ОСОБЛИВОСТІ СИСТЕМИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ, ПРИЗНАЧЕНИХ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Лілія СОКОЛЕНКО – доцент кафедри педагогіки, психології та методик навчання фізики й математики ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка, кандидат педагогічних наук, доцент
Василь Швець – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор.

Анотація. Обгрунтована можливість використання прикладних задач під час вивчення елементарних функцій, виділені типи прикладних задач та розкрита їх роль у навчанні курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи.
Ключові слова: типи прикладних задач, елементарні функції курсу алгебри і початків аналізу, старша профільна школа.
Лилия СОКОЛЕНКО, Василий ШВЕЦ.
ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМЫ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА
Аннотация. Обоснована возможность использования прикладных задач во время изучения элементарных функций, выделены типы прикладных задач и розкрыта их роль в обученни курсу алгебры и начал анализа старшей профильной школы.
Ключевые слова: типы прикладных задач, элементарные функции курса алгебры и начал анализа, старшая профильная школа.
Liliy SOKOLENKO, Vasyl SHWETS.
PECULIARITIES OF THE SYSTEM OF APPLICATIONS ASSIGNED FOR THE LEARNING OF FUNCTIONS IN THE COURSE OF ALGEBRA AND THE BEGINNING OF ANALYSIS.
Summary. A possibility of the use of applications in the course of study of elementary functions is grounded, the types of sums are identified and their role in the training course of algebra and the beginning of analysis in high profile school is determined.
Key words: types of applications, elementary functions in the course of algebra and the beginning of analysis, high profile school.

Володіння певними видами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язування прикладних задач є запорукою успішної участі особистості в сучасному суспільному житті.

Одним із вихідних положень на які нині спирається система вітчизняної математичної освіти є спрямованість навчання математики на забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь необхідних їм в повсякденному житті, достатніх для вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи, отримання якісної професійної освіти на наступних етапах.

Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення *прикладної спрямованості викладання математики* сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема [6, с.7].

Під **прикладною спрямованістю шкільного курсу алгебри і початків аналізу** ми розуміємо орієнтацію цілей, змісту і засобів навчання цього предмета у напрямку:

- здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків алгебри і початків аналізу з практикою;
- набуття учнями під час вивчення даного предмета характерних для математичної діяльності знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності.

Радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – *прикладні задачі*, розв'язування яких потребує глибоких знань як з математики, так і з інших дисциплін.

Необхідно зазначити, що процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання.

В узагальненому вигляді це:
- переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики (І етап, **створення математичної моделі**);
- розв'язування отриманої математичної задачі (ІІ етап, **дослідження математичної моделі**);
- інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (ІІІ етап, **інтерпретація розв'язків**) [12, с.10].

Дана стаття присвячена **функціональній змістовій лінії**, яка є провідною в старшій школі. Ця лінія має величезне значення для забезпечення практичної компетентності – здатності розв'язувати *прикладні задачі*, під якими ми розуміємо задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату [12, с.9].

Під час вивчення функціональної лінії курсу алгебри і початків аналізу здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема за рахунок степеневих функцій; вводиться поняття тригонометричних функцій кута будь-якої величини та тригонометричних функцій числового аргументу; доводяться основні властивості тригонометричних функцій і будуються їх графіки; вводиться поняття оберненої функції, обернених тригонометричних функцій та розглядаються їх властивості і графіки; вивчаються показникова та логарифмічна функції.

Нині діючими навчальними програмами з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів всіх рівнів [6] – [9] передбачено при вивченні елементарних функцій робити наголос на моделюванні реальних процесів. В уявленні учнів характер реального процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями [8, с. 58].

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, доходимо висновку, що у підручниках академічного, профільного рівнів та у підручниках, призначених для класів з поглибленим вивченням математики, прикладних задач недостатньо. Особливо це стосується задач призначених для вивчення функцій. Серед них можна виділити задачі теми "Гармонічні коливання" [5], та одиничні задачі, запропоновані у підручниках [4], [10] в темах "Показникова функція, її властивості та графік" та "Логарифмічна функція, її властивості та графік". Значно краща ситуація, щодо розгляду прикладних задач та ілюстративних прикладів під час вивчення тригонометричних функцій у підручнику з математики для 10 класу [2] та показникової та логарифмічної функцій у підручнику з математики для 11 класу [1], призначених для класів рівня стандарт.

Аналіз досліджень і публікацій. Окремі питання методики включення прикладних задач, призначених для вивчення функцій та їх застосувань, в курс алгебри і початків аналізу розглянуті в статтях В. Ачкана, Н. Вінниченко, О. Гриб'юк, Т. Грицик, В. Забранського, Л. Мірецької, Т. Овчинникової, С. Параскевич та ін. Проведено ряд дисертаційних досліджень, серед яких дослідження В. Ачкана, О. Гриб'юк, Л. Соколенко та ін., в яких розглядаються питання методики навчання учнів розв'язування прикладних задач курсу алгебри і початків аналізу, зокрема безпосередньо пов'язаних з елементарними функціями та їх застосуваннями

Але існують навчально-методичні посібники, серед яких посібники [11]-[13], в яких представлена система прикладних задач призначених для вивчення курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи. Дана система, зокрема, містить численні типи задач призначені для вивчення функціональної змістової лінії курсу алгебри і початків аналізу. Розглянемо деякі з них в даній статті, доповнивши їх новими задачами.

