РІЗНІ ТИПИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ, ПРИЗНАЧЕНИХ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАНЬ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Лілія Соколенко – доцент кафедри педагогіки, психології та методик навчання фізики й математики ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка, кандидат педагогічних наук, доцент
Василь ШВЕЦЬ – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор.

Анотація. Представлена класифікація типів прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань в курсі алгебри і початків аналізу, проведений аналіз навчально-методичної літератури, запропонована диференційована система прикладних задач, призначених для вивчення теми ”Похідна та її застосування” і методика навчання учнів їх розв’язування.

Ключові слова. похідна, застосування похідної, система прикладних задач, курс алгебри і початків аналізу.

Лилия Соколенко, Василий Швец.

Разные типы прикладных задач, предназначенных для изучения производной и её применений в курсе алгебры и начал анализа.

Аннотация. Представлена классификация типов прикладных задач, предназначенных для изучения производной и её применений в курсе алгебры и начал анализа, выполнен анализ учебно-методической литературы, предложена дифференцированная система прикладных задач, предназначенных для изучения темы ”Производная и её применения” и методика обучения учащихся их решения.

Ключевые слова. производная, применения производной, система прикладных задач, курс алгебры и начал анализа.

Liliy Sokolenko, Vasyl Shwets.

Different types of applied sums assigned for the learning of derivative and its application in the course of algebra and the beginning of analysis.

Summary. Presented classification of types of applied sums assigned for the learning of derivative and its application in the course of algebra and the beginning of analysis. Analysis of educational and methodological literature was conducted. Differential system of applied sums assigned for the learning of the topic “Derivative and its application” and methodology of teaching pupils to solve them was proposed.

Keywords: derivative, application of the derivative, system of applied sums, course of algebra and the beginning of analysis.

Поняття **”похідна”** відноситься до центральних понять диференціального числення. З історії відомо, що до відкриття похідної прийшли, незалежно один від одного, англійський математик і механік І. Ньютон у 1670 – 1671 р.р., розв’язуючи задачу механіки про визначення миттєвої швидкості та німецький філософ і математик Г.Лейбніц у 1673 – 1675 р.р., розв’язуючи геометричну задачу про знаходження положення дотичної до кривої у певній точці.

За допомогою цього поняття досліджують процеси і явища в природничих та економічних науках. У згаданих процесах та явищах стан тіл та їх властивості неперервно змінюються. Під час вивчення залежностей, які описують ці явища (процеси), в першу чергу постає питання про знаходження їх швидкості. Задача про визначення швидкості, з якою змінюється величина і приводить до поняття **похідної.**

Дана стаття присвячена одній з провідних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу старшої школи – ”***Похідна та її застосування***”. Численність задач природознавства, математики, техніки, економіки дає можливість створити систему прикладних задач, призначених для вивчення згаданої змістової лінії в курсі алгебри і початків аналізу на різних рівнях (рівні стандарту, академічному, профільному та поглибленому).

Поняття похідної доцільно вводити як узагальнення результатів розв’язання відповідних прикладних задач.

До згаданої системи прикладних задач відносяться такі **типи задач**:

1. Задачі практичного змісту, що приводять до поняття похідної.
2. Прикладні задачі, в розв’язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль.
3. Задачі на застосування похідної до дослідження функцій (на монотонність, на екстремум, найбільше та найменше значення, за загальною схемою на основі якого будується її графік), які є математичними моделями прикладних задач.

Діючими навчальними програмами з математики для старшої школи, всіх рівнів [6]-[9], передбачено, що під час вивчення теми ”Похідна та її застосування” учні усвідомлять значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху, навчаться розв’язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

У програмі з математики для учнів 10-11 класів профільного рівня [8] зазначено, що при формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого процесу з часом (наприклад, швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування тощо).

