = -e^{-y}, z'''_{xy^2} = e^{-y}, z^{(4)}_{xy^3} = -e^{-y},$$

$$z^{(5)}_{xy^4} = e^{-y};$$

$$\text{б) } u'_x = 4x^3 y^3 z^2, u''_{xy} = 12x^3 y^2 z^2, u'''_{xyz} = 24x^3 y^2 z,$$

$$u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2 y^2 z.$$

Приклад 4. Знайдіть диференціал другого порядку від функції $z = \sqrt{x^2 + y} + 2$.

Розв'язання

Диференціал другого порядку від функції $z = z(x, y)$ обчислюється за формулою

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned}
 z'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y+2}}, \quad z''_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y+2}}}{x^2+y+2} = \frac{y+2}{(x^2+y+2)^{\frac{3}{2}}}; \\
 z'_y &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y+2}}, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{4(x^2+y+2)^{\frac{3}{2}}}; \\
 z''_{xy} &= \frac{(x^2+y+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(y+2)(x^2+y+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y+2)^3} = \frac{x^2 - \frac{y}{2} - 1}{(x^2+y+2)^{\frac{5}{2}}}, \text{ отримаємо} \\
 d^2z &= \frac{y+2}{(x^2+y+2)^{\frac{3}{2}}} dx^2 + \frac{2x^2-y-2}{(x^2+y+2)^{\frac{5}{2}}} dx dy - \frac{1}{4(x^2+y+2)^{\frac{3}{2}}} dy^2.
 \end{aligned}$$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, якщо функція $z = z(x, y)$.

Розв'язання

Інтегруємо обидві частини рівняння, наприклад, по змінній x в межах $(0, x)$, при цьому в правій частині з'явиться деяка невідома функція $f(y)$, так як функція z залежить від y :

$$\int_0^x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(y).$$

Далі для знаходження z інтегруємо отриману рівність по змінній y , відповідно з'явиться деяка невідома функція $\varphi(x)$: $\int_0^y \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int_0^y f(y) dy + \varphi(x)$.

Припустимо, ми можемо знайти інтеграл $\int_0^y f(y) dy = \psi(y)$, остаточно маємо:

$$z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Приклад 6. Знайдіть розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, що задовольняє умовам: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

Розв'язання

$$\int_0^x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx = \int_0^x (x + y) dx, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + xy + f(y),$$

$$\int_0^y \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + xy + f(y) \right) dy,$$

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \psi(y) + \varphi(x), \text{ де } \psi(y) = \int_0^y f(y) dy.$$

Невідомі функції $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ визначимо із умов:

$$z(x, 0): x = \varphi(x);$$

$$z(0, y): y^2 = \psi(y). \text{ Тоді шуканий розв'язок:}$$

$$z(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{2} + x + y^2.$$

Приклад 7. Функцію $z = x^3 - y^3$ подайте у вигляді формули Тейлора в околі точки $M_0(-1; -1)$.

Розв'язання

Для функції двох змінних в околі точки $M_0(x_0; y_0)$ формула Тейлора має вигляд:

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k z(x_0; y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + R_n(x, y),$$

де $R_n(x; y)$ - залишковий член у формулі Тейлора n -го порядку.

Дана функція має неперервні частинні похідні будь-якого порядку. Оскільки всі частинні похідні порядку вище третього дорівнюють нулю, то залишковий член $R_n(x, y) = 0 \forall n > 3$ і формула Тейлора набуває вигляду:

$$\begin{aligned} z(x, y) = & z(-1; -1) + z'_x(-1; -1)(x + 1) + z'_y(-1; -1)(y + 1) + \\ & + \frac{1}{2!} (z''_{xx}(-1; -1)(x + 1)^2 + 2z''_{xy}(-1; -1)(x + 1)(y + 1) + \\ & + z''_{yy}(-1; -1)(y + 1)^2) + \\ & + \frac{1}{3!} (z'''_{xxx}(-1; -1)(x + 1)^3 + 3z'''_{xxy}(-1; -1)(x + 1)^2(y + 1) + \\ & + 3z'''_{xyy}(-1; -1)(y + 1)^2(x + 1) + z'''_{yyy}(-1; -1)(y + 1)^3). \end{aligned}$$

Знайдемо частинні похідні та їх значення в заданій точці:

$$\begin{aligned} z'_x = 3x^2, z'_x(-1; -1) = 3; \quad z'_y = -3y^2, z'_y(-1; -1) = -3; \\ z''_{xx} = 6x, z''_{xx}(-1; -1) = -6; \quad z''_{yy} = -6y, z''_{yy}(-1; -1) = 6; \\ z'''_{xxx} = 6, z'''_{yyy} = -6; \quad z''_{xy} = z'''_{xxy} = z'''_{xyy} = 0. \end{aligned}$$

Підставляючи у формулу, отримаємо:

$$z(x, y) = 3(x + 1) - 3(y + 1) - 3(x + 1)^2 + 3(y + 1)^2 + (x + 1)^3 - (y + 1)^3.$$

Приклад 8. Обмежуючись членами другого порядку включно, подайте функцію $z = x^y$ у вигляді формули Тейлора в околі точки $M_0(1; 2)$.

