Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ПРИРОДНИЧОГО ХАРАКТЕРУ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ: ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Київ
2010

ББК
УДК

Рецензенти: *Ігнатенко М.Я.* – доктор педагогічних наук, професор, проректор з навчально-методичної роботи Республіканського вищого навчального закладу „Кримський гуманітарний університет"; м. Ялта;

Торбін Г.М. – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики НПУ імені М.П. Драгоманова;

Шаравіна Л.Ю. – вчитель вищої категорії, ст. вчитель, вчитель математики загальноосвітньої школи № 2, смт. Немішаєве, Київська область.

Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О.

Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

У навчальному посібнику представлено систему прикладних задач природничого характеру, визначені місце та роль окремих типів задач системи в курсі алгебри та початків аналізу старшої школи, запропоновано методику навчання учнів їх розв'язування. Задачі мають біологічний, хімічний, екологічний, медичний зміст. Навички та вміння, які здобудуть учні розв'язуючи ці задачі, допоможуть їм при засвоєнні вузівського курсу вищої математики.

Для вчителів математики та учнів, викладачів та студентів фізико-математичних і природничих факультетів.

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (Протокол № від 2009 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Розбудова шкільної освіти в Україні, зокрема шкільної математичної освіти, спонукає педагогічну науку на пошук нових принципів та критеріїв вибору змісту освіти, нових технологій, які ведуть до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.

Для того, щоб бути успішним в сучасному складному і мінливому суспільному житті, кожен випускник середньої школи повинен оволодівати певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язування прикладних задач.

Шкільний курс алгебри і початків аналізу – одна з тих навчальних математичних дисциплін, яка в значній мірі сприяє вирішенню завдання по формуванню особистості учня, його готовності до вибору майбутньої професії. Проте наявність знань з цієї дисципліни не означає, що вони стають активним потенціалом учнів, що учні здатні застосовувати їх в різних конкретних ситуаціях. Така здатність не з’являється стихійно. Вона формується в процесі цілеспрямованих педагогічних дій, що забезпечують набуття учнями таких знань, вмінь і навичок, які вони зможуть широко використовувати в повсякденному житті, в навчанні у вищому навчальному закладі чи трудовій діяльності.

Прикладні задачі – один з дієвих і ефективних засобів для формування в учнів вмінь і навичок застосовувати набуті в курсі алгебри і початків аналізу знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Їх вкрай недостатньо в чинних шкільних підручниках з математики. Пропонований навчальний посібник якраз і спрямований на те, щоб заповнити цю прогалину, допомогти вчителям математики, учням, магістрам, науковцям, авторам підручників з алгебри і початків аналізу з’ясувати теоретичні та практичні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу, запропонувати власні методичні рекомендації та засоби, що сприяють успішному вивченню учнями курсу алгебри і початків аналізу незалежно від обраного ними профілю навчання.

Однією з методичних вимог щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу є наповнення навчального процесу *прикладними задачами*, що задовольняють такі методичні вимоги: 1) задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань; 2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і чинним підручникам з курсу алгебри і початків аналізу щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв'язування; 3) прикладні задачі природничого характеру повинні демонструвати практичне застосування математичних ідей у різних галузях природознавства, зокрема в біології, генетиці, екології, хімії, медицині, фармації; 4) зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес, давати можливість демонструвати ефективне використання математичних знань на практиці; 5) поняття і терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням; 6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати існуючим на практиці, тобто бути реальними. У процесі розв'язування задач потрібно дотримуватись правил наближених обчислень, а також використовувати обчислювальні засоби, зокрема персональні комп'ютери. Саме цих вимог ми і дотримувались, створюючи пропонований посібник.

Посібник створений на основі результатів досліджень Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швеця В.О. і нашого шановного і незабутнього вчителя Слєпкань З.І.

Выражаємо глибоку вдячність професору Ігнатенку М.Я., доценту Торбіну Г.М., вчителю Шаравіній Л.Ю. за конструктивну критику і цінні поради під час підготовки рукопису посібника до друку.

Щиро сподіваємось, що запропонований посібник стане в нагоді і для організації самоосвіти, і для практичної роботи. Просимо читачів свої зауваження та пропозиції надсилати за адресою: 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, НПУ імені М.П. Драгоманова, кафедра математики і теорії та методики навчання математики.

Автори

РОЗДІЛ І

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Володіння навичками математичної діяльності та вміннями їх застосовувати до розв'язування різноманітних проблем є запорукою успішної участі особистості у сучасному суспільному житті.

Одним із вихідних положень, на які нині спирається система вітчизняної математичної освіти, є спрямованість навчання математики на забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних їм у повсякденному житті, достатніх для вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи, отримання якісної професійної освіти на наступних етапах. Сказане потребує додаткових уточнень.

Аналіз матеріалів звіту про світовий розвиток [41], які підготовлені світовим банком на основі тестування математичних і природничих знань учнів і студентів окремих розвинутих країн, серед яких були і країни СНД, показує відмінності розуміння значимості цих знань, а, відповідно, і різне ставлення до їх формування. Так, наприклад, якщо акцентувати увагу в навчанні учнів на одній із таких цілей навчання: 1) формувати систему знань; 2) навчити використовувати знання на практиці; 3) навчити використовувати знання в нестандартних ситуаціях, то окреслюється різне бачення окремими країнами ступеня їх важливості (рис. 1). На рис. 1 зображені відхилення від середнього значення вибірки школярів 9-13 років.

Графіки, які наведені, свідчать про те, що у країнах колишнього СРСР традиційно пріоритетною була ціль сформувати в учнів середніх шкіл глибокі та міцні математичні і природничі знання, а двом іншим цілям приділялось уваги менше. В інших країнах, як видно на рис. 1, пріоритетність цілей інша.

Україна, ставши самостійною державою, реформуючи систему освіти, намагається виправити такий ухил. У всіх подальших державних нормативних документах, які стосуються проблеми змісту математичної освіти, вимог до математичної підготовки учнів, профілізації школи тощо, говориться про посилення прикладної спрямованості курсу математики (ціль 3). Заміна когнітивно-інформаційної парадигми освіти на компетентнісну не тільки заохочує виконувати це, але і зобов'язує. Стверджувати, що вже багато зроблено у цьому напрямі, неможливо в силу різних причин: інерційності системи освіти, складності у розв'язуванні даної проблеми, відсутності належного матеріального забезпечення і т.д. Але просування вперед, хоча і малі, все-таки є.

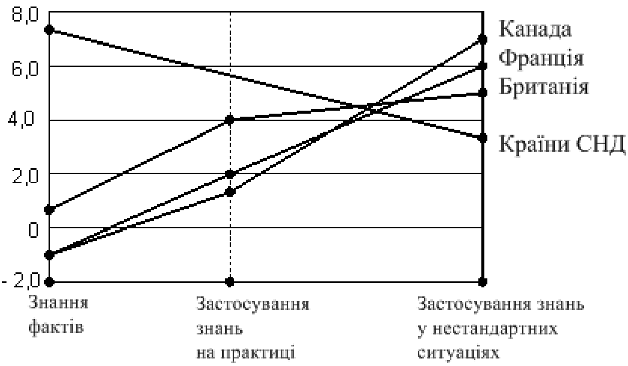

Рис. 1

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики як проблема, яку необхідно вирішити, та як мета навчання математики задекларовані у „Концепції математичної освіти 12-річної школи" [12], у „Концепції профільної освіти у старшій школі" [13], у „Державному стандарті базової шкільної середньої освіти: освітня галузь Математика" [10], у програмах з математики для середньої школи та в інших документах. На розробку технологій її розв'язування були спрямовані наукові дослідження М.Я. Ігнатенка, З.І. Слєпкань, Л.О. Соколенко, А.В. Прус, В.О. Швеця та інших українських математиківметодистів. Зокрема, вони досліджували і продовжують досліджувати проблеми прикладної спрямованості шкільних курсів алгебри та початків аналізу, стереометрії, інтегрованого шкільного курсу „Математика" і т.д. Менш успішно, поки що, ця проблема вирішується у шкільних підручниках із математики нового покоління.

Так що ж це таке – „прикладна спрямованість шкільного курсу математики"? Вперше означення цього поняття було дано радянським педагогом-математиком В.В. Фірсовим. Згодом воно вдосконалювалось іншими вченими. У нашому розумінні сутність **прикладної спрямованості шкільного курсу математики** полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання математики у напрямку:

- здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків математики з практикою;
- набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності.

Остання теза передбачає включення в навчання математики таких специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем, зокрема для розв'язання ***прикладних задач***, під якими ми розуміємо задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату.

Часто, поряд з прикладною спрямованістю шкільного курсу математики, говорять про ***практичну спрямованість навчання*** математики. У нашому розумінні сутність практичної спрямованості навчання математики полягає в спрямованості цілей, змісту, засобів і методів навчання на формування в учнів вмінь і навичок розв'язування математичних задач.

Зрозуміло, що в реальному процесі навчання прикладна і практична спрямованості мають функціонувати спільно, доповнюючи одна одну.

Алгебра і початки аналізу – одна з навчальних дисциплін шкільного курсу математики, яка вивчається у старшій школі. Проеціюючи вище викладені міркування на цей предмет, приходимо до наступних трактувань:

1) **Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу** – це орієнтація цілей, змісту і засобів навчання цього предмета у напрямку:

- здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків алгебри і початків аналізу з практикою;
- набуття учнями під час вивчення даного предмета характерних для математичної діяльності знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності.

2) **Практична спрямованість навчання шкільного курсу алгебри і початків аналізу** – це спрямованість цілей, змісту, засобів і методів навчання на розв'язання математичних задач і вправ алгебраїчними методами та методами математичного аналізу.

Радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – прикладні задачі, розв'язування яких потребує глибоких знань як з математики, так і з інших дисциплін.

Необхідно зазначити, що процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання.

В узагальненому вигляді це:

- переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики (І етап, **створення математичної моделі**);
- розв'язування отриманої математичної задачі (ІІ етап, **дослідження математичної моделі**);
- інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (ІІІ етап, **інтерпретація розв'язків**).

Схематично процес розв’язування прикладної задачі зображено на рис. 2.

(ПЗ – прикладна задача, МЗ – математична задача, РМЗ – розв’язання математичної задачі, РПЗ – розв’язок прикладної задачі).

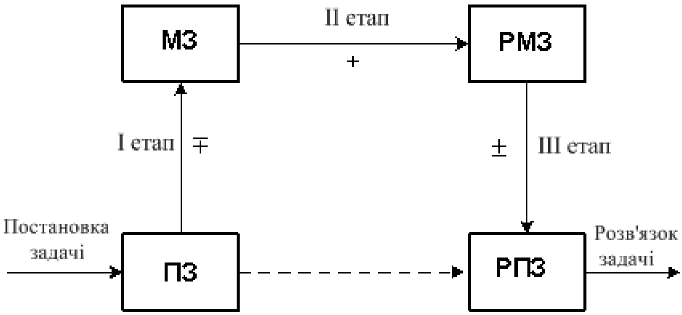

Рис. 2

Спеціальні дослідження показують, що найбільш складним для учнів є I етап ($\mp$ – дуже слабко володіють навичками перекладу ПЗ з природної мови на мову математики, створення адекватної математичної моделі). Якщо ж учням запропонувати готову або допомогти створити математичну модель прикладної задачі (рівняння, систему рівнянь, функцію тощо), то з її розв’язанням вони вправляються добре (+ – добре). Менш успішним, порівняно з II етапом, є III етап ($\pm$ – не завжди учні вміють інтерпретувати розв’язок математичної задачі як розв’язок прикладної задачі).

Слід зазначити, що навчання учнів розв’язування прикладних задач – завдання не з легких. Труднощі виникають і в тих, хто навчає, і в тих, хто вчиться.

Для організації ефективної навчальної діяльності учнів із розв’язування прикладних задач нами виокремлені (для кожного із вказаних вище етапів) відповідні методичні прийоми і орієнтовні дії (найбільші загальні):

I етап:
- використати евристичні запитання (евристичні приписи, спеціальні евристики, які застосовуються для вивчення конкретного навчального матеріалу);
- абстрагуватися від властивостей об'єкту, несуттєвих для побудови адекватної моделі;
- допомагати учням чітко вказувати на відмінності між об'єктом та його моделлю;
- формулювати умову та вимогу прикладної задачі на мові математики.

II етап:
- використати (за необхідності) джерела додаткових даних і теоретичних відомостей;
- використати ілюстративні креслення, графіки або ескізи, які допомагають знайти розв'язання задачі;
- використати (за необхідності) математичні задачі-двійники;
- використовувати систематично ІКТ для виконання рисунків, графіків, проведення обчислень;
- довести знайдений розв'язок до числового значення або розрахункової формули.

III етап:
- здійснити відбір тих розв'язків математичної задачі, які будуть розв'язками прикладної задачі, посилаючись на область визначення даних задачі, здійснюючи перевірку розв'язку;
- оцінити (за необхідності) ступінь точності отриманих розв'язків.

Зазначимо, що більш детально ці прийоми та дії описані у навчальному посібнику [38]. Проілюструємо вище сказане на прикладах.

Розглянемо на конкретних прикладах методику розв'язування прикладних задах із посібника [38] та її особливості, які потрібно враховувати.

Задача 1.1. Жінки індіанських племен, які живуть біля річки Амазонки, під час збирання насіння водяних рослин часто беруть із собою своїх маленьких дітей. Для безпеки вони кладуть їх на листя амазонського латаття. Кожен лист у поперечнику має до 2 м, а його краї високо загнуті вгору. Тому малюкам є де погратись і вони з листка не випадуть. Один дослідник для перевірки вантажопідйомності листка латаття насипав на нього 10 відер піску. Тільки тоді лист потонув. Яку масу може витримати один такий листок амазонського латаття?

Розв'язання задачі

І етап. Зрозуміло, що учні досить погано уявляють собі таку рослину, як амазонське латаття, зокрема, яку форму вона має. Демонструємо їм за допомогою комп'ютера ілюстративний матеріал (рис. 3-4).

Рис. 3

Рис. 4

Після перегляду цих презентацій демонструємо учням картинку з відром (рис. 5) та з'ясовуємо, що таке відро може містити 10 л води. Таких даних в умові немає, проте це відомо із життєвого досвіду.

Рис. 5

Далі домовляємося (ідеалізуємо ситуацію), що всі відра мали однакову масу (хоч це не завжди так), а дослідник насипав пісок на лист латаття спочатку на середину, поступово розширюючи радіус своїх дій, інакше такий лист може перекинутись раніше, ніж будуть насипані 10 відер піску. Коли учні все це усвідомлять, ставимо їм запитання: „Що потрібно з'ясувати, щоб відповісти на запитання задачі?". Учні відповідають: „Потрібно знайти масу десяти відер піску". Таким чином, приходимо до такої дещо модифікованої прикладної задачі: „Скільки становить маса 10 відер піску, якщо кожне відро вміщує 10 л води?".

Учні швидко здогадаються, що потрібно дізнатись масу одного такого відра піску. Для цього слід встановити густину піску, скориставшись відомостями з фізики. Далі хід міркувань виглядає наступним чином:

1) густина піску $\rho = 1{,}5\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$;
2) 1 л води має об'єм 1 дм^3, 1 дм^3 = 1000 см^3;
3) маса піску в однорідному відрі $m = \rho \cdot 10^4$ (г);
4) маса десяти відер піску $M = m \cdot 10$ (г).

Отримуємо вираз $M = \rho \cdot 10^5$ (г).

Щоб відповісти на запитання прикладної задачі, необхідно обчислити значення цього виразу при $\rho = 1{,}5\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Таким чином приходимо до такої математичної задачі: „Обчислити значення виразу $\rho \cdot 10^5$, де $\rho = 1{,}5$".

ІІ етап. Вираз $M = \rho \cdot 10^5$ – математична модель вихідної прикладної задачі. Знаходимо, що $M = \rho \cdot 10^5 = 1{,}5 \cdot 10^5 = 150000$ Отримаємо відповідь до математичної задачі: $M = 150000$.

ІІІ етап. Оскільки об'єм відра виражається в кубічних сантиметрах, а густина піску в грамах на один сантиметр кубічний, то маса піску буде 150000 г, тобто 150 кг. Далі міркуємо таким чином.

Якщо дослідник рівномірно та акуратно насипав пісок відром на листок латаття, то вантажопідйомність такого листка приблизно дорівнює 150 кг. Якщо рахувати, що маса маленької дитини дорівнює в середньому до 10 кг, то на такому листі латаття змогли б розміститись до 15 малюків (рис. 6).

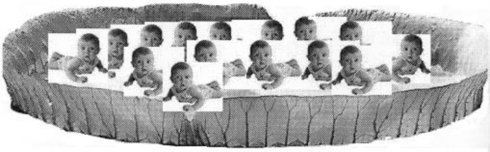

Рис. 6

Відповідь. Листок амазонського латаття може втримати вантаж до 150 кг і не потонути.

У наведеному прикладі чітко виділяються всі три етапи розв'язання прикладної задачі. На практиці таке розділення не виконується, розв'язання подається як цілісний процес. Звернемося знову до прикладу.

Задача 1.2. Сергій насипав у циліндричну каструлю трошки крупи та запитав маму: „Скільки потрібно налити води, щоб зварити смачну кашу?" – „Це дуже просто, – відповіла мама. – Нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якого піднялася крупа. До цього рівня і потрібно налити воду". – „Але крупи можна насипати більше або менше, та й каструлі бувають різні – широкі, вузькі", – сказав Сергій. – „Не має значення, цей спосіб стане у пригоді в будь-якому випадку", – відповіла мама. Чи справді це так?

Розв'язання задачі.

Учнів таким посудом як каструля не здивуєш. Тому після демонстрацій за допомогою комп'ютера ілюстративного матеріалу (каструлі, каструлі з крупою, з крупою і водою), переходимо до наступних узагальнень:

- моделлю каструлі з крупою може бути циліндр, який заповнено речовиною (рис. 7);
- моделлю каструлі з крупою, водою може бути той же циліндр (рис. 8).

Крупа займає в цьому циліндрі об'єм $V_к$, а вода – об'єм $V_в$. Щоб перевірити, чи правильним буде твердження, висловлене мамою, потрібно відповісти на запитання: „Чи змінюється відношення цих об'ємів залежно від форми циліндра?".

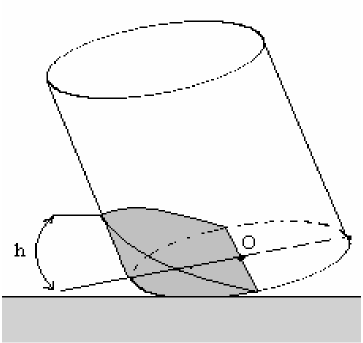

Рис. 7

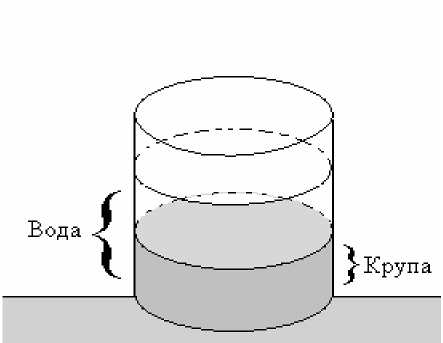

Рис. 8

Отже, приходимо до математичної задачі: „Визначити відношення об'ємів $V_к$ і $V_в$". Модель, що досліджується (рис. 7), помістимо в прямокутну систему координат так, щоб основа циліндра належала площині *XOY*, а центр основи *O* був початком координат (рис. 9).

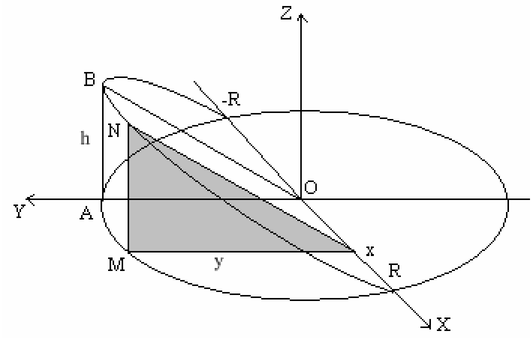

Рис. 9

Через точку *x* на осі *OX*, $x \in [-R;\ R]$, будуємо переріз тіла (тобто гірки із крупи всередині каструлі) площиною, що перпендикулярна до осі *OX*. У перерізі отримаємо трикутник MNx. Очевидно, що ΔMNx подібний до ΔABO. Тоді $\dfrac{MN}{h} = \dfrac{y}{R}$.

Звідси $MN = \dfrac{yh}{R}$. Площа ΔMNx дорівнює: $S_{\Delta MNx} = 0{,}5 MN \cdot Mx$,

$S_{\Delta MNx} = \dfrac{h\,y^2}{2R}$. Оскільки точка M належить колу радіуса R і має координати $(x;\,y)$, то отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2$. Тоді $S_{\Delta MNx} = \dfrac{h(R^2 - x^2)}{2R}$. Використовуючи визначений інтеграл (як математичну модель), отримаємо $V_к = 2\int\limits_0^R \dfrac{h\left(R^2 - x^2\right)}{2R}dx = \dfrac{h}{R}\int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \dfrac{2}{3}hR^2$.

Отже, $V_в = V_ц - V_к = \pi R^2 h - \dfrac{2}{3}R^2 h = \dfrac{R^2 h}{3}\left(3\pi - 2\right)$. Відповідно, $\dfrac{V_в}{V_к} = \dfrac{3\pi}{2} - 1 \approx 3{,}5$ (const). Як бачимо, це відношення не залежить від розмірів каструлі.

Відповідь. Готування смачної каші за маминим рецептом не залежить від розмірів каструлі.

Нагадування в кожному з наведених прикладів про використання комп'ютера (комп'ютерних презентацій) – не випадкове. Досвід показує, що це дуже потужний засіб, який робить процес розв'язування прикладних задач більш ефективним та результативним. Тому розв'язування прикладних задач, зокрема з алгебри і початків аналізу, з використанням доречних комп'ютерних презентацій (як засобу) дозволяє:

- істотно посилити та інтенсифікувати процес формування у школярів вмінь застосовувати математичні знання, зокрема з алгебри і початків аналізу, на практиці, в нестандартних умовах (усунути той недолік, який випливає із звіту світового банку [41]);
- ефективно здійснювати як міжпредметні зв'язки математики з іншими шкільними предметами, так і зв'язки всередині математики;

- підвищити практичну підготовку учнів із математики, вчити їх оволодівати методом математичного моделювання, потужним методом наукового дослідження;
- формувати в учнів наукову картину світу, позитивні мотиви до навчання, вміння бачити реальний світ крізь математичні окуляри.

Слід зазначити, що прикладних задач у шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу дуже мало, а якщо й є, то подані вони переважно у вигляді стандартних текстових задач. Цю прогалину заповнюють прикладні задачі, які подані в наступних розділах посібника. Серед них є задачі:

- на обчислення значень величин, які зустрічаються в практичній діяльності;
- на складання розрахункових таблиць;
- на побудову графіків, полігонів, гістограм;
- на застосування і обґрунтування емпіричних формул, виразів, рівнянь;
- на виведення формул залежностей, які зустрічаються на практиці.

РОЗДІЛ II

ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ КУРСУ ШКІЛЬНОЇ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ МІЖ РЕАЛЬНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ РІЗНИХ ПРИРОДНИЧИХ ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ

2.1. Використання прикладних задач природничого характеру під час повторення загальнофункціональних понять основної школи

Вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу розпочинається з повторення загальнофункціональних понять, які вивчалися в основній школі. Задачі першого параграфа можуть бути використані під час цього повторення у загальноосвітніх навчальних закладах природничого профілю. Вони будуть корисними для учнів, які готуються здобувати освіту з хіміко-біологічних, медичних, сільськогосподарських спеціальностей. Розв'язування цих задач дає можливість повторити означення функції, підготуватися до сприйняття означення числової функції, пригадати основні способи задання функції, повторити властивості деяких основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Для огляду властивостей певного виду функцій корисно розглядати залежність, яка має місце в біології, хімії, екології, медицині, або закономірність деякого життєвого процесу, зрозумілу і просту для сприйняття. Вибрана залежність є функцією певного виду, а, отже, властивості, які має ця залежність, є властивостями функцій даного виду. Однак помітити ці властивості учневі буває інколи простіше на конкретній закономірності, ніж здогадатися про них, виходячи з загального аналітичного виразу функції. Це і є метою введення залежностей реальних процесів та явищ. Вибрану залежність необхідно задавати не тільки аналітично, а й графічно з урахуванням наочності, властивостей залежності. Після виявлення властивостей залежності і проведення їх аналізу вони узагальнюються для всього виду функцій.