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, серед яких [4], [5], [10], доходимо висновку, що в більшості з них обмежуються розглядом класичних задач, що приводять до поняття похідної, розглядають прикладні задачі пов’язані лише з механічним змістом похідної та окремі прикладні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції. У підручнику з курсу математики для 11 класу [1] представлені більш різноманітні задачі практичного змісту, в роз’язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль.

Аналіз досліджень і публікацій. Розглядаючи питання методики включення прикладних задач під час навчання теми ”Похідна та її застосування” переважна більшість авторів, серед яких М. Вайнтрауб, Г. Дутка, С. Григулич, А. Парафійник, В. Стасюк, І. Стрельченко, О. Стрельченко та ін., зосереджують увагу на задачах з економічним змістом. Проведено ряд дисертаційних досліджень, серед яких дослідження Г. Дутки, Л. Соколенко, Ю. Ткач та ін., у яких серед інших питань розглядаються питання методики навчання розв’язування прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань.

Існують навчально-методичні посібники, а саме [2], [11]-[13], в яких представлені різні типи прикладних задач для розв’язування під час вивчення теми ”Похідна та її застосування” курсу алгебри і початків аналізу старшої школи та посібники для проведення факультативних занять [3] та курсів за вибором [14], що містять окремі типи задач, зокрема задачі оптимізації, що розв’язуються з допомогою похідної.

Мета статті. Розглянути систему прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, виділити типи задач та розкрити їх роль у навчанні змістової лінії курсу, диференціювати задачі за рівнями складності, звернути увагу на ті типи задач, яким приділено недостатньо уваги у діючих шкільних підручниках, та методику навчання учнів їх розв’язування.

Виклад основного матеріалу. Під час вивчення змістової лінії ”Похідна та її застосування” введення поняття похідної відбувається після узагальнення способу розв'язування **класичних задач**: *задачі механіки про визначення миттєвої швидкості* і *геометричної задачі про визначення положення дотичної до кривої в певній точці* [4], [5], [10].

При розв'язуванні згаданих задач доводиться проводити ті ж самі міркування, що і при розв'язуванні численних задач природознавства та економіки. Розгляд цих задач буде корисним для учнів, які вивчають математику в класах природничого-математичного напряму профілізації (фізико-математичного, хіміко-біологічного, екологічного профілю) та суспільно-гуманітарного напряму профілізації (економічного профілю). Оскільки його метою є узагальнення спільного способу розв'язування різноманітних задач, то для проведення розгляду доцільно використати наступні таблиці 1 та 2.

У таблиці 1 представлені різноманітні ***задачі природознавства*** (про визначення: миттєвої швидкості та прискорення, сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції та швидкості зростання популяції) які приводять до поняття похідної.

До поняття похідної приводять численні ***економічні задачі*** (про визначення: продуктивності праці, граничних витрат виробництва, граничного виторгу, а також граничного прибутку, граничного продукту, граничної корисності, граничної ціни). Окремі з названих задач розглянуті у таблиці 2.

Таблиця 1. Задачі природознавства

(фізичні, хімічна, біологічна)

