ПРО НЕОБХІДНІСТЬ СТВОРЕННЯ СИСТЕМИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ПРИРОДНИЧОГО ХАРАКТЕРУ ДЛЯ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Л.О.Соколенко,
кандидат педагог. наук, доцент,
Чернігівський державний педуніверситет ім. Т.Г.Шевченка
м. Чернігів, УКРАЇНА

Розкрита роль задач природничого характеру як засобу формування евристичної діяльності учнів та студентів. Поставлено певні проблеми з цього питання.

Сучасну науку характеризує ґрунтовне застосування математичних методів у різних галузях природознавства. Істотно зростає роль математики в розвитку біології, екології, хімії, медицини, фармації. Майбутні спеціалісти згаданих галузей повинні одержати достатньо серйозну математичну підготовку, яка допоможе їм оволодіти фаховими дисциплінами.

У час реформування системи освіти, коли вітчизняна наука прагне вийти на світовий рівень, навчання математики, як і інших предметів, повинно сприяти забезпеченню суспільства спеціалістами різного рівня та профілю. А це вимагає профільної диференціації математичної освіти, яка забезпечується в першу чергу прикладною спрямованістю навчання математики.

Однією з методичних вимог щодо реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу є наповнення навчального процесу прикладними задачами, що задовольняють певні специфічні вимоги та утворюють систему, яка відповідає ряду дидактичних вимог і забезпечує органічний зв’язок з теоретичним матеріалом [5].

Необхідність у такій системі задач виникає не лише при вивченні курсу алгебри і початків аналізу старшої школи за програмою [3], а і при вивченні вузівського курсу вищої математики для студентів вищих хімічних, біологічних, фармацевтичних та медичних закладів освіти ІІІ-ІУ рівнів акредитації [6].

Досвід читання згаданих курсів математики переконує у необхідності створення системи прикладних задач природничого характеру як засобу формування евристичної діяльності учнів при профільному навчанні.

До системи прикладних задач природничого характеру повинні увійти наступні типи задач: 1) задачі, в основу сюжету яких покладені загально-функціональні поняття, що вивчались в основній школі; 2) прикладні задачі, математичні моделі яких включають показникову, логарифмічну, степеневу функції; 3) задачі в яких роль математичної моделі відіграють показникові та логарифмічні рівняння і нерівності; 4) задачі, які приводять до поняття похідної та задачі в розв’язанні яких це поняття відіграє першорядну роль; 5) прикладні задачі, в яких похідна застосовується: до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі, даної задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, на основі якого будується її графік; до обчислення наближеного значення функції; 6) задачі, які приводять до поняття первісної, та задачі в розв’язуванні яких це поняття відіграє першорядну роль; 7) задачі які приводять до поняття інтеграла; 8) задачі на застосування інтеграла у природничих науках; 9) прикладні задачі природничого змісту, що приводять до диференціальних рівнянь; 10) задачі природничого змісту на розв'язування диференціальних рівнянь; 11) задачі з комбінаторики; 12) прикладні задачі, в яких йдеться про випадкові події та їх імовірності; 13) статистичні задачі природничого змісту.

Прикладні задачі природничого характеру, як один з типів навчальних задач, повинні сприяти підготовці до вивчення теоретичних питань курсу. Таке призначення мають задачі: а) які передують вивченню нових математичних фактів; вони сприяють концентрації уваги учнів на ідеях, поняттях, методах курсу алгебри і початків аналізу, що будуть вивчатися; б) які забезпечують мотивацію навчання при введенні нових понять і методів; в) які створюють проблему ситуацію з метою формування в учнів нових знань.

Шкільний курс алгебри і початків аналізу містить численні математичні поняття, які відрізняються від понять інших наук високим рівнем узагальнення і абстракції. В навчанні цим поняття, як і будь-яким іншим, умовно виділяють чотири основні етапи [4]:

1) Пропедевтичний етап – підготовку до формалізації (актуалізація знань і мотивація введення поняття) – введення.

2) Етап розкриття змісту поняття і створення уявлення про його обсяг, а також засвоєння термінології і символіки – засвоєння.

3) Етап відпрацювання навичок використання поняття при розв'язуванні найпростіших задач – закріплення.

4) Етап включення поняття в систему змістових зв'язків з іншими поняттями – застосування.