Розв'язання

$$z'_x = yx^{y-1}, z'_x(1; 2) = 2; z'_y = x^y \ln x, z'_y(1; 2) = 0;$$

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, z''_{xx}(1; 2) = 2;$$

$$z''_{yy} = x^y \ln^2 x, z''_{yy}(1; 2) = 0;$$

$$z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = (1 + y \ln x) x^{y-1}, z''_{xy}(1; 2) = 1.$$

Підставляючи у формулу, отримаємо:

$$z(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 2) + R_2(x, y), \text{ де залишковий член } R_2(x, y) = \frac{1}{3!} d^3 z(x, y).$$

Завдання для самостійного розв'язування

- Знайдіть всі частинні похідні другого порядку та перевірте, що $z''_{xy} = z''_{yx}$:
 - $z = (x + y)e^{xy}$;
 - $z = \cos(3x^2 - y^3)$.
- Перевірте, чи задовольняє функція $z = z(x, y)$ диференціальне рівняння.
 - $z = xe^{\frac{y}{x}}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$
 - $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$
- Знайдіть частинні похідні вказаного порядку:
 - $z = \ln(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};$
 - $z = \sin xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$
 - $z = e^{x^2 y}, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2};$
 - $u = x^4 y^3 z^2, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x \partial x \partial z}.$

4. Знайдіть диференціал другого порядку від функцій:
- а) $z = x^2 y^3$; б) $z = \frac{y}{x}$;
 в) $z = e^{xy}$; г) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. Розв'яжіть рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, якщо функція $z = z(x, y)$.
6. Знайдіть розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, що задовольняє умовам: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.
7. Функцію $z(x, y)$ подайте у вигляді формули Тейлора в околі точки $M_0(x_0; y_0)$:
- а) $z(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 5x - 2y + 4$, $M_0(-1; 1)$;
 б) $z(x, y) = x^2 y - xy^2 - 2xy$, $M_0(1; -1)$.
8. Обмежуючись членами другого порядку включно, розкладіть функцію $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ по формулі Маклорена.

Тема 5.3. Екстремуми функції багатьох змінних

1. Поняття екстремуму функції n змінних, необхідні умови його наявності. Достатні умови екстремуму функції n змінних. Умовний екстремум

Понятійний апарат: точки локального екстремуму функції двох змінних, екстремуми функції; стаціонарні точки функції двох змінних, або точки можливого екстремуму; локальні екстремуми функції багатьох змінних; матриця Гессе; умови зв'язку, точки умовного екстремуму, функція Лагранжа.

Опорні твердження: теорема про необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних; теорема про достатні умови локального екстремуму функції двох змінних; алгоритм дослідження на екстремум функції двох змінних; критерій Сильвестра визначеності за знаком матриці квадратичної форми; теореми про необхідні та достатні умови

локального екстремуму функції багатьох змінних; алгоритм методу невизначених множників Лагранжа; теореми про необхідні та достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 4 (§§ 28, 35, 36); [2] розділ 15 (§15.6); [3] розділ 11 (п. 11.5); [4] розділ 2 (п. 2.16); [5] розділ 8 (п. 8.5); [6], § 13.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення точки локального екстремуму функції двох змінних.
2. Що називається екстремумом функції двох змінних?
3. Які точки називаються стаціонарними?
4. Сформулюйте теореми про необхідні та достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
5. Сформулюйте критерій Сильвестра.
6. Як обчислюються коефіцієнти матриці Гессе?
7. Сформулюйте теореми про необхідні та достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.
8. Які екстремуму називаються умовними?
9. Вкажіть структуру функції Лагранжа.
10. Сформулюйте теореми про необхідні та достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних.
11. В чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа?
12. Наведіть алгоритм методу невизначених множників Лагранжа.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Складіть для заданої функції матрицю Гессе та дослідіть її щодо визначеності за знаком:

$$\text{a) } z = 2x^2 - 4xy + 3y^2;$$

$$\text{б) } u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 6yz.$$

Розв'язання

а) Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференціал другого порядку

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u$$

є квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних dx_1, dx_2, \dots, dx_n . Матриця цієї квадратичної форми із елементами $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ називається матрицею

$$\text{Гессе: } H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad \text{За критерієм}$$

Сильвестра матриця є додатно-визначеною тоді і лише тоді, коли усі її головні мінори додатні: $\Delta_i > 0, i = \overline{1, n}$, та матриця є від'ємно-визначеною тоді і лише тоді, коли знаки її головних мінорів чергуються, починаючи з від'ємного:

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$. Знайдемо частинні похідні другого порядку та складемо матрицю Гессе:

$$z'_x = 4x - 4y, z''_{xx} = 4, z''_{xy} = -4, z'_y = -4x + 6y, z''_{yy} = 6,$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}. \quad \text{Її головні мінори додатні: } \Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = 8 > 0.$$

Отже, матриця є додатно-визначеною.

б) Для функції трьох змінних матриця Гессе має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \text{ Знайдемо частинні похідні другого}$$

порядку: $z'_x = 2x - 2y - 4z$, $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{xz} = -4$, $z'_y = 4y - 2x - 6z$, $z''_{yy} = 4$, $z''_{yz} = -6$, $z'_z = 6z - 4x - 6y$, $z''_{zz} = 6$;

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -6 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Головні мінори даної матриці: } \Delta_1 = 2 >$$

$$0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -6 \\ -4 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-26) = -208 < 0.$$

Таким чином, умови критерію Сильвестра не виконуються, отже, матриця не є визначеною за знаком.

Приклад 2. Дослідіть на екстремум функцію:

а) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $(x, y > 0)$;

б) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

Розв'язання

а) Визначимо стаціонарні точки функції із необхідної умови існування екстремуму $\text{grad } z = 0$:

$$\begin{cases} z'_x \equiv y - \frac{50}{x^2} = 0, \\ z'_y \equiv x - \frac{20}{y^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 8, \\ x = \frac{20}{y^2}. \end{cases} \text{ Звідки точка } M_0(5; 2)-$$

стаціонарна або точка можливого екстремуму. Для відповіді на питання, чи існує в точці $M_0(5; 2)$ екстремум, перевіримо достатні

умови. Знайдемо частинні похідні другого порядку та складемо матрицю Гессе в точці M_0 :

$$z''_{xx} = \frac{100}{x^3}, z''_{xy} = 1, z''_{yy} = \frac{40}{y^3}; H = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix},$$

$$H|_{M_0} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Усі головні мінори матриці додатні:}$$

$\Delta_1 = \frac{4}{5} > 0, \Delta_2 = 3 > 0$, отже, матриця додатно-визначена, а в точці $M_0(5; 2)$ досягає свого мінімуму, причому $z_{min} = z(5; 2) = 30$.