Мета статті. Розглянути систему прикладних задач призначених для вивчення елементарних функцій та їх застосувань в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, виділити типи задач та розкрити їх роль у навчанні курсу, диференціювати задачі за рівнями складності.

Виклад основного матеріалу. Вивчення функціональної змістової лінії дає можливість підвести учнів до усвідомлення того, що кожна функція математично формулює залежність між реальними величинами різних явищ, причому одна й та сама функція застосовується для опису різних явищ та процесів. Зупинимось на розгляді елементарних функцій курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Степенева функція.

На практиці у фізиці і техніці дуже часто доводиться мати справу з ***степеневою функцією*** виду $y=Cx^p$, де C, p – дійсні числа. Вона виражає залежність енергії E рухомого тіла при сталій масі m від його швидкості v: $E=\frac{1}{2}mv^2$; шляху S, який проходить тіло при рівноприскореному русі за час t, без початкової швидкості: $S=\frac{1}{2}at^2$; витрат води Q через русло параболічної форми, ширина якого B, від найбільшої глибини h води у річці: $Q=0{,}2Bh\cdot\sqrt[3]{h^2}$. Аналогічна функція $f(x)=A\cdot x^{\alpha}$ виражає залежність кількості кисню $f(x)$, який споживає жива істота за одиницю часу, від ваги істоти x, де A,α - параметри, сталі для кожного класу живих істот.

Розглянуті вище фізичні залежності відомі учням з курсу фізики основної школи. Крім того з курсу алгебри 9 класу учням відома формула складних відсотків $P=C\left(1\pm\frac{p}{100}\right)^n$, де C - початкове значення величини (початкова сума), p - відсотки (відсоткова ставка), n - число проміжків часу, P - значення величини після n проміжків часу (***кінцева сума***). Якщо вважати C та n сталими, а p змінною, то також одержуємо степеневу функцію.

Тригонометричні функції.

Тригонометричні функції виникли у Древній Греції у зв'язку з дослідженнями в астрономії та географії. Відношення сторін у прямокутному трикутнику, які по суті є тригонометричними функціями, зустрічаються вже в III ст. до н.е. у працях Евкліда, Архімеда та інших.

З допомогою тригонометричних функцій обґрунтовуються численні природні явища та процеси різної природи (механічні, оптичні, електричні та ін.), які відбуваються за законом **гармонічного коливання** $y=A\sin(\omega x+\alpha)$ або $y=A\cos(\omega x+\alpha)$, де y - **зміщення точки від положення рівноваги в даний момент часу,** A,ω,α - сталі величини, A - **амплітуда коливання** $(A>0)$ - найбільше зміщення початкової точки від положення рівноваги**,** ω **- циклічна частота** $(\omega>0)$ **-** кількість повних коливань точки за 2Π одиниць часу, $\omega=\frac{2\Pi}{T}$, де T - період коливання (проміжок часу протягом якого здійснюється одне повне коливання), α - **початкова фаза** коливання, визначає ординату точки перетину графіка функції з віссю Oy. Початкові уявлення про гармонічні коливання учні одержують в курсі фізики основної школи в темі ”Механічний рух” 7 класу, вивчаючи коливальний рух, амплітуду коливань, період коливання маятника. А більш детальне їх вивчення відбувається в 10 класі старшої школи в темі ”Механічні коливання і хвилі”, де безпосередньо розглядають рівняння гармонічних коливань. Гармонічні електромагнітні коливання є складовою теми ”Електомагнітні коливання і хвилі” курсу фізики 11 класу.

Природі відомі інші явища, які обґрунтовуються з допомогою тригонометричних функцій. Наприклад, райдуга (рис.1) виникає завдяки тому, що сонячне світло заломлюється у дощових краплях за **законом заломлення** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}$, де α **- кут падіння,** β **- кут заломлення світла,** v_1 - швидкість світла у першому середовищі, v_2 - швидкість світла у другому середовищі, n_1 - показник заломлення першого середовища, n_2 - показник заломлення другого середовища.

Міражі (оптичні явища в атмосфері) пояснюються тим, що гаряче повітря діє подібно дзеркалу (рис. 2).

Одним із яскравих прикладів міражів є Фата-Моргана – складне оптичне явище в атмосфері, яке складається з декількох форм міражів, при яких певні предмети видно багаторазово з різноманітними зображеннями.

Рис. 1

Рис.2

Пояснення згаданим явищам природи дається також на основі закону заломлення світла.

Сила, що діє з боку магнітного поля на рухомий заряд q - **сила Лоренца** $F_Л = q\cdot v\cdot B\cdot\sin\alpha$, де v - швидкість руху зарядів, B - магнітна індукція, $[B]=\frac{B\cdot c}{м^2}=Тл$, обґрунтовує виникнення дійсно унікального явища природи – *північного сяйва* (світіння верхніх шарів атмосфери планет, які мають магнітосферу). В результаті взаємодії цих шарів атмосфери з зарядженими частками сонячного вітру і виникає північне сяйво (рис.3).