На першому етапі навчання поняттям курсу, який включає мотивацію, перевагу варто надавати задачам на дослідження, встановлення закономірностей, а також задачам, які вимагають нешаблонного, оригінального евристичного мислення. Як показує досвід, ніщо так не активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів, як вдало створена практична, фахова проблемна ситуація. В основу створеної проблеми може бути покладена певна функціональна залежність, наприклад лінійна залежність величини систолічного тиску від величини діастолічного тиску, залежність ефективності лікарського препарату від вмісту корисних лікарських речовин рослинного походження (у відсотках), або залежність кількості популяції зайців $N_з$ від кількості популяції вовків $N_в$: $N_з = \frac{k}{N_в}$ (де k – параметр, що визначається на основі даних натурних спостережень) [2]. Це можуть бути також проблемні ситуації про зміну чисельності народонаселення, про подвоєння лілій у ставку, задача про розмноження бактерій та інші, кожна з яких приводить до поняття показникової функції.

Конкретизуємо щойно сказане навівши приклади першого та другого типів задач системи.

Задача 1. У таблиці вказані лікарські препарати, які допомагають при y_i (у %) кількості хвороб і при цьому вказаний вміст корисних лікарських речовин рослинного походження x_i (у %).

Назва лікарського препарату	Анапрілін	Фукарцин	Бромгексан	Уролесан	Індовазин	Дротаверин	Цинарезин	Фарінгосепт	Баралгін	Еуфілін
x_i	2	4	5	7	8	10	12	13	14	15
y_i	10	14	15	20	25	27	28	36	39	40

Визначте залежність ефективності лікарського препарату (кількості хвороб y_i у відсотках, які виліковуються цим препаратом) від вмісту корисних лікарських речовин рослинного походження x_i (у %). Який відсоток речовин рослинного походження має містити препарат, щоб його ефективність була 47%.

Розв'язавши задачу методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду учні одержать залежність у = 2,26х+5,05, яка переконує в тому, що ефективність лікарського препарату зростає при збільшенні вмісту в ньому корисних лікарських речовин рослинного походження.

Задача 2. У пробірку потрапив один мікроб, який відразу почав розмножуватися шляхом ділення навпіл через кожну годину. Скільки мікробів буде у пробірці через добу? Через який час у пробірці буде мільйон мікробів.

Розв'язуючи цю задачу учні визначають, що через *x* годин у пробірці буде 2х2х2...х2=2^x мікробів. Через добу їх кількість становитиме 2^{24}=16777216 мікробів. А для відповіді на друге запитання їм необхідно буде розв'язати показникове рівняння $2^x=10^6$.

Дана задача може бути використана для введення понять показникової функції та показникового рівняння При розгляді цих задач вчитель має запропонувати учням продуману систему запитань, одержавши відповіді на які учні прийдуть до "відкриття" нового для них математичного поняття. Успішне застосування евристичної бесіди приведе до сприйняття, осмислення і запам'ятовування поняття учнями.

Дуже корисними на другому етапі навчання математичним поняттям – етапі засвоєння є вправи та задачі на розпізнавання об'єктів, які належать до обсягу поняття, вправи на виділення наслідків з означення поняття, вправи на побудову об'єктів, які задовольняють зазначені Властивості [4].

Прикладом таких задач можуть стати прикладні задачі, в яких йдеться про випадкові події та їх імовірності. Розглянемо деякі з них.

Задача 3. Встановлено, що на кожну тисячу новонароджених припадає середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток. В деякій сім'ї 6 дітей. Знайти імовірність того, що серед них дві дівчинки.

Задача 4. Встановлено, що вовк, який один нападає на лося досягає успіху в 8 % випадків. Яка імовірність того, що в п'яти випадках успішними будуть дві спроби?

Розв'язуючи ці задачі учні мають дійти до висновку, що в кожній з них йдеться про взаємно незалежні випробування і тому для відповіді на питання слід використати формулу Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

В першій задачі учні визначать імовірність того, що серед 6 дітей дві дівчинки: $P_6(2) = C_6^2 \cdot 0{,}485^2 \cdot 0{,}515^4 \approx 0{,}247$. А у другій – імовірність того що в 5 випадках дві спроби будуть успішними: $P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^3 \approx 0{,}049$.