б) Стаціонарні точки шукаємо як розв'язки системи:

$$\begin{cases} u'_x \equiv 3x^2 + 12y = 0, \\ u'_y \equiv 2y + 12x = 0, \\ u'_z \equiv 2z + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 72x = 0, \\ y = -6x, \\ z = -1. \end{cases} \text{ Маємо дві}$$

стаціонарні точки $M_1(0; 0; -1)$, $M_2(24; -144; -1)$. Частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = 12$, $z''_{xz} = 0$, $z''_{yy} = 2$,

$z''_{zz} = 2$, $z''_{zy} = 0$. Матриця Гессе має вигляд: $H = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

В точці $M_1(0; 0; -1)$: $H|_{M_1} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, усі головні мінори

рівні нулю, отже, матриця не може бути визначена за знаком, а точка M_1 не є точкою екстремуму. В точці $M_2(24; -144; -1)$:

$$H|_{M_2} = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 144 > 0, \quad \Delta_3 = 288 > 0.$$

Отже, точка M_2 є точкою локального мінімуму і $u(24; -144; -1) = -6913$.

в) Необхідна умова існування екстремуму функції в точці може бути записана у вигляді $df = 0$. Перший диференціал функції двох змінних, заданої у неявному вигляді $f(x, y, z) = 0$, запишеться: $dz = -\frac{1}{f'_z}(f'_x dx + f'_y dy)$. Тоді для того, аби точка $M_0(x_0; y_0)$ була стаціонарна, необхідне одночасне виконання

умов $dz = 0, f(M_0) = 0$, або $\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \\ f = 0. \end{cases}$ Отже, для визначення

стаціонарних точок функції складемо систему:

$$\begin{cases} f'_x \equiv 2x - z + 2 = 0, \\ f'_y \equiv 2y - z + 2 = 0, \\ f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо $x = y$. Додаючи перше і друге рівняння та враховуючи попередній результат, маємо: $z = 2x + 2$. Підставимо в третє рівняння системи:

$$2x^2 + (2x + 2)^2 - 2x(2x + 2) + 4x + 2(2x + 2) - 2 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0, x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow y_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6},$$

$$z_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{6}. \text{ Таким чином, точки } M_1(-3 + \sqrt{6}; -3 + \sqrt{6}),$$

$M_2(-3 - \sqrt{6}; -3 - \sqrt{6})$ – стаціонарні із відповідними значеннями функції. Для відповіді на питання, чи існує екстремум в цих точках, можна дослідити знак другого диференціала. Для неявної функції другий диференціал:

$$d^2z = -\frac{1}{f'_z}(f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2). \text{ Знайдемо частинні}$$

$$\text{похідні: } f'_z = 2z - x - y + 2 \quad f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{xy} = 0, \text{ та}$$

обчислимо значення другого диференціала у стаціонарних точках: $d^2z(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2) < 0 \Rightarrow$ точка M_1 є точкою

локального максимуму і $z_{max} = -4 + 2\sqrt{6}$;

$d^2z(M_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2) > 0 \Rightarrow$ точка M_2 є точкою локального мінімуму і $z_{min} = -4 - 2\sqrt{6}$.

Приклад 3. Знайдіть умовні екстремуми функцій:

а) $z = xy$, якщо $x + y = 1$;

б) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 = 25$;

в) $u = x^2 + y^2 + z^2$, якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b > c > 0$.

Розв'язання

а) Складемо функцію Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Знайдемо частинні похідні та привірнемо їх до нуля:

$$\begin{cases} L'_x \equiv y + \lambda = 0, \\ L'_y \equiv x + \lambda = 0, \\ L'_\lambda \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases} .$$

Розв'язавши систему, отримаємо

координати стаціонарної точки та відповідне значення параметра λ : $x = y = \frac{1}{2}$, при $\lambda = -\frac{1}{2}$. Для точки можливого екстремуму

$M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ визначимо знак другого диференціала для функції Лагранжа, вважаючи λ параметром. Знайдемо частинні похідні другого порядку та другий диференціал:

$$L''_{xx} = L''_{yy} = 0; L''_{xy} = 1; d^2L = 2dxdy.$$

Диференціюючи умову зв'язку, отримаємо $dx = -dy \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L < 0$, отже, точка $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ є точкою максимуму і

$$z_{max} = \frac{1}{4}.$$

б) Функція Лагранжа має вигляд:

$L(x, y, \lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$. Тоді система для знаходження стаціонарних точок запишеться:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + 12y + 8\lambda x = 0, \\ L'_y \equiv 12x + 4y + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda \equiv 4x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи виразимо y : $y = -\frac{1}{6}(x + 4\lambda x)$ і підставимо в друге рівняння: $x(34 - 9\lambda - 4\lambda^2) = 0$, звідки $\lambda_1 = -4\frac{1}{4}$, $\lambda_2 = 2$. Із третього рівняння системи знайдемо x .

$$\text{Для } \lambda_1 = -4\frac{1}{4}: 4x^2 + \frac{x^2}{36}\left(1 - 4 \cdot \frac{17}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4},$$

$$x = \pm\frac{3}{2}, \text{ відповідно, } y = \pm 4.$$

Для $\lambda_2 = 2$: $4x^2 + \frac{x^2}{36}(1 + 4 \cdot 2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 4$,
 $x = \pm 2$, відповідно $y = \mp 3$. Маємо дві пари стаціонарних точок $M_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2}; -4\right)$ та $M_3(2; -3)$, $M_4(-2; 3)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку, другий диференціал та диференціал умови зв'язку:

$$\begin{aligned} L''_{xx} &= 2 + 8\lambda; \quad L''_{yy} = 4 + 2\lambda; \quad L''_{xy} = 12; \\ d^2L &= (2 + 8\lambda)dx^2 + 24dxdy + (4 + 2\lambda)dy^2; \\ 8xdx + 2ydy &= 0. \end{aligned}$$