Рис.3

Згадані *закон заломлення світла* та *формула сили Лоренца* вивчаються спочатку в курсі фізики основної школи в 9 класі, відповідно в темах ”Світлові явища” та ”Магнітні явища”, а потім в курсі фізики старшої школи в 11 класі, відповідно в темах ”Хвильова і квантова оптика” та ”Електромагнітне поле”.

Показникова функція.

Під час вивчення різних природних процесів, зокрема біологічних, хімічних, фізичних найчастіше зустрічаються залежності між змінними величинами, які описуються показниковою функцією з основою $a=e$.

Прикладами таких залежностей можуть бути залежності: $N=N_0 e^{kt}$, де N – кількість бактерій в будь-який час t, N_0 – початкова кількість бактерій в момент часу $t=0$, k – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально. Колонія клітин дріжджів розмножується також за експоненціальним законом. За таким законом плодились кролики, які за короткий час заполонили Австралію. Формули росту народонаселення та росту деревини мають аналогічний вигляд.

Крім цього, показникова функція характеризує **залежність швидкості реакції від температури** (правило Вант-Гоффа): $v_{T_2}=v_{T_1}\gamma^{\frac{T_2-T_1}{10}}$, де v_{T_2},v_{T_1} – швидкості реакції при температурах T_2,T_1, γ – температурний коефіцієнт. Цей закон вивчається у факультативному курсі хімії основної школи.

Показникова функція достатньо часто зустрічається у фізиці. А саме, **процеси новоутворення і розпаду** математично можуть бути описані за допомогою залежності $P=P_0 e^{kt}$, де P – кількість новоутвореної речовини або речовини, що розпалася, в момент часу t, P_0 – початкова кількість речовини, k – стала, яка стосується конкретного випадку. За таким законом відбувається радіоактивний розпад, зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі людини за рахунок виведення його природним шляхом. З законом радіоактивного розпаду учні знайомляться в курсі фізики 11 класу в темі ”Атомна і ядерна фізика”. Відома й інша формула радіоактивного розпаду $m=M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, де m – **кількість речовини в момент часу** t**,** M - початкова кількість речовини, T – період піврозпаду речовини.

Також з допомогою показникової функції описуються: 1) **залежність атмосферного тиску від висоти** $P=P_0\cdot a^{-kh}$, де P **- тиск на висоті** h**,** P_0 - тиск на рівні моря, a,k - деякі сталі; 2) **залежність між температурою тіла і температурою навколишнього середовища** $T=T_0\cdot e^{kt}$, де T - різниця температур в момент часу t, T_0 - початкова різниця температур, k - стала; 3) **залежність між силами** F **і** F_0 $F=F_0\cdot k^x$, де F_0 – прикладена сила, F - сила, що утримує корабель, $(F_0<F)$, k - стала, яка залежить від матеріалу з якого зроблено канат і стовп, x - число витків на барабані**.**

Ця функція використовується у банківській справі (складні відсотки), промисловості, торгівлі. Якщо у згаданій вище формулі складних відсотків вважати C і p сталими, а n - змінною, то ця залежність і буде показниковою функцією виду $y=C\cdot a^x$, де C і a - деякі сталі. Іншим прикладом показникової функції може бути

формула вартості обладнання цеху $B = B_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^t$, де B - вартість обладнання цеху через t років**,** B_0 - початкова вартість обладнання, $p-$ щорічний відсоток амортизації.

Логарифмічна функція.

Вивчаючи логарифмічну функцію корисно розглянути з учнями ряд прикладів її практичного застосування. Її можна використовувати для визначення величини землетрусу, інтенсивності звуку, ємності легенів людини та в інших явищах, процесах та практичних ситуаціях, окремі з яких представлені у таблиці.

№	Формула залежності	Значення змінних та сталих
1	$R = \lg\frac{I}{I_0}$	**залежність величини землетрусу** R (***показання шкали Ріхтера)*** від **інтенсивності землетрусу** I, де I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями
2	$\beta = 10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$	**залежність інтенсивності звуку** β від **сили звуку** I, де I_0 - сила звуку на порозі чутності (мінімальна інтенсивність, при якій людське вухо перестає сприймати звук)
3	$V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$	**залежність ємності легенів** V людини від її віку у роках, де x - вік людини у роках, $x \in [10;100]$.
4	$pH = -\lg C(H^+)$	**водневий показник –** це від'ємний десятковий логарифм концентрації іонів гідрогену *Приклад.* $C(H^+) = 10^{-7}$, $pH = 7$
5	$r = Ce^{k\varphi}$ або $\varphi = \frac{1}{k}\ln\frac{r}{C}$	**рівняння логарифмічної спіралі -** плоскої лінії, утвореної точкою, що рухається і віддаляється за експоненціальним законом від початку променя О, який рівномірно обертається навколо свого початку.
6	$y = \log_2 n + 1$, $n \in N$	**кількість одиниць вимірювання інформації** (бітів), необхідних для збереження в комп'ютері натурального числа n (у звичайному для комп'ютера двійковому форматі)
7	$n = \frac{\lg P - \lg C}{\lg\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)}$ - **формула складних відсотків**	**число проміжків часу** n необхідне для того щоб початкове значення величини C (початкова сума) при відсотковій ставці $p\%$ досягло значення P (кінцевої суми).