На третьому етапі – етапі закріплення поняття об'єктом вивчення повинна стати кожна суттєва властивість, що використовується в означенні. Виділяють три основні види вправ, а саме вправи на розпізнавання об'єктів, вправи на виведення наслідків із належності об'єкта поняттю та вправи на доповнення умов (розпізнавання і виділення наслідків), які забезпечують виконання даної вимоги [4].

При розв'язуванні вправ та задач на розпізнавання об'єктів дуже потрібні уміння аналізувати, порівнювати, зіставляти і протиставляти. Переконаємось в цьому розглянувши таку задачу.

Задача 5. За оцінкою лісника, запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Через скільки років на цій ділянці буде 12800 кубометрів деревини за умови, що середній річний приріст складає 2,5%.

Розв'язуючи цю задачу учні мають усвідомити, що в ній ідеться про значення величини, яка змінюється за законом складних відсотків $y = C(1 + \frac{p}{100})^n$, де *C* – початкове значення величини, *p* – відсотки, *n* – число проміжків часу, *y* – значення величини після *n* проміжків часу. Використавши цю формулу учні одержать рівняння $12800 = 10000(1 + \frac{2{,}5}{100})^n$, якому рівносильне показникове рівняння $1{,}025^n = 1{,}28$, що розв'язується методом логарифмування.

Правильне розпізнавання математичних моделей даної прикладної задачі, а саме формули складних відсотків та показникового рівняння і його способу розв'язування, як наслідку із належності об'єкта до поняття, дають можливість одержати правильну відповідь задачі.

Серед задач на виведення наслідків належності об’єкта поняттю слід виділити серію задач природничого змісту на визначення швидкості хімічної реакції та швидкості зростання популяції, які в перекладі на математичну мову є задачами на знаходження похідної функції. Сформулюємо їх.

Задача 6. Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом $m(t) = m_0 e^{-kt}$, де *m(t)* – маса речовини, в грамах, в монет часу *t,* в секундах; m_0 – початкова маса; *k* – деяка стала. Знайти швидкість розкладу в момент *t=8 c.*

Задача *7*. Кількість бактерій *N* в деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 500 + 54t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі на початку? Яка швидкість росту при $t = 4$ хвилини?

Останній етап – використання поняття в конкретних ситуаціях ставить за мету формувати в учнів усвідомлене розуміння ролі досліджуваного поняття у всій системі математичних знань.

Розглянемо цей етап на прикладі задачі з теми “Похідна та її застосування”.

Задача 8. У країні Меланхолії виникла епідемія депресії, яка розповсюджується так, що відсоток p захворівших залежить від часу t (в добах) наступним чином $p = 0{,}005(12t^2 - t^3)$ де $0 \le t \le 12$.

1) Скільки відсотків мешканців захворіє до кінця другої доби?

2) Скільки діб відсоток захворівши буде збільшуватись?

3) Починаючи з якої доби епідемія почне спадати?

4) На який день відсоток захворюваності досягне максимуму?

Дана прикладна задача є задачею на застосування похідної до дослідження функції, яка відіграє роль її математичної моделі, на монотонність та екстремум. Її розв’язування вимагає володіння учнями достатніми умовами зростання та спадання функції та достатньою умовою існування екстремуму функції в точці.

Відповідь на перше питання одержується дуже легко, а саме знаходиться значення функції *p(t)* при *t*=2, яке дорівнює 0,2%.

Для відповіді на наступні запитання учні знайдуть похідну функції $p'(t) = 0{,}005(24t - 3t^2)$, стаціонарні точки *t*=0 та *t*=8. Оскільки час *t>0*, то між кінцями відрізка [0;12] існує єдина стаціонарна точка *t*=8. При переході через цю точку похідна змінює знак з плюса на мінус, а отже функція в ній має максимум і завдяки єдності стаціонарної точки, досягає в цій точці найбільшого значення.

Тому перші 8 діб епідемія буде зростати, починаючи з 9-ї доби почне спадати, а відсоток захворівших досягне максимуму на 8-му добу.

Не менш корисними на етапі застосування понять є задачі які встановлюють зв’язок між різними поняттями курсу.

Розглянемо приклади таких задач.

Задача 9. Популяція комах, початкова чисельність якої дорівнює 1000 змінюється зі швидкістю $W(t) = \dfrac{9000}{(1+t)^2}$ комах в день. Знайдіть закон зміни чисельності *P* популяції комах в залежності від *t*, час виражено у днях.