Визначимо знак другого диференціалу для кожної пари точок: $d^2L|_{\lambda_1} = -32dx^2 + 24dxdy - \frac{9}{2}dy^2$, та, враховуючи, що для цієї пари точок $dx = -\frac{2}{3}dy$, отримаємо: $d^2L|_{\lambda_1} < 0$, тобто в точках $M_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2}; -4\right)$ функція має локальний максимум, $z_{max} = 106\frac{1}{4}$;

$d^2L|_{\lambda_2} = 18dx^2 + 24dxdy + 8dy^2$, та із рівняння зв'язку $dx = \frac{3}{8}dy$ визначаємо, що $d^2L|_{\lambda_2} > 0$ і точки $M_3(2; -3)$, $M_4(-2; 3)$ є точками локального мінімуму, $z_{min} = -50$.

в) Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right). \text{ Для неї}$$

необхідна умова існування екстремуму задається системою:

$$\left\{ L'_x \equiv 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0; L'_y \equiv 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0; L'_z \equiv 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0; \right.$$

$$\left. L'_\lambda \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\}, \text{ звідки визначимо } \lambda \text{ та координати}$$

стаціонарних точок:
$$\left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ \lambda=-a^2; \\ y=0, \\ \lambda=-b^2; \\ z=0, \\ \lambda=-c^2; \end{array} \right. \text{ Отже, маємо три пари}$$

стаціонарних точок: якщо $\lambda = -a^2$, тоді $x = \pm a, y = z = 0$;

якщо $\lambda = -b^2$, тоді $y = \pm b, x = z = 0$; якщо $\lambda = -c^2$, тоді

$z = \pm c, x = y = 0$.

Для перевірки достатніх умов дослідимо знак другого диференціалу в стаціонарних точках:

$$d^2L = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) dx^2 + 2 \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) dy^2 + 2 \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) dz^2.$$

▪ $\lambda = -a^2$: в силу умови $a > b > c > 0 \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{b^2} < 0$,

$$1 - \frac{a^2}{c^2} < 0 \Rightarrow d^2L < 0, \text{ отже, точки}$$

$M_1(a; 0; 0), M_2(-a; 0; 0)$ є точками максимуму,

$$u_{max} = a^2;$$

▪ $\lambda = -c^2$: в силу умови $a > b > c > 0 \Rightarrow 1 - \frac{c^2}{a^2} > 0$,

$$1 - \frac{c^2}{b^2} > 0 \Rightarrow d^2L > 0, \text{ отже, точки}$$

$M_3(0; 0; c), M_4(0; 0; -c)$ є точками мінімуму,

$$u_{min} = c^2;$$

- $\lambda = -b^2$: знак d^2L визначити не можна, тому точки $M_5(0; b; 0), M_6(0; -b; 0)$ не є точками екстремуму.

Приклад 4. Серед усіх прямокутних паралелепіпедів заданого об'єму V знайдіть такий, який має найменшу площу зовнішньої поверхні.

Розв'язання

Із умови зв'язку $xuz = V$ вилучимо змінну z і зведемо задачу до задачі на безумовний екстремум функції двох змінних $S(x, y) = 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right)$, де S – площа зовнішньої поверхні, x, y – два довільні лінійні розміри паралелепіпеду. Стаціонарну точку

знайдемо як розв'язок системи:
$$\begin{cases} S'_x \equiv 2y - \frac{V}{x^2} = 0, \\ S'_y \equiv 2x - \frac{V}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x = \sqrt[3]{V}, \\ y = \sqrt[3]{V}. \end{cases}$ Очевидно, третій лінійний розмір $z = \sqrt[3]{V}$. Для перевірки існування мінімуму функції $S(x, y)$ в точці $M(\sqrt[3]{V}; \sqrt[3]{V})$

дослідимо матрицю Гессе $H = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$ в точці $M(\sqrt[3]{V}; \sqrt[3]{V})$:

$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ – додатно-визначена, отже, функція має мінімум. Шуканим паралелепіпедом є куб із стороною $\sqrt[3]{V}$.

Приклад 5. Знайдіть розміри резервуару найбільшого об'єму, який має форму прямого циліндра напівкруглого поперечного перерізу і має площу бічної поверхні 3π м².

Розв'язання

Задача полягає у відшуванні максимуму функції $V(r, h) = \pi r^2 h$ за умови, що $\frac{1}{2}S_{\text{бічн}} \equiv \pi r h + \pi r^2 = 3\pi$, або

$rh + r^2 = 3$. Функція Лагранжа має вигляд:

$L(r, h, \lambda) = \pi r^2 h + \lambda(rh + r^2 - 3)$. Стаціонарні точки і відповідні

значення λ знайдемо із системи:
$$\begin{cases} L'_r \equiv 2\pi r h + \lambda(h + 2r) = 0, \\ L'_h \equiv \pi r^2 + \lambda r, \\ L'_\lambda \equiv rh + r^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Із першого і другого рівняння системи виразимо відповідно

$h = -\frac{2\lambda r}{2\pi r + \lambda}$ і $r = -\frac{\lambda}{\pi}$, та підставимо у третє рівняння:

$-\frac{\lambda}{\pi} \cdot \left(-\frac{2\lambda r}{2\pi r + \lambda}\right) + \frac{\lambda^2}{\pi^2} = 3 \Rightarrow \lambda^2 = \pi^2$, $\lambda = \pm\pi$. З огляду на