Функція	*Приріст аргументу*	*Приріст функції*	*Середня швидкість зміни функції*	*Миттєва швидкість зміни функції*
1	2	3	4	5
1. $S=S(t)$ - шлях, який проходить тіло за час t; *[м]*	Δt	$\Delta S = S(t+\Delta t)-S(t)$	$v_c=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$	$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_c$ - **швидкість** *[м/с]*
2. $v=v(t)$ - швидкість нерівномірного руху тіла, де t - час; *[м/с]*	Δt	$\Delta v = v(t+\Delta t)-v(t)$	$a_c=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$	$a=\lim\limits_{\Delta t\to 0} a_c$ - **прискорення** *[м/с²]*
3. $q=q(t)$ - кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t; *[Кл]*	Δt	$\Delta q = q(t+\Delta t)-q(t)$	$I_c=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$	$I=\lim\limits_{\Delta t\to 0} I_c$ - **сила струму** *[А]*
4. $\varphi=\varphi(t)$ - кут повороту тіла за час t; *[рад]*	Δt	$\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$	$\omega_c=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$	$\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0} \omega_c$ - **кутова швидкість** *[рад/с]*
5. $m=m(l)$ - маса будь-якої частини неоднорідного стержня завдовжки l; *[г]*	Δl	$\Delta m = m(l+\Delta l)-m(l)$	$\rho_c=\frac{\Delta m}{\Delta l}=\frac{m(l+\Delta l)-m(l)}{\Delta l}$	$\rho=\lim\limits_{\Delta l\to 0} \rho_c$ - **лінійна густина стержня** *[г/см]*
6. $A=A(t)$ - робота, яка здійснюється у момент часу t; *[Дж]*	Δt	$\Delta A = A(t+\Delta t)-A(t)$	$W_c=\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$	$W=\lim\limits_{\Delta t\to 0} W_c$ - **потужність** *[Вт]*
7. $Q=Q(T)$ - кількість теплоти, яку необхідно надати тілу, щоб змінити його температуру на Т градусів; [Дж]	ΔT	$\Delta Q = Q(T+\Delta T)-Q(T)$	$C_c=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\frac{Q(T+\Delta T)-Q(T)}{\Delta T}$	$C=\lim\limits_{\Delta t\to 0} C_c$ -**питома теплоємність речовини даного тіла** *[Дж/^0C]*
8. $C=C(t)$ - концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t; [моль/л]	Δt	$\Delta C = C(t+\Delta t)-C(t)$	$v_{cp}=\frac{\Delta C}{\Delta t}=\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}$	$v_p=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{cp}$ - **швидкість хімічної реакції**

9. $P = P(t)$ - чисельність популяції в момент часу t; [особин]	Δt	$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$	$v_{cn} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$	$v_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cn}$ - **швидкість зростання популяції**

Таблиця 2. Задачі економіки

Функція	*Приріст аргументу*	*Приріст функції*	*Середня швидкість зміни функції*	*Миттєва швидкість зміни функції*
1	2	3	4	5
10. $V = V(t)$ - обсяг випуску продукції за проміжок часу t; [одиниць продукції]	Δt	$\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$	$f_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$	$f_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} f_{cp}$ **-продуктивність праці за час** t
11. $K = K(x)$ -витрати виробництва на x одиниць випущеної продукції [грошових одиниць]	Δx	$\Delta K = K(x+\Delta x) - K(x)$	$f_{cp} = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+\Delta x) - K(x)}{\Delta x}$	$f_{гв-ти} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_{cp}$ **-граничні витрати виробництва** (наближено характеризують додаткові затрати на виробни-цтво одиниці додаткової продукції)
12. $U = U(x)$ - виторг від продажу x одиниць товару [грошових одиниць]	Δx	$\Delta U = U(x+\Delta x) - U(x)$	$f_{cp} = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x}$	$f_{гв-г} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_{cp}$ - **граничний виторг**

У таблицях виділені чотири кроки даного способу: надання незалежній змінній x приросту Δx; знаходження приросту залежної змінної Δy; складання відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке виражає середню швидкість зміни функції; знаходження $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, яка є швидкістю зміни функції заданого значення аргументу x.

Різноманітність прикладів, включених до таблиці, дає змогу переконати учнів у необхідності всебічного вивчення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, зокрема, способів її обчислення. Дану границю в математиці називають ***похідною***, вона є результатом узагальнення способу розв'язування розглянутого виду задач, під час якого змінні x і y позбавляються конкретного змісту і розглядаються абстрактно.

Розглянутий матеріал обумовлює можливість створення системи прикладних задач, призначених для вивчення змістової лінії ”Похідна та її застосування” курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Згадана система містить названі вище типи прикладних задач, диференційовані за трьома рівнями складності $A - B$.

1. Задачі практичного змісту, що приводять до поняття похідної.