Логарифмічну спіраль (приклад 5) можна зустріти в зірковому атласі (Рис.4), оскільки спіралеподібну форму мають близько 70% відомих галактик, до яких належить і наша. Ця форма притаманна також циклонам, зокрема тропічним, знання про зародження, розвиток і напрям руху яких мають величезне значення для судноплавства, авіації і населення прибережних районів. Логарифмічна спіраль зустрічається у живій і неживій природі. Наприклад форму логарифмічної спіралі мають черепашки деяких молюсків, візерунки павутиння. Якщо уважно придивитись до соняшника, то можна помітити, що насіння в ньому розташовано вздовж логарифмічної спіралі (Рис.5). Ця крива використовується художниками при створенні картин з подіями, які бурхливо розгортаються. Прикладом тому багатофігурна композиція "Побиття немовлят", створена в 1509-1510 роках прославленим живописцем Рафаелем і завершена італійськім графіком Раймонді.

Розглянутий вище матеріал обумовлює можливість створення системи прикладних задач призначених для вивчення функціональної змістової лінії курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Переходячи до розгляду системи прикладних задач призначених для вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу, слід зазначити, що вона містить задачі ***першого (А)*** та ***другого (Б)*** рівнів складності.

Рис.4

Рис.5

До задач ***першого (А)*** рівня складності ми відносимо прикладні задачі, математична модель яких міститься в умові задачі, а їх розв’язування потребує виконання другого та третього етапів математичного моделювання. До того ж дослідження математичної моделі є нескладним, тобто відповідає обов’язковим результатам навчання з курсу алгебри і початків аналізу.

До задач ***другого (Б)*** рівня складності ми відносимо прикладні задачі, розв’язування яких потребує виконання трьох етапів математичного моделювання, але побудова математичної моделі не є складною, оскільки, як правило, її проводять за розглянутим попередньо зразком. До цього ж типу задач ми відносимо й задачі, математична модель яких міститься в умові задачі, але дослідження математичної моделі потребує володіння фактичним матеріалом курсу алгебри і початків аналізу на достатньому рівні.

Степенева функція.

Система прикладних задач може містити деякі типи задач пов’язаних з **степеневою функцією**, а саме: 1) задачі на обчислення значення функції, 2) задачі на знаходження значення аргументу за відомим значенням функції, 3) задачі на знаходження параметрів степеневої залежності.

Розглянемо приклади деяких з них.

1.1. Задачі на обчислення значення функції.

А

1. Проникність P броні для снаряда, діаметр якого D, вага W, швидкість влучання v, визначається за формулою $P = R\cdot\dfrac{W^{\frac{5}{7}}\cdot v^{\frac{10}{7}}}{D^{3,75}}$, де R - стала. На скільки процентів зросте проникність броні при збільшенні швидкості влучання на 1%?

Відповідь. проникність броні зросте на 1,43%.

1.2. Задачі на знаходження аргументу за відомим значенням функції.

А

Приклад 1. Внаслідок зростання температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями території довжиною біля 10 км (площа, на якій повністю вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водоростей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів.

<u>*Вказівка.*</u> Використайте формулу $l = l_0(1+p)^t$, де l – довжина забрудненої водоростями території в момент часу t, l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водоростей протягом доби, виражений у %, t – час, вимірюється добами.

Розв'язання. Скориставшись формулою, згідно даних задачі одержуємо рівність: $10(1+p)^{30} = 100$, якій рівносильна рівність $(1+p)^{30} = 10$. Для визначення p можна піднести обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і, виконавши певні перетворення, одержати $p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0{,}079 \approx 8$ (%).

Відповідь. 8%.

Запропонуємо аналогічні задачі для самостійного опрацювання.

2. При охолодженні реакційної суміші з 50^0 до 20^0 швидкість хімічної реакції знизилась в 27 разів. Використовуючи правило Вант-Гоффа, визначте температурний коефіцієнт γ.

Відповідь. $\gamma = 3$.

3. Русло річки Терека в районі станиці Котляревської має параболічну форму і найбільші витрати води в цьому районі складають $1340\, м^3/с$. Знайти найбільшу глибину ріки Терека в цьому районі, якщо ширина ріки дорівнює 120 $м$.

<u>*Вказівка.*</u> Використайте залежність витрат води через русло ріки від ширини русла B і найбільшої глибини води h у річці $Q = 0{,}2B \cdot h \cdot \sqrt[3]{h^2}$.

Відповідь. 11,2 $м$.

4. Вартість книги знижувалась двічі на одне й те ж число відсотків, в результаті чого вона стала складати 64% від початкової. На скільки відсотків знижувалась вартість книги ?

Відповідь. на 20%.

1.3. Задачі на знаходження параметрів степеневої залежності.