Однак залежності хіміко-біологічних, медичних, екологічних, як і будь-яких інших реальних процесів та явищ, мають певні особливості. Перш за все слід відмітити, що функція, якою описується даний процес, задана, як правило, на множині невід'ємних чисел і набуває невід'ємних значень. Це вносить певні обмеження, а, отже, не завжди дає можливість проілюструвати всі властивості даного виду функцій. Деякі властивості певних видів функцій можливо розглядати лише в абстрактному вигляді.

Розглянемо приклади розв'язання задач, в основу сюжету яких покладені загальнофункціональні поняття, що вивчались в основній школі.

Задача 2.1. На ранній стадії розвитку деяких риб (від 2 до 6 років) спостерігається лінійна залежність ваги риби w (в кг) від її віку t (у роках): $w = at$, де a – параметр, який знаходиться за даними натурних спостережень і залежить від виду риби. В цей же період росту риби її довжина L (в м) також лінійно залежить від віку $t : L = bt$, де b – параметр. Відомо, що даний вид риби у віці одного року (цьоголітка) важить 0,24 кг і має довжину 12 см. Виведіть формулу залежності ваги цієї риби від її довжини.

Розв'язання. З формул лінійної залежності ваги w та довжини L риби від часу t виразимо час t: $t = \frac{w}{a}$, $t = \frac{L}{b}$. Прирівнявши праві частини останніх рівностей $\frac{w}{a} = \frac{L}{b}$ та зробивши відповідні перетворення, матимемо залежність ваги риби w від її довжини $L : w = \frac{a}{b} L$. Для визначення значень параметрів a і b слід розв'язати рівняння: $0{,}24 = a \cdot 1$ і $0{,}12 = b \cdot 1$. Отже, $a = 0{,}24$, $b = 0{,}12$, $w = 2L$.

Відповідь. $w = 2L$ *– формула залежності ваги риби від її довжини.*

Задача 2.2. У таблиці представлено середній зріст x_i в см і середня вага y_i в кг різних порід собак:

Порода	Тойтер'єр	Пікінес	Карликовий пінчер	Мопс	Цверг-шнауцер	Франц. бульдог	Фокстер'єр	Бассет-хаунд	Пудель	Кокер-спаніель
Зріст, x_i	22	23	26	29	31	33	34	36	37	40
Вага, y_i	3	4	6	7	9	10	11	12	12	14

За даними таблиці побудуйте графік залежності ваги y_i собаки від її зросту x_i. Визначте цю залежність методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду.

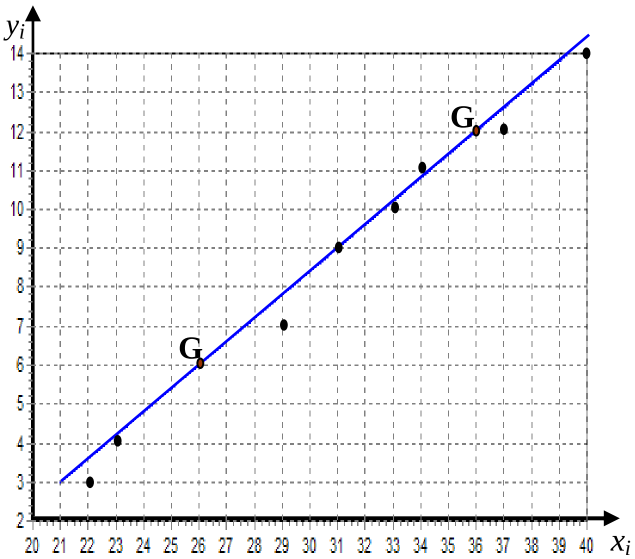

Рис. 10

Розв'язання. 1) У прямокутній системі координат, вибраній певним чином, відмічаємо точки $(x_i; y_i)$. Помічаємо, що точки на рис. 10 розташувались вздовж умовної прямої.

Для визначення її рівняння знайдемо координати середньої точки G_1 для перших п'яти точок цієї послідовності та координати середньої точки G_2 для інших п'яти точок.

$$\overline{x_1} = \frac{22+23+26+29+31}{5} \approx 26,$$

$$\overline{y_1} = \frac{3+4+6+7+9}{5} \approx 6.$$

Аналогічно знаходимо $\overline{x_2} = 36$, $\overline{y_2} = 12$. Отже, пряма проходить через точки $G_1(26;6)$, $G_2(36;12)$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, одержуємо рівняння $\frac{x-26}{10} = \frac{y-6}{6}$. Звідки, після певних перетворень, маємо формулу залежності ваги собаки певної породи від її зросту $y = 0{,}6x - 9{,}6$.

Відповідь. $y = 0{,}6x - 9{,}6$ – *формула залежності ваги собаки певної породи від її зросту.*

Задача 2.2 розв'язана методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду. Перед використанням такого типу задач на етапі повторення властивостей деяких елементарних функцій курсу алгебри основної школи варто розглянути з учнями алгоритм розв'язування таких задач.

Задача 2.3. Одна рослина кульбаби (корневище) займає площу наближено 10 м^2 і дає за рік біля 100 летючих насінин. Скільки квадратних кілометрів площі покриють всі нащадки однієї особини кульбаби через 6 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії? Відомо, що площа поверхні суші земної кулі складає 148 млн. кв. км. Чи вистачить цим рослинам на сьомий рік місця на поверхні земної кулі?

Розв'язання. Нехай $S_0 = 10$ м^2 – початкова площа, яку займає одна рослина кульбаби. Тоді $S_1, S_2, ..., S_n$ – площі, які покриють нащадки однієї кульбаби через $1, 2, ..., n$ років відповідно за умови, що рослина розмножується без перешкод у геометричній прогресії. При цьому $S_1 = S_0 \cdot 10^2$, $S_2 = S_1 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^4$, $S_3 = S_2 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^6$, … , $S_n = S_{n-1} \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^{2n}$. Отже, $S_6 = 10 \cdot 10^{12} = 10^{13}$ (м^2). Оскільки площа поверхні суші земної кулі складає $148 \cdot 10^6$ км$^2 = 1{,}48 \cdot 10^{14}$ м^2, то на сьомий рік на поверхні суші місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15}$ м^2.

Відповідь. За згаданих умов на сьомий рік місця на поверхні суші земної кулі для кульбаби не вистачить.

Розглянута задача фактично приводить до поняття показникової функції $S(n) = S_0 \cdot 10^{2n}$. Але одночасно для відповіді на поставлене питання можна було використати формулу n-го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де $b_1 = 10^2$ (насінин), $q = 100$. Тоді $b_7 = 10^2 \cdot 100^6 = 10^{14}$ (насінин), а $S_7 = S_0 \cdot b_7 = 10 \cdot 10^{14} = 10^{15}$ (м^2).

Отже, задачі такого типу можна використовувати як на етапі закріплення знань про геометричну прогресію, так і на етапі формування нових функціональних понять.

Розглянуті задачі приводять до окремих видів числових функцій, дають можливість пригадати аналітичний та табличний способи задання функції. Але цим не обмежуються функції даного виду задач у навчальному процесі. Сформулюємо задачі, подібні до розглянутих за способом розв'язування, та задачі на повторення властивостей деяких інших основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. У таблиці вказані лікарські препарати, які допомагають при y_i (у %) кількості хвороб і при цьому вказаний вміст корисних лікарських речовин рослинного походження $\overline{x}$ (у %).

Назва лікарського препарату	Анапрілін	Фурацин	Бромгексан	Уролесан	Індовазин	Дротаверин	Цинарезин	Фарінгосепт	Баралгін	Еуфілін
x_i	2	4	5	7	8	10	12	13	14	15
y_i	10	14	15	20	25	27	28	36	39	40

Визначте залежність ефективності лікарського препарату (кількості хвороб y_i у відсотках, які виліковуються цим препаратом) від вмісту корисних лікарських речовин рослинного походження x_i (у %). Який відсоток речовин рослинного походження має містити препарат, щоб його ефективність була 47 % ?

2.2. На лабораторній роботі учням було запропоновано оцінити забруднення приміщень мікроорганізмами. Для цього в кожному приміщенні на 5 хвилин відкривали чашку Петрі, а через 5 днів підраховували кількість колоній мікроорганізмів, які утворились на її поверхні, і відповідно кількість колоній на 100 см^2. У таблиці представлені дані досліджень. Побудуйте за цими даними відповідний графік. Запишіть залежність між кількістю колоній мікроорганізмів, які утворилися на поверхні чашки Петрі, і кількістю мікроорганізмів, які утворились на 100 см^2, у вигляді $y = ax + b$.

На поверхі чашки Петрі, x_i	34	35	37	40	48	50	52	55	72	90
На 100 см^2, y_i	47	49	52	56	67	70	73	78	100	125

2.3. Метою експерименту було знаходження залежності довжини голови від довжини грудного плавця прісноводних риб України. Одержані при цьому дані представлені у наступній таблиці.

Довжина плавця, x_i, мм	26	26	27	25	28	28	29	30	36	38
Довжина голови, y_i, мм	44	45	47	47	48	51	51	54	58	66

Визначте цю залежність.

2.4. Використовуючи таблицю розчинності калія броміду (KBr), знайдіть залежність кількості m речовини (в г) на 1 л води від температури t (в °С).

t_i, в °С	0	20	40	60	80	100	120
m_i, в г/л	54	65,6	76,1	85,9	95,3	104,9	115

Знайдіть розчинність калія броміду при температурі 50°С, 70°С. При якій температурі розчинність калія броміду буде дорівнювати 60 г/л, 85 г/л ?

2.5. Як свідчить статистика, середнє число членів однієї сільської сім’ї постійно зменшується, до того ж це зменшення наближено описується лінійною функцією. У 1900 році число членів однієї селянської сім’ї було в середньому 4,76, а у 1980 році цей показник дорівнював 2,75. Запишіть формулу для обчислення середнього числа P членів сім’ї у році з номером x. Якою була середня чисельність сім’ї у 2000 році? Починаючи з якого року у кожній сільській сім’ї в середньому буде менше двох чоловік за умови, що не зміниться демографічна ситуація?

2.6. Висота y яблуні (у метрах) виражається через її вік t (у роках) за формулою $y=\dfrac{12t}{t+10}$. Яка висота яблуні, вік якої складає 3 роки, 10 років, 20 років, 50 років? У якому віці висота яблуні буде 13 м?

2.7. Дано графік залежності швидкості v фотосинтезу в певних рослинах від інтенсивності i світла (рис. 11). При інтенсивності світла $i=1{,}5$ од. швидкість фотосинтезу максимальна і дорівнює 202,5 од. Фотосинтез не відбувається, якщо $i\geq 3$ од.

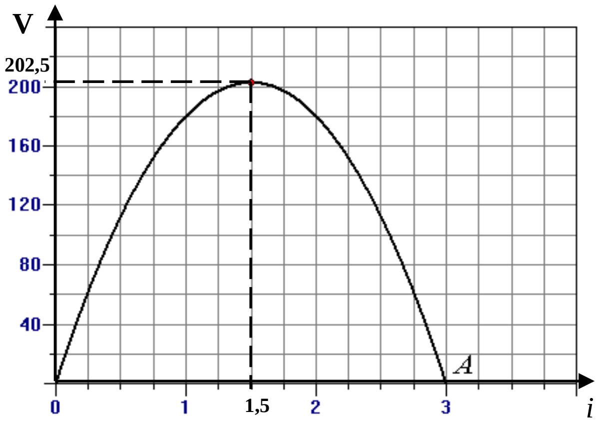

Рис. 11

Виведіть формулу даної залежності, вважаючи, що її графік має форму параболи. При якій інтенсивності i світла швидкість фотосинтезу $v=112{,}5$ од.? З якою швидкістю v відбувається фотосинтез у рослинах при інтенсивності світла $i=2$ од.?

2.8. Залежність добового удою y молока (в літрах) від віку корови x (у роках) виражається функцією $y=-9{,}53+6{,}68x-0{,}49x^2$, $x>2$. Визначте вік корови, при якому добовий удій буде найбільшим.

2.9. Залежність між урожайністю озимої пшениці y (ц/га) та нормою засіву зерна x (млн.зерен/га) виражається функцією $y = 4{,}8 + 7{,}2x - 0{,}6x^2$. Визначте оптимальну норму засіву зерна для одержання максимального урожаю.

2.10. При вивченні екологічного стану річок вченими встановлена залежність швидкості течії річки v (в м/с) від відносної глибини h (в м) русла, під яким розуміють відношення глибини занурення даної точки до повної глибини річкового русла: $v = -0{,}225h^2 + 0{,}130h + 0{,}958$. Визначте відносну глибину русла річки, для якої швидкість течії найбільша, та найбільшу швидкість течії річки.

2.2. Показникова, логарифмічна, степенева функції – математичні моделі прикладних задач

Під час вивчення різних природних процесів, зокрема біологічних та хімічних, найчастіше зустрічаються залежності між змінними величинами, які описуються показниковою або логарифмічною функціями з основою $a = e$. Прикладами таких залежностей можуть бути залежності: $N = N_0\, e^{kt}$, де N – кількість бактерій в будь-який час t, N_0 – початкова кількість бактерій в момент часу $t = 0$, k – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально. Колонія клітин дріжджів розмножується також за експоненціальним законом. За таким законом плодились кролики, які за короткий час заполонили Австралію.

Процеси новоутворення і розпаду математично можуть бути описані за допомогою залежності $P = P_0\, e^{kt}$, де P – кількість новоутвореної речовини або речовини, що розпалася, в момент часу t, P_0 – початкова кількість речовини, k – стала, яка стосується конкретного випадку. За таким законом відбувається радіоактивний розпад, зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі людини за рахунок виведення його природним шляхом.

Крім цього, показникова функція характеризує зростання народонаселення, приріст деревини, залежність врожайності від кількості використаних органічних добрив, залежність швидкості реакції від температури (правило Вант-Гоффа): $v_{T_2} = v_{T_1}\,\gamma^{\frac{T_2 - T_1}{10}}$, де v_{T_2}, v_{T_1} – швидкості реакції при температурах T_2, T_1, γ – температурний коефіцієнт.

За допомогою логарифмічної функції описується залежність ємності легенів V людини від її віку у роках, яка визначена на проміжку часу від 10 до 100 років: $V(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини у роках; залежність маси W ссавця від числа споживаних ним калорій M на одиницю маси щодня $\lg W = \dfrac{1{,}8 - \lg M}{0{,}225}$.

Деякі дослідники пропонують визначати вагу риби кубічною залежністю $W = at^3$ та $W = bL^3$, де a, b – параметри, t – час, L – довжина риби. Степенева залежність використовується також для визначення ступеня забруднення узбіччя доріг свинцем (у мг/м^2 за рік): $C = 0{,}012Ae^{-0{,}11k} + 0{,}37\sqrt[3]{A}$, де A – інтенсивність руху (число транспортних засобів) за добу і k – відстань від краю дороги в метрах; максимальної кількості опадів I (у мм/рік) від їх тривалості t (у роках) в деякій місцевості: $I = 13{,}1\,t^{-0{,}56}$ та ін.

Приклади наведених залежностей варто включити до складу прикладних задач природничого характеру. Це допоможе учням глибше усвідомлювати властивості названих функцій і засвоювати поняття, пов'язані з цими функціями.

У даному параграфі будуть розглянуті прикладні задачі, математичні моделі яких містять показникову, логарифмічну і степеневу функції, та задачі, в яких роль математичної моделі відіграють показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Розпочнемо з задачі, яка може бути використана для введення поняття *показникової функції.*

Задача 2.4. За оцінкою лісника запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років за умови, що середній річний приріст складатиме 2,5 %?

Після ознайомлення учнів з умовою задачі їм пропонується такий хід дослідження:

1) Позначте початковий запас деревини на ділянці лісу через D_0, а D_n – запас деревини на ділянці лісу через n років. Яким буде запас деревини через рік? Виразіть D_1 через D_0.
2) Чому буде дорівнювати запас деревини на ділянці через два роки? Виразіть D_2 через D_1 та D_2 через D_0.
3) Дайте відповідь на аналогічне питання для $n = 3$.
4) Виразіть D_n через D_{n-1}. Виразіть D_n як функцію від D_0 і n.
5) Підставте в останню формулу значення D_0 з умови задачі. Яку залежність ви одержали?

Провівши дослідження за наведеним алгоритмом, учні одержують функцію $D(n) = 10000 \cdot 1{,}025^n$, яка є залежністю запасу деревини D на ділянці лісу (в кубометрах) від числа минулих років n.

Одержана показникова функція є математичною моделлю даного процесу, отже, визначивши її значення $D(10) = = 10000 \cdot 1{,}025^{10} = 12800$(м^3), дістають відповідь на питання задачі.

Фабула такої задачі може бути дещо іншою. В ній може йтися про зміну чисельності населення певного міста, розмноження лілій у ставку або мікробів у пробірці. Важливим є те, що розв’язуючи задачі такого типу, учні вчаться математично описувати реальні природні та суспільні процеси. Запропонуємо деякі з таких задач.

Задачі для самостійного розв'язування

2.11. Населення міста складає 100 тисяч чоловік. Щорічний приріст населення становить 2 %. Дослідіть, як буде змінюватись чисельність населення протягом 50 років за умови, що значення приросту буде сталим.

2.12. У пробірку потрапив один мікроб, який відразу став розмножуватись шляхом ділення навпіл через кожну годину. Скільки мікробів буде у пробірці через добу? Через який час у пробірці буде мільйон мікробів?

2.13. Населення деякої країни щорічно збільшується на 2 %. У скільки разів воно збільшиться за півроку? за 50 років?

2.14. У 1980 році на Землі проживало наближено 4,4 мільярда чоловік. У кінці 70-х років приріст населення складав 1,7 % на рік. Якою буде чисельність населення нашої планети при збереженні того ж темпу росту у: а) 2010 році; б) 2200 році?

2.15. При радіоактивному розпаді деякої речовини за добу розпадається 2 % цієї речовини. Скільки речовини не розпадеться до кінця 4-ї доби, якщо на початку її було 10 грамів?

2.16. Період піврозпаду радію становить 1620 років. Яка частина початкової кількості радію залишиться: 1) через 3240 років; 2) 4860 років; 3) 810 років? Оцініть, скільки відсотків складає існуюча нині на Землі кількість радію від тієї кількості, яка була на Землі на початку нашої ери?

2.17. Спостереження за розпадом 4 г радіоактивної речовини дали таку таблицю залежності залишка цієї речовини m (в г) від часу t (в добах).

t, діб	1	2	3	4	5	6
m, г	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Запишіть формулу, яка виражає залишок радіоактивної речовини як функцію від часу. Побудуйте графік функції.

У запропонованих задачах величини протягом часу змінюються таким чином, що за певний проміжок часу їх значення збільшуються (зменшуються) на $p\%$ порівняно з початковим значенням C. У цьому випадку після n таких проміжків часу (наприклад років) значення цієї величини буде:

$$y = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \quad \text{або} \quad y = C\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \qquad (1)$$

Формули (1) називають **формулами складних відсотків** для випадку зростаючих і спадних величин. Зрозуміло, що при певних значеннях C і p ці формули перетворюються на показникову функцію від змінної n.

Переконливим підтвердженням цьому є розв'язання задачі 2.11 про зміну чисельності населення міста. Використовуючи формулу (1), одержують залежність $P(n) = 100\left(1+\frac{2}{100}\right)^n = 100\cdot 1{,}02^n$. У випадку спадних величин потрібна друга формула, використовуючи її, можна розв'язати задачу 2.15 про радіоактивний розпад деякої речовини $y(n) = 10\left(1-\frac{2}{100}\right)^n = 10\cdot 0{,}98^n$, а $y(4) \approx 9{,}22$ г.

Вивчаючи формули складних відсотків, слід з'ясувати з учнями, що значення величини, яка змінюється за законом складних відсотків, утворює геометричну прогресію. Знаменник цієї прогресії $q = 1 \pm \frac{p}{100}$.

Нехай маємо формулу $y = y_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, тоді

$y_1 = y_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1$;

$$y_2 = y_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = y_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) = y_1\left(1+\frac{p}{100}\right);$$

$$y_3 = y_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 = y_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right) = y_2\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ і т.д.}$$

Отже, одержуємо послідовність відмінних від нуля чисел $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Ця послідовність і є геометричною прогресією зі знаменником $q = 1+\frac{p}{100}$.

Встановлення зв’язку з математичними поняттями курсу алгебри основної школи дає можливість урізноманітнювати задачі даної теми.

Задача 2.5. На скільки збільшиться висота дерева за 5 років, якщо за перший рік воно виросло на 50 см, а за кожний наступний його висота збільшується на 20 % менше, ніж за попередній?

Розв'язання. Задача зводиться до знаходження суми 5 членів спадної геометричної прогресії, в якій $b_1 = 50$, $q = 1-0{,}2 = 0{,}8$. Використовуючи формулу суми, одержуємо $S_5 = \frac{50(0{,}8^5-1)}{0{,}8-1} = 168{,}08$ (см).

Відповідь. За 5 років висота дерева збільшиться на 168,08 см.

Вивчення *логарифмічної функції* розпочинається з введення поняття *логарифма*. Потребу введення цього поняття можна проілюструвати, повернувшись до розв’язаної вище **задачі 2.4,** яка використовувалась при введенні поняття показникової функції, переформулювавши поставлене в ній питання таким чином: через скільки років на цій ділянці буде 12800 кубометрів деревини за умови, що середній річний приріст складатиме 2,5 %?

Одержане учнями під час розв'язування задачі рівняння $12800 = 10000 \cdot 1{,}025^n$ стане мотивацією для введення поняття логарифма. Фабула задачі, що приводить до поняття логарифма, може мати хімічний зміст.

2.18. При розпаді 4-х грамів радіоактивної речовини була визначена залежність залишку m цієї речовини (в грамах) від часу t (в добах): $m(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$. Через який проміжок часу залишилось 0,125 г радіоактивної речовини?

Розглядаючи задачі згаданого вище типу, учні помітять, що під час розв'язування різноманітних природничих проблем доводиться розв'язувати рівняння $a^x = N$, де a, N – деякі числа, причому $a > 0$ і $a \neq 1$.

Після того, як буде з'ясовано існування єдиного кореня даного рівняння при $N > 0$, вводиться означення *логарифма*.

Відповідність, яка існує між кожним додатним числом і певним значенням його логарифма: $\log_a x$ (основа a розглядається як дане стале додатне число, $a \neq 1$), приводить до поняття *логарифмічної функції*, визначеної на множині всіх додатних чисел.

При вивченні показникової та логарифмічної функцій розгляд експоненціальних залежностей не повинен обмежуватись розглядом процесів новоутворення і розпаду, корисно розглядати задачі біологічного змісту.

Задача 2.6. У однолітніх лососів споживання кисню з підвищенням швидкості плавання зростає експоненціально. Визначимо $C(v)$ як споживання кисню за годину однолітнім лососем, який пливе з середньою швидкістю v м/с. Нехай $C(0) = 100$ і $C(3) = 800$ (відповідних одиниць). Знайдіть $C(1)$ і $C(2)$.

Розв'язання. Експоненціальна залежність $C(v) = C_0 e^{kv}$ є математичною моделлю процесу, що розглядається. Використовуючи початкові умови $C(0) = 100$ і $C(3) = 800$, поступово визначимо значення C_0 і e^k. $100 = C_0 (e^k)^0$, отже, $C_0 = 100$. Потім з рівності $800 = 100(e^k)^3$ одержимо $e^k = 2$. Отже, залежність, про яку йдеться в задачі, має вигляд: $C(v) = 100 \cdot 2^v$. Звідки $C(1) = 200$, $C(2) = 400$.

Відповідь. $C(1) = 200$, $C(2) = 400$.

Вивчення рівнянь і нерівностей не тільки як абстрактних математичних понять, а й у формі моделей реальних природних процесів та явищ, сприяє органічному поєднанню теоретичного матеріалу даного розділу з матеріалом попередніх розділів, дає учням можливість зрозуміти зв'язок між поняттями курсу, чим створює сприятливі умови для їх вивчення.

Конкретизуємо сказане вище, розглянувши процес вивчення показникових рівнянь і нерівностей, які найчастіше використовуються для математичного опису явищ навколишнього середовища. З'ясуємо, на яких етапах процесу вивчення розгляд практичних ситуацій буде корисним.

Розпочнемо з задач природничого змісту, які приводять до поняття показникового рівняння. До таких задач слід віднести задачі, умова яких містить явно або приховано показникову функціональну залежність з параметрами, після знаходження значень яких одержують *показникові рівняння.*

Задача 2.7. Після скількох періодів піврозпаду з 30 г радіоактивної речовини залишиться 7,5 г?

Розв'язання. Використовуючи рівняння радіоактивного розпаду $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, де y – частина речовини, яка залишається внаслідок розпаду після x періодів піврозпаду, одержуємо математичну модель даної задачі у вигляді рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$. Звідки зрозуміло, що $x = 2$.

Відповідь. Після 2-х періодів.