$r = -\frac{\lambda}{\pi}$, значення $\lambda = \pi$ не має змісту, отже $\lambda = -\pi$, $r = 1$,

$h = 2$. Перевіримо достатні умови існування екстремуму в цій

точці: $L''_{rr} = 2\pi h + 2\lambda$, $L''_{rh} = 2\pi r + \lambda$, $L''_{hh} = 0$;

$d^2L(1; 2 - \pi) = 2\pi dr^2 + 2\pi dr dh$. Беручи диференціал від умови зв'язку $hdr + rdh + 2rdr = 0$, в стаціонарній точці отримаємо:

$dh = -4dr$. Підставимо у вираз для другого диференціала:

$d^2L(1; 2 - \pi) = 2\pi dr^2 - 8\pi dr^2 = -6\pi dr^2 < 0$, тобто знайдена

точка є точкою максимуму. Таким чином, максимальний об'єм резервуару $V_{max} = \pi \text{ м}^3$ досягається при радіусі $r = 1 \text{ м}$ і довжині твірної $h = 2 \text{ м}$.

Приклад 6. На поверхні еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 10$ знайдіть точку, найвіддаленішу від точки $M_0(0; 0; 1)$.

Розв'язання

Необхідно знайти максимум функції, що визначає відстань між двома точками $M(x; y; z)$ і $M_0(0; 0; 1)$:

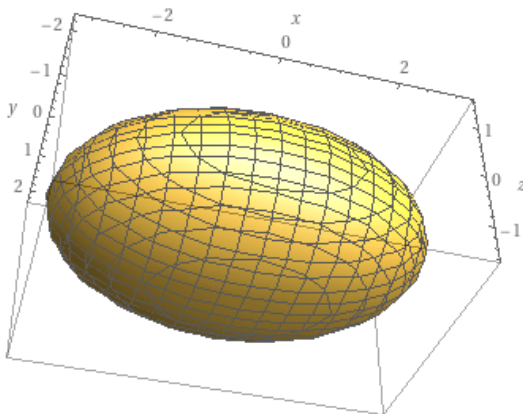
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$ з умовою зв'язку

$\varphi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 10$. Розглянемо рівносильну задачу

на максимум функції $u(x, y, z) = r^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$.

Функція Лагранжа має вигляд:

$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 10)$. Із
необхідної умови існування екстремуму знайдемо стаціонарні
точки: $\{L'_x \equiv 2x + 2\lambda x = 0, L'_y \equiv 2y + 4\lambda y = 0,$
 $L'_z \equiv 2(z - 1) + 8\lambda z = 0, L'_\lambda \equiv x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 10 = 0\}$.



Еліпсоїд (Рис. 12)
найбільш видовжений
вздовж осі OX , тому
 $x \neq 0$ і, із першого
рівняння системи
впливає $\lambda = -1$. Із
другого і третього
рівняння: $y = 0, z = -\frac{1}{3}$.
Із умови зв'язку
знаходимо:

$$x = \pm \frac{\sqrt{86}}{3} \approx \pm 3,09.$$

Обчислимо другий

Рис. 12

диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L = 2(1 + \lambda)dx^2 + 2(1 + 2\lambda)dy^2 + (2 + 8\lambda)dz^2,$$

$d^2L|_{\lambda=-1} = -2dy^2 - 6dz^2 < 0$, тобто, в точках $M_1\left(\frac{\sqrt{86}}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$,

$M_2\left(-\frac{\sqrt{86}}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$, що лежать на поверхні еліпсоїда, функція $r^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ має локальний максимум.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Складіть для заданої функції матрицю Гессе та дослідіть її щодо визначеності за знаком:

а) $z = 2x^2 - 4xy - 3y^2$;

б) $u = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz$.

2. Дослідіть на екстремум функцію:

- а) $z = xy(12 - x - y)$;
 б) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;
 в) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;
 г) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;
 д) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$.

3. Знайдіть умовні екстремуми функцій:
 а) $z = x + y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$;
 б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $x + y = 2$;
 в) $z = xy^2$, якщо $x + 2y = 1$;
 г) $u = 2x + y - 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
4. Серед усіх прямокутних трикутників заданої площі S знайдіть трикутник із найменшою гіпотенузою.
5. Вкажіть кут нахилу твірної до основи прямого кругового конуса із заданою площею бічної поверхні S , який забезпечує максимальний його об'єм.
6. В півкулю радіуса R вписаний прямокутний паралелепіпед. Вкажіть такі його лінійні розміри, для яких об'єм має найбільше значення.
7. Знайдіть довжину сторін прямокутного паралелепіпеда найбільшого об'єму, вписаного у еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Найбільше і найменше значення функції n змінних на обмеженій області та його відшукування

Понятійний апарат: функція двох змінних, неперервна в замкненій області; глобальний екстремум функції в замкненій області.

Опорні твердження: алгоритм знаходження глобального екстремуму функції у замкненій області.

Джерела для самопідготовки: [3] розділ 11 (п. 11.5); [4] розділ 2 (п. 2.16); [5] розділ 8 (п. 8.5.3); [6], § 14.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення найменшого (найбільшого) значення функції двох змінних в замкненій обмеженій області.

2. Чи існує загальний алгоритм відшукування глобального екстремуму функції багатьох змінних у заданій області?

3. Наведіть алгоритм знаходження глобального екстремуму функції двох змінних у замкненій області.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області \bar{D} , яка обмежена лініями:

а) $z = x^2 - y^2$, $\bar{D}: x^2 + y^2 \leq 4$;

б) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$,

$\bar{D}: \{y = x + 2, y = 0, x = 2\}$.

Розв'язання

а) Застосуємо алгоритм знаходження глобального екстремуму в замкненій області:

✓ Будемо замкнути обмежену область \bar{D} .