Б

5. Кількість деревини (в кубометрах), яку одержують з ділянки лісу певної площі, залежить від нахилу поверхні (в градусах), на якій росте ліс, як показано у таблиці. Запишіть залежність між кутом x нахилу поверхні і кількістю y деревини у вигляді $y = ax^b + c.$ Визначте кількість деревини, яка одержується з ділянки, нахил якої складає 42°, 55°.

Відповідь. $y = -1{,}57x^{1{,}98} + 10000$*;* $7430\, м^3$, $5616 м^3$.

Тригонометричні функції.

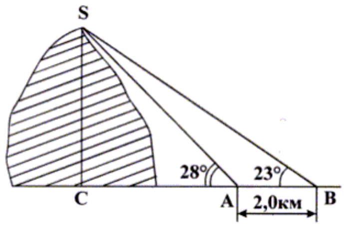
Класифікуємо прикладні задачі системи, призначені для вивчення **тригонометричних функцій,** представимо окремі з них та методику навчання учнів їх розв'язування.

Вивчення тригонометричних функцій повинно супроводжуватись розглядом таких типів прикладних задач: 1) задач на співвідношення сторін прямокутного трикутника та задач на застосування теорем про метричні співвідношення в трикутнику; 2) задач про гармонічні коливання, які розділяються на задачі про: а) визначення кількісних характеристик за даним рівнянням гармонічного коливання, б) складання рівняння гармонічного коливання за даними значеннями величин A, ω, α або A, T, α, в) визначення кількісних характеристик рівняння гармонічного коливання, яке відсутнє в умові задачі; 3) ілюстративних прикладів, що обґрунтовують цікаві природні явища та ін.

2.1. Задачі на співвідношення сторін прямокутного трикутника.

Б

Приклад 1. На малюнку 6 схематично зображений спосіб вимірювання недоступних відстаней. Відомо, що *AB=2,0 км*, $\angle SAC=28°$, $\angle SBC=23°$. Визначте висоту гори.



Мал. 6

Розв'язання. Нехай *SC=h*, *CA=l*. Оскільки трикутники *SCA* і *SCB* прямокутні, то можемо записати: $\frac{h}{l} = tg\,28^0$, $\frac{h}{l+2} = tg\,23^0$. Отже, маємо систему двох рівнянь $\begin{cases} \frac{h}{l} = tg\,28^0, \\ \frac{h}{l+2} = tg\,23^0 \end{cases}$, розв'язавши яку визначимо висоту h гори.

Дана система рівносильна системі $\begin{cases} l = \frac{h}{tg\,28^0}, \\ l+2 = \frac{h}{tg\,23^0} \end{cases}$. Звідси маємо $\frac{h}{tg\,28^0} + 2 = \frac{h}{tg\,23^0}$.

Виконавши відповідні тотожні перетворення одержуємо $h\left(ctg\,28^0 - ctg\,23^0\right) = -2$, звідки $h = \frac{2}{ctg\,23^0 - ctg\,28^0} \approx 4{,}2\ \ (км)$.

Відповідь. $4{,}2\ км$.

2.2. Задачі про гармонічні коливання.

а) Визначення кількісних характеристик за даним рівняння гармонічного коливання.

А

Приклад 2. Координата тіла, виміряна в метрах, змінюється з часом так $x = 0{,}02\sin\left(\omega t + \frac{\Pi}{4}\right)$. Чому дорівнює амплітуда коливання тіла? Визначте фазу коливання і координату тіла в момент часу $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{T}{8}$.

Відповідь. $0{,}02;\ \frac{\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}, \frac{\Pi}{2};\ 0{,}014м; -0{,}014м; 0{,}02м$.

б) Складання рівняння гармонічного коливання за даними значеннями величин A, ω, α або A, ω, T.

Б

Приклад 3. Маятник здійснив 50 коливань за 1 *хв* 40 *с* з амплітудою 10 *см*. Напишіть рівняння залежності y від x та побудуйте графік цієї залежності.

Відповідь. $y = 10\sin\Pi x$.

в) Визначення кількісних характеристик рівняння гармонічного коливання, яке відсутнє в умові задачі.

Б

Приклад 4. Точка здійснює гармонічні коливання. У деякий момент часу t_1 зміщення $y_1 = 5см$. При збільшенні фази вдвічі зміщення точки стало $y_2 = 8см$. Знайдіть амплітуду коливання.

<u>*Вказівка .*</u> Фаза коливання дорівнює $\omega t + \alpha$, де ω - циклічна частота, α - початкова фаза.

Розв'язання . Згідно з умовою задачі маємо систему рівнянь $\begin{cases} 5 = A\sin(\omega t_1 + \alpha), \\ \omega t_2 + \alpha = 2(\omega t_1 + \alpha), \\ 8 = A\sin 2(\omega t_1 + \alpha) \end{cases}$

Використавши формулу подвійного аргументу, з третього рівняння одержимо $8 = 2A\sin(\omega t_1 + \alpha)\cdot\cos(\omega t_1 + \alpha)$. $A\sin(\omega t_1 + \alpha) = 5$, отже $\cos(\omega t_1 + \alpha) = \frac{4}{5}$. За основною тригонометричною тотожністю знаходимо, що $\sin(\omega t_1 + \alpha) = \frac{3}{5}$. З першого рівняння маємо $A = \frac{25}{3} \approx 8{,}3(см)$.