Перед введенням означення похідної не варто детально зупинятися на кожному з прикладів практичних задач, наведених у таблицях 1, 2. Аналіз декількох з них є достатнім для усвідомлення учнями чотирьох кроків спільного способу розв'язування, які фактично і визначають правило знаходження похідної. Решту задач корисно розглянути у конкретній числовій формі після введення означення похідної. Це дасть змогу не тільки запам'ятати означення даного поняття, але й навчити користуватися ним, тобто навчити застосовувати його для відповіді на конкретні запитання.

Розглянемо декілька прикладів таких задач. Ці задачі відносяться до *першого (А) рівня складності,* оскільки математична модель міститься в умові задачі та розв'язування задачі відбувається за вже відомим учням ***правилом знаходження похідної.***

А

Приклад 1. Кут φ повороту шківа в залежності від часу t задається функцією $\varphi(t)=t^2+3t-5$. Знайдіть кутову швидкість при $t=5$ *с*.

Розв'язання. Відомо, що кутова швидкість є похідною від кута повороту, тобто $\omega(t)=\varphi'(t)$. Розв'яжемо задачу, користуючись правилом знаходження похідної.

1) Надамо t приросту $\Delta t>0$.

2) Знайдемо приріст залежної змінної $\varphi(t)$:

$\Delta\varphi(t)=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)=(t+\Delta t)^2+3(t+\Delta t)-5-(t^2+3t-5)=$

$=2t\Delta t+\Delta t^2+3\Delta t=\Delta t(2t+\Delta t+3)$.

3) Складемо відношення $\dfrac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}$: $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=2t+\Delta t+3.$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t\to 0$: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(2t+\Delta t+3\right)=2t+3.$

Ця границя і є кутовою швидкістю у момент часу t. Тому, коли $t=5$ *с*, то $\omega=13$ *рад/с*.

Відповідь. $\omega=13$ *рад/с*.

Фабула задачі може бути дещо іншою.

Приклад 2. Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t)=450+52t+2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент $t=0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Розв'язання. Зрозуміло, що у початковий момент часу $t=0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t)=N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

1) Надамо t приросту Δt.

2) Знайдемо приріст залежної змінної ΔN:

$$\Delta N=N(t+\Delta t)-N(t)=450+52(t+\Delta t)+2(t+\Delta t)^2-\left(450+52t+2t^2\right)=$$
$$=52\Delta t+4t\Delta t+2(\Delta t)^2=\Delta t(52+4t+2\Delta t).$$

3) Складемо відношення $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$: $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=52+4t+2\Delta t.$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t\to 0$: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(52+4t+2\Delta t)=52+4t.$

Ця границя і є швидкістю приросту числа бактерій в момент часу *t*. Тому, коли $t=3{,}5$ хв, то $v=66$ бакт/хв.

Відповідь. *450 бактерій; 66 бакт/хв.*

2. Прикладні задачі, в розв'язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль.

Після того, як учням будуть відомі формули похідних різних функцій і основні теореми про похідні, корисно розглянути інший прийом розв'язування – ***диференціювання функції,*** яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі. Ці задачі бажано розділити на три рівні складності (*А, Б, В)*.

До задач ***першого рівня складності (А)*** відносимо задачі в яких функція, яка відіграє роль математичної моделі, міститься в умові задачі або її нескладно побудувати. Розв'язування даних задач зводиться до диференціювання функції та знаходження значення похідної в певній точці.

До задач ***другого рівня складності (Б),*** в розв'язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль, відносимо задачі які потребують знання учнями *механічного* та *геометричного змісту похідної;* вміння будувати нескладну математичну модель, використовуючи знання з геометрії та задачі; розв'язування яких в середині побудованої математичної моделі, потребує володіння математичними вміннями та навичками на достатньому рівні.

До задач ***третього рівня складності (В)*** відносимо задачі які потребують виконання трьох етапів математичного моделювання, або задачі розв'язування яких в середині побудованої математичної моделі потребує високого рівня математичної підготовки учнів.