Задача 2.8. Залежність середнього зросту дитини від її віку подана у таблиці. Запишіть залежність зросту дитини від її віку у вигляді: $y = ax^b + c$. Обчисліть середній зріст дитини, якщо її вік складає 2,5 роки, 13 років.

Вік, у роках	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Зріст, у см	50	70	80	88	95	100	107	113	119	127	129

Розв'язання. Оскільки $y(0) = 50$, то $c = 50$. Вибравши з таблиці дві пари відповідних значень $x = 2,\ y = 80$ та $x = 9,\ y = 127$, складемо систему двох рівнянь з двома невідомими a і b: $80 = a \cdot 2^b + 50$ і $127 = a \cdot 9^b + 50$, які рівносильні відповідним рівнянням: $30 = a \cdot 2^b$, $77 = a \cdot 9^b$. Поділивши перше рівняння на друге, одержуємо рівняння $\left(\frac{2}{9}\right)^b = \frac{30}{77}$, яке і є *показниковим.*

Вивчивши згодом способи розв’язування показникових рівнянь, зокрема спосіб логарифмування, учні зможуть його розв’язати. $b \cdot \ln\frac{2}{9} = \ln\frac{30}{77}$, звідки $b \approx 0{,}63$, $a = \frac{30}{2^{0{,}63}} \approx 19{,}4$. Отже, $y = 19{,}4x^{0{,}63} + 50$ – залежність зросту дитини від її віку. Звідси $y(2{,}5) \approx 85$ (см), $y(13) \approx 148$ (см).

Відповідь. $y = 19{,}4x^{0{,}63} + 50$; 85 см; 148 см.

Фабула цих задач також різноманітна, це може бути задача про залежність кількості деревини (в кубометрах), яку одержують з ділянки лісу певної площі, від нахилу поверхні (в градусах), на якій росте ліс; вмісту білка у траві від часу після її покосу; чисельності популяції бактерій, на яку діє антибактеріальний агент, від часу та ін. Сформулюємо ці задачі.

Задачі для самостійного розв'язування

2.19. Кількість деревини (в кубометрах), яку одержують з ділянки лісу певної площі, залежить від нахилу поверхні (в градусах), на якій росте ліс, як показано у таблиці. Запишіть залежність між кутом x нахилу поверхні і кількістю y деревини у вигляді $y = ax^b + c$. Визначте кількість деревини, яка одержується з ділянки, нахил якої складає 42°, 55°.

Нахил поверхні	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Кількість деревини	10000	9850	9400	8660	7660	6428	5000

2.20. У процентному співвідношенні вміст білка у траві через t годин після покосу виражається функцією $B = a \cdot e^{ct}$, тобто змінюється експоненціально. Знайти параметри a і c, якщо $B(0) = 15{,}4$ і $B(12) = 10{,}4$. Розглянувши вміст білка у траві протягом 12 годин з інтервалом в 1 год, побудуйте графік даної функції.

2.21. При добавленні в бактеріальне середовище антибактеріальний агент викликає зменшення популяції бактерій. Її початкова чисельність $p(0) = 10^6$. Після добавлення агента популяція нараховує $p(t) = p(0) \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$ бактерій. Який час необхідний для того, щоб популяція зменшилась до 10^3 особин?

Аналіз задач такого типу приводить до висновку, що існують рівняння, в яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах. Такі рівняння називають *показниковими*.

Після введення означення показникового рівняння виділяють типи рівнянь і з'ясовують способи їх розв'язування. На цьому етапі вивчення розгляд практичних проблемних ситуацій має деякі особливості, пов'язані з практичним змістом цих ситуацій. Не всі типи показникових рівнянь можуть відігравати роль моделі природничого процесу (принаймні загальновідомого і посильного розумінню учнів). В той же час існують типи показникових рівнянь, з допомогою яких можна математично описати найрізноманітніші за тематикою явища і процеси. При розв'язуванні цих рівнянь як правило використовується логарифмування. Проілюструємо сказане вище, використовуючи такі задачі.

Розпочнемо з показникових рівнянь, при розв'язуванні яких використовується найпростіший спосіб – *зведення обох його частин до спільної основи*.

Задача 2.9. Залежність швидкості реакції від температури виражається формулою $v_{T_2} = v_{T_1}\gamma^{\frac{T_2 - T_1}{10}}$, де v_{T_1}, v_{T_2} – швидкості при температурах T_1, T_2, γ – температурний коефіцієнт (правило Вант-Гоффа). На скільки градусів слід підвищити температуру, щоб швидкість хімічної реакції зросла у 8 разів, якщо температурний коефіцієнт $\gamma = 2$?

Розв'язання. Оскільки швидкість реакції повинна зрости у 8 разів, то $\frac{v_{T_2}}{v_{T_1}} = 8$, отже, маємо рівняння $2^{\frac{T_2 - T_1}{10}} = 8$. Використовуючи спосіб зведення обох частин рівняння до спільної основи 2, одержимо $2^{\frac{T_2 - T_1}{10}} = 2^3$. Звідки $\frac{T_2 - T_1}{10} = 3$, $T_2 - T_1 = 30$ (ºС).

Відповідь. Температуру слід підвищити на 30ºС.

При розв'язуванні прикладних задач природничого характеру, математичною моделлю яких є показникові рівняння, інколи можна використовувати *спосіб заміни*. Покажемо це, розглянувши таку задачу.

Задача 2.10. Є 6 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 6 років і 8 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 3 роки. Через скільки років маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини?

Вказівка. Для відповіді на питання задачі використайте рівняння радіоактивного розпаду $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$, де m_0 – початкова маса радіоактивної речовини, m – маса речовини, що лишилась внаслідок розпаду після x періодів піврозпаду, $x = \frac{t}{T}$ – відношення часу протікання реакції до періоду піврозпаду даної речовини.

Розв'язання. Через t років маса першої та другої речовини відповідно буде $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$ і $8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$. Для відповіді на питання задачі слід розв'язати рівняння

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = 1 \qquad (1)$$

Введемо заміну, нехай $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = y$, тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = y^2$. Отже, рівнянню (1) рівносильне рівняння $6y - 8y^2 = 1$, перетворивши яке, одержуємо квадратне рівняння $8y^2 - 6y + 1 = 0$, якому рівносильне рівняння $y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8} = 0$. За теоремою Вієта одержуємо $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Отже, маємо: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{6}} = \frac{1}{2}$ або $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{6}} = \frac{1}{4}$, звідки $t_1 = 6$, $t_2 = 12$.

Відповідь. Маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини після 6 і 12 років від початку розпаду.

Розглянемо найпоширеніший спосіб розв'язування показникових рівнянь, які відіграють роль математичних моделей реальних природничих процесів і явищ – *логарифмування обох частин рівняння.* Найчастіше при логарифмуванні використовують десятковий і натуральний логарифми в залежності від основи степеня у рівнянні, якою може бути деяке раціональне число або ірраціональне число e.

Задача 2.11. Кількість бактерій збільшується за годину на 15 %. Якщо на початку було 20000 бактерій, то через який час їх буде 50000? Через який час кількість бактерій подвоїться?

Розв'язання. За формулою складних відсотків одержуємо, що зростання цієї культури бактерій відбувається за законом $P(t) = 20000 \cdot 1{,}15^t$. Отже, математичною моделлю даної задачі є показникові рівняння: $20000 \cdot 1{,}15^t = 50000$ і $20000 \cdot 1{,}15^t = 40000$, яким рівносильні рівняння $1{,}15^t = 2{,}5$ і $1{,}15^t = 2$. Звідки $t = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}15} \approx 6{,}6$ (років) – розв'язок першого рівняння, $t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}15} \approx 5$ (років) – розв'язок другого рівняння.

Відповідь. 6,6 років; 5 років.

Задачі для самостійного розв'язування

2.22. Населення деякої країни зростає експоненціально, причому за рік приріст становить 8 %. За скільки років кількість населення становитиме 20 млн, якщо сьогодні воно становить 8,5 млн?

2.23. Наявну в розчині кількість a іонів водню в хімії подають наближено формулою $a = 10^{-k}$ ($k \in N$). Число k називають pH-значенням розчину.

1) Виразіть pH-значення через a. 2) Обчисліть pH-значення для $a = 0{,}01$; $a = 0{,}000001$; $a = 0{,}0000000001$.

2.24. Для боротьби з вірусами тютюнових рослин застосовується рентгенівське випромінювання. Зі збільшенням дози радіації число вірусів, які виживають, спадає експоненціально: $P(R) = e^{-\alpha R}$ – частка вірусів, яка вижила після дози радіації R, α – стала, характерна для даного вірусу. Визначте, яка доза радіації вбиває 90 % всіх вірусів.

Розглянутий спосіб логарифмування застосовується не лише при розв'язуванні показникових рівнянь, а й при розв'язуванні показникових нерівностей. Наприклад, цей спосіб допоможе вирішити такі проблемні ситуації.

2.25. Маса солі (виражена в грамах), яку містить соляний розчин в момент t (в хвилинах), є функцією $m(t) = 300e^{-\frac{t}{5}}$. Припускають, що наявність солі в момент t не можна виявити, коли $m(t) \le 10^{-2}$. Розпочинаючи з якого моменту часу, неможливо виявити наявність солі?

2.26. Ступінь забруднення узбіччя доріг свинцем (у мг на м^2 за рік) обчислюється за формулою: $C = 0{,}012Ae^{-0{,}11k} + 0{,}37\sqrt[3]{A}$, де A – інтенсивність руху (число транспортних засобів) за добу і k – відстань від краю дороги в метрах. Знайдіть залежність між величинами C і k для доріг, якими проїжджає відповідно 1000 і 3000 транспортних засобів за добу. Границею безпеки вважається ступінь забрудненості 10 мг/м^2 свинцю на рік. На якій відстані від краю дороги починається безпечна зона в кожному з цих випадків? У скільки разів в кожному з даних випадків забрудненість полотна дороги перевищує допустиму норму?

Введення означення логарифмічного рівняння та вивчення способів розв'язування логарифмічних рівнянь також повинно по-можливості супроводжуватись розглядом природничих проблемних ситуацій.

Задача 2.12. Внаслідок зростання температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями території довжиною біля 10 км (площа, на якій повністю вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водоростей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів.

Розв'язання. Використаємо формулу $l = l_0(1+p)^t$, де l – довжина забрудненої водоростями території в момент часу t, l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водоростей протягом доби, виражений у %, t – час, вимірюється добами. Звідси, згідно даних задачі одержуємо рівність: $10(1+p)^{30} = 100$, якій рівносильна рівність $(1+p)^{30} = 10.$ Для визначення p можна піднести обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і, виконавши певні перетворення, одержати $p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0{,}079 \approx 8$ (%).

Можна діяти по-іншому. Прологарифмувавши рівність $(1+p)^{30}=10$ за основою 10 і скориставшись властивістю логарифма, одержуємо: $30\lg(1+p)=1$, звідси $\lg(1+p)=\dfrac{1}{30}$. Тобто, маємо рівняння, в якому змінна міститься лише під знаком логарифма. Такі рівняння називають *логарифмічними.*

За означенням логарифма приходимо до тієї ж відповіді.

Відповідь. 8%.

Природничі ситуації, для розв'язування яких можуть ефективно використовуватись логарифми, містять статистичний ряд двох змінних.

Задача 2.13. Для різних ссавців і птахів, представлених у наступній таблиці, дані значення їх маси W в кілограмах і число споживаних ними калорій M на одиницю маси щодня. Використовуючи дані таблиці, складіть рівняння залежності між обміном речовин M і масою W.

	миша	морська свинка	курча	кіт	со-бака	лю-дина	по-рося	ко-рова	слон
W, кг	0,02	0,4	1,8	2,8	13,6	60	154	440	3311
M, кал	159	86	55	51	35	25	21	16	12

Розв'язання. Для складання рівняння залежності між обміном речовин M і масою W необхідно знайти логарифми цих величин для кожного з ссавців і птахів.

	миша	морська свинка	курча	кіт	со-бака	лю-дина	по-рося	ко-рова	слон
$\lg W$	-1,699	-0,398	0,255	0,447	1,134	1,778	2,188	2,643	3,520
$\lg M$	2,201	1,934	1,740	1,708	1,544	1,398	1,322	1,204	1,079

Потім побудувати в прямокутній системі координат, вибравши за одиницю вимірювання 1 см, точки з кординатами $(\lg W; \lg M)$ (рис. 12).

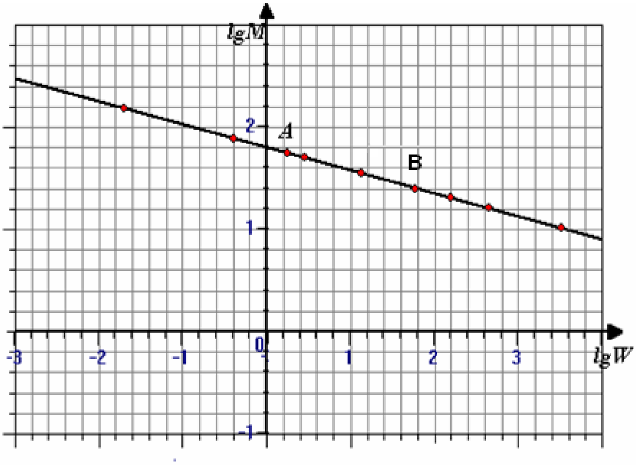

Рис.12

Отже, як бачимо, всі вони належать одній прямій. Для складання рівняння прямої необхідно розглянути дві з них, наприклад $A(0{,}255;\ 1{,}740)$ і $B(1{,}778;\ 1{,}398)$. Кутовий коефіцієнт прямої: $k=\dfrac{\Delta\lg M}{\Delta\lg W}=\dfrac{1{,}398-1{,}740}{1{,}778-0{,}255}=\dfrac{-0{,}342}{1{,}523}\approx-0{,}225.$

Пряма AB перетинає вісь ординат у точці 1,8. Отже, $b=1{,}8=\lg 63{,}1$. Використовуючи лінійну залежність $y=kx+b$, можемо записати: $\lg M=-0{,}225\cdot\lg W+\lg 63{,}1.$

Таким чином, маємо рівняння залежності між обміном речовин M і вагою W. Визначимо M, виконавши необхідні тотожні перетворення: $0{,}225\cdot\lg W=\lg 63{,}1-\lg M.$

Використавши властивості степеня логарифма додатного числа і логарифма частки двох додатних чисел, одержуємо

$\lg W^{0,225} = \lg \dfrac{63{,}1}{M}$. Звідки на основі властивості логарифмів записуємо : $W^{0,225} = \dfrac{63{,}1}{M}$, а тому $M = \dfrac{63{,}1}{W^{0,225}}$.

Відповідь. $M = \dfrac{63{,}1}{W^{0,225}}$ *– залежність обміну речовин M від маси W.*

Сформулюємо задачі для самостійного розв'язування, подібні до розглянутих у даному параграфі за способами розв'язування, але з дещо відмінним природничим змістом.

Задачі для самостійного розв'язування

2.27. За оцінкою лісника, запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. При якому середньому річному прирості (у %) через 10 років на цій ділянці буде 12800 м^3 деревини?

2.28. Залежність швидкості реакції від температури виражається правилом Вант-Гоффа (с. 27). Відомо, що при охолодженні реакційної суміші з 50ºС до 20ºС швидкість хімічної реакції зменшилась в 27 разів. Чому дорівнює температурний коефіцієнт γ ?

2.29. Залежність площі S (в гектарах) ділянки лісу від часу t (в роках) описується законом $S = S_0 e^{kt}$ (закон природного росту), де S_0 – початкова площа ділянки, $k > 0$ – деяка стала. Запишіть цю залежність, коли відомо, що ділянка, площа якої 20 га, щороку збільшується на 4 %. Через скільки років ділянка збільшиться на 5 га?

2.30. Розмноження бактерій відбувається за законом $N = N_0 e^{kt}$, де N – число бактерій в момент часу t, N_0 – початкове число бактерій, k – стала. Якщо початкове число бактерій 1000 і кожні півгодини відбувається збільшення їх чисельності на 20 %, то скільки їх буде через 24 години ?

2.31. Розмноження деякого виду бактерій відбувається за законом $y = y_0 e^{kt}$, де y_0 – маса початкової кількості бактерій, y – маса бактерій в момент часу t. Дослідним шляхом встановлено, що з 5 г цих бактерій, розміщених у відповідному живильному середовищі, через 8 годин було одержано 140 г. Протягом якого часу кількість таких бактерій подвоюється?

2.32. Концентрація сахарози (виражена в моль/л) в момент часу t (в хв) задається формулою $f(t) = e^{-0,0035t}$, де $t \geq 0$. Вважають, що реакція „майже закінчена”, коли концентрація досягла сотої частки свого початкового значення. Визначте час, необхідний для того, щоб реакція була „майже закінчена”.

2.33. Радіоактивна речовина розпадається за законом $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 – початкова маса радіоактивної речовини, m – маса речовини після t років розпаду, k – коефіцієнт для даної речовини. Доведіть, що період піврозпаду $T = \dfrac{0,6931}{k}$. Якщо 3 % певної радіоактивної речовини розпадається протягом години, то чому дорівнює період піврозпаду ?

2.34. Препарат з радіоактивним індикатором втрачає половину своєї радіоактивності протягом двох днів. Якщо розпад радіоактивності вважати експоненціальним, то яка її частина втрачається за 1 день? 4 дні? 8 днів?

2.35. При температурі 37ºС бактерія стафілококу через кожні 30 хвилин ділиться на дві бактерії. У момент часу t в організмі було 10 бактерій стафілококу. Скільки бактерій буде в організмі через 1 добу?

2.36. Залежність максимальної кількості опадів від їх тривалості в деякій місцевості описується за допомогою залежності $I = 13{,}1\, t^{-0{,}56}$, де I – максимальна інтенсивність опадів (в мм/год), t – тривалість опадів (в год).

Знайдіть: 1) максимальну інтенсивність опадів при їх тривалості 0,5 год 1 год; 2 год; 2) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність дорівнює 3,6 мм/год? 3) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність вища: при $t_1 = \dfrac{2}{3}$ год чи $t_2 = \dfrac{3}{4}$ год?

РОЗДІЛ III

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ПІД ЧАС РОЗВ′ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

3.1. Прикладні задачі природничого характеру, що приводять до поняття похідної, та задачі, в розв′язуванні яких це поняття відіграє першорядну роль

У шкільному курсі алгебри і початків аналізу вже стало традиційним перед введенням означення похідної розглядати класичні задачі, які привели до даного поняття: задачу механіки про визначення миттєвої швидкості і геометричну задачу про визначення положення дотичної до кривої в певній точці. При розв’язуванні згаданих задач доводиться проводити ті ж самі міркування, що і при розв’язуванні численних задач природознавства, а саме задач про визначення швидкості зростання популяції та швидкості хімічної реакції. Розгляд цих задач буде корисним для учнів, які вивчають математику в класах природничого профілю. Оскільки його метою є узагальнення спільного способу розв’язування різноманітних задач, то для проведення розгляду доцільно використати наступну таблицю.

У таблиці виділені чотори кроки даного способу: надання незалежній змінній x приросту Δx; знаходження приросту залежної змінної Δy; складання відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, яке виражає середню швидкість зміни функції; знаходження $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, яка є швидкістю зміни функції заданого значення аргументу x.

З’ясування біологічного та хімічного змісту похідної дає можливість розглядати цікаві прикладні задачі, в яких йдеться про природничі процеси та явища, а також задачі з медичною тематикою. Серед них можна виділити задачі, в розв'язуванні яких похідна відіграє першорядну роль.

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1. $P = P(t)$ – чисельність популяції в момент часу t; [особин]	Δt	$\Delta P =$ $= P(t+\Delta t) - P(t)$	$v_{cp} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} =$ $= \dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp}$ швидкість зростання популяції
2. $C = C(t)$ – концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t; [моль/л]	Δt	$\Delta C =$ $= C(t+\Delta t) - C(t)$	$v_{cp} = \dfrac{\Delta C}{\Delta t} =$ $= \dfrac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t}$	$v_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp}$ швидкість хімічної реакції

Розглянемо деякі з них.

Задача 3.1. Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Розв'язання. Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

1) Надамо t приросту Δt.

2) Знайдемо приріст залежної змінної ΔN:

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t) =$$

$$= 450 + 52(t+\Delta t) + 2(t+\Delta t)^2 - (450 + 52t + 2t^2) =$$

$$= 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t).$$

3) Складемо відношення $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}:\ \frac{\Delta N}{\Delta t}=52+4t+2\Delta t.$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t\to 0$: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(52+4t+2\Delta t)=52+4t.$

Ця границя і є швидкістю приросту числа бактерій в момент часу t. Тому, коли $t=3{,}5$ хв, то $v=66$ бакт/хв.

Відповідь. 450 бактерій; 66 бакт/хв.

Задачі такого типу розв'язуються не лише за правилом знаходження похідної, а й використовуючи інший прийом розв'язування – диференціювання функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі.

Задача 3.2. Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m=m_0\,e^{-kt}$, де m_0 – початкова маса на момент часу $t=0$, m – нерозчинена маса на момент часу t; k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

Розв′язання. Масу лікарської речовини, що розчинилась на момент часу t, запишемо у вигляді $M=m_0-m=m_0(1-e^{-kt})$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення $M'=m_0(-e^{-kt})(-k)=km_0\,e^{-kt}=km.$

Відповідь. km – швидкість розчинення лікарської речовини.

Задачі для самостійного розв′язування

3.1. Кількість бактерій N в деякій біомасі змінюється за законом $N(t)=500+54t+2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент часу $t=0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу $t=4$ хв?

3.2. Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом $m(t) = m_0\, e^{-kt}$, де $m(t)$ – маса речовини (в г) в момент часу t (в с); m_0 – початкова маса; k – деяка стала. Знайдіть швидкість розпаду в момент $t = 8$ с.

3.3. Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) задається формулою $p(t) = \dfrac{9 \cdot 10^4}{t+1}$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів.

3.4. Розмір популяції бактерій у момент часу t год, задається формулою $p(t) = 10^5 - \dfrac{9 \cdot 10^4}{t+1}$. Знайдіть швидкість зростання популяції в момент t, якщо: 1) $t = 1$ год; 2) $t = 5$ год; 3) $t = 10$ год.

3.5. Маса речовини $m(t)$, яка утворюється при деякій хімічній реакції за час t, визначається формулою $m(t) = a(1 + be^{-kt})$, де a, b, k – деякі сталі. Визначте швидкість реакції і виразіть її як функцію маси m.

3.6. Зміщення у відповідь на м’язове подразнення (одиничний імпульс) описується рівнянням Релея $y = k\,t\,e^{\frac{-t^2}{2}}$, де $t > 0$. Знайдіть швидкість та прискорення залежно від часу.

3.7. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Визначте масу дріжджів через t годин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) $t = 1$ год; б) $t = 2$ год; в) $t = 5$ год.

3.8. З танкера, який потрапив у аварію, виливається у море нафта, утворюючи на поверхні моря круглу пляму, площа якої збільшується з постійною швидкістю 6 км^2/год. З якою швидкістю збільшується радіус нафтової плями у той момент, коли площа плями дорівнює 9 км^2?

3.9. При добавленні в бактеріальне середовище антибактеріальний агент викликає зменшення популяції бактерій. Знайдіть закон зміни чисельності популяції в момент часу t, якщо відомо, що через t хвилин після добавлення агента популяція нараховує $p(t)=p_0\cdot 2^{\frac{-t}{3}}$ бактерій.

3.10. Закон зміни об’єму азоту в посудині залежно від часу описується формулою $x=10(4-e^{-0{,}05t})$, де x – об’єм азоту, в літрах; t – час, у секундах.

1) Знайдіть швидкість зміни об’єму в кожний момент часу t, у момент $t=10$ с.

2) Якою була початкова швидкість зміни об’єму азоту в посудині?

3) Через скільки секунд швидкість зміни об’єму дорівнюватиме $\dfrac{1}{2e^2}$ л/с?

3.2. Застосування похідної до дослідження функцій, які є математичними моделями прикладних задач природничого змісту

У даному параграфі мова йде про п’ятий тип прикладних задач системи, в яких похідна застосовується: до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі даної задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, на основі якого будується її графік; до обчислення наближеного значення функції.

З’ясуємо роль і місце прикладних задач природничого характеру при підготовці до вивчення теоретичних питань курсу та при закріпленні тільки що набутих теоретичних знань і формуванні математичних умінь. Покажемо, як можна використовувати цей тип задач та ілюстративні життєві приклади у процесі навчання, виходячи з різних дидактичних цілей.