Відповідь. $8{,}3см$.

Показникова функція.

Система прикладних задач пов'язаних з **показниковою функцією** має містити такі типи задач: 1) задачі, які приводять до поняття показникової функції, 2) задачі на знаходження значення аргументу за відомим значенням показникової функції, яка є в умові задачі або формула якої учням відома (чи за відношенням значення функції в певний момент часу та початковим її значенням), 3) задачі на знаходження значення показникової функції, 4) задачі на побудову графіка показникової функції, 5) задачі, які приводять до поняття показникового рівняння, 6) задачі математичними моделями яких є показникові рівняння (які розв'язуються способом зведення обох частин рівняння до спільної основи, методом заміни, логарифмуванням обох частин рівняння), 7) задачі, математичними моделями яких є показникові нерівності

3.1. Задачі, що приводять до поняття показникової функції.

Б

Приклад 1. Населення міста складає *100* тисяч жителів. Щорічний приріст населення становить *2%*. Дослідіть, як буде змінюватися чисельність населення протягом *50* років за умови, що значення приросту буде сталим?

Після ознайомлення учнів з умовою задачі їм пропонується такий **хід дослідження**:

1) Позначте початкову чисельність населення міста P_0, а P_n – чисельність населення міста через n років. Якою буде чисельність населення через рік? Виразіть P_1 через P_0.

2) Чому буде дорівнювати чисельність населення міста через два роки? Виразіть P_2 через P_1 та P_2 через P_0.

3) Дайте відповідь на аналогічне питання для $n=3$.

4) Виразіть P_n через P_{n-1}. Виразіть P_n як функцію P_0 і n.

5) Підставте в останню формулу значення P_0 з умови задачі. Яку залежність ви одержали?

Розв'язання.

1) $P_0 = 100$ тисяч жителів. $\Delta P = 0{,}02P_0$. Тоді $P_1 = P_0 + 0{,}02P_0 = 1{,}02P_0$.

2) $P_2 = P_1 + 0{,}02P_1 = 1{,}02P_1 = 1{,}02(1{,}02P_0) = 1{,}02^2 \cdot P_0$.

3) $P_3 = P_2 + 0{,}02P_2 = 1{,}02P_2 = 1{,}02(1{,}02^2 P_0) = 1{,}02^3 \cdot P_0$

4) $P_n = P_{n-1} + 0{,}02P_{n-1} = 1{,}02 \cdot P_{n-1} = 1{,}02(1{,}02^{n-1} P_0) = 1{,}02^n \cdot P_0$

Провівши дослідження за даним алгоритмом, учні одержують ***функцію P(n)=100·1,02ⁿ***, *яка є* ***залежністю чисельності населення P*** *міста (в тисячах жителів)* *від числа **минулих років п.***

Одержана показникова функція є математичною моделлю даного процесу, отже, скориставшись нею, можна з'ясувати, як буде змінюватися чисельність населення протягом *50* років. Побудувавши графік функції учні одержують повну картину зміни чисельності населення міста.

3.2. Задачі на знаходження значення аргументу за відомим значенням показникової функції, яка є в умові задачі або формула якої учням відома (чи за відношенням значення функції в певний момент часу та початковим її значенням).

А

Приклад 2. При розпаді *4*–х грамів радіоактивної речовини була визначена залежність залишку *m* цієї речовини (в грамах) від часу *t* (в добах): $m(t)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Через який проміжок часу залишилось *0,125 г* радіоактивної речовини?

Розв'язання. Згідно з умовою задачі одержуємо рівність $0{,}125=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$, яка рівносильна рівності $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Звідки знаходимо, що $t=5$ діб.

Відповідь. через 5 діб.

Задачі розглянутого типу відносяться до задач *першого (А) та другого рівнів складності (Б),* залежно від кількості кроків їх розв'язування. Існуючі в природі залежності (с. 5) дають можливість урізноманітнювати фабулу цих задач. Наведемо приклади деяких з них.

А

1. Відсоткова ставка в банку складає 10%. Через скільки років сума покладеного в цей банк вкладу подвоїться?

Відповідь. 8 років.

2. Населення міста збільшується щорічно на *3%* у порівнянні з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться в *1,5* рази?

Вказівка. Використайте формулу зміни чисельності населення $N=N_0(1+p)^t$, де N -чисельність населення після t років, $N_0=N(0)$, p - швидкість приросту населення (у %), t - час (у роках).

Відповідь. 14 років.

Б

3. Розмноження деякого виду бактерій відбувається за законом $y=y_0e^{kt}$, де y_0 – маса початкової кількості бактерій, y – маса бактерій у момент часу t. Дослідним шляхом встановлено, що з *5 г* цих бактерій, розміщених у відповідному живильному середовищі, через *8* годин буде одержано *140 г.* Протягом якого часу кількість таких бактерій подвоюється?

Відповідь. $k=\frac{\ln 28}{8}\approx 0{,}417$; $t\approx 1{,}66$ год.