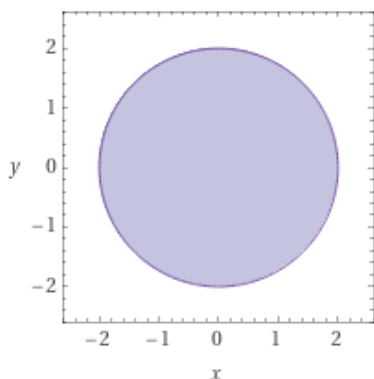


Рис. 13

Область \bar{D} – круг із центром в початку координат радіуса $r = 2$ разом із границею (Рис. 13).

✓ Знаходимо стаціонарні точки в середині області D ; обчислюємо значення функції у цих точках.

Стаціонарні точки шукаємо із необхідної умови існування екстремуму, яка призводить до розв'язання системи:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x = 0, \\ z'_y \equiv 2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ – координати критичної}$$

точки, яка лежить в середині області; $z(0; 0) = 0$.

✓ Знаходимо значення функції на границі області D .

Із рівняння кола знаходимо, що $y^2 = 4 - x^2$, підставимо в рівняння функції: $z(x) = 2x^2 - 4$.

Отримали функцію однієї дійсної змінної, для якої знайдемо глобальні екстремуми на відрізку $[-2; 2]$:

$z' \equiv 4x = 0$, $x = 0$ – стаціонарна точка; $z(0) = -4$ при $y = \pm 2$; на кінцях інтервалу $z(-2) = z(2) = 4$ при $y = 0$.

✓ Порівнюємо отримані значення функції: найбільше (найменше) з них і буде найбільшим (найменшим) значенням функції у всій області.

$z_{\text{найб}} = 4$ у точках $(-2; 0), (2; 0)$; $z_{\text{найм}} = -4$ у точках $(0; -2), (0; 2)$.

б) Область D – трикутник ABC (Рис. 14):

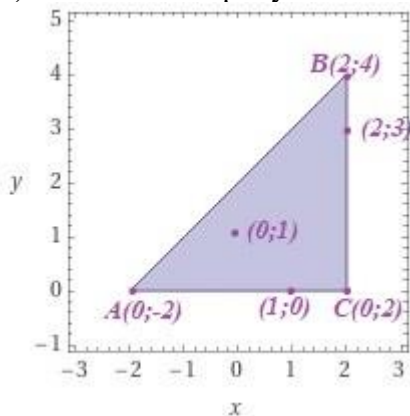


Рис. 14

Знайдемо критичні точки: $\begin{cases} z'_x \equiv 2x + 2y - 2 = 0, \\ z'_y \equiv 2x - 2y + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0, y = 1$, точка належить області, $z(0; 1) = 1$.

Розіб'ємо границю області на три відрізки AB, BC, AC , на кожному з яких дослідимо функцію на глобальний екстремум. На відрізку AC : $y = 0$, функція набуде вигляду:

$z(x) = x^2 - 2x$; $z' \equiv 2x - 2 = 0$, $x = 1$, а значення функції $z(1; 0) = -1$.

На відрізку AB : $y = x + 2$; $z(x) = x^2 + 2x(x + 2) - (x + 2)^2 - 2x + 2(x + 2)$, $z(x) = 2x^2$; $z' \equiv 4x = 0$, $x = 0, y = 2$; значення функції $z(0; 2) = 0$.

На відрізку BC : $x = 2$, функція набуде вигляду:

$z(y) = -y^2 + 6y$, $z' \equiv -2y + 6 = 0$, $y = 3$, а значення функції $z(2; 3) = 9$.

Нарешті, обчислимо значення функції на кінцях відрізків, тобто у вершинах трикутника: $z(-2; 0) = 8$, $z(2; 4) = 8$. Порівнюючи знайдені значення, маємо: $z_{\text{найб}} = z(2; 3) = 9$, $z_{\text{найм}} = z(1; 0) = -1$.

Приклад 2. Знайдіть глобальні екстремуми функції $z = x + y$ в еліпсі $x^2/3 + y^2 \leq 1$ (Рис. 15).

Розв'язання

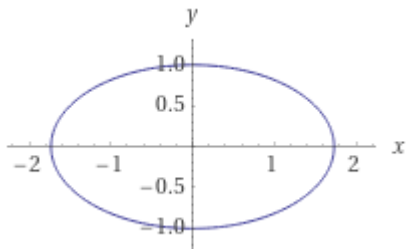


Рис. 15

Функція не має стаціонарних точок, оскільки $z'_x = z'_y = 1 \neq 0$. Це означає, що глобальних екстремумів вона досягає лише на границі області, тобто на еліпсі $x^2/3 + y^2 \leq 1$. Скористаємось параметричними рівняннями

еліпса та зведемо задачу до екстремуму функції однієї дійсної змінної: $x = \sqrt{3} \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Досліджувана функція від нової змінної буде: $z(t) = \sqrt{3} \cos t + \sin t$.

Стаціонарні точки знаходимо із умови:

$$z' \equiv -\sqrt{3} \sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Відрізку}$$

$t \in [0; 2\pi]$ задовольняють тільки дві точки $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{7\pi}{6}$, в яких і обчислимо значення функції:

$$z\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \text{ при } x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, z\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -2 \text{ при } x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $z_{\text{найб}} = z\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = 2$, $z_{\text{найм}} = z\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) = -2$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області \bar{D} , яка обмежена лініями:

а) $z = xy - 3xy - 2y$; $\bar{D}: \{x = 0, x = 4, y = 0, y = 4\}$;

б) $z = x^2y(4 - x - y)$, $\bar{D}: \{x = 0, y = 6 - x, y = 0\}$.

2. Знайдіть глобальні екстремуми функції $z = x + y$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

Вказівка: скористайтесь параметричними рівняннями кола:

$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t; t \in [0; 2\pi]$.