До вивчення питань монотонності функції в старшій школі існують різні методичні підходи, запропоновані у чинних шкільних підручниках. За основу візьмемо підхід, запропонований у підручниках [39], [40], згідно з яким розгляд понять зростаючої і спадної функції складається з двох етапів:

1) повторення означень, відомих учням з курсу алгебри основної школи;
2) розгляду питань зростання і спадання функції у точці, формулювання означення монотонної функції на проміжку та доведення ознак монотонності функції в точці і, як наслідок, на проміжку.

Зупинимось на етапах процесу навчання, під час яких розгляд практичних життєвих ситуацій сприятиме засвоєнню учнями теоретичного матеріалу.

Розпочнемо з етапу повторення понять зростаючої та спадної функції на проміжку, відомих учням з курсу алгебри основної школи. Розглянемо таку задачу.

Задача 3.3. На рисунку 13 представлена зміна тиску крові вздовж судинного русла. Як залежить тиск крові від товщини ділянки судинної системи? На якій ділянці тиск найбільший, а на якій найменший?

Аналізуючи цей графік, учні зможуть пригадати поняття спадної функції на проміжку та алгоритм дослідження функції на монотонність.

При введенні понять зростаючої та спадної функції в точці також доцільно звертатись до практичних прикладів. Наступний та подібний до нього приклади допоможуть учням глибше усвідомити поняття зростаючої функції у точці і скоріше запам’ятати означення, сформульоване у підручнику [40].

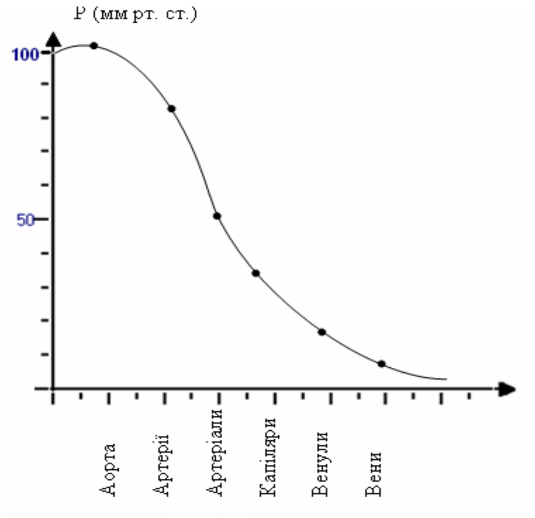
P (мм рт. ст.)
100
50
Аорта
Артерії
Артеріали
Капіляри
Венули
Вени

Рис. 13

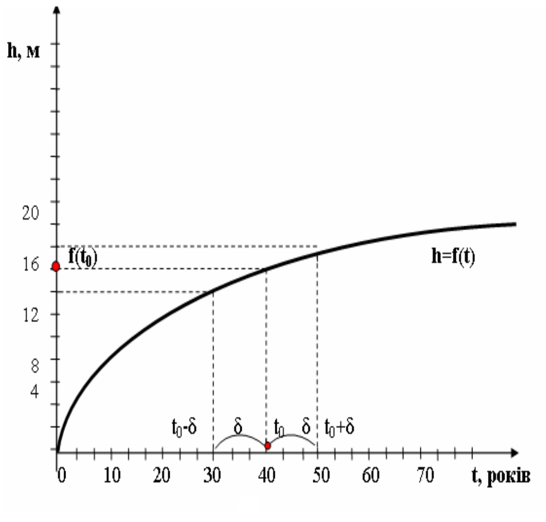
h, м
20
16
12
8
4
f(t0)
h=f(t)
t0-δ
δ
t0
δ
t0+δ
0
10
20
30
40
50
60
70
t, років

Рис. 14

Приклад 1. На рисунку 14 зображений графік залежності висоти h ялинки від її віку t (у роках).

Зображена на малюнку функція $h = f(x)$ є **зростаючою** у точці t_0, оскільки існує інтервал $(t_0 - \delta;\, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, який міститься у проміжку $< a,\, b >$, і такий, що $f(t) < f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0 - \delta; t_0)$ і $f(t) > f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0;\, t_0 + \delta)$.

Розгляд практичних проблемних ситуацій буде корисним і під час вивчення ознак зростання і спадання функцій. Застосуємо похідну до дослідження на монотонність функції, яка є математичною моделлю такої прикладної задачі.

Задача 3.4. У країні Меланхолії виникла епідемія депресії, яка розповсюджується так, що відсоток p тих, що захворіли залежить від часу t (в добах) наступним чином, $p = 0{,}005\left(12t^2 - t^3\right)$, де $0 \le t \le 12$.

1) Скільки відсотків мешканців захворіє до кінця другої доби?
2) Скільки діб відсоток тих, що захворіли, буде збільшуватись?
3) Починаючи з якої доби епідемія почне спадати?

Розв'язання. Для відповіді на перше питання знайдемо значення функції для $t = 2: p(2) = 0{,}005(12 \cdot 2^2 - 2^3) = 0{,}2 = 20(\%)$. Отже, до кінця другої доби захворіє 20% мешканців.

Щоб відповісти на наступні питання, знайдемо похідну функції: $p'(t) = 0{,}005(24t - 3t^2) = 0{,}015t(8 - t)$. Оскільки час $t > 0$, то на відрізку $[0;12]$ існує єдина точка, в якій похідна набуває нульового значення. Ця точка розбиває проміжок $[0;12]$ на два проміжки $[0;8)$ та $(8;12]$. На першому з цих проміжків $p'(t) > 0$ і, отже, функція на ньому зростає, а на другому проміжку $p'(t) < 0$, і тому функція на ньому спадає.

На основі достатньої ознаки зростання (спадання) функції на проміжку одержали висновок, що 8 діб відсоток тих, що захворіли, буде збільшуватись, а починаючи з 9-ї доби епідемія почне спадати.

Відповідь. 20%; 8 діб; з 9-ї доби.

Задачі для самостійного розв′язування

3.11. Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 - 52t + 2t^2$ (час вимірюється в годинах). Протягом якого часу число бактерій збільшується? Протягом якого часу число бактерій зменшується?

3.12. Деяка епідемія поширюється за законом $p(t) = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, де $t \in [0;15]$, $p(t)$ – відсоток тих, що захворіли протягом t діб, від загального числа мешканців. Протягом скількох діб відсоток тих, що захворіли, буде зростати, а протягом скількох діб буде спадати? Протягом скількох діб швидкість зміни відсотку тих, що захворіли, буде збільшуватися, а протягом скількох діб буде зменшуватися?

3.13. Чисельності двох популяцій у момент часу t задаються відповідно законами: $x(t) = 350 - 250e^{-4t}$ і $y(t) = 175 + 125e^{-4t}$. Дослідіть, як змінюються популяції протягом часу. Скільки особин налічують початкові популяції? Який їх граничний розмір? У який момент часу популяції мають однакову чисельність?

При введенні понять екстремальні точки (точки максимуму і мінімуму функції) та екстремуми функції (максимум і мінімум функції) доцільно використовувати приклади, наочність яких допоможе учням зрозуміти та засвоїти означення названих понять.

Приклад 2. На рисунку 15 представлений графік величини $r = r(t) = t e^{-t^2}$ (відповідних одиниць), якою задається реакція організму на певну дозу ліків через t годин після їх введення. Через скільки годин після вживання ліків реакція найбільша? Чому дорівнює найбільше значення величини реакції?

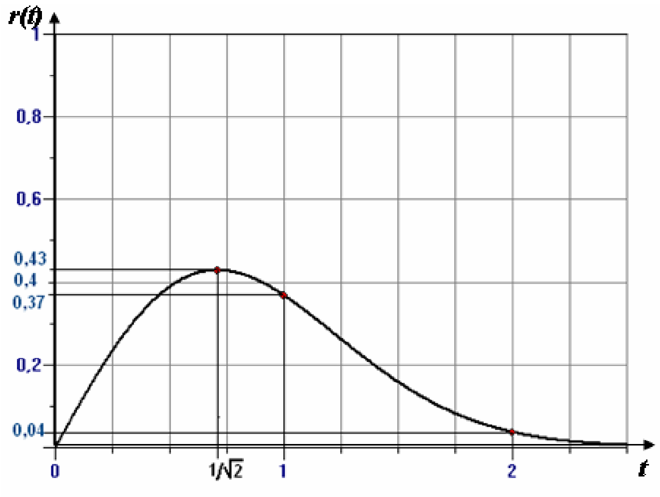

Рис. 15

Приклад 3. На рисунку 16 представлена зміна швидкості руху крові вздовж судинного русла. На якій ділянці швидкість руху крові найменша і чому вона дорівнює?

Використовуючи рисунки 15, 16 легко показати учням існування інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який міститься в області визначення функції $y = f(x)$, для всіх x з якого, відмінних від x_0, виконується одна з нерівностей $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0)$.

Після того, як учні усвідомлять останнє, слід ввести означення точок екстремумів та екстремумів функцій.

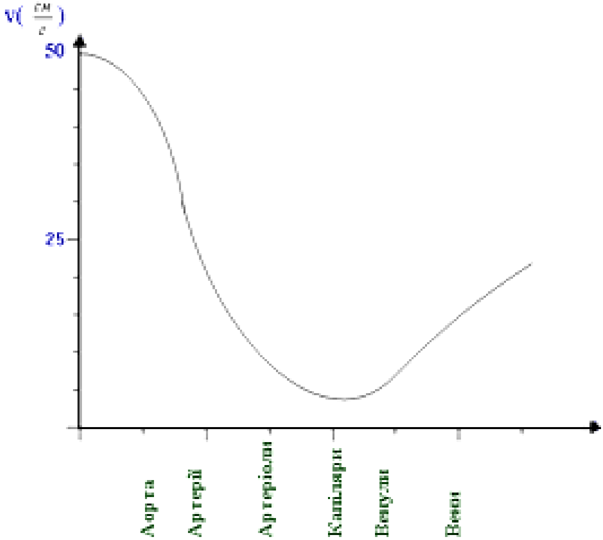

Рис. 16

Основні теореми змістової лінії курсу „Похідна та її застосування”, які використовуються в практичних розрахунках, представлені необхідною і достатньою умовами існування екстремумів функцій. Тому прикладні задачі, складені на основі даних теорем, застосовуються для повторення або закріплення знань і формування вмінь використовувати ці теореми в нових умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі.

Розглянемо задачі природничого змісту, в яких похідна застосовується з метою дослідження функції на екстремум.

Задача 3.5. У живильне середовище вносять популяцію, що налічує 1000 бактерій. Чисельність цієї популяції зростає за законом $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$, де t вимірюється в годинах. Знайдіть максимальний розмір цієї популяції.

Розв'язання. Знайшовши похідну функції $p'(t)=\dfrac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$ і розв'язавши рівняння $p'(t)=0$, з'ясуємо, що стаціонарними точками є $t_0=\pm 10$. Оскільки час $t>0$, то на всій області визначення функція має єдину стаціонарну точку $t_0=10$. При переході через цю точку знак похідної змінюється з "+" на "–", отже, на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_0=10$ є точкою максимуму функції y. Максимальний розмір цієї популяції дорівнює $p(10)=1050$ бактерій.

Відповідь. 1050 бактерій.

Розглянута задача є прикладом задачі природничого змісту, математична модель якої міститься в умові. Її можна розглянути на етапі актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед вивченням достатньої умови існування екстремуму в точці. Після того, як учні будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, корисно розглянути з ними розв'язання цієї задачі та запропонувати для самостійного розв'язування декілька подібних задач.

Задачі для самостійного розв'язування

3.14. Реакція організму на введені ліки може виражатися у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу чи інших фізіологічних показників. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків, а ступінь реакції y визначається функцією $y=f(x)=x^2(a-x)$, де a – деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

3.15. Швидкість зростання y популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0{,}001x(100 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкість зростання дорівнює нулю?

3.16. Популяція бактерій зростає від початкового розміру 1000 особин до розміру $p(t)$ за законом $p(t) = \dfrac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$, час t виражається у днях. Знайдіть швидкість зростання. Коли ця швидкість максимальна? Знайдіть $\lim\limits_{t \to \infty} p(t)$ – рівноважну популяцію.

3.17. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено в годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2 = t^2 e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

3.18. Хворому робиться ін'єкція ліків в момент часу $t = 0$. Концентрація цих ліків у крові в момент t описується залежністю $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$. Яке максимальне значення концентрації цих ліків у крові хворого і коли воно досягається?

3.19. Газова суміш складається з оксиду азоту і кисню. За умов практичної необоротності швидкість реакції $2NO + O_2 = 2NO_2$ задається формулою: $v = k\,x^2 y$, де x – концентрація NO в будь-який момент часу; y – концентрація O_2; k ($k > 0$) – константа швидкості реакції, яка не залежить від концентрації реагуючих компонентів, а залежить тільки від температури. Концентрація газів задається в об'ємних процентах. Знайдіть концентрацію кисню, при якій оксид азоту, що міститься в суміші, окислюється з максимальною швидкістю.

Більш складними є задачі, розв'зування яких передбачає побудову математичної моделі. Побудова математичних моделей потребує певних знань з дисциплін природничого циклу.

Розглянемо таку задачу.

Задача 3.6. При якій кислотності сума гідроген-іонів H^+ і гідроксид-іонів OH^- в одиниці об'єму води буде найменшою?

Розв'язання. Введемо позначення: x – концентрація гідроген-іонів H^+, y – концентрація гідроксид-іонів OH^-. Пригадаємо хімічний закон: $xy = k$, де k – стала для води (при 25ºC $k = 10^{-14}$).

Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $u = x + y = x + \frac{k}{x}$. Продиференціювавши функцію $u(x) = x + \frac{k}{x}$, знаходимо: $u'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$. $u'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{k}$. Оскільки $x > 0$, то функція має єдину стаціонарну точку на всій області визначення. Знайшовши другу похідну $u''(x) = \frac{2k}{x^3}$ та її значення в стаціонарній точці $u''(\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k}} > 0$, на основі достатньої умови існування екстремуму функції робимо висновок, що точка $x = \sqrt{k}$ є точкою мінімуму. Завдяки єдиності стаціонарної точки функція $u(x)$ досягає в ній найменшого значення. За згаданим законом $y = \sqrt{k}$. Отже, сума іонів води буде найменшою, якщо концентрації іонів H^+ і OH^- будуть рівні між собою, тобто при нейтральній реакції.

Відповідь. При $x = y = \sqrt{k}$ *(при нейтральній реакції).*

Під час дослідження функцій за загальною схемою з метою побудови їх графіків слід розглянути з учнями декілька прикладних задач. Це внесе елемент зацікавленості у навчальний процес і активізує пізнавальну діяльність учнів. Можна розглянути такі задачі.

Задача 3.7. При вливанні глюкози її кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t годин складає $C(t)=10-8e^{-t}$. Побудуйте графік $C(t)$ як функції часу при $t\geq 0$. Знайдіть $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ – рівноважну кількість глюкози в крові.

Розв′язання. Областю визначення даної функції є всі невід'ємні числа ($t\geq 0$), $C(0)=2$. Для того, щоб з'ясувати, який проміжок є множиною значень даної функції, знайдемо рівноважну кількість глюкози в крові хворого: $\lim\limits_{t\to\infty}(10-8e^{-t})=10-8\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{e^t}=10$ (од.). Отже, $E(C)=[2;10)$.

Оскільки похідна $C'(t)=8e^{-t}=\dfrac{8}{e^t}$ додатна, то функція $C(t)$ зростаюча на всій області визначення. Її графік зображено на рисунку 17.

Відповідь. рівноважна кількість глюкози 10 одиниць.

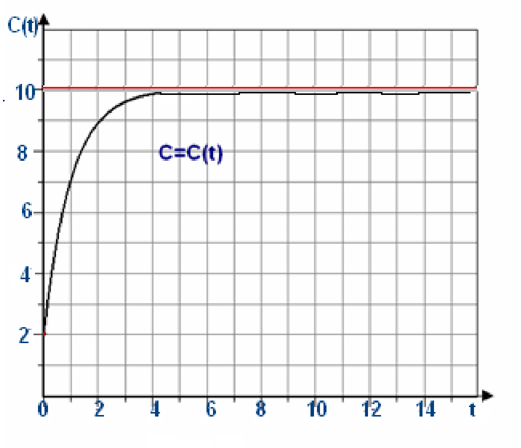

Рис. 17

Задача 3.8. Ємність легенів людини виражається функцією її віку $g(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, де $x \in [10; 100]$ – вік людини у роках, $g(x)$ – ємність легенів у літрах. Визначте, в якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює. Побудуйте графік функції $g(x)$ в прямокутній системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 10 років життя на осі абсцис, 1 см на 1 л на осі ординат. Встановіть графічно інтервал часу, протягом якого ємність легенів людини продовжує бути більшою або дорівнює тій, яка є в 45 років.

Розв'язання. Знайшовши похідну функції $g(x)$ і розв'язавши рівняння $110 \cdot \dfrac{3 - \ln x}{x^2} = 0$, з'ясовуємо, що дана функція має на відрізку $[10; 100]$ єдину стаціонарну точку $x_0 = e^3 \approx 20{,}1$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з "+" на "–", то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $x_0 = e^3 \approx 20{,}1$ є точкою максимуму функції g. Виходячи з єдиності такої точки на вказаному відрізку, стверджуємо, що в ній функція $g(x)$ набуває найбільшого значення: $g(e^3) = \dfrac{110(\ln e^3 - 2)}{e^3} = \dfrac{110}{e^3} \approx 5{,}48.$

Отже, у 20-річної людини ємність легенів максимальна. Вона наближено дорівнює 5,48 л.

Беручи до уваги зростання функції $g(x)$ на відрізку $[10; 20{,}1]$ і спадання на відрізку $[20{,}1; 100]$, склавши таблицю значень функції, побудуємо її графік (рис. 18).

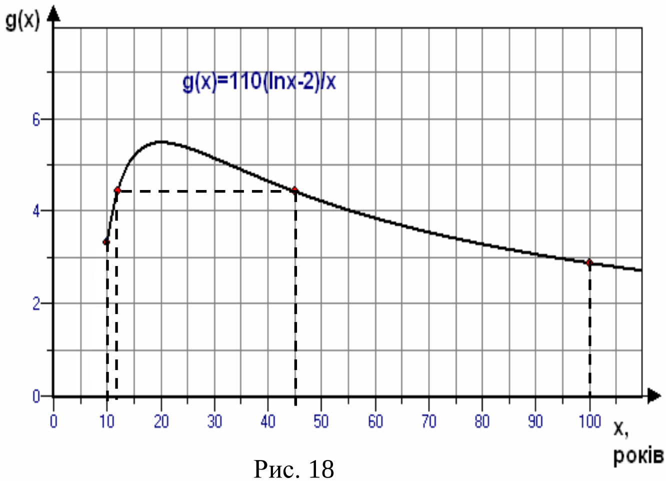

Рис. 18

Ще декілька задач запропонуємо для самостійного розв'язування.

Задачі для самостійного розв′язування

3.20. Концентрація сахарози (виражена в моль/л) в момент часу t (час виражено в хв) задається формулою $f(t)=e^{-0,0035t}$, де $t\geq 0$. Дослідіть функцію $f(t)$ і побудуйте її графік в прямокутній системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 20 хв на осі абсцис, 1 см для 0,1 моль/л на осі ординат. Визначте час, необхідний для того, щоб концентрація досягла половини свого початкового значення. Підтвердіть результат графічно.

3.21. Кількість хворих $p(t)$ під час епідемії грипу змінювалась з часом t (вимірюється днями) від початку вакцинації населення за законом $p(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$. Визначте час максимуму захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

3.22. З допомогою графіків зобразіть процеси зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом, якщо його кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t годин складає: а) $C(t) = \dfrac{100}{1+t^2}$; б) $C(t) = 100 + 100e^{-t}$.

3.23. З допомогою графіків зобразіть процеси неперервного зростання чисельності популяції з нульового моменту часу, задані за допомогою таких функцій: а) $P(t) = 90 + 10t^2$; б) $P(t) = 10e^{\frac{t}{10}}$.

Вміння застосовувати похідну до обчислення наближеного значення функції має важливе значення при розв'язуванні деяких прикладних задач природничого змісту. Розглянемо задачу такого типу.

Задача 3.9. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г.

Розв'язання. Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1+0{,}03)^t = 1{,}03^t$.

Для функції f, диференційовної в точці x, і достатньо малих Δx має місце наближена рівність: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скориставшись цією формулою, маємо: $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}03$, $f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{6} \cdot x^{\frac{-5}{6}} = \dfrac{1}{6}$ і, отже,

$$(1+0{,}03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}03 \approx 1{,}005 \text{ (г)}.$$

Відповідь. 1,005 г.

РОЗДІЛ IV

ПЕРВІСНА ТА ІНТЕГРАЛ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

4.1. Прикладні задачі природничого характеру, що приводять до понять первісної та інтеграла

Метою вивчення теми „Інтеграл та його застосування” за програмою для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв природничого профілю [20] є формування уявлення про роль інтеграла у дослідженні реальних процесів, формування навичок знаходження величин за швидкістю їх змінювання та обчислення площ геометричних фігур, навичок дослідження найпростіших реальних процесів за допомогою інтеграла та диференціальних рівнянь.

Поставлена мета переконує в тому, що вивчення даної теми при профільному навчанні має супроводжуватись розглядом прикладних задач, які є засобом реалізації прикладної спрямованості навчання.

У даному параграфі мова піде про деякі типи таких задач, зокрема про задачі, які приводять до поняття первісної, та задачі, в розв'язуванні яких це поняття відіграє першорядну роль, а також про задачі, які приводять до поняття інтеграла.

Якщо під час вивчення попередньої теми курсу „Похідна та її застосування” в учнів сформувалось уявлення про те, що похідна є швидкістю зміни значень певної функції в залежності від зміни аргументу, зокрема уявлення про хімічний та біологічний зміст похідної, то під вивчення первісної корисним буде розгляд задач такого типу.

Задача 4.1. Популяція, початкова чисельність якої дорівнює 90 особин, зростає зі швидкістю $W(t) = 20t$ особин у день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції в залежності від часу t, час виражено у днях.

Розв'язання. Шуканий закон є функцією від часу t. Позначимо цю функцію через $P(t)$ і пригадаємо, що $W(t) = P'(t)$, отже, згідно з означенням первісної приходимо до висновку, що $P(t)$ є первісною для $W(t)$. За основною властивістю первісної одержуємо $P(t) = 20 \cdot \dfrac{t^2}{2} + C = 10t^2 + C$ Враховуючи, що $P(0) = 90$, з рівняння $90 = 10 \cdot 0^2 + C$ одержуємо $C = 90$. Отже, закон зміни чисельності популяції $P(t) = 10t^2 + 90$.

Відповідь. $P(t) = 10t^2 + 90$.

Розглянута задача є прикладом задачі, що приводить до поняття первісної і розкриває смисл довільної сталої C у загальному вигляді первісної.

Серед вправ, що закріплюють поняття первісної, сприяють засвоєнню основної властивості первісної і трьох правил їх знаходження, доцільно розглянути прикладні задачі, розв'язуючи які учні набуватимуть навички відшукання первісних. Запропонуємо деякі з цих задач.

Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Деяка епідемія поширюється зі швидкістю $v(t) = 0{,}15t - 0{,}015t^2$ захворівших за добу, де $t \in [0; 15]$. Знайдіть закон зміни відсотка p тих, що захворіли, в залежності від часу t, якщо за першу добу захворіло 7 % від загального числа мешканців.

4.2. Зменшення концентрації лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом відбувається зі швидкістю $w(t) = -100e^{-t}$, де t – час, виражений у годинах. Знайдіть закон зміни його кількості у крові хворого, якщо початкова кількість складає 200 відповідних одиниць.

4.3. Популяція комах, початкова чисельність якої дорівнює 1000, змінюється зі швидкістю $w(t) = \dfrac{9000}{(1+t)^2}$ комах в день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції комах в залежності від часу t, час виражено у днях.

У шкільному курсі алгебри і початків аналізу вже стало традиційним перед введенням означення інтеграла розглядати задачу про площу криволінійної трапеції. Дана задача розв'язується одним і тим самим методом, яким розв'язується багато інших прикладних задач (про масу неоднорідного стержня; про шлях, який пройшло тіло при прямолінійному русі; про чисельність популяції; про обсяг випуску продукції та інші). Зупинимось на розгляді деяких з них.

Задача 4.2. Виведіть формулу для обчислення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1;\, \tau_2]$, швидкість хімічного перетворення якої $v = v(t)$.

Розв′язання. Оскільки $v = v(t)$ неперервна і невід'ємна функція на відрізку $[\tau_1; \tau_2]$, то для розв'язання задачі виконаємо такі кроки:

1) Розбиття відрізка $[\tau_1; \tau_2]$ на n рівних частин точками $\tau_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = \tau_2$;

2) Знаходження довжини кожного з відрізків $[t_{k-1};\, t_k]$, ($k = \overline{1,n}$): $t_k - t_{k-1} = \dfrac{\tau_2 - \tau_1}{n} = \Delta t$;

3) Утворення добутків $v(t_{k-1})\,\Delta t$ – кількості речовини, яка вступила в реакцію за проміжок часу Δt ;

4) Знаходження суми добутків:
$m_n = \left(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + ... + v(t_{n-1})\right)\Delta t$ – наближене значення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію;

5) Знаходження $m = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$ – кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$.