Сформулюємо задачі даного типу, які відносяться до **трьох рівнів складності.**

А

Приклад 1. Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0\, e^{-kt}$, де m_0 – початкова маса на момент часу $t = 0$, m – нерозчинена маса на момент часу t; k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

Розв'язання. Масу лікарської речовини, що розчинилась на момент часу t, запишемо у вигляді $M = m_0 - m = m_0(1 - e^{-kt})$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення $M' = m_0(-e^{-kt})(-k) = km_0\, e^{-kt} = km.$

Відповідь. *km – швидкість розчинення лікарської речовини.*

Пропонуємо аналогічні задачі для самостійного розв'язування.

1. Тіло, маса якого *30 кг,* рухається прямолінійно за законом $S(t)=4t^2+t$. Доведіть, що рух тіла відбувається під дією сталої сили.

2. При гальмуванні маховик за час *t* обертається на кут $\varphi(t)=3+9t-t^2$ (*t* в секундах). Знайдіть: 1) кутову швидкість маховика в момент часу $t=4$ *с*; 2) кутове прискорення; 3) момент часу, коли обертання припиняється.

Відповідь. $1 рад/с$; $-2 рад/с^2$; $4{,}5с$.

3. Кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника, починаючи з моменту часу $t=0$, задається формулою $q(t)=3t^2-3t+4$. Знайдіть силу струму в кінці шостої секунди.

Відповідь. $33A$.

4. Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) задається формулою $p(t) = 10^5 - \dfrac{9 \cdot 10^4}{t+1}$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів.

Відповідь. 2500 комах/день.

5. Дріжджі ростуть у цукровому розчині, так що їх маса збільшується на *3%* за кожну годину. Визначте масу дріжджів через *t* годин, якщо її початкове значення дорівнює *1 г*. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) *t=1 год*; б) *t=2 год*; в) *t=5 год*.

Відповідь. $m(t) = 1{,}03^t$; $а)0{,}0304 г/год$; $б)0{,}0314 г/год$; $в)0{,}0343 г/год.$

6. Обсяг продукції V (од. прод.) цеху протягом робочого дня є функцією $V(t) = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де t - час (год.). Знайдіть продуктивність праці через 2 *год* від початку роботи.

Відповідь. 43 одиниці продукції.

7. Функція витрат підприємства описується рівнянням $K(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Визначте граничні витрати, якщо обсяг виробництва становитиме $50 од.$; $100 од.$; $150 од.$

Відповідь. 203 *грн*; 403 *грн*; 603 *грн.*

Б

Приклад 2. З танкера, який потрапив у аварію, виливається у море нафта, утворюючи на поверхні моря круглу пляму, площа якої збільшується з постійною швидкістю 6 км^2/год. З якою швидкістю збільшується радіус нафтової плями у той момент, коли площа плями дорівнює 9 км^2?

Розв'язання. Оскільки нафтова пляма має круглу форму, то її площа в час t визначається за формулою $S(t)=\pi\cdot r^2(t)$. Швидкість зміни площі плями $S'(t)=2\pi\cdot r(t)\cdot r'(t)$. У той момент, коли площа плями дорівнює 9 $км^2$ її радіус $r=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ $км$. Оскільки швидкість збільшення площі плями постійна і дорівнює $6км^2/год$, то маємо рівність $6=2\pi\cdot\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot r'(t)$. З останньої рівності визначаємо, що швидкість збільшення радіусу нафтової плями $r'(t)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$.

Відповідь. $r'(t)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$.

Приклад 3. Шосе проходить через річку. Міст має форму параболи $y=px^2$ (рис. 1). Яким потрібно зробити схил насипу до мосту, щоб перехід з мосту на насип був плавний? Довжина мосту $l=20$ *м*, стріла провисання $h=0,5$ *м*.

Вказівка. Напрям підходу до мосту повинен співпадати з напрямом дотичної до профілю на його кінці.