При розв´язуванні сформульованої задачі встановлюється зв´язок між поняттями похідна та первісна. Оскільки швидкість зміни популяції $W(t) = P'(t)$, де *P(t)* – чисельність популяції, то функція *P(t)* є первісною для функції *W(t)*. За основною властивістю первісної учні одержать $P(t) = \dfrac{-9000}{1+t} + C$. Оскільки *P(0)* = 1000, то 1000=-9000+*C*. Отже, *C*=10000 і чисельність популяції змінюється за законом $P(t) = -\dfrac{9000}{1+t} + 10000$.

Розглянемо задачу природничого зміст, що приводить до диференціального рівняння.

Задача 10. Швидкість розпаду радія пропорційна його кількості у даний момент часу. Знайти закон радіоактивного розпаду, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина від тієї кількості радія, то яка була на початку.

Позначивши через *R(t)* – кількість радія в момент часу *t* і пригадавши, що швидкість його розпаду є похідною від кількості $R'(t)$, учні одержать диференціальне рівняння показникового спадання $R'(t) = -kR(t)$, де *k>0,* яке є математичною моделлю даної задачі.

Оскільки $R(t) > 0$, то поділивши обидві частини одержаного рівняння на

R(t) дістануть $\frac{R'(t)}{R(t)} = -k$, що рівносильно рівнянню $(\ln R(t))' = -k$. Звідси $\ln R(t) = -kt + C_1$, де C_1 - деяка стала, яку для зручності слід позначити $\ln C$. Після певних тотожніх перетворень на основі властивостей логарифмів буде одержаний загальний розв΄язок $R(t) = Ce^{-kt}$.

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес радіоактивного розпаду радія слід використати початкові умови: $R(0) = R_0$, $R(1600) = \frac{1}{2}R_0$. Скориставшись першою рівністю учні одержать, що *C=R$_0$*, а врахувавши другу умову визначать значення e^{-k}. $\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-1600\,k}$. Звідси $e^{-k} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{1600}}$. Отже, закон радіактивного розпаду матиме вигляд $R(t) = R_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{1600}}$.

Розглянута щойно задача відноситься до задач підвищеного рівня складності, її розв΄язування вимагає від учнів володіння численними математичними поняттями, а саме поняттям похідної, первісної, логарифма, степеня, загального та окремого розв΄язків диференціального рівня.

Розгляд задач прикладного характеру (про радіоактивний розпад, про розчинення солі, про вливання глюкози в кровоносну систему, про теорію епідемій та ін.) математичними моделями яких є диференціальні рівняння, полегшує оволодіння учнями методами розв΄язування певних типів рівнянь [1].

Серед всіх згаданих задач більшість – евристичні, розв΄язування яких вимагає вміння аналізувати структуру задачі, співвідносити дану задачу з відомими задачами, знаходити приховані зв΄язки між даними і невідомими елементами, аналізувати гіпотези щодо можливого розв΄язування задачі, логічного опрацьовувати знайдене розв΄язання задачі.

Навички та вміння які одержать учні, розв΄язуючи ці задачі, допоможуть їм при засвоєнні вузівського курсу вищої математики.

1. Гросс ман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер. с анг. – М.: Высш. школа, 1983. – 383 с.

2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – Київ: Фітосоціоцентр, 1998. – 132 с.

3. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв природничого профілю./ Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К., Афанасьєва О.М. – Київ: Навчальна книга, 2003.

4. Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у евристичному навчанні математики // Математика в школі. – 2004. - №1. – С. 2-6.

5. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.

6. Соколенко О.І., Соколенко Л.О. Особливості викладання вищої математики на природничих факультетах вищих навчальних закладів. // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Вип. 19. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2003. – С. 85-87.

Резюме. **Соколенко Л. О НЕОБХОДИМОСТИ СОЗДАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОГО ХАРАКТЕРА ДЛЯ ПРОФИЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.** *Розкрыта роль задач естественного характера как средства формирования эвристической деятельности учеников и студентов. Поставлены определенные проблемы по этому вопросу.*

Summary. **Sokolenko L. ON THE NECESSITY OF CREATING OF A SYSTEM OF APPLIED SCIENCES PROBLEMS FOR THE PROFILE TEACHING OF MATHEMATICS.** *The role of natural applied problems as means for the formation of the pupils' and students' research activity is discovered. Some concrete tasks on this question are set.*

Надійшла до редакції 28.10.2005 р.