4. Вакуумний насос може відкачати *2%* газу, який міститься у камері, при кожному окремому повному русі. Скільки необхідно часу, щоб відкачати *95%* газу, якщо насос виконує один повний рух протягом двох секунд? Для розв'язування задачі використайте залежність $P=P_0e^{-kt}$, де P – кількість газу в камері в момент часу t, P_0 – початкова кількість газу у камері.

Відповідь. 300 с.

3.3. Задачі на знаходження значення показникової функції.

А

Приклад 3. Охолодження тіла відбувається за законом $D=D_0\cdot b^t$, де D – різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; t – час (у хвилинах); $D_0=D(0)$ – початкова різниця температур; b – стала величина, яка залежить від форми тіла і матеріалу, з якого воно виготовлене. Металеву кульку, температура якої $160°C$, помістили в кімнату, температура повітря в якій $23°C$. Протягом 1 хвилини температура кульки стала $146°C$. Якою буде температура кульки через 5 хвилин?

Розв'язання. Для визначення параметра b знайдемо D_0 та D, скориставшись даними з умови задачі. $D_0 = 160^0 - 23^0 = 137^0$, $D = 146^0 - 23^0 = 123^0$. Підставляючи одержані дані в закон охолодження тіла, матимемо $123 = 137 \cdot b^1$, звідки $b \approx 0{,}9$. Отже, маємо $D(t) = 137 \cdot 0{,}9^t$. Оскільки $D(5) = 137 \cdot 0{,}9^5 \approx 80{,}9$ (^0C), то температура кульки дорівнює $D(5) + 23^0 C = 103{,}9$ (^0C).

Відповідь. $103{,}9\ ^0C$.

Для самостійного розв'язування запропонуємо більш складну.

Б

1. У однолітніх лососів споживання кисню з підвищенням швидкості плавання зростає експоненціально. Визначимо $C(v)$ як споживання кисню за годину однолітнім лососем, який пливе з середньою швидкістю v м/с. Нехай $C(0) = 100$ і $C(3) = 800$ (відповідних одиниць). Знайдіть $C(1)$ і $C(2)$.

<u>*Вказівка.*</u> Для розв'язання задачі використайте залежність $C(v) = C_0 \cdot e^{kv}$.

Відповідь. $C(1) = 200,\ C(2) = 400$.

3.4. Задачі на побудову графіка показникової функції.

Цей тип задач запропонуємо розв'язати самостійно, використовуючи ППЗ GRAN-1 або інші.

А

1. Шар води, яка вбирається при зрошуванні за t годин, залежить від коефіцієнта згасання швидкості вбирання x і визначається за формулою: $H = kt^{1-x}$, де k - середня швидкість вбирання за першу одиницю часу (год). Побудуйте для високої водопроникності графік функції H, взявши $k = 0{,}15 \frac{м}{год}$, $t = 2 год$, $0{,}3 \le x \le 0{,}8$.

2. У процентному співвідношенні вміст білка у траві через t годин після покосу виражається функцією $B = a \cdot e^{ct}$, тобто змінюється експоненціально. Знайти параметри a і c, якщо $B(0) = 15{,}4$ і $B(12) = 10{,}4$. Розглянувши вміст білка у траві протягом 12 годин з інтервалом в 1 год, побудуйте графік даної функції.

Відповідь. $B = 15{,}4 \cdot e^{-0{,}033t}$.

3.5. Задачі, які приводять до поняття показникового рівняння.

А

Приклад 4. При добавленні в бактеріальне середовище антибактеріальний агент викликає зменшення популяції бактерій. Її початкова чисельність $p(0)=10^6$. Після добавлення агента популяція нараховує $p(t)=p(0)\cdot 2^{-\frac{t}{3}}$ бактерій. Який час необхідний для того, щоб популяція зменшилась до 10^3 особин?

Розв'язання. Для відповіді на питання задачі в формулу чисельності популяції підставляється її значення. При цьому одержується **показникове рівняння** $10^3 = 10^6 \cdot 2^{\frac{-t}{3}}$, якому рівносильне рівняння $2^{\frac{t}{3}} = 10^3$. Звідки $t = 3 \cdot \log_2 10^3 = 9 \log_2 10 = \frac{9}{\lg 2} \approx 29{,}9$ (год).

Відповідь. 29, 9 год.

3.6. Задачі математичними моделями яких є показникові рівняння (які розв'язуються способом зведення обох частин рівняння до спільної основи, методом заміни, логарифмуванням обох частин рівняння).

Розглянемо приклад задачі, яка розв'язується методом *зведення обох частин рівняння до спільної основи.*

А

Приклад 5. Скільки разів треба намотати трос на барабан, щоб силою *5 Н* утримувати вантаж в *45 Н*? Дайте відповідь на питання, використовуючи формулу залежності між більшою силою F і меншою силою F_0 при рівновазі: $F=F_0 \cdot 3^n$, де n – число витків на барабані.

Розв'язання. Дана ситуація описується математично за допомогою рівняння $45 = 5 \cdot 3^n$, якому рівносильне рівняння $3^n = 3^2$, звідки $n = 2$.