3. Метод найменших квадратів

Понятійний апарат: питання визначення тренду залежності між двома змінними; поняття апроксимації (згладжування) залежності між двома змінними; відхилення (похибка) лінії тренду від спостережуваних даних.

Опорні твердження: сутність методу найменших квадратів; апроксимація за допомогою лінійної, квадратичної залежності, показникової кривої.

Джерела для самопідготовки: [1] Гл. 4 (§37).

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте задачу наближення табличних даних відомою аналітичною залежністю.

2. За яким принципом будується крива апроксимації?

3. В чому полягає ідея методу найменших квадратів?

4. Яка функція називається функцією нев'язки?

5. Наведіть формули знаходження коефіцієнтів у методі найменших квадратів у випадках наближення лінійною залежністю, квадратичною залежністю.

6. Що характеризує коефіцієнт детермінації?

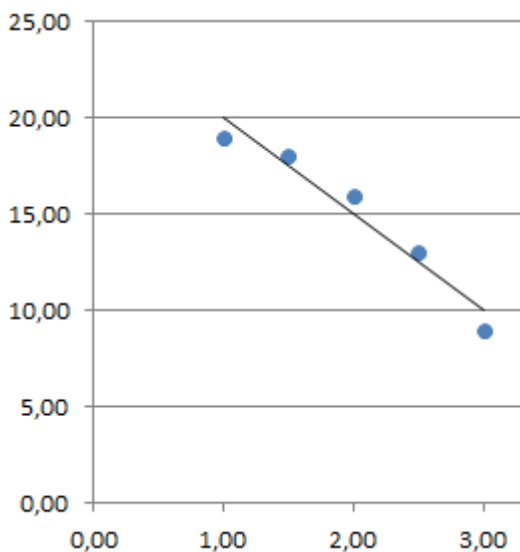
Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Для таблично-заданої функції (Табл. 1) методом найменших квадратів знайдіть коефіцієнти k і b емпіричної лінійної залежності $g(x) = kx + b$:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	19	18	16	13	9

Табл. 1

Розв'язання



Побудуємо точки $(x_i; y_i), i = \overline{1,5}$ на координатній площині (Рис. 16). Припустимо, що табличні дані відповідають лінійній залежності $g(x) = kx + b$. Коефіцієнти k і b знайдемо як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

Рис. 16

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot k + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot k + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Обчислимо значення сум:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 = 10;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 = 22,5;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 19 + 27 + 32 + 32,5 + 27 = 137,5;$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 19 + 18 + 16 + 13 + 9 = 75. \text{ Отримаємо систему:}$$

$$\begin{cases} 22,5k + 10b = 137,5, \\ 10k + 5b = 75; \end{cases} \quad \text{яку розв'яжемо методом}$$

виключення змінних. Із другого рівняння виразимо $b = 15 - 2k$ і підставимо в перше рівняння: $2,5k = -12,5$, $k = -5$, тоді $b = 25$. Отже, шукана емпірична лінійна залежність має вигляд:

$$g(x) = -5x + 25.$$

Приклад 2. Для таблично-заданої функції (Табл. 2) методом найменших квадратів виконайте апроксимацію лінійною та квадратичною залежностями, та порівняйте ступені адекватності цих моделей:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	19	18	16	13	9	4	-2	-9	-14	-19

Табл. 2

Розв'язання

Побудуємо точкову діаграму табличних даних (Рис. 17):

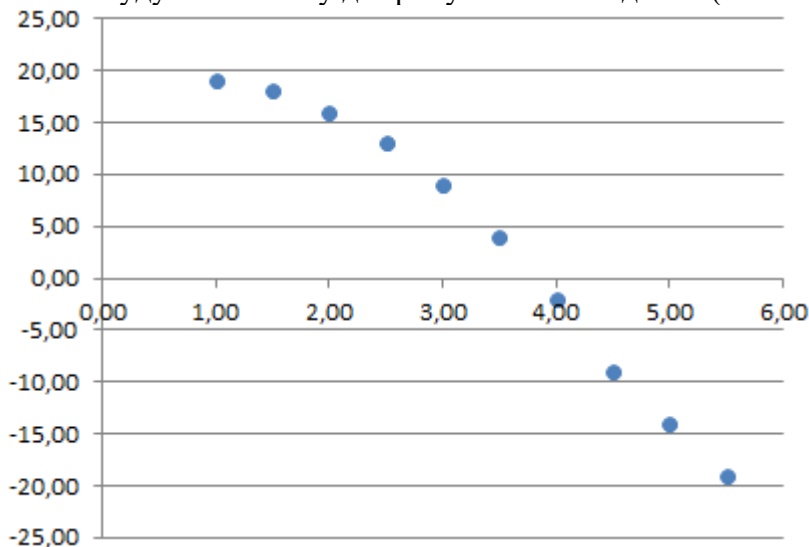


Рис. 17

Очевидно, що така залежність може бути апроксимована як прямою, так і параболою. Для автоматизації обчислень скористаємось електронною таблицею (Табл. 3). Проміжні розрахунки подані нижче.

i	x_i	y_i	g_i	$(y_i - g_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1,00	19,00	23,71	22,18	240,25	1,00	1,00	1,00	19,00	19,00
2	1,50	18,00	19,22	1,48	210,25	2,25	3,38	5,06	27,00	40,50
3	2,00	16,00	14,73	1,62	156,25	4,00	8,00	16,00	32,00	64,00
4	2,50	13,00	10,24	7,64	90,25	6,25	15,63	39,06	32,50	81,25
5	3,00	9,00	5,75	10,59	30,25	9,00	27,00	81,00	27,00	81,00
6	3,50	4,00	1,25	7,54	0,25	12,25	42,88	150,06	14,00	49,00
7	4,00	-2,00	-3,24	1,53	30,25	16,00	64,00	256,00	-8,00	-32,00
8	4,50	-9,00	-7,73	1,62	156,25	20,25	91,13	410,06	-40,50	-182,25
9	5,00	-14,00	-12,22	3,17	306,25	25,00	125,00	625,00	-70,00	-350,00
10	5,50	-19,00	-16,71	5,25	506,25	30,25	166,38	915,06	-104,50	-574,75
Σ	32,50	35,00	35,00	62,62	1726,50	126,25	544,38	2498,31	-71,50	-804,25