Застосувавши поняття інтеграла, приходимо до *висновку*: кількість хімічної речовини m, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$, дорівнює $m = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)\,dt$.

За таким же алгоритмом розв'язується і така задача.

Задача 4.3. Виведіть формулу для обчислення приросту P особин популяції за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$, швидкість зростання якої $v = v(t)$.

Розв'язавши цю задачу, одержують формулу $P = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)\,dt$ **.**

На основі одержаних вище загальних результатів виникає можливість конкретизувати прикладні задачі. Як саме це зробити, розглянемо у наступному параграфі даного розділу.

4.2. Застосування інтеграла у природничих науках

Прикладні задачі на застосування інтеграла у природничих науках можуть бути включені у процес навчання після введення означення інтеграла, ознайомлення учнів з його хімічним та біологічним змістом і формулою Ньютона-Лейбніца. Розгляд задач цього типу можна розпочати з такої задачі.

Задача 4.4. Зміна чисельності популяції бактерій відбувається зі швидкістю $v(t)=\dfrac{8t}{1+t^2}$ (тисяч бактерій за годину). Визначте приріст бактерій в популяції за проміжок часу від 1 до 7 годин.

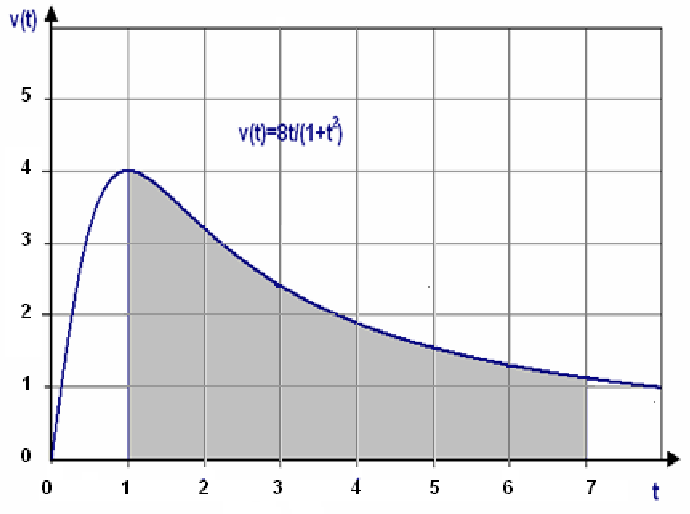

Рис. 19

Розв'язання. Дослідивши функцію $v(t)=\dfrac{8t}{1+t^2}$ для $t \ge 0$ і побудувавши її графік (рис. 19), з'ясовуємо, що задача зводиться до знаходження площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком невід'ємної і неперервної функції, визначеної на відрізку [1; 7].

Виходячи з того, що швидкість v зростання популяції у момент часу t дорівнює $P'(t)$, де $P(t)$ розмір популяції у момент часу t, приходимо до висновку, що функція $P(t)$ є первісною для функції $v(t)$. Цей факт дає можливість розв'язати задачу, використовуючи поняття первісної та формулу Ньютона-Лейбніца.

Приріст P бактерій в популяції за проміжок часу від 1 до 7 годин дорівнює

$$P=\int_1^7 \frac{8t}{1+t^2}dt=4\int_1^7 \frac{2tdt}{1+t^2}=4\int_1^7 \frac{d\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=4\ln\left|1+t^2\right|\Big|_1^7=$$

$$=4(\ln 50-\ln 2)=4\ln 25\approx 12{,}876 \text{ (тис. бактерій).}$$

Відповідь. 12,876 тисяч бактерій.

Запропонований до розв'язування задачі підхід сприяє встановленню зв'язків між поняттями похідна, первісна, інтеграл.

Виведені у попередньому параграфі формули кількості m хімічної речовини та приросту P особин популяції можуть бути безпосередньо використані учнями при розв'язуванні таких задач.

Задача 4.5. Швидкість зміни концентрації речовини, що вступила в реакцію, виражається функцією $v(t)=3t+1$, де t – час (в секундах), v – швидкість (в моль/с·м^3). Як зміниться концентрація речовини за час від $t_1=0$ до $t_2=5$ с?

Задача 4.6. Швидкість зростання популяції пеніцилінових грибків при необмеженості ресурсів живлення описується експоненціальним законом $v=ae^{kt}$. Знайдіть приріст чисельності популяції ΔP за проміжок часу $\Delta t=t-t_0$.

Обидві задачі розв'язуються методом безпосереднього інтегрування.

Розв'язання. Оскільки $v(t) = C'(t)$, то $C(t)$ – концентрація речовини і первісна для $v(t)$, тому $C(5) - C(0) =$

$$= \int_0^5 (3t+1)\,dt = \left(\frac{3t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^5 = 42{,}5 \text{ (моль/м}^3\text{)}.$$

Приріст чисельності популяції

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t} a e^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt}\Big|_{t_0}^{t} = \frac{a}{k}\left(e^{kt} - e^{kt_0}\right) = P(t) - P(t_0).$$

Задачі для самостійного розв'язування

4.4. Зміна чисельності популяції бактерій відбувається зі швидкістю $v = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t$ (бактерій за годину). Обчисліть приріст популяції бактерій за проміжок часу від 1 до 4 годин.

4.5. Популяція комах зростає від початкового розміру 10000 особин до чисельності $P(t)$ через t днів. Якщо швидкість зростання в момент t дорівнювала $P'(t) = t + t^2$, то якою буде чисельність популяції через: 1 день? 5днів? 10 днів?

4.6. Швидкість зміни концентрації $C(t)$ препарата з ізотопним індикатором в момент часу t є $C'(t) = 2^{-t}$, де час t виражено в годинах. Визначте концентрацію в момент часу t, якщо початкова концентрація складає 1 мкг/л.

4.7. Якщо опустити кристал у насичений розчин цієї самої речовини, то кристал почне збільшуватись. Швидкість зміни маси кристала описується формулою $v = 0{,}002t$, де v – швидкість (в кг/с), t – час (в с). Знайдіть масу кристала через 5 с після того, як його опустили в розчин, якщо початкова маса кристала 0,005 кг.

4.8. У деяких діагностичних методиках користуються препаратом з ізотопним індикатором. Швидкість зміни концентрації C такого препарату в організмі з плином часу описується законом $C'(t) = Ke^{-t}$, де K – константа в умовах експерименту. Знайдіть зміну концентрації препарату за час $t = 0{,}5$ год.

4.9. Відомо, що швидкість поглинання води ґрунтом (в перші 2-3 години) змінюється за законом $v(t) = \dfrac{v_1}{t^{\alpha}}$, де v_1 – швидкість поглинання у кінці першої хвилини (у см/хв), α – коефіцієнт затухання швидкості, який залежить від властивостей грунту (0,3< α <0,8). Визначте товщину шару води, який поглинається ґрунтом за T хвилин.

РОЗДІЛ V

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ЯК ОДНОГО З НАЙВАЖЛИВІШИХ ЗАСОБІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

5.1. Прикладні задачі, що приводять до диференціювальних рівнянь

Диференціальні рівняння є складовою теми „Інтеграл та його застосування" при профільному навчанні математики. Вони, як один з найважливіших засобів математичного моделювання, мають усоблювати потужність ідей математичного аналізу у вивченні математики. А це означає, що основна увага має бути спрямована на застосування диференціальних рівнянь до опису реальних процесів.

Перед введенням означення диференціального рівняння необхідно відмітити важливість цього поняття під час вивчення явищ природи та при розв'язуванні різноманітних задач фізики, біології, хімії, економіки. Означивши поняття „диференціальне рівняння", „порядок диференціального рівняння" виділяють *найпростіші диференціальні рівняння* виду $y'(x) = f(x)$, де $f(x)$ – відома, а $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x. Розв'язки цього рівняння називають **первісними функціями** для функції $f(x)$.

Мати безліч розв'язків – характерна властивість диференціальних рівнянь. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка властива саме цьому процесу, треба мати додаткову інформацію, наприклад знати початковий стан процесу. Без цієї додаткової умови задача невизначена.

Для конкретизації сказаного вище та введення понять „загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння", „початкові умови" доцільно розглянути прикладну задачу, математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння.

Задача 5.1. Знайдіть закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 10 мг препарату його маса зменшилась вдвічі. Вважати, що швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

Розв'язання. Нехай $m(t)$ – маса лікувального препарату в організмі людини в момент часу t, тоді $m'(t)$ – швидкість його розчинення, за умовою прямо пропорційна часу, то математичною моделлю задачі буде рівняння: $m'(t) = -kt$, де k – стале додатне дійсне число.

Загальним розв'язком даного диференціального рівняння є множина функцій $m(t) = -\dfrac{kt^2}{2} + C.$ Використовуючи *початкові умови* $m(0) = 10$, $m(1) = 5$, одержують $C = 10$, $m(t) = -\dfrac{kt^2}{2} + 10,$ звідки визначають *частинний розв'язок* $m(t) = 10 - 5t^2$. Отже, зменшення маси лікувального препарату в організмі людини відбувається за законом $m(t) = 10 - 5t^2$.

Відповідь. $m(t) = 10 - 5t^2$.

Після розгляду прикладної задачі, математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння, слід розглянути кілька задач, що приводять до диференціального рівняння показникового зростання (спадання).

Серед цих задач існує цілий ряд задач, за прикладним змістом яких без особливих зусиль можна створити математичну модель у вигляді рівняння $f'(x) = k\, f(x)$, де k – деяка константа. Розглянемо деякі з них.

Задача 5.2. Швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості в розглядуваний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом 3 годин. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу.

Розв'язання. Позначимо через $P(t)$ – кількість бактерій в популяції в момент часу t і, пригадавши, що швидкість розмноження бактерій є похідною від кількості $P'(t)$, одержимо диференціальне рівняння показникового зростання $P'(t) = kP(t)$, де $k > 0$, яке є математичною моделлю даної задачі.

Оскільки $P(t) > 0$, то, поділивши обидві частини одержаного рівняння на $P(t)$, дістанемо $\frac{P'(t)}{P(t)} = k$, що рівносильно рівнянню $(\ln P(t))' = k$. Звідси $\ln P(t) = k\,t + C_1$, де C_1 – деяка стала, яку для зручності слід позначити $\ln C$. Після певних тотожних перетворень на основі властивостей логарифмів одержуємо загальний розв’язок $P(t) = Ce^{kt}$.

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес розмноження бактерій, слід використати початкові умови: $P(0) = P_0,\ P(3) = 2P_0$. Скориставшись першою рівністю, одержимо, що $C = P_0$, а врахувавши другу умову, визначимо значення $e^k : 2P_0 = P_0(e^k)^3$. Звідси $e^k = 2^{\frac{1}{3}}$. Отже, кількість бактерій в момент часу t визначається за законом $P(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

Відповідь. $P(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

Подібними за способом розв'язування до розглянутої вище задачі є задачі з іншим природничим змістом та іншими початковими умовами, яким має задовольняти частинний розв'язок диференціального рівняння.

Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості в даний момент часу. Знайдіть закон радіоактивного розпаду, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина від тієї кількості радію, яка була на початку.

5.2. Деяка речовина перетворюється на іншу з швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину дорівнює 31,4 г, через 3 години – 9,7 г. Знайдіть залежність кількості неперетвореної речовини x від часу t.

5.3. Населення міста зростає зі швидкістю, пропорційною його кількості. Знайдіть закон зростання населення міста, якщо в момент часу t_0 в ньому проживало N_0 тисяч населення, а щорічний приріст становить h тисяч. Визначте, через скільки років населення міста збільшиться вдвічі. Проведіть обчислення для випадку, коли $N_0 = 900,\ h = 30$.

5.4. Швидкість приросту ферменту пивних дріжджів пропорційна кількості цього ферменту. Початкова кількість N_0 ферменту через 1 годину подвоюється. У скільки разів вона збільшиться через 3 години?

5.5. За 30 днів маса радіоактивної речовини зменшилась на 50 %. Через який час залишиться 1 % початкової кількості цієї речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна її кількості?

5.6. Популяція бактерій перебуває у сприятливих для розмноження умовах. 1) Швидкість росту популяції у момент часу t (час виражено в годинах) дорівнює розміру популяції, поділеному на 10. Який буде розмір популяції після 10 годин росту, якщо в початковий момент в ній налічується 1000 бактерій? 2) Через який час кількість бактерій подвоюється? 3) Кількість бактерій, яка в початковий момент дорівнює 100, подвоїлась протягом 3 годин. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу. У скільки разів вона збільшиться протягом 9 годин?

5.7. Тваринниками помічено, що щоденна норма корму, розрахована на 1000 кг живої ваги, виявляється найбільшою на початку росту тварин, у процесі росту вона зменшується, досягаючи свого мінімуму в момент припинення росту. Це знаходить своє пояснення в зменшенні інтенсивності обміну речовин в організмі тварини. Швидкість зміни норми корму в залежності від віку тварин пропорційна різниці між щоденною нормою і її мінімумом. Складіть диференціальне рівняння, яке відповідає даному процесу. Чому дорівнює щоденна норма корму тварин?

5.8. В експерименті з голодуванням маса голодуючого за 30 днів зменшилась з 140 до 110 фунтів. Щодня втрати маси, згідно з спостереженнями, були пропорційні масі голодуючого. Яке диференціальне рівняння задовольняє маса голодуючого як функція часу? Знайдіть масу досліджуваного після 15 днів голодування.

Існують прикладні задачі природничого змісту, побудова математичної моделі яких відбувається поетапно. Спочатку на основі умови складається певна рівність, яка після необхідних перетворень і переходу до границі набуває вигляду диференціального рівняння показникового зростання (спадання). Для прикладу розглянемо таку задачу.

Задача 5.3. В основі теорії розчинення лежить гіпотеза про те, що якщо температура T насиченого будь-якою сіллю розчинника одержує приріст ΔT, то розчинник набуває здатності розчинювати ще деяку кількість солі ΔS, пропорційну ΔT, і тій кількості S солі, яка може розчинитися при температурі T. Враховуючи це, знайдіть залежність між S і T, якщо при $T = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$ розчинюється S_0 грамів солі, а при $T = T_1$ розчинюється S_1 грамів.

Розв'язання. За умовою задачі $\Delta S = kS \cdot \Delta T$, де $k > 0$. Звідки $\dfrac{\Delta S}{\Delta T} = k\,S.$

Переходячи в останній рівності до границі при $\Delta T \to 0$, одержимо диференціальне рівняння $S'(T) = kS(T)$, де $k > 0$.

Розв'язавши його тим же способом, що і рівняння у задачі 4.2, одержуємо загальний розв'язок $S(T) = Ce^{kT}$.

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес розчинення, використаємо початкові умови $S(0) = S_0$ і $S(T_1) = S_1$.

Оскільки $S(0) = Ce^{k \cdot 0} = S_0$, то остаточно матимемо $S(T) = S_0(e^k)^T$. Виходячи з другої умови $S(T_1) = S_1$, складемо рівняння $S_1 = S_0(e^k)^{T_1}$, з якого визначимо, що $e^k = \left(\dfrac{S_1}{S_0}\right)^{\frac{1}{T_1}}$.

Отже, процес розчинення відбувається за законом

$$S(T) = S_0\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{\frac{T}{T_1}}.$$

Учні зможуть глибше зрозуміти зміст диференціальних рівнянь як математичних понять та усвідомити їх функції у математичному моделюванні, якщо серед прикладних задач зустрічатимуться задачі, перший етап розв'язування яких вимагатиме від них використання певних знань з суміжних предметів, певного творчого підходу до побудови моделі. Прикладом такої задачі може бути наступна задача.

Задача 5.4. У резервуарі знаходиться 10 м^3 розчину кислоти, концентрація якого дорівнює 14 кг/м^3. Цей розчин виливається з резервуару зі швидкістю 0,5 м^3/с і з такою ж швидкістю у резервуар подається чиста вода, яка одразу ж змішується з розчином так, що концентрація розчину зменшується. Через який час концентрація буде дорівнювати 7 кг/м^3?

Розв'язання. Момент початку процесу візьмемо за початок відліку часу t. Нехай $y(t)$ – функція, значення якої в кожний момент часу t дорівнює концентрації розчину (кількості кислоти в одиниці об'єму). За умовою задачі $y(0)=14$.

Концентрація розчину неперервно змінюється. Розглянемо зміни, що відбуваються в резервуарі за досить малий проміжок часу $[t;\ t+\Delta t]$, де t – деякий фіксований момент часу. Протягом вказаного проміжку часу з резервуара витече $0{,}5\cdot\Delta t$ м^3 розчину, при цьому кількість кислоти в розчині зменшиться на $\Delta y=-y\dfrac{0{,}5\Delta t}{10}$ (кг). Звідки $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=-0{,}05y$. Переходячи в останній рівності до границі при $\Delta t\to 0$, одержуємо диференціальне рівняння $y'=-0{,}05y(t)$, яке моделює процес опріснення розчину в резервуарі.

Загальним розв'язком цього рівняння є множина функцій $y(t)=Ce^{-0{,}05t}$, де C – довільне число. Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує даний процес, використаємо початкову умову $y(0)=14$. Остаточно матимемо $y(t)=14e^{-0{,}05t}$.

Для відповіді на питання задачі необхідно розв'язати рівняння $14e^{-0{,}05t}=7$, звідки $e^{0{,}05t}=2$. Прологарифмувавши обидві частини останнього рівняння, визначимо, що $t=\dfrac{\ln 2}{0{,}05}=20\ln 2\approx 13{,}9$ (с).

Відповідь. 13,9 с.

При вивченні даної теми не слід обмежуватись розглядом прикладних задач, що приводять до диференціальних рівнянь показникового зростання (спадання). З сильнішими учнями на факультативних заняттях варто розв'язувати задачі, математичними моделями яких є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, лінійні диференціальні рівняння першого порядку з сталими коефіцієнтами. Розглянемо деякі з таких задач.

Задача 5.5. У резервуар, який містить 10кг солі на 100 л розчину, кожну хвилину надходить 30л води і витікає 20л розчину. Визначте, яка кількість солі залишається у резервуарі через t хвилин, вважаючи, що сіль миттєво розчиняється.

Розв'язання. Нехай x – кількість солі у резервуарі в момент часу t, Δx – кількість солі, яка виходить з резервуару за час Δt. Об'єм розчину в резервуарі в момент часу t дорівнює $V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t$ (л). Тому концентрація солі (кількість солі, яка міститься в 1 л розчину) в момент часу t дорівнює $\dfrac{x}{100+10t}$. Отже, за короткий проміжок часу Δt кількість солі зменшується на $\dfrac{x}{100+10t} \cdot 20\Delta t$. Звідси $\Delta x = -\dfrac{x}{100+10t} \cdot 20\Delta t$. Виконавши необхідні перетворення і перейшовши до границі, коли $\Delta t \to 0$, одержуємо диференціальне рівняння $x'(t) = -\dfrac{2}{10+t} \cdot x(t)$ (рівняння з відокремлюваними змінними). Поділивши обидві частини останнього рівняння на $x(t)$, будемо мати $\dfrac{x`(t)}{x(t)} = -\dfrac{2}{10+t}$. З'ясувавши, від яких функцій взято похідну, щоб одержати ліву та праву частини рівняння, отримаємо рівність $\left(\ln x(t)\right)' = \left(-2\ln(10+t)\right)'$. Оскільки похідні двох функцій рівні, то функції відрізняються на сталий доданок: $\ln x(t) = -2\ln(10+t) + \ln C$. На основі властивостей логарифмів одержуємо $\ln\frac{x(t)}{C}=\ln\frac{1}{(10+t)^2}$. Звідки $x(t)=\frac{C}{(10+t)^2}$. Використовуючи початкову умову $x(0)=10$, знаходимо що $C=1000$.

Отже, через t хвилин у резервуарі залишиться $x(t)=\frac{1000}{(10+t)^2}$ кг солі.

Відповідь. $\frac{1000}{(10+t)^2}$ кг.

Задача 5.6. Вихід речовини S у одній хімічній реакції складає r молей за хвилину. В той же час вона витрачається зі швидкістю c молей за хвилину на кожний моль S. Визначимо $S(t)$ як число молей речовини, наявної в момент часу t. 1) Складіть диференціальне рівняння, яке задовольняє $S(t)$. 2) Розв'язавши це рівняння, виразіть $S(t)$ через S_0. 3) Доведіть, що $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=\frac{r}{c}$ (рівноважна кількість речовини).

Розв'язання. 1) Оскільки $S(t)$ – число молей речовини, наявної в момент часу t,то $S'(t)$ – швидкість її виходу, яка за умовою задачі дорівнює $r-c\cdot S$. Отже, $S(t)$ задовольняє диференціальне рівняння $S'(t)=r-cS(t)$ (лінійне неоднорідне 1-го порядку з сталими коефіцієнтами).

2) Для того, щоб розв'язати це диференціальне рівняння, зведемо його до вигляду $f'(x)=-k\,f(x)$: $S'(t)=-c\left(S(t)-\frac{r}{c}\right)$, або

$$\left(S(t)-\frac{r}{c}\right)'=-c\left(S(t)-\frac{r}{c}\right).$$

Нехай $S(t)-\frac{r}{c}=f(x),$ тоді будемо мати рівняння $f'(x)=-c\,f(x),$ загальним розв'язком якого є множина функцій $f(x)=Ce^{-ct}$. Зробивши заміну, одержуємо $S(t)-\frac{r}{c}=Ce^{-ct}$, звідки $S(t)=\frac{r}{c}+Ce^{-ct}.$

Використовуючи початкову умову $S(0)=S_0$, знаходимо окремий розв'язок $S(t)=\frac{r}{c}+\left(S_0-\frac{r}{c}\right)e^{-ct}$.

3) Залишилось обчислити $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{r}{c}+\left(S_0-\frac{r}{c}\right)e^{-ct}\right)=$ $=\frac{r}{c}+\left(S_0-\frac{r}{c}\right)\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^{ct}}=\frac{r}{c}$. Отже, рівноважна кількість речовини дорівнює $\frac{r}{c}$.

Відповідь. $\frac{r}{c}.$

Запропонуємо декілька задач хімічного змісту, що приводять до диференціальних рівнянь, для самостійного розв'язування. В цих задачах йдеться про *хімічні реакції 1-го порядку.*

Задачі для самостійного розв'язування

5.9. Згідно з законом діючих мас швидкість реакції пропорційна концентраціям реагуючих речовин в даний момент часу. Нехай a – початкова концентрація речовини A, $x(t)$ – кількість молей на літр, які прореагували за час t від початку реакції, тоді концентрація на цей момент дорівнює $a-x.$ Опишіть цей процес диференціальним рівнянням. Визначте концентрацію реагуючої речовини на час t від початку реакції, якщо $x(0)=0.$

5.10. Радіоактивний елемент *RaB* розпадається навпіл, утворюючи радіоактивний елемент *RaC,* протягом 26,7 хв. Знайдіть час розпаду 20 % початкової кількості *RaB*.

5.11. Речовина *A* перетворюється в речовину *B*. Через 1 годину від початку реакції залишилось 44,8 г речовини *A*, а після 3 годин 11,2 г цієї речовини. Визначте початкову кількість *a* речовини *A* та час, коли залишиться половина цієї речовини.

5.12. Через посудину місткістю *a* літрів, яка наповнена водним розчином деякої солі, неперервно протікає рідина, причому за одиницю часу вливається *b* літрів чистої води і витікає така сама кількість розчину. Знайдіть закон, за яким змінюється вміст солі в посудині залежно від часу протікання води через посудину.

5.2. Задачі природничого характеру на розв′язування диференціальних рівнянь

У даному параграфі мова йде про 10-й тип задач природничого змісту, в розв’язанні яких відсутній етап формалізації. Включення їх у процес навчання дасть змогу учням усвідомити способи розв’язування названих у попередньому параграфі класів диференціальних рівнянь. Оскільки серед цих задач зустрічаються також задачі різних рівнів складності, то, пропонуючи їх учням, слід виходити з індивідуальних особливостей учнів класу.

Розпочинати слід з прикладних задач, математичними моделями яких є диференціальні рівняння показникового зростання (спадання). Якщо учні добре засвоїли попередній матеріал, а саме, яка множина функцій є загальним розв’язком цього класу рівнянь, як, використовуючи початкові умови, знаходити частинний розв’язок, то ці задачі не викличуть у них особливих труднощів при розв’язуванні.