Відповідь. 2 рази.

Наступна задача значно складніша, її розв'язання передбачає побудову математичної моделі – **показникового рівняння,** яке розв'язується методом *заміни змінної.*

Б

Приклад 6. Є 6 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 6 років і 8 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 3 роки. Через скільки років маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини?

Вказівка. Для відповіді на питання задачі використайте рівняння радіоактивного розпаду $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$, де m_0 – початкова маса радіоактивної речовини, m – маса речовини, що лишилась внаслідок розпаду після x періодів піврозпаду, $x = \frac{t}{T}$ – відношення часу протікання реакції до періоду піврозпаду даної речовини.

Розв'язання. Через t років маса першої та другої речовини відповідно буде $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$ і $8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$. Для відповіді на питання задачі слід розв'язати рівняння

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = 1 \qquad (1)$$

Введемо заміну, нехай $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = y$, тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = y^2$. Отже, рівнянню (1) рівносильне рівняння $6y - 8y^2 = 1$, перетворивши яке, одержуємо квадратне рівняння $8y^2 - 6y + 1 = 0$, якому рівносильне рівняння $y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8} = 0$. За теоремою Вієта одержуємо $y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{4}$. Отже, маємо: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{6}} = \frac{1}{2}$ або $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{6}} = \frac{1}{4}$, звідки $t_1 = 6,\ t_2 = 12.$

Відповідь. Маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої речовини після 6 і 12 років від початку розпаду.

Розглянемо задачу, розв'язання якої в середині побудованої математичної моделі потребує використання методу *логарифмування обох частин рівняння.*

Б

Приклад 7. Для боротьби з вірусами тютюнових рослин застосовується рентгенівське випромінювання. Зі збільшенням дози радіації число вірусів, які виживають, спадає експоненціальне: $P(R)=e^{-\alpha R}$ – частка вірусів, яка вижила після дози радіації R, α – стала, характерна для даного вірусу. Визначте, яка доза радіації вбиває *90%* всіх вірусів.

Розв'язання. Для відповіді на питання задачі необхідно розв'язати експоненціальне рівняння $e^{-\alpha R}=0{,}1$, якому рівносильне рівняння $e^{\alpha R}=10$. Логарифмуючи обидві частини останнього рівняння і використавши основну логарифмічну тотожність, одержимо $\alpha R=\ln 10$. Звідки $R=\dfrac{\ln 10}{\alpha}\approx\dfrac{2{,}303}{\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{2{,}303}{\alpha}$.

3.7. Задачі, математичними моделями яких є показникові нерівності.

Б

Приклад 8. Звукове джерело випромінює звук, інтенсивність якого *100 дб*. Проходячи крізь ізолюючу фонічну пластинку, він втрачає *10%* своєї інтенсивності. Скільки пластинок повинен перетнути звук, щоб його інтенсивність стала меншою *1 дб*?

Розв'язання. Математичною моделлю даної задачі є **показникова нерівність** $100\cdot 0{,}9^n<1$, якій рівносильна нерівність $0{,}9^n<0{,}01$. Логарифмуючи обидві частини останньої нерівності і використовуючи основну логарифмічну тотожність, одержуємо $\ln 0{,}9^n<\ln 0{,}01$, звідки $n\cdot\ln 0{,}9<\ln 0{,}01$. Оскільки $\ln 0{,}9\approx -0{,}105<0$, то $n>43{,}859$. Отже, інтенсивність звуку стає менше 1 *дб* після проходження 44 пластинок.

Відповідь 44 пластинки.

Логарифмічна функція.

Вивчення **логарифмічної функції** варто супроводжувати розглядом прикладних задач таких типів: 1) задач на знаходження значень логарифмічної функції, 2) задач, що приводять до поняття логарифмічного рівняння, 3) задач, математичними моделями яких є логарифмічні та показниково-логарифмічні рівняння (які розв'язуються за означенням логарифма, потенціюванням, та логарифмуванням).

Більш детально згадані типи задач пов'язаних з логарифмічною функцією ми розглянемо в наступних публікаціях.

Задачі названих типів представлені, у переважній більшості, у навчальних посібниках [11]-[13]. Ця система задач може бути включена у навчальний процес під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу в класах академічного та профільного рівнів.

Наведені приклади доцільно використовувати як при введенні понять функцій, так і при вивченні їх властивостей та побудові графіків. Вдало підібрані, на основі теоретичного матеріалу функціональної змістової лінії, **прикладні задачі** допомагають розкривати його наукове і практичне значення, що є важливим засобом пробудження в учнів активного мислення і ефективним стимулом для розвитку та зміцнення відповідних інтересів.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Бевз Г.П. Математика 10: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2010.-272с.
3. Бевз Г.П. Математика 11: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011.
4. Бевз Г.П. Алгебра (алгебра і початки аналізу):підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова – К.: Освіта, 2011.-400 с.

5. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010.-416 с.
6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.6-27.
7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.28-51.
8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.52-83.
9. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.84-121.
10. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.
11. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів:Сіверянська думка,2002.-128с.
12. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.
13. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.-метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: "Тираж", 1997.-127с.