Табл. 3

Спочатку виконаємо вирівнювання за допомогою прямої $g(x) = kx + b$. Користуючись формулами із попереднього прикладу, складемо систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів k і b :

$$\begin{cases} 126,25k + 32,5b = -71,5 \\ 32,5k + 10b = 35 \end{cases}$$

Скористаємось матричним методом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь: $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Операції відшукування оберненої матриці і множення матриць виконаємо в електронній таблиці з точністю до 10^{-4} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0485 & -0,1576 \\ -0,1576 & 0,6121 \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0485 & -0,1576 \\ -0,1576 & 0,6121 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -71,5 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8,9818 \\ 32,6909 \end{pmatrix}$. Таким чином, пряма вирівнювання (апроксимаційна пряма) має вигляд: $g(x) = -8,9818x + 32,6909$.

Далі проведемо вирівнювання за допомогою квадратичної залежності $g(x) = ax^2 + bx + c$. Відповідно до методу

найменших квадратів коефіцієнти a, b і c визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

На підставі розрахунків, наведених в таблиці, складемо систему:

$$\begin{cases} 2498,3125a + 544,375b + 126,25c = -804,25, \\ 544,375a + 126,25b + 32,5c = -71,5, \\ 126,25a + 32,5b + 10c = 35. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0303 & -0,1970 & 0,2576 \\ -0,1970 & 1,3288 & -1,8318 \\ 0,2576 & -1,8318 & 2,8015 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2727 \\ -0,7091 \\ 21,8727 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, апроксимаційна парабола має вигляд:

$$g(x) = -1,2727x^2 - 0,7091x + 21,8727.$$

Порівняємо ступені адекватності цих моделей, обчисливши для кожної коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - g_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \text{ де } g_i - \text{наближене значення,}$$

обчислене за емпіричною формулою, \bar{y} - середнє значення.

Для прямої коефіцієнт детермінації $R^2 = 1 - \frac{62,6182}{1726,50} = 0,9637$, або $\sim 96\%$.

Обчислимо емпіричні значення g_i та квадрати відхилень від табличних даних для квадратичної апроксимації (Табл. 4).

g_i	$(y_i - g_i)^2$
19,8909	0,7937
17,9455	0,0030
15,3636	0,4050
12,1455	0,7302
8,2909	0,5028
3,8000	0,0400
-1,3273	0,4526
-7,0909	3,6446
-13,4909	0,2592
-20,5273	2,3326
Σ 35,0000	9,1636

Тоді коефіцієнт детермінації в цьому випадку

$$R^2 = 1 - \frac{9,1636}{1726,50} = 0,9947, \quad \text{або} \quad \sim 99\% .$$

Таким чином, дана система точок більш точно описується квадратичною залежністю (коефіцієнт детермінації вище, ніж для лінійної).

Табл. 4

Побудовані емпіричні лінії показані на рисунку 18.

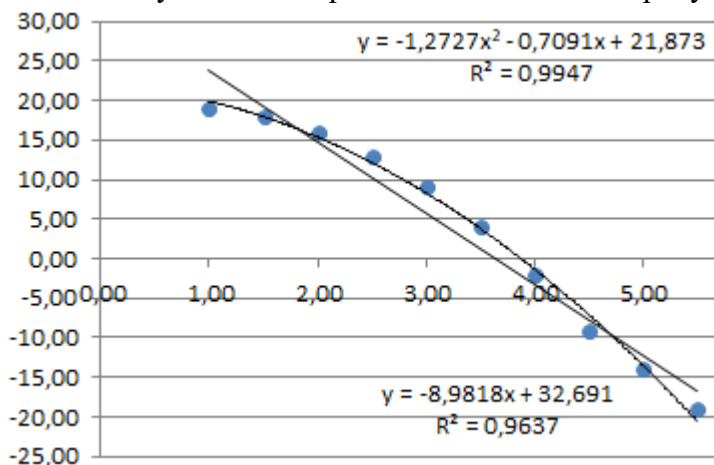


Рис. 18

Завдання для самостійного розв'язування

1. Для таблично-заданої функції методом найменших квадратів знайдіть коефіцієнти k і b емпіричної лінійної залежності $y = kx + b$:

x_i	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	4	-2	-9	-14	-19

2. Для таблично-заданої функції методом найменших квадратів виконайте апроксимацію лінійною та квадратичною залежностями, та порівняйте ступені адекватності цих моделей:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	-1,8	-1,3	-0,7	0,3	1,2	2,6	4,4	7,6	11,1	13,2

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна література

1. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення/П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. — 3-тє вид., випр. — К.: Техніка, 2007. — 600 с.
2. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. К.: Вища шк., 2003. Ч.2. 470 с.
3. Дюженкова Л.І., Носаль Т.В. Вища математика. Практикум. Київ : Вища школа, 1991. 404 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч.. Ч. 2. 3-тє вид., переробл. і допов. К: Вища школа, 2005. 510 с.
5. Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.
6. Вища математика: Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Навчальний посібник. [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. : В.А. Пилипенко, Є.В. Массалітіна. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 62 с.
7. Вища математика: Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. : Є.В. Массалітіна, О.О. Кільчинський.– Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 35 с.

Інформаційні ресурси

1. Блажівська І. П. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: дистанційний відео-курс. – Київ: YouTube канал IrinaBlazhievskaya, 2020 // <https://bit.ly/48ZAYJq>.