Задачі для самостійного розв'язування

5.13. Процес розмноження мікроорганізмів у сприятливих умовах описується диференціальним рівнянням $m'(t) = 0{,}007m(t)$, де m – маса, в грамах; t – час, в годинах. У момент $t = 0$ біомаса мікроорганізмів дорівнює 2 г.

а) Знайдіть залежність маси m від часу. б) Визначте біомасу мікроорганізмів через 15хв після початку відліку часу. в) Через який час біомаса мікроорганізмів збільшиться у 1000 разів?

5.14. Скорочення м'яза $x(t)$ описується рівнянням: $x'(t) = A(x_0 - x)$, де x_0 – повне скорочення м'яза; A – константа, яка залежить від навантаження. Знайдіть розв'язок цього рівняння, якщо $x(0) = 0$.

5.15. Швидкість реакції розчинення цукру описується рівнянням $x'(t) = k(a - x)$, де a – число молей цукру до початку реакції, x – кількість молей, які вступили в реакцію за час t від початку реакції, k – коефіцієнт пропорційності. Визначте час t за умови, що $x(0) = 0$.

5.16. Розглянемо ген з двома алелями A і a, які в деякій популяції в момент часу t представлені з частотами $p(t)$ і $q(t) = 1 - p(t)$. Припустимо, що алель A мутує в алель a за одиницю часу з імовірністю μ. Це означає, що $p'(t) = -\mu\, p(t)$. Стала μ називається частотою мутації. а) Виразіть $p(t)$ і $q(t)$ через μ, якщо у початковий момент $p(0) = q(0) = 0{,}5$. б) Виразіть через μ час, необхідний для того, щоб $p(t)$ зменшилась до 0,3.

Математичними моделями наступних задач є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними та лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 1-го порядку з сталими коефіцієнтами. Ці задачі можна пропонувати учням, які засвоїли дану тему на високому рівні.

5.17. Популяція бактерій росте таким чином, що питома швидкість зростання $\frac{x'(t)}{x(t)}$ в момент t (час t виражено в годинах) дорівнює $\frac{1}{1+2t}$. Початкова популяція складається з 1000 бактерій. Чому буде дорівнювати чисельність популяції після 4 годин, 12 годин зростання?

5.18. Вливання глюкози в кровоносну систему є важливою лікувальною процедурою. Для вивчення цього процесу позначимо через $G(t)$ кількість глюкози в крові пацієнта в момент часу t. Припустимо, що вона вводиться в кров з постійною швидкістю v г/хв. Одночасно глюкоза розкладається і виноситься з кровоносної системи зі швидкістю, пропорційною наявній кількості глюкози у крові. Таким чином $G(t)$ задовольняє лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $G'(t) = v - aG(t)$, де a, v – додатні сталі. Визначте кількість $G(t)$ глюкози в крові пацієнта в момент часу t.

5.19. У популяцію великого розміру занесено інфекційне захворювання. Частка людей, які перенесли хворобу, зростає з часом. Нехай $p(t)$ означає частку людей, які перехворіли цією хворобою за t років після її виникнення у популяції, і нехай $p'(t) = \frac{1-p(t)}{3}$. Знайдіть $p(t)$ для всіх моментів часу $t > 0,$ якщо $p(0) = 0.$ За скільки років частка людей, які перехворіли цією хворобою, досягне 90 %?

5.20. Мутації між алелями A і a можуть відбуватися як у прямому, так і в зворотному напрямі з частотою мутацій μ і частотою зворотних мутацій ν. Це означає, що $p'(t) = -\mu p + \nu q = -\mu p + \nu(1-p) = \nu - (\mu+\nu)p.$ а) Виразіть $p(t)$ і $q(t)$ через $p(0)$ і $q(0)$, μ і ν. б) Доведіть, що $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \dfrac{\nu}{\mu+\nu}$ і $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = \dfrac{\mu}{\mu+\nu}$ (рівноважні частоти генів).

РОЗДІЛ VI

ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ПРИРОДНИЧОГО ХАРАКТЕРУ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

6.1. Прикладні задачі з комбінаторики

„Елементи комбінаторики” – одна з трьох складових тем змістової лінії курсу алгебри і початків аналізу старшої школи за програмами для загальноосвітніх навчальних закладів [19], [21]. Без її засвоєння неможливе вивчення теми „Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики”, передбаченої програмою [20] для спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв природничого профілю.

Теоретичний матеріал останньої змістової лінії курсу „Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики” може бути глибоко усвідомлений і засвоєний тільки в процесі розв’язування прикладних задач, оскільки теорія ймовірностей виникла у зв’язку з практичними потребами і знайшла широке застосування в різних галузях науки, виробництва та економіки.

Крім загальноосвітньої мети у класах природничого напрямку математика відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення закономірностей навколишнього світу, є опорним предметом для профілюючих дисциплін.

Тематика комбінаторних задач надзвичайно різноманітна, але для досягнення поставленої мети при профільному навчанні варто серед інших задач розглядати прикладні задачі природничого характеру, які переконуватимуть учнів у тому, що математика забезпечує базу для вивчення хімії, біології, медицини.

Розглянемо задачі, за допомогою яких учні зможуть засвоїти правило добутку, яке використовується в подальшому при розв’язуванні численних комбінаторних задач.

Задача 6.1. На деякому ореалі є 14 видів плодових мушок, 17 видів метеликів і 13 видів комарів. Скількома способами можна вибрати по одному виду кожного типа ?

Розв'язання. Використаємо узагальнене правило добутку $14 \cdot 17 \cdot 13 = 3094$ (способи).

Відповідь. 3094 способи.

Це правило слід використовувати і при розв'язуванні таких задач.

Задачі для самостійного розв'язування

6.1. За підрахунками існує 2 млн. видів комах, 1 млн. видів рослин, 20000 видів риб і 8700 видів птахів. Якщо для порівняльного аналізу потрібно обрати по 1 виду від кожної з цих чотирьох категорій, то скількома способами це можна зробити?

6.2. Для ретельного аналізу ступеня впливу факторів на ефективність проведення хімічної реакції за участю трьох компонент A, B, C вирішено провести експерименти для 5 значень концентрації речовини $A,$ 3 значень концентрації компоненти B і 2 значень компоненти C, крім цього заплановані два температурних режими (T). Скільки експериментів необхідно провести, варіюючи чинники A, B, C, T, щоб мати повну інформацію про досліджувану реакцію?

При вивченні сполук без повторень та формуванні поняття про комбінаторні задачі, в яких треба знайти, скількома способами можна виконати ту чи іншу дію, варто розпочати з розгляду задач такого типу.

Задача 6.2. Вісім лабораторних тварин треба упорядкувати відповідно до їх здібностей виконувати певні завдання. Знайдіть число можливих упорядкувань, припускаючи, що однакових здібностей не існує.

Задача 6.3. Один біолог намагається класифікувати 46200 видів комах, позначаючи кожний вид трьома великими літерами алфавіту. З'ясуйте, чи буде завершена ця класифікація, вважаючи, що у алфавіті 29 великих літер? Скільки потрібно було взяти літер для позначення одного виду?

Задача 6.4. У генетичному експерименті із 5 білих квіток гороху було взято для запилення 3 квітки. Скількома способами це можна зробити?

У запропонованих задачах йдеться як про скінченні множини, складені з елементів живої та неживої природи, так і про їх підмножини. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або порядок їх елементів, або належність певних елементів до цих множин, або перше і друге одночасно. Такі скінченні множини (*сполуки*) дістали назви *перестановок, розміщень, комбінацій.*

Засвоїти означення сполук допоможе заповнення разом з учнями наступної таблиці. Перед заповненням таблиці слід зауважити, що впорядкованість множини є однією з ознак, за наявністю або відсутністю якої сполуки відрізняються. Після того як учні вивчать формули чисельностей сполук без повторень, можливе самостійне розв'язування даних задач.

Початкова множина	8 лабораторних тварин	29 літер алфавіту	5 квіток гороху
Нова (створена) множина чи підмножина	множина 8 лабораторних тварин	підмножина 3 літери алфавіту	підмножина 3 різні квітки
Впорядкована	+	+	–
Сполука	перестановка	розміщення	комбінація

Для закріплення теоретичних відомостей про сполуки необхідно запропонувати розв'язати ще декілька задач, серед яких можуть бути наступні.

Задачі для самостійного розв'язування

6.3. У трьох пробірках, поставлених у трипробірковий штатив, містяться різні препарати. Скільки можливих способів розміщення цих препаратів у штативі?

6.4. Із групи в 9 кроликів необхідно вибрати трьох і помістити їх в 3 клітки, позначені номерами 1, 2, 3. Скількома способами це можна зробити?

6.5. Скількома способами можна скласти букет з 7 різних квітів, якщо є 9 сортів квітів?

6.6. Для лікування захворювання вживають 5 видів ліків. Вважають, що послідовність, в якій вживають ліки, істотно впливає на результати лікування. Скільки існує різних порядків призначення цих ліків?

6.7. Між будь-якими з n хромосом клітини може відбутися обмін.

а) Скількома способами може відбутися рівно один обмін?
б) Скількома способами може відбутися рівно k обмінів?

Після закріплення теоретичних відомостей про сполуки та повторення правил суми і добутку необхідно перейти до розв'язування задач такого типу.

Задача 6.5. У лабораторній клітці тримають 8 білих і 6 коричневих мишей. Знайдіть число способів вибору п'яти мишей з клітки, якщо: а) вони можуть бути довільного кольору; б) три з них повинні бути білими, а дві коричневими; в) всі вони повинні бути одного кольору.

Розв'язання. а) Оскільки всі вибрані миші повинні бути довільного кольору, то їх вибирають з 14 мишей. Число способів вибору п'яти мишей дорівнює $C_{14}^{5} = 2002$; б) Три білі миші можна вибрати C_8^3 способами, а дві коричневі C_6^2 способами. Оскільки вибирають і білих, і коричневих мишей, то число способів вибору $C_8^3 \cdot C_6^2 = 840$; в) Оскільки всі миші повинні бути одного кольору, то це можна зробити C_8^5 або C_6^5 способами. За правилом суми одержуємо $C_8^5 + C_6^5 = 62$ (способи).

Відповідь. 2002 способи; 840 способів; 62 способи.

Сформулюємо декілька комбінаторних задач природничого характеру, подібних до вище розглянутої задачі.

Задачі для самостійного розв'язування

6.8. У 6 хлопчиків і 11 дівчаток у класі є ознаки інфекційного захворювання. Для того щоб перевірити наявність захворювання, потрібно взяти вибірковий аналіз крові у двох хлопчиків і двох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

6.9. У генетичному експерименті 4 білих, 7 червоних і 5 рожевих квіток гороху були взяті для запилення з вибірки, яка містить по 10 квіток кожного з названих кольорів. Скількома способами можна це зробити?

6.10. У деякого захворювання існує 6 відомих симптомів. Це захворювання діагнозується, якщо у хворого проявляється не менше чотирьох симптомів. Скільки різних комбінацій симптомів можуть привести до встановлення даного діагнозу?

6.11. З 10 різних квітів треба скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квітів. Скількома способами можна скласти такий букет?

6.12. У деякого захворювання є n відомих симптомів. Хворий може мати всі ці симптоми, жодного з них або будь-яку кількість симптомів. Скільки існує можливих комбінацій симптомів?

6.2. Прикладні задачі, в яких йдеться про випадкові події та їх ймовірності

Теорія ймовірностей широко застосовується в різних галузях науки і техніки, оскільки з масовими явищами можна зустрітися у фізиці, хімії, астрономії, медицині, сільському господарстві, біології а особливо у генетиці.

Метою вивчення елементів теорії ймовірностей в загальноосвітній школі, зокрема в спеціалізованих школах і класах природничого профілю, є закладення основ для навчання учнів опрацювання статистичного матеріалу, формування розуміння того, що багато законів природи і суспільства мають імовірнісний характер, сприяння розвитку статистичного мислення учнів, формування навичок побудови найпростіших імовірнісних моделей реальних ситуацій [20].

Досягнення поставленої мети відбувається з допомогою прикладних задач, що приводять до математичних понять, та задач на застосування цих понять. Це дає можливість навчити учнів елементів математичного моделювання в процесі розв'язування таких задач. Для розв'язування названих задач потрібно знати не лише основні поняття теорії ймовірностей, а й основні поняття природничих наук, зокрема біології та генетики. Пригадаємо деякі з них [17].

Популяція – сукупність особин одного виду, що мають спільний генофонд і займають певну територію.

Генофонд – сукупність генів у особин даної популяції або виду.

Генотип – сукупність усіх генів організму.

Гетерозигота – організм, у якого гомологічні хромосоми містять різні алелі того чи іншого гена .

Гомозигота – організм, у якого гомологічні хромосоми містять однакові алелі того чи іншого гена.

Гомологічні хромосоми – парні хромосоми, які схожі за морфологічними ознаками й містять однаковий набір генів.

Домінантний ген (A) – ген який завжди має переваги при успадкуванні.

Рецесивний ген (a) – ген який пригнічується домінантним.

Фенотип – сукупність усіх ознак і властивостей організму, які формуються внаслідок взаємодії його генотипу й зовнішнього середовища.

Закони Менделя.

І. Особини домінантного і мішаного генотипів у фенотипі (зовнішній прояві ознаки) володіють домінантною ознакою і лише особини рецесивного генотипа у фенотипі володіють рецесивною ознакою.

ІІ. У поколінні F_2 відбувається розщеплення фенотипів у співвідношенні 3:1 (3 частини складають особини з домінантною ознакою у фенотипі і 1 частину особини з рецесивною ознакою у фенотипі).

Нехай існує популяція чистих ліній з генотипами AA і aa – покоління F_0 (батькові форми). Після схрещування особин з генотипом AA з особинами з генотипом aa покоління F_0 утворюється покоління гібридів F_1 з генотипом Aa. У поколінні F_1 інших генотипів крім Aa не існує ($AA \times aa = Aa$).

При випадковому схрещуванні особин покоління F_1 утворюється покоління F_2, у якого приймають однакову участь чотири фенотипа ($Aa \times Aa = AA$ або Aa або aA або aa).

Згідно ІІ закону Менделя для покоління F_2 ймовірність того, що у фенотипі особини виявиться домінантна ознака, дорівнює $\frac{3}{4}$, а ймовірність того, що у фенотипі особини виявиться рецесивна ознака, дорівнює $\frac{1}{4}$.

Вивчення початків теорії ймовірностей розпочинається з введення певного кола понять, якими вона оперує. Найважливішим поняттям теорії ймовірностей як галузі математики є поняття випадкової події. В шкільному курсі алгебри і початків аналізу [40] вводиться насамперед поняття ймовірності для елементарних подій.

Зупинимось на практичних ситуаціях природничого характеру, розгляд яких перед введенням означення класичної ймовірності допоможе учням усвідомити дане поняття.

Задача 6.6. Деяка популяція рослин складається з особин трьох типів, помічених AA, Aa, aa. Чисельність кожного типу відповідно дорівнює 200, 600 і 50. Припустимо, що з цієї популяції випадково вибирають одну рослину. Яка імовірність того, що ця рослина типу AA?

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що вибрата навмання рослина буде типу AA. Всього може бути 200 + 600 + 50 = 850 випадків, з них 200 сприяють події A. Отже,

$$P(A) = \frac{200}{850} = \frac{4}{17} \approx 0{,}235.$$

Відповідь. $P(A) \approx 0{,}235$.

Задача може мати дещо іншу фабулу.

6.13. У деякій популяції у 40 % людей волосся темне, у 40 % – руде і у 20 % – світле. У цій популяції у всіх темноволосих людей очі карі, у всіх світловолосих – блакитні, у однієї половини рудих – блакитні, а у іншої карі. Яка імовірність того що у людини темне волосся? Яка імовірність того що у людини карі очі?

6.14. У сім'ї двоє дітей. Вважаючи народження хлопчика і дівчинки рівноможливими подіями, знайти імовірність того, що в сім'ї: а) дві дівчинки; б) діти однієї статі.

Серед задач на обчислення ймовірностей випадкових подій на основі класичного підходу зустрічаються більш складні, розв'язування яких потребує використання формул комбінаторики.

Задача 6.7. В одному акваріумі перебувають 3 білі, 3 червоні і 3 блакитні рибки. Знайдіть імовірність того, що випадково виловлені три рибки виявляться білими.

Розв'язання. Нехай A – подія, ймовірність якої шукається. Число всіх елементарних подій $n = C_9^3$, а число подій, які сприяють події A $m = C_3^3 = 1$. Отже, $P(A) = \frac{1}{C_9^3} = \frac{3!\cdot 6!}{9!} = \frac{1}{84}$.

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{84}$.

Зміст задачі може бути іншим.

6.15. Із 20 осіб, які одночасно захворіли грипом, 15 одужали повністю за 3 дні. Знайдіть імовірність того, що серед 5 навмання вибратих осіб: а) всі 5 одужали за 3 дні; б) тільки 4 одужали за вказаний термін; в) жодна особа не одужала за 3 дні.

До понять теорії ймовірностей, про які повинні мати уявлення учні, відноситься поняття *статистичної ймовірності*. У чинних шкільних підручниках, зокрема підручнику з алгебри і початків аналізу [40], статистична ймовірність означається через поняття статистичної частоти. В класах природничого профілю при введенні цих понять варто використовувати задачі такого змісту.

Задача 6.8. Серед 7500 ампул, перевірених на герметичність, виявилось 15 з тріщинами. Визначити відносну частоту появи ампул що мають тріщини.

Розв'язання. Оскільки статистична частота є відношенням $\frac{m}{n}$, де n – загальна кількість випробувань, m – кількість появ події, що нас цікавить, то скориставшись означенням, одержуємо $\frac{15}{7500} = 0{,}002 = 0{,}2$ %.

Відповідь. 0,2 %.

Зміст задачі може бути іншим.

6.16. У деякому місті за певний період часу народилось 83 дитини, з яких 43 хлопчики. Визначте відносну частоту народження хлопчика.

Задача 6.9. Хімічний дослід повторюють 7 разів, в 5 випадках він закінчується успіхом, а в інших – невдачею. Визначте відносну частоту успішних виходів даного досліду і найможливіше число успішних виходів у наступній серії, що складається з 10 дослідів.

Розв′язання. Позначимо через A подію – дослід виявиться успішним. Тоді статистична частота дорівнюватиме: $P_N\{A\} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}714$. Якщо серед десяти проведених у наступній серії дослідів x виявиться успішними, то ймовірність події A дорівнюватиме $P(A) = \dfrac{x}{10}$. Оскільки $P_N\{A\} \approx P(A)$, то $\dfrac{x}{10} \approx 0{,}714$. Звідси $x \approx 7{,}14 \approx 7$ (дослідів).

Відповідь. 0,714; 7 дослідів.

Задачі для самостійного розв′язування

6.17. За даними медичної статистики серед донорів 37 % мають групу крові A, 23 % – групу B, 1 % – групу AB і 39 % – групу O. У деякий момент часу на станції переливання крові виявилось 8 донорів, що прийшли на станцію за власною ініціативою. Визначити найімовірніший розподіл числа донорів по групах крові.

6.18. Іхтіолог хотів визначити, скільки у ставку риби, придатної для виловлювання. Для цього він закинув сітку з наперед заданими розмірами отворів і витягнувши її, виявив 30 рибин. Позначивши кожну з них міткою, він кинув рибу назад у ставок. На другий день іхтіолог закинув ту саму сітку і спіймав 40 рибин, на двох з яких були його мітки. Яким чином він за такими даними знайде приблизну кількість риб у ставку?

Під час вивчення початків теорії ймовірностей не обмежуються розглядом лише основних понять, якими вона оперує, крім понять, розглядаються теореми про додавання ймовірностей несумісних подій, множення ймовірностей незалежних подій, імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій. Розглянемо деякі прикладні задачі природничого характеру, включення яких у навчальний процес створює перед учнями проблемні ситуації і допомагає їм при формулюванні та використанні згаданих теорем.

Задача 6.10. Деяка популяція рослин складається з особин трьох типів, помічених AA, Aa, aa. Чисельність кожного типу відповідно дорівнює 200, 600, 50. Припустимо, що з цієї популяції випадково вибирають одну рослину. Яка ймовірність того, що випадково вибрана рослина виявиться типу AA або Aa?

Розв'язання. Аналізуючи умову задачі приходимо до висновку що в ній йдеться про дві несумісні події (випадково вибрана рослина виявилась типу AA або випадково вибрана рослина виявилась типу Aa). Ймовірності цих подій відповідно дорівнюють $P(A)=\frac{200}{850}=\frac{4}{17}$, $P(B)=\frac{600}{850}=\frac{12}{17}$. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій одержуємо

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{4}{17}+\frac{12}{17}=\frac{16}{17}\approx 0{,}941.$$

Відповідь. 0,941.

Задачі для самостійного розв'язування

6.19. У деякій популяції у 40 % людей волосся темне, у 40 % – руде і у 20 % – світле. У цій популяції у всіх темноволосих людей очі карі, у всіх світловолосих блакитні, у однієї половини рудих – блакитні, а у іншої карі. Яка ймовірність того, що людина з даної популяції темноволоса і кароока, темноволоса з блакитними очима?

6.20. В акваріум, в якому плавають три риби A, B і C, час від часу поміщають шматочки їжі. Кожен раз коли кидають шматочок їжі, риби конкурують за нього. Припустимо, що за тривалого спостереження було встановлено, що A і B досягли успіху протягом $\frac{1}{2}$ часу, а A і C – протягом $\frac{3}{4}$ часу спостереження. 1) Яка ймовірність того, що успіху досягне риба A? 2) Яка з риб нагодована краще за всіх?

6.21. В одному акваріумі перебувають 7 червоних, 8 зелених і 6 блакитних рибок. Яка ймовірність того, що випадково виловлена рибка не буде червоною?

6.22. Відповідно до статистичних даних, групу крові A має 0,369 частини всіх європейців, групу B – 0,235, групу AB – 0,006, групу O – 0,390. Знайдіть імовірність того, що у довільно взятого донора – європейця група крові A або B.

6.23. Записати повну групу подій (множину генотипів), які можуть утворюватись при схрещуванні особин типу: 1) $Aa \times Aa$ – гетерозиготи. 2) $AA \times aa$ – гомозиготи. Знайдіть ймовірність появи кожного з генотипів.

Поняття *протилежної* події використовується при розв'язуванні таких задач.

Задача 6.11. У лабораторії знаходиться 10 кроликів, з них носіїв вірусу B_1 – три, а носіїв вірусу B_2 – сім. Навмання взято два кролики. Яка ймовірність того, що вибрані кролики носії різних вірусів?

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що два вибрані кролики носії різних вірусів. Тоді протилежна до неї подія $\overline{A}$ полягає в тому, що два вибрані кролики носії одного вірусу. За класичним означенням імовірності маємо $P(\overline{A}) = \dfrac{C_3^2 + C_7^2}{C_{10}^2} = \left(\dfrac{3!}{2!} + \dfrac{7!}{2! \cdot 5!}\right)\dfrac{2! \cdot 8!}{10!} = \dfrac{8}{15}$. Використовуючи наслідок з теореми про додавання ймовірностей несумісних подій, одержуємо $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$.

Відповідь. $\dfrac{7}{15}$.

6.24. У домашній аптечці 5 упаковок ліків, із яких 3 упаковки аспірину і 2 тетрацикліну. Навмання беруть 2 упаковки. Яка ймовірність того, що одна з них з аспірином а одна з тетрацикліном?

6.25. У домашній аптечці 5 упаковок ліків, із котрих 3 упаковки анальгіну і 2 цитрамону. Випадковим способом відразу беруть 3 упаковки. Яка ймовірність того, що принаймні одна з них з цитрамоном?

Поняття незалежної події є наступним поняттям теорії ймовірностей, що розглядається у старшій школі. Серед теорем, які стосуються цього типу подій, особливу увагу приділяють теоремі множення ймовірностей незалежних подій. При цьому корисним буде розгляд задач такого типу.

Задача 6.12. Серед 18 пацієнтів у двох негативний резус-фактор. Знайдіть імовірність того, що серед двох довільним чином вибраних пацієнтів виявиться пацієнт з негативним резус-фактором.

Розв'язання. Відповідно до статистичного означення ймовірність негативного резус-фактора у пацієнта $P(A) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Оскільки в задачі йдеться про незалежні події, то за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій одержуємо $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012.$

Відповідь. 0,012.

Задачі для самостійного розв'язування

6.26. Багато генів, зчеплених зі статтю, є рецесивними і викликають дефекти (дальтонізм, гемофілія). Нехай a – такий ген. Тоді дефект мають всі чоловіки типу a та жінки типу aa (жінки типу Aa дефекту не мають, але можуть передавати його нащадкам). Яка ймовірність дальтонізму у жінок, якщо в середньому на 100 осіб чоловічої статі один дальтонік?

6.27. Причинами природженої сліпоти можуть бути аномалії кришталика та рогівки ока. Це рецесивні ознаки, які успадковуються незалежно. Мати і батько здорові, але є носіями рецесивних алелей сліпоти. Яка імовірність народження у них здорових і хворих дітей?

6.28. Імовірність виживання одного організму протягом 20 хвилин дорівнює 0,7. У пробірці з сприятливими для виживання цих організмів умовами міститься два тільки що народжені організми. Яка імовірність того, що через 20 хвилин вони будуть живими?

6.29. Дві фармацевтичні фірми незалежно одна від одної розробляють аналогічні препарати. Імовірність того, що до закінчення року перша фірма випустить свій препарат дорівнює 0,9, а друга – 0,7. Яка імовірність того, що принаймні один із препаратів буде готовий до виробництва наприкінці року?

6.30. Полідактилія (шестипалість), короткозорість і карий колір очей успадковуються як домінантні ознаки. Гени, що визначають ці ознаки, містяться в різних парах хромосом. Яка ймовірність народження кароокої дитини без аномалій, якщо обоє батьків гетерозиготні за всіма трьома генами?

6.31. Карооокий праворукий юнак одружується з такою самою дівчиною. Обоє гетерозиготні за обома алелями. Закохані мріють про те, щоб у них народилась блакитноока праворука дитина. Яка ймовірність народження такої дитини?

6.32. Під час лікування захворювання використовуються 3 лікарські препарати, кожен з яких дає алергічні реакції у 1 % випадків. Яка ймовірність, що у хворого, вибраного довільним чином не буде алергії при прийомі трьох препаратів одночасно?

До більш складних задач природничого змісту слід віднести задачі, для розв'язування яких одночасно використовуються теореми додавання і множення. Зупинимось на деяких з таких задач.

Задача 6.13. В сім'ї двоє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, визначте ймовірність того що в сім'ї: а) двоє хлопчиків; б) хоча б одна дівчинка; в) старша дитина дівчинка, а менша хлопчик; г) один хлопчик.

Розв'язання. а) За теоремою множення ймовірностей одержуємо $P(XX) = 0{,}52 \cdot 0{,}52 = 0{,}2704$. б) Ймовірність того, що в сім'ї, яка має двох дітей, є хоча б одна дівчинка, дорівнює ймовірності того, що в сім'ї немає двох хлопчиків $P(\overline{XX}) = 1 - 0{,}2704 = 0{,}7296$. в) Ймовірність того, що в сім'ї

старша дитина дівчинка, а менша хлопчик $P(DX) = P(\overline{X}\ X) = (1-0{,}52)\cdot 0{,}52 = 0{,}2496$. г) Ймовірність того, що в сім'ї один хлопчик $P(XD \bigcup DX) = P(XD) + P(DX) =$
$= 0{,}52\cdot 0{,}48 + 0{,}48\cdot 0{,}52 = 0{,}4992$

Відповідь. а) 0,2704; б) 0,7296; в) 0,2496; г) 0,4992.

Задачі для самостійного розв'язування

6.33. У сім'ї троє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52 знайдіть ймовірність того, що в сім'ї: 1) три хлопчики, 2) діти однієї та другої статі.

Задача 6.14. В сім'ї троє дітей. Враховуючи, що ймовірність народження хлопчика 0,52, знайдіть ймовірність того, що в сім'ї дві дівчинки, якщо відомо, що старша дитина дівчинка.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що в сім'ї, яка має 3-х дітей, старша з яких дівчинка, є дві дівчинки.Оскільки стать кожної наступної дитини не залежить від статі попередніх, то ми маємо справу з незалежними подіями. Шукана ймовірність дорівнює $P(A) = P(X \bigcap D) + P(D \bigcap X) = 2\cdot 0{,}52\cdot 0{,}48 \approx 0{,}5.$

Відповідь. 0,5.

Практичні ситуації, покладені в основу сюжетів наступних задач, допоможуть учням при вивченні теореми про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій.

Задача 6.15. Хворому потрібне переливання крові. Ймовірність, що кров взятого навмання донора виявиться придатною, $p = 0{,}2$. Яка ймовірність, що з 10 донорів хоча б у одного група крові буде придатною?

Розв'язання. Нехай A_i – кров i-го донора виявиться придатною, ($i = \overline{1,10}$), A – кров навмання взятого донора виявилась придатною. Для будь-якого з вказаних i $P(A_i) = 0{,}2$. Використовуючи наслідок з теореми про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій, одержуємо $P(A) = 1-(1-0{,}2)^{10} = 1-0{,}8^{10} \approx 0{,}89$.

Відповідь. 0,89.

Задачі для самостійного розв'язування

6.34. В аптеці є 2 лікарські препарати, які можуть бути використані при даному захворюванні. Ймовірність позитивного результату при використанні першого препарату 0,8, а другого – 0,9. Яка ймовірність того, що взятий навмання препарат дасть позитивний результат?

До понять, якими оволодівають учні під час вивчення елементів теорії ймовірностей, відноситься поняття *умовної ймовірності,* яке засвоюють перед вивченням теореми множення ймовірностей. Підібрані при цьому задачі повинні бути нескладними за змістом і давати можливість учням усвідомити зміст нового поняття.

Задача 6.16. На обстеження до лікарні прибула група з 10 чоловік. Відомо, що троє з них хворі. Лікар запрошує до кабінету по два пацієнти. Знайдіть ймовірність того, що вони обидва є: 1) хворі; 2) здорові.

Розв'язання. 1) Позначимо події: A – перший пацієнт, який заходить до лікаря, хворий; B – другий пацієнт хворий. Ймовірність першої події $P(A) = \dfrac{3}{10}$, а ймовірність другої події визначатиметься за умови, що перша подія вже відбулась, отже,

$P_A(B)=\frac{2}{9}$. Оскільки події залежні, то теорему множення запишемо у вигляді $P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$.

2) Позначимо події: C – перший пацієнт здоровий, D – другий пацієнт здоровий. Аналогічно одержуємо $P(C\bigcap D)=P(C)\cdot P_C(D)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{7}{15}$.

Відповідь. $\frac{1}{15}$; $\frac{7}{15}$.

6.35. Під час епідемії в населеному пункті 60 % мешканців виявились хворими. З кожних 100 хворих 10 потребують термінової медичної допомоги. Знайдіть ймовірність того, що будь-якому навмання взятому мешканцю необхідна термінова медична допомога.

6.36. У 97 % пацієнтів при прийомі певного лікарського препарату спостерігається зниження кров'яного тиску, при цьому у 0,2 % пацієнтів виникають алергічні реакції. Яка ймовірність алергії за відсутності бажаних наслідків (зниження кров'яного тиску)?

6.37. При обстеженні хвороб легенів перевіряли 10000 осіб у віці старше 60 років. Виявилось, що 4000 осіб з цієї групи є постійними паліями. Обстеження показало, що серйозні порушення в легенях мали 2000 паліїв і 1200 осіб, які не палять. Покажіть, що ймовірність отримати хворобу легенів в особи, яка палить, більша, ніж в особи, яка не палить.

Поняття взаємно незалежних випробувань відноситься до кола понять, якими оволодівають учні під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу старшої школи. Вивчення початків теорії ймовірностей передбачає ознайомлення зі схемою та формулою Бернуллі.

Розглянемо задачі природничого змісту, які доцільно розв'язувати поряд з задачами чинного підручника [40] при засвоєнні названого матеріалу.

Задача 6.17. Лівші складають в середньому 1 % населення. Яка ймовірність, що в колективі з 200 чоловік буде 3 лівші?

Розв'язання. Ймовірність того, що вибрана довільним чином з колектива людина виявиться лівшею дорівнює $p = 0{,}01$, а ймовірність, що виявиться правшею $q = 0{,}99$. За формулою Бернуллі ймовірність того що в колективі з 200 чоловік буде 3 лівші: $P(A) = C_{200}^{3} \cdot 0{,}99^{97} = \dfrac{200!}{3! \cdot 197!} \cdot 0{,}01^{3} \cdot 0{,}99^{97} \approx 0{,}18.$

Відповідь. 0,18.

Задачі для самостійного розв'язування

6.38. Встановлено, що вовк, який один нападає на лося, досягає успіху у 8 % випадків. Яка ймовірність того, що в 5 випадках успішними будуть дві спроби?

6.39. Шість осіб мають хворобу, для якої коефіцієнт одужання складає 98 %. Яка ймовірність того, що одужають всі шестеро, жоден не одужає, одужає тільки п'ятеро?

6.40. Посилаючись на багаторічні спостереження, виклик лікаря в деякий будинок оцінюється ймовірністю 0,4. Знайдіть ймовірність того, що з 5 викликів лікаря два виклики будуть в один будинок.

6.41. Хворому необхідно зробити переливання крові. Ймовірність того, що група крові виявиться придатною $p = 0{,}3$. Знайдіть ймовірність того, що з 5-ти донорів у двох група крові виявиться придатною.

6.42. Поява колонії мікроорганізмів даного типу в певних умовах оцінюється ймовірністю 0,8. Визначте ймовірність того, що із 5 випадків ця колонія мікроорганізмів з'явиться не менше чотирьох разів.

6.43. У популяції дрозофіли у 20 % є мутація крил. Якщо з популяції вибирають навмання 6 мух, то яка ймовірність мутації у двох з них? принаймні в однієї? менше, ніж у п'яти?

6.3. Статистичні задачі природничого змісту

Вивчення питань математичної статистики в школі згідно з чинними програмами [19], [20] має переважно практичний характер, який передбачає включення у процес навчання задач прикладної статистики. Типовими серед цих задач є задачі на побудову дискретних варіаційних рядів та визначення їх моди і медіани, виконання графічного представлення розподілів, обчислення середнього арифметичного значення, середнього квадратичного відхилення та дисперсії статистичного ряду тощо.

Розв'язування більшості названих задач полягає в опрацюванні великих масивів числової інформації, їх систематизації та приведенні у необхідний порядок. Значну допомогу при цьому надає програма GRAN 1, яка має цілий ряд послуг, призначених для введення, опрацювання та виведення статистичної інформації. Вона дає можливість перекласти механічну рутинну працю на комп'ютер.

Згадані задачі прикладної статистики є останнім 13-м типом системи задач природничого характеру. Розпочнемо їх розгляд з задач розв'язування яких потребує побудови дискретних та інтервальних варіаційних рядів, наочного графічного їх подання у вигляді полігонів і гістограм.

Задача 6.18. На лабораторній роботі учням було запропоновано виміряти довжину 45 колосків, розміри яких змінювалися завдяки модифікаційній мінливості, яка залежить від отриманих генів та умов зростання. Були отримані такі результати (в см): 57, 52, 56, 56, 70, 64, 58, 68, 60, 62, 60, 61, 61, 68, 52, 72, 52, 62, 52, 56, 44, 58, 62, 58, 60, 64, 68, 66, 68, 48, 62, 56, 60, 68, 60, 70, 48, 52, 56, 72, 60, 58, 64, 66, 48. Побудуйте дискретний варіаційний ряд та накресліть його полігон.

Розв'язання. Згідно даних задачі одержуємо такий дискретний варіаційний ряд

Довжина колосків, x_i	44	48	52	56	57	58	60	61	62	64	66	68	70	72
Частота, y_i	1	3	5	5	1	4	6	2	4	3	2	5	2	2

Комп'ютерна програма GRAN 1 будує полігон представлений на рис. 20

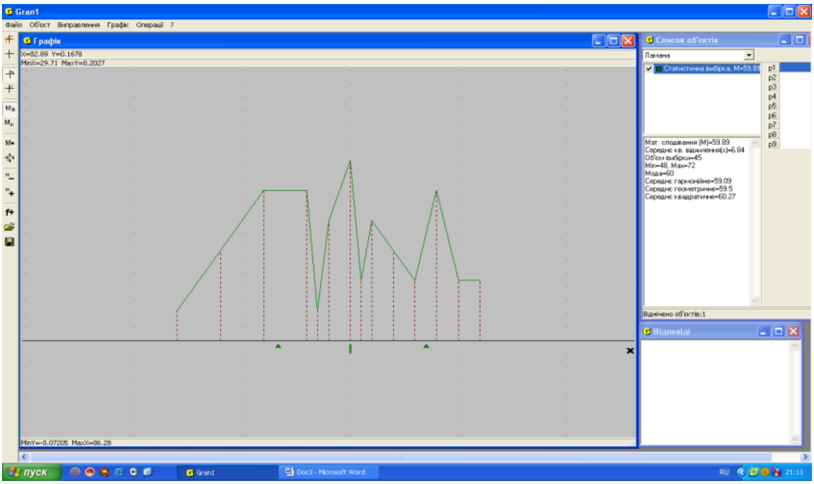

Рис. 20

Зміст задачі може бути дещо іншим.

Задачі для самостійного розв'язування

6.44. Із 109 хімічних елементів періодичної системи Д.І. Менделєєва 20 досліджуваних елементів мають такий розподіл енергії іонізації: 7, 5, 10, 15, 14, 14, 15, 20, 4, 15, 14, 5, 10, 14, 14, 20, 25, 15, 7, 10. Побудуйте дискретний варіаційний ряд та накресліть полігон.

6.45. Під час дослідження короткочасної пам'яті деякій групі людей із 50 чоловік запропонували запам'ятати 10 слів за 60 секунд. Після цього люди повинні були записувати слова, які вони запам'ятали. Після досліду підрахували кількість помилок, які зробила кожна людина, і виявили такі результати: 2, 6, 8, 10, 1, 6, 5, 5, 3, 2, 4, 9, 7, 6, 3, 5, 5, 5, 4, 8, 4, 4, 1, 6, 5, 3, 2, 7, 6, 5, 4, 5, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 5, 3, 4, 3. Побудуйте дискретний варіаційний ряд та накресліть полігон кількості помилок, зроблених кожною досліджуваною людиною.

6.46. Після аварії на Чорнобильській АЕС інститутом ендокринології та обміну речовин проводилось дослідження щитовидної залози. Останнє дослідження показало такі дані об'єму залози: 9,6; 6,8; 7,5; 5,9; 7; 8; 8; 9,2; 7; 9,6; 10,4; 7,5; 7,5; 8; 6,8; 10; 9,2; 7,5; 7,5; 8; 7; 6,3; 9,2; 8; 9,2; 8; 7,5; 10,4; 7,5; 9,6; 8; 10,9; 9,6; 8; 9,6; 7; 6,3; 10; 7,5; 9,2; 6,8; 7; 7; 8; 9,6; 7,5; 6,8; 9,6; 6,3; 7,5 см^3. Побудуйте дискретний варіаційний ряд і накресліть його полігон.

6.47. Аналіз крові у п'ятидесяти людей дав такі результати на вміст лейкоцитів (в тис. на см^3 крові): 8, 9, 7, 7, 4, 9, 6, 8, 5, 10, 9, 5, 6, 4, 10, 8, 6, 7, 7, 8, 6, 6, 8, 8, 5, 7, 7, 7, 9, 11, 10, 11, 5, 7, 7, 4, 6, 8, 9, 10, 7, 6, 7, 7, 5, 8, 6, 9, 6, 10. Побудуйте дискретний варіаційний ряд і накресліть його полігон.

6.48. При відгодівлі 45 тварин протягом 10 днів заєрестровано такі прирости в масі (у кг):

4,1	4,0	3,9	4,0	4,2	4,1	4,2	4,0	4,4	4,1	4,3	4,2	4,3	4,2	3,9
4,1	3,9	4,1	4,2	4,3	3,7	4,1	4,2	4,3	3	3,8	4,1	4,0	4,2	4,1
4,0	4,0	4,2	4,0	4,1	3,9	4,0	4,4	3,8	4,1	4,0	3,9	3,9	3,8	4,3

Побудуйте дискретний варіаційний ряд і накресліть полігон.

6.49. Гормон інсуліну підвищує проникнення молекул глюкози з крові в клітини. В разі недостатнього утворення інсуліну може виникнути така хвороба, як цукровий діабет. З'ясовували в якому віці прояв хвороби найпоширеніший. Досліджуючи 30 хворих отримали такі результати:

30, 40, 50, 55, 45, 55, 35, 55, 60, 45, 60, 60, 50, 35, 55,
50, 55, 60, 40, 60, 55, 40, 45, 50, 45, 60, 50, 45, 60, 60.

Побудуйте дискретний варіаційний ряд, накресліть полігон. Визначте в якому віці прояв хвороби найпоширеніший.

Задача 6.19. Кров людини має слабко-лужну реакцію, pH якої міститься у межах 7,33 – 7,47 (pH – це від'ємний логарифм концентрації гідроген-іонів). У досліджуваних 22 людей виявили такий pH:

7,33-7,35; 7,37-7,39; 7,35-7,37; 7,45-7,47; 7,35-7,37; 7,37-7,39; 7,41-7,43;
7,43-7,45; 7,35-7,37; 7,33-7,35; 7,45-7,47; 7,39-7,41; 7,37-7,39; 7,45-7,47;
7,35-7,37; 7,41-7,43; 7,33-7,35; 7,43-7,45; 7,37-7,39; 7,41-7,43; 7,35-7,37; 7,39-7,41.

Побудуйте інтервальний варіаційний ряд та накресліть його полігон та гістограму.

Розв'язання. Згідно даних задачі одержуємо такий інтервальний варіаційний ряд:

$pH,\ x_i$	7,33-7,35	7,35-7,37	7,37-7,39	7,39-7,41	7,41-7,43	7,43-7,45	7,45-7,47
Частота, y_i	3	5	4	2	3	2	3

За допомогою комп'ютерної програми GRAN 1 будуємо полігон і гістограму, представлені на рисунках 21, 22 (с. 110).

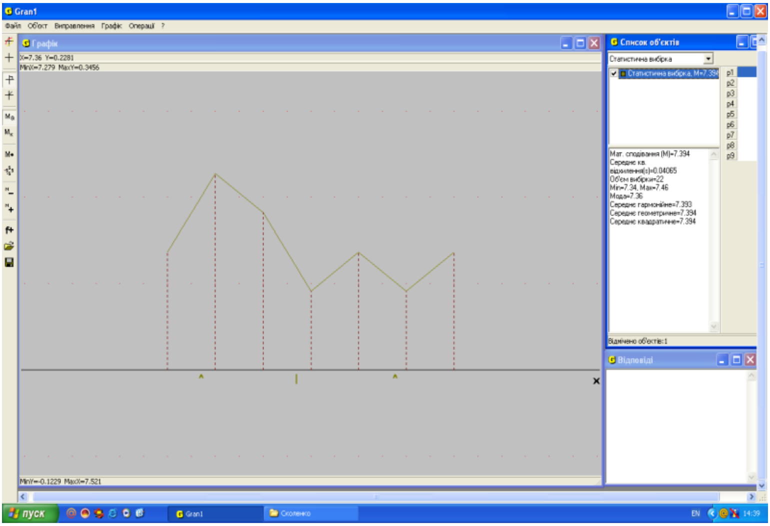

Рис. 21

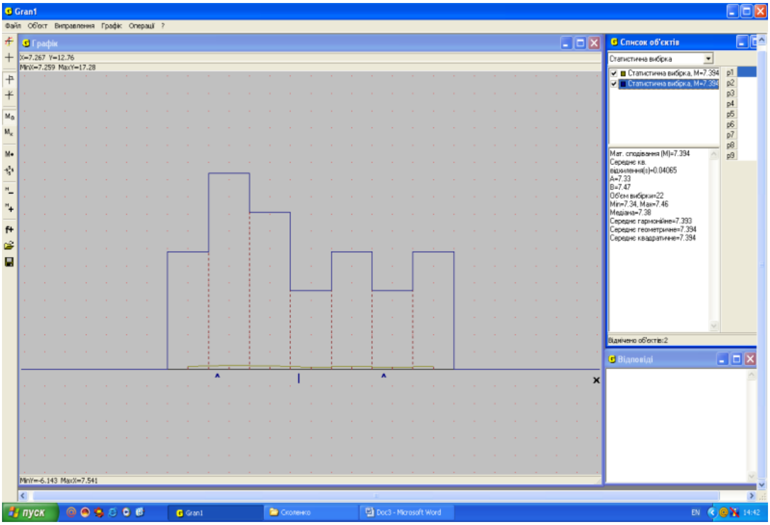

Рис. 22

Задача може мати дещо іншу фабулу.

Задачі для самостійного розв'язування

6.50. У ботанічній лабораторії вчені провели дослідження реагування рослин різних видів на зміну зовнішнього середовища. Температуру повітря у лабораторії кожного дня підвищували на 5ºС. Через певну кількість днів спостерігалося збільшення інтенсивності споживання рослиною води, а з часом рослина починала в'янути. Результати спостережень занесені у таблицю:

x_i ,кількість видів зів'ялих рослин	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
n_i , кількість днів	5	7	8	10	11

Побудуйте полігон та гістограму цього інтервального ряду.

6.51. У лабораторії для дослідження наявності хлоропластів у клітинах злаків, було вибрано 100 рослин різних видів. У результаті одержали таку таблицю частот:

Кількість хлоро-пластів у клітині, x_i	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
Число рослин, n_i	5	10	33	21	25	6

Побудуйте гістограму і полігон цього інтервального ряду.

6.52. Провівши ряд дослідів, вчені дійшли висновку, що на організм людини впливає ряд факторів навколишнього середовища: склад повітря, води, продуктів харчування; температура, вологість повітря; атмосферний тиск; радіація; шум; живі істоти, що оточують людину; соціальні фактори. Для 250 досліджуваних були одержані такі дані:

Кількість впливів, x_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
Кількість людей, n_i	65	75	52	38	20

Побудуйте гістограму і полігон за даними цієї таблиці.

6.53. Для вивчення добового надходження вітамінів групи B до організму людини було обрано 3000 добровольців. Ретельно обстеживши кожного з них, працівники дослідного центру виявили, що менше 510 з них мають необхідну кількість хоча б одного з цих вітамінів. Одержали такі дані:

	B_1	B_2	B_6	B_{12}	B_3
Добова необхідність, x_i , мг	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
Кількість досліджуваних, n_i	124	37	145	90	114

Побудуйте гістограму і полігон за даними цієї таблиці.

6.54. За даними Всесвітньої організації здоров'я люди, що страждають на слабкість вестибулярного апарату, мають ряд причин виникнення цього симптому: постійний шум, звукові коливання надвисоких та наднизьких частот, механічне чищення слухового проходу від сірки, слухання гучної музики, дія хімічних речовин тощо. Для 300 досліджуваних були одержані результати представлені у наступній таблиці. Побудуйте гістограму і полігон за даними дослідження.

Кількість причин, x_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
Кількість досліджуваних, n_i	20	40	45	75	80	25	15

Далі розглянемо задачі на визначення мір центральної тенденції, а саме *моди* і *медіани* дискретних варіаційних рядів.

Задача 6.20. Лікар ендокринолог виявив захворюваність щитовидної залози у 25 дітей різного віку: 10, 11, 14, 9, 11, 14, 10, 8, 10, 15, 14, 10, 11, 14, 10, 16, 9, 16, 14, 8, 15, 10, 11, 10, 14 років. За одержаними даними побудуйте дискретний варіаційний ряд і визначте його моду і медіану.

Розв'язання. Згідно даних задачі одержуємо такий дискретний варіаційний ряд:

Вік дітей, x_i	8	9	10	11	14	15	16
Кількість дітей, y_i	2	2	7	4	6	2	2

Вік дітей, який трапляється найчастіше в даному ряді розподілу, – 10 років, отже, за означенням *моди* $M_o = 10$. Значення віку, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень більша від нього, а друга менша дорівнює 11, отже за означенням *медіани* $M_e = 11$.

Відповідь. $M_o = 10$, $M_e = 11$.

Відповіді на такі питання доводиться шукати не лише медикам, а й біологам, хімікам та іншим дослідникам природничої галузі.

Задачі для самостійного розв'язавання

6.55. У наступній таблиці представлені результати досліджень студентами висоти стеблин у квіток мати-й-мачухи, одержані на лабораторній роботі з ботаніки. Знайдіть моду і медіану даного дискретного варіаційного ряду.

Висота стеблин, мм	50	65	60	65	70	75	80
Кількість квіток мати-й-мачухи	25	10	32	8	9	13	3

6.56. У агроінституті займались дослідженням елітних сортів картоплі. Для вибору насіннєвого фонду картоплі підраховувалась кількість вічок: 12, 4, 7, 10, 10, 9, 5, 7, 8, 9, 9, 10, 8, 6, 7, 11, 7, 6, 9, 8, 9, 11, 6, 8, 8, 7, 9, 5, 8, 7, 9, 7, 7, 6, 5, 10, 9, 9, 5,6, 7, 9, 8, 7, 9, 5, 10, 9, 9, 6, 7. Побудуйте дискретний варіаційний ряд і визначте його моду і медіану.

6.57. При розщепленні глюкози киснем, яке описується рівнянням: $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$, виділяється вуглекислий газ і вода. Швидкість цієї хімічної реакції залежить від різних факторів: тиску, температури, вологості і т.д. Було проведено за різних умов ряд дослідів, на основі яких визначили таку швидкість розщеплення глюкози (в г/хв): 3, 5, 2, 1, 4, 7, 9, 12, 3, 1, 2, 4, 8, 6, 5, 4, 3, 3, 1, 8, 7. Побудуйте дискретний варіаційний ряд та визначте його моду і медіану.

6.58. У штативі стоять 17 пробірок із зразками крові. Для визначення групи крові на два кінці чистого предметного скла нанесли по одній краплині сироватки: на один кінець – сироватку крові II групи, на інший – III групи. У кожну із них добавили по краплині досліджуваної крові. Перемішали сироватку з кров'ю і через 1-5 хвилин спостерігали результати. У пробірках була кров таких груп: I, IV, II, II, IV, I, I, I, III, I, I, III, II. За даними дослідження побудуйте дискретний варіаційний ряд та визначте його моду і медіану.

6.59. Алергічні захворювання дуже розповсюджені серед жителів України. Причиною цих захворювань є різні фактори. Відкрите акціонерне товариство „Фармак" розробило 8 препаратів, які не повністю виліковують хворобу, але покращують стан хворого. Ці препарати допомогли 170 хворим. Результати лікування представлені дискретним варіаційним рядом (с. 114). Визначте його моду і медіану.

№ препарату, x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість вилікуваних, n_i	15	20	12	60	18	30	10	5

Практичний зміст статистичних величин: *середнє арифметичне, середнє квадратичне, дисперсія* може бути розкритий під час розв'язування таких задач.

Задача 6.21. В аналітичному центрі провели дослідження, яке визначило час початку розпаду захисних оболонок таблеток. Тобто встановлювали час, через який таблетки починають діяти. Для цього досліду навмання вибрали 50 таблеткованих препаратів. Результати досліджень наведені у таблиці.

Час, x_i, хв.	10-40	40-70	70-100	100-130
Число препаратів, f_i	8	13	11	18

Знайдіть вибірковий середній час, середнє квадратичне відхилення σ, вибіркову дисперсію σ^2.

Розв'язання. Оскільки в задачі йдеться про інтервальний варіаційний ряд, то визначимо середні значення інтервалів часу: 25, 55, 85, 115 с.

Середнє арифметичне обчислюється за формулою $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$, де f_i – частота повторення результату x_i. Отже,

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 8 + 55 \cdot 13 + 85 \cdot 11 + 115 \cdot 18}{50} = \frac{3920}{50} = 78{,}4 \approx 78.$$

Для знаходження *середнього квадратичного відхилення* σ знайдемо відхилення l кожного значення x_i від $\bar{x}$: 53, 23, -7, -37. За формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{53^2 \cdot 8 + 23^2 \cdot 13 + (-7)^2 \cdot 11 + (-37)^2 \cdot 18}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{54530}{50}} = \sqrt{1090{,}6} \approx 33{,}024.$$

Вибіркова дисперсія $D = \sigma^2 \approx 1090{,}6.$

Відповідь. $\sigma \approx 78;\ \sigma^2 \approx 1090{,}6.$

Задачі для самостійного розв'язування

6.60. З метою визначення середньої врожайності пшениці на площі 500000 га провели вибіркове вимірювання врожайності на 2500 га. Результати вимірювань подано у таблиці:

Врожайність з 1 га, x_i	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25	25-27
Кількість гектарів, f_i	100	300	500	700	600	300

Знайдіть вибіркову середню врожайність з гектара і вибіркову дисперсію.

6.61. На медичному сайті було проведено опитування відвідувачів про тривалість їхнього сна. Відвідувачам сайта було запропоновано вибрати один з варіантів тривалості сна. Після голосування були отримані результати представлені в наступній таблиці. У анкетуванні брала участь 1451 особа. Знайдіть вибіркову середню тривалість сна, середнє квадратичне відхилення σ.

Тривалість сна, x_i (в год)	3	5	7	8	9	10	12	14
Число опитаних, y_i	18	430	476	299	122	62	36	8

6.62. У 100 пацієнтів міської лікарні, хворих на грип, період одужання склав від 5 до 12 днів, а саме:

Період одужання в днях, x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість пацієнтів, y_i	5	8	15	22	28	14	5	3

За отриманими результатами знайдіть вибірковий середній період одужання, середнє квадратичне відхилення σ.

6.63. У статистичному відділі наркодиспансера був проведений аналіз середньої тривалості життя наркозалежних хворих, залежно від тривалості вживання наркотичних речовин. Були вивчені 45 історій хвороб, на основі яких одержали такі результати:

30 32 45 25 20 30 45 32 18 25 30 18 45 38 32
18 35 45 25 20 38 32 30 45 35 18 35 35 20 22
20 25 30 35 22 25 20 30 25 22 30 35 18 22 20

За результатами досліджень побудуйте дискретний варіаційний ряд. Визначте вибіркове середнє $\bar{x}$ та середнє квадратичне відхилення σ.

6.64. Провели мовний експеримент. Його 15 учасникам, кожному окремо, пропонувалось 25 слів з попередньою вказівкою, що вони повинні назвати не роздумуючи, першим слово, що спало на думку. Визначали середній латентний період (час для кожної людини, що проходить від моменту мовного подразника до отримання реакції – відповіді). Одержали такі дані: 13, 15, 20, 13, 7, 9, 13, 9, 10, 15, 10, 13, 9, 10, 15 с. За результатами досліду побудуйте дискретний варіаційний ряд і визначте вибіркове середнє.

6.65. У хімічній лабораторії було проведено тестування 20-ти засобів захисту рослин від шкідників і встановлено тривалість їх дії. Отримали такі результати (в днях): 20, 31, 31, 40, 19, 19, 24, 20, 20 28, 45, 45, 28, 40, 20, 24, 31, 40, 31, 28. За результатами тестування побудуйте дискретний варіаційний ряд і визначте вибіркове середнє.

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розділ II

2.1. 2.1. $y = 2{,}26x + 5{,}05$; 19 %. *Вказівка*. Задачу розв'язати методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду. 2.2. $y = 1{,}39x + 0{,}47$. 2.3. $y = 1{,}42x + 10{,}12$. 2.4. $m = 0{,}5t + 55$. 2.5. $p(x) = -0{,}025x + 52{,}4975$; $p(2000) = 2{,}3$ (чоловіка). З 2012 року. 2.6. 2,8 м, 6 м, 8 м, 10 м. 2.7. $v = -90i^2 + 270i$; $i_1 = 0{,}5$ од., $i_2 = 2{,}5$ од.; $v(2) = 180$ од. 2.8. 7 років. 2.9. 6 млн зерен/га. 2.10. $h = 0{,}29$ м, $v \approx 0{,}98$ м/с.

2.2. 2.11. $P(n) = 100 \cdot 1{,}02^n$. 2.12. 16777216 мікробів; 20 годин. 2.13. 1,01 рази, 2,7 рази. 2.14. $7{,}3 \cdot 10^9$ чоловік, $1{,}8 \cdot 10^{11}$ чоловік. 2.15. 9,22 г. 2.16. 1) 25 %, 2) 12,5 %, 3) 70,7 %. 42,4 %. *Вказівка.* Якщо період піврозпаду деякої радіоактивної речовини дорівнює T одиниць часу, то кількість речовини, яка залишиться через t одиниць часу від початкової кількості C_0 дорівнює $C_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$. 2.17. $m(t) = 4 \cdot 0{,}5^t$. 2.18. $t = 5$ діб. 2.19. $y = -1{,}57x^{1{,}98} + 10000$; 7430 м^3, 5616 м^3. 2.20. $B = 15{,}4e^{-0{,}033t}$. 2.21. $t = 29{,}9$ хв. 2.22. 11 років. 2.23. $k = \lg\frac{1}{a}$.; 2, 6, 11. 2.24. $R = \dfrac{\ln 10}{\alpha} \approx \dfrac{2{,}303}{\alpha}$. 2.25. 51,45 хв. 2.26. 5,86 м , 18,51 м; У 1,57 рази, у 4,13 рази. 2.27. 2,5 %. 2.28. $\gamma = 3$. 2.29. $S(t) = 20 \cdot 1{,}04^t$; 6 років. 2.30. 6374074 бактерії. 2.31. 1,66 год. 2.32. 1316 хв $\approx$ 22 год. 2.33. 22,8 год. 2.34. 0,71; 0,25; 0,125. 2.35. $1{,}41 \cdot 10^{15}$ бактерій. 2.36. 1) 19,3 мм/год; 8,89 мм/год; 2) $t \approx 10$ год; 3) $I\left(\frac{2}{3}\right) > I\left(\frac{3}{4}\right)$.

Розділ III

3.1. 3.1. 500 бактерій; 70 бакт/хв. 3.2. $v = -k\,m_0 e^{-8k}$. 3.3. 2500 комах/день. 3.4. 8000 бакт/год; 0 бакт/год; -10000 бакт/год. 3.5. $v = k(a - m)$. 3.6. $v = ke^{-\frac{t^2}{2}}(1 - t^2)$, $a = ke^{-\frac{t^2}{2}}(t^3 - 3t)$. 3.7. $m(t) = 1{,}03^t$; а) 0,0304 г/год; б) 0,0314 г/год; в) 0,0343 г/год. 3.8. $r'(t) = \frac{\sqrt{\Pi}}{\Pi}$. 3.9. $p'(t) = -\frac{1}{3}\ln 2\,p(t)$. 3.10. 1) $x'(10) = 0{,}5e^{-0{,}05t}$, $x'(10) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0{,}3$ л/с; 2) 0,5 л/с; 3) 40 с.

3.2. 3.11. Число бактерій буде збільшуватись починаючи з 13-ї години, до 13-ї години число бактерії зменшується. 3.12. Відсоток захворівших буде збільшуватися протягом перших 10 діб, з 10-ї до 15-ї доби відсоток захворівших буде зменшуватися. Швидкість зміни відсотку захворівших буде збільшуватися протягом перших 5 діб, а потім буде зменшуватись. 3.13. Перша популяція зростає, друга спадає. 100 особин, 300 особин. 350 особин, 175 особин. $t \approx 0{,}19$ год. 3.14. $x = \frac{2a}{3}$. 3.15. 50 особин, 100 особин. 3.16. Рівноважна популяція налічує 10000 особин. 3.17. $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$, $r_2(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$. У другого виду ліків максимальна реакція вища, але вони діють повільніше. 3.18. $x_{\max} = x(\ln 2) = \frac{1}{4}$. 3.19. 33,3%. *Вказівка*. Оскільки концентрація газів виражається в об'ємних процентах, то $y = 100 - x$. 3.20. 1316 хв $\approx$ 21,9 год. 3.21. $t = 10$ днів.

Розділ IV

4.1. 4.1. $P(t) = 0{,}05t^2(15 - t)$. 4.2. $C(t) = 100 + 100e^{-t}$. 4.3. $P(t) = \dfrac{-9000}{1+t} + 10000.$

4.2. 4.4. 15000 бактерій. 4.5. 10001 особина; 10054 особини; 10383 особин. 4.6. $C(t) = \dfrac{1 - 2^{-t}}{\ln 2}$. 4.7. 0,03 кг. 4.8. $C = K\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$. 4.9. $S(t) = \dfrac{v_1 T}{(1-\alpha)T^{\alpha}}$.

Розділ V

5.1 5.1. $R(t) = R_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$ 5.2. $x(t) = x_0 e^{-kt}$, $k = \ln\sqrt{\dfrac{31{,}4}{9{,}7}}$; $x(t) = x_0 \cdot 0{,}31^t$. 5.3. $N(t) = N_0\left(1 + \dfrac{h}{N_0}\right)^t$; $t = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{h}{N}\right)}$; $t \approx 21$ рік.

5.4. У 8 разів. 5.5. $t \approx 200$ днів. 5.6. 1) $x(10) = 1000e \approx 2718$; 2) $t = \dfrac{1}{k}\ln 2$; 3) У 8 разів. 5.7. $y'(x) = k(y - b)$; $y = (B - b)e^{kx} + b$.. *Вказівка.* Позначте $y(x)$ – щоденну норму корму тварин, де x – її вік у днях; b – мінімальне значення норми корму, $y(0) = B$ – початкову норму корму. 5.8. $m'(t) = -km(t)$; $m(t) = 140\left(\dfrac{11}{14}\right)^{\frac{t}{30}}$ – маса досліджуваного після t днів голодування; $m(15) = = 10\sqrt{154} \approx 124$ (фунта). 5.9. $x'(t) = k(a - x)$, $x(t) = a(1 - e^{-kt})$.

5.10. $t = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}$. $t \approx 8{,}6$ хв. *Вказівка.* В цій задачі йдеться про хімічну реакцію першого порядку. 5.11. $a = 89{,}6$ г, $t = 1$ год. *Вказівка.* Використайте результати розв'язання задачі 5.9. 5.12. $x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{a}t}$. *Вказівка.* Якби протягом одиниці часу, починаючи з моменту t, концентрація розчину лишалась незмінною, то кількість солі в посудині за одиницю часу зменшилась би на $\frac{bx}{a}$ кг. Така швидкість зменшення кількості солі для моменту t.

5.2. 5.13. а) $m(t) = e^{0{,}007t}$, б) $m(15) = 2{,}22$ г, в) 984 хв $\approx 16{,}4$ год. 5.14. $x = x_0(1 - e^{-At})$. 5.15. $t = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}$.
5.16. а) $p(t) = 0{,}5e^{-\mu t}$; $q(t) = 1 - 0{,}5e^{-\mu t}$; б) $t = \frac{-\ln 0{,}6}{\mu} \approx \frac{0{,}51}{\mu}$.
5.17. $x(4) = 300$ бактерій, $x(12) = 5000$ бактерій.
5.18. $G(t) = \left(G_0 - \frac{v}{a}\right)e^{-at} + \frac{v}{a}$, де $G(0) = G_0$ – кількість глюкози в крові пацієнта на початку процедури. *Вказівка.* Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння $G'(t) = v - aG(t)$, де a, v – додатні сталі, можна розв'язати використовуючи спосіб запропонований при розв'язуванні задачі 5.6 з попереднього параграфа. 5.19. $P(t) = 1 - e^{-\frac{t}{3}}$, $\frac{-\ln 0{,}6}{\mu} \approx \frac{0{,}51}{\mu}$. $t \approx 6{,}9$ року. *Вказівка.* Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння з умови задачі зведіть до рівняння показникового спадання. 5.20. а) $p(t) = \frac{v}{\mu+v} (p_0 - \frac{v}{\mu+v})e^{-(\mu+v)t}$, $q(t) = 1 - p(t)$.

Розділ VI

6.1. 6.1. $3{,}48 \cdot 10^{20}$ способів. 6.2. 60 експериментів. 6.3. 6 способів. 6.4. $A_9^3 = 504$. 6.5. $C_9^7 = 36$. 6.6. 120. 6.7. а) C_n^2; б) $(C_n^2)^k$. 6.8. $C_6^2 \cdot C_{11}^2 = 825$. 6.9. $C_{10}^4 \cdot C_{10}^7 \cdot C_{10}^5$. 6.10. $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 22$ (комбінації). 6.11. $2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 = 1013$. 6.12. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

6.2. 6.13. 0,4; 0,6. 6.14. а) 0,25; б) 0,5. 6.15. а) $P(A) = \frac{C_{15}^5}{C_{20}^5} \approx 0{,}19$; б) $P(B) = \frac{C_{15}^4 \cdot C_5^1}{C_{20}^5} \approx 0{,}44$; в) $P(C) = \frac{1}{C_{20}^5} \approx 0{,}64 \cdot 10^{-4}$. 6.16. $P_N\{A\} = 0{,}518$. 6.17. $m_A = 3$; $m_B = 2$; $m_o = 3$. 6.18. $N \approx 600$ рибин. *Вказівка.* $\frac{30}{N}$ – ймовірність події „навмання взята риба мічена”. 6.19. 0,4; 0. 6.20. а) $P(A) = \frac{1}{2}$. б) Риба C. 6.21. $\frac{14}{21}$. 6.22. 0,604. 6.23. 1) $P(AA) = P(aa) = \frac{1}{4}$; $P(Aa \cup Aa) = \frac{1}{2}$; 2) $P(Aa) = 1$. 6.24. 0,6. 6.25. 0,9. 6.26. 0,0001 = 0,01 %. 6.27. $\frac{9}{16}$ – ймовірність народження здорових дітей; $\frac{7}{16}$ – ймовірність народження хворих дітей. *Вказівка.* За законом Менделя про незалежне успадкування відношення кількості особин з нормальним кришталиком до кількості особин з аномалією кришталика буде 3:1, кількість особин з нормальною рогівкою до кількості особин з аномальною рогівкою буде 3:1. 6.28. 0,49. 6.29. 0,97. 6.30. $\frac{3}{64}$. *Вказівка.* Оскільки за умовою батьки гетерозиготні за всіма трьома ознаками, то за другим законом Менделя ймовірність появи кароокої дитини $\frac{3}{4}$, дитини з нормальною будовою кісті $\frac{1}{4}$, дитини з нормальним зором $\frac{1}{4}$. 6.31. $\frac{3}{16}$. *Вказівка.* Використайте II закон Менделя, враховуючи, що кароокість та праворукість є домінантними ознаками. 6.32. 0,9703. 6.33. 1) 0,14. 2) 0,75. 6.34. 0,8. 6.35. 0,06. 6.36. 0,006 %. 6.37. *Вказівка.* Нехай A – подія, яка полягає в тому, що особа має хворобу легенів, а B – подія, яка полягає в тому, що особа палить. $P(A \cap B) = 0{,}25$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}225$. 6.38. 0,049. 6.39. 0,886; $0{,}02^6$; 0,11. 6.40. 0,35. 6.41. 0,3. 6.42. 0,74. 6.43. 0,246; 0,739; 0,998.

6.3. 6.55. $M_o = 60$, $M_e = 60$. 6.56. $M_o = 9$, $M_e = 8$. 6.57. $M_o = 3$, $M_e = 4$. 6.58. M_o = I, M_e = II. 6.59. $M_o = 4$, $M_e = 4$. 6.60. $\overline{x} = 21{,}84$, $\sigma^2 \approx 7{,}04$. 6.61. $\overline{x} = 7$, $\sigma = 1{,}79$. 6.62. $\overline{x} = 7$ днів, $\sigma \approx 2{,}10$. 6.63. $\overline{x} \approx 29$ років; $\sigma \approx 21{,}83$. 6.64. $\overline{x} = 11{,}4$ с. 6.65. $\overline{x} = 29$ днів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1) Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 2001. – 271 с.
2) Ачкан В. Прикладні задачі як засіб формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри і початків аналізу // Математика в школі. – 2009. – № 1-2. – С. 31-34.
3) Барвин И.И. Высшая математика: Учебное пособие для студентов хим.-биолог. факультетов пед. институтов. – М.: Просвещение, 1980. – 384 с.
4) Вельскер К., Лепманн Л., Лепманн Т. Математика. Учебник для 11 класса. – Таллин: Коолибри, 1999. – 336 с.
5) Вельскер К., Лепманн Л., Лепманн Т. Математика. Учебник для 12 класса. – Таллин: Коолибри, 2000. – 304 с.
6) Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер. с англ. – М.: Высш. школа, 1983. – 383 с.
7) Головіна Н. Комбінаторно-ймовірнісний метод розв'язування задач з біології // Математика в школі. – 1999. – № 4. – С. 14-16.
8) Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михайлін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія", 2002. – 624 с.
9) Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
10) Книга для вчителя математики: Довідково-методичне видання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, Н.П. Щекань. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. – 272 с.
11) Кондакова С., Мельник С. Ентропія як кількісна міра інформації // Математика в школі. – 2009. – № 4. – С. 27-31.
12) Концепція математичної освіти 12-річної школи: Проект // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 12-17.

13) Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформ. зб. МОН України. – 2003. – № 24. – С. 32.
14) Колініченко О., Колініченко Н. Застосування математичних знань у викладанні хімії та біології // Рідна школа. – 2003. – № 8. – С. 40-42.
15) Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – Київ: Фітосоціоцентр, 1998. – 132 с.
16) Міpецька Л. Семінар з алгебри на тему: „Показникова і логарифмічна функції в природі, науці, техніці, мистецтві" (10-11 класи) // Математика в школі. – 2005. – № 10. – С. 21-27; 2006. № 1. – С. 32-36.
17) Мусієнко М.М., Славний П.С. Біологія: Основні поняття. – К.: Либідь, 1994. – 96 с.
18) Овчинникова Т. Супровідна роль біологічного матеріалу на етапі систематизації і поглиблення знань про функції та їх властивості в класах природничого профілю // Математика в школі. – 2009. – № 6. – С. 42-45.
19) Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 класи (авт. В.Г. Бевз, А.Г. Мерзляк, З.І. Слєпкань) Міністерство освіти і науки України. – К.: Навчальна книга, 2003. – С. 4-52.
20) Програми для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв природничого профілю. Математика. 10-11 класи (авт. Я.С. Бродський, О.Л. Сліпенько, О.М.Афанасьєва). Міністерство освіти і науки України. – К.: Навчальна книга, 2003. – С. 70-132.
21) Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-12 класи. Міністерство освіти і науки України. – К.: Ірпінь, 2005. – 64 с.
22) Понуркевич В.М. Интегрированний урок: биология – математика. Х класс // Биология в школе. – 1996. – № 6. – С. 42-44.
23) Свердан П.Л. Вища математика. Аналіз інформації у фармації та медицині: Підручник. – Львів: Світ, 1998. – 332 с.
24) Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у евристичному навчанні математики // Математика в школі. – 2004. – № 1. – С. 2-6.

25) Соколенко Л.О. Математичне моделювання біологічних, хімічних, медичних процесів і явищ у класах природничого профілю. – Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний зб. наук. робіт. – Донецьк, 2006. Вип. 25. – С. 99-105.
26) Соколенко Л.О. Прикладні аспекти математики: Інтеграл та його застосування в класах природничого профілю. – Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2006. – Вип. 42. – С. 74-77.
27) Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість вивчення показникової та логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу // Евристика та дидактика точних наук. Міжнародний зб. наук. робіт. – Донецьк, 1997. Вип. 6. – С. 44-47.
28) Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.
29) Соколенко Л.О. Про необхідність створення системи прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний зб.наук.робіт. – Донецьк, 2005. – Вип. 24. – С. 218-222.
30) Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 248 с.
31) Соколенко О.І., Соколенко Л.О. Особливості викладання вищої математики на природничих факультетах вищих навчальних закладів // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Вип. 19. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2003. – С. 85-87.
32) Стратій В., Єременко Л. Теорія ймовірностей і генетичні закони Г.Менделя. Інтегрований урок у 11 класі // Математика в школі. – 2005. – № 11. – С. 11-17.
33) Теорія ймовірностей і статистичні методи обробки результатів спостережень: Навч. посіб. для студ. вищ. фармац.та мед. закладів III-IV рівнів акредитації / Б.Ф. Горбуненко, Ф.Г. Дягілєва, Г.В. Жиронкіна та ін. – Х.: Видавництво НФАУ: Золоті сторінки, 2002. – 188 с.

34) Фуртак Б.Л., Кивко Д.Я. Нові підходи до змісту математичної освіти в Україні // Математика в школі – 2000. – № 5. – С. 24-29.
35) Фуртак Б.Л., Кивко Д.Я. Урок з теми „Логарифми та дії над ними” // Математика в школі. – 2001. – № 6. – С. 16-19.
36) Чалий О.В., Стучинська Н.В., Меленевська А.В. Вища математика. Навч. посібн. для студ. мед. та фармац. навч. закладів. – К.: Техніка, 2001. – 204 с.
37) Швець В., Прус А. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії // Математика в школі. – 2009. – № 4. – С.17-24.
38) Швець В.О., Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені І.Франка, 2007. – 156 с.
39) Шкіль М.І.,Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.
40) Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2004. – 384 с.
41) From Plan to Market / World Development Report 1996? Published for the Worlk by Oxford University Press, p. 124-125.
42) Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень // Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. –Х.: Вид-во ”Ранок”, 2011. –С. 28-51.
43) Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. –Х.: Вид-во ”Ранок”, 2011. –С. 52-83.

Н А В Ч А Л Ь Н Е   В И Д А Н Н Я

Соколенко Лілія Олександрівна
Філон Лідія Григорівна
Швець Василь Олександрович

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ПРИРОДНИЧОГО ХАРАКТЕРУ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ: ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Редактор	***В.О. Швець***
Верстка та макетування	***О.І. Полковник***
Комп'ютерний набір	***Л.О. Соколенко***

Підписано до друку 2010 р. Формат 60×84 1/16.
Папір . Друк .
Ум. друк. арк. 7,44. Обл. вид. арк. 3,85.
Наклад прим. Зам. № .