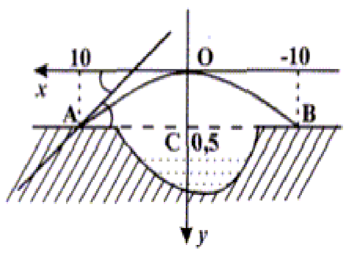

Рис. 1

Розв'язання. Використовуючи належність точки $A(10;0,5)$ графіку функції $y=px^2$, складемо рівняння параболи, яка є геометричною моделлю даної задачі. $0,5=100p$, звідки $p=0,005$, а $y=0,005x^2$.

На основі геометричного змісту похідної одержимо: $tg\alpha=y'(10)=2\cdot 0,005\cdot 10=0,1$, звідси $\alpha=arctg0,1\approx 5,7°$.

Відповідь. $\alpha\approx 5,7^0$.

Пропонуємо декілька задач *другого рівня складності* для самостійного розв'язування.

8. Два тіла рухаються прямолінійно: одне – за законом $S_1(t)=t^3+t^2-27t$, друге – за законом $S_2(t)=t^2+1$. Визначте момент, коли тіла матимуть однакові швидкості.

Відповідь. $3c$.

9. Круглий металевий диск розширюється при нагріванні так, що його радіус рівномірно збільшується на *0,01 см/с*. З якою швидкістю збільшується площа диска в той момент, коли його радіус дорівнює *2 см*?

Відповідь. $0,126 см^2/с$.

10. Коли пісок висипають на горизонтальну площину, то він утворює конус з сталим у міру висипання гострим кутом β між твірною конуса і вертикаллю (це так званий кут розхилу конуса). Пісок сиплеться зі швидкістю C $см^3/с$. З якою швидкістю збільшується радіус основи конуса?

Відповідь. $\dfrac{C}{\pi\cdot r^2}\cdot tg\beta$.

В

Приклад 4. Повітря, яке знаходиться в циліндрі з поршнем, стискають так, що тиск збільшується зі швидкістю *1000 Па/с*, а об'єм зменшується зі швидкістю *0,0001* $м^3/с$. Визначте, з якою швидкістю змінюється температура T в той момент, коли $P=1,5\cdot 10^5$ *Па*, $V=0,02$ $м^3$, $T=400$ *К*. Повітря вважати ідеальним газом.

Ця задача є засобом здійснення міжпредметних зв'язків. Оскільки вона має фізичний зміст, то для того щоб полегшити побудову математичної моделі слід записати її умову коротко, так як це прийнято для фізичних задач.

$$P = 1{,}5\cdot 10^5\, Па$$
$$P' = 10^3\, \frac{Па}{c}$$
$$V = 0{,}02 м^3$$
$$V' = -10^{-4}\, \frac{м^3}{c}$$
$$T = 400K$$
$$T' - ?$$

Розв'язання. **I етап.** Математичною моделлю даної задачі є відоме зі шкільного курсу фізики **рівняння стану ідеального газу** (закон Менделєєва-Клапейрона), яке пов'язує три величини прикладної задачі: $P-$ тиск, $V-$ об'єм, $T-$ температуру, та дві сталі: $\nu-$ кількість речовини (для даної задачі $\nu = const$), $R-$ універсальну газову сталу:

$$PV = \nu RT \qquad (1).$$

Аналіз умови задачі приводить до висновку, що решта величин задачі є похідними від P, V, T. Для введення решти величин з умови задачі необхідно продиференціювати рівняння (1).

II етап. Продиференціюємо обидві частини рівняння (1). Одержимо:

$$P'V + PV' = \nu RT' \qquad (2).$$

Розділивши (2) на (1) дістанемо:

$$\frac{P'}{P} + \frac{V'}{V} = \frac{T'}{T}.$$

Підставимо відомі величини: $\frac{10^3}{1{,}5\cdot 10^5} - \frac{10^{-4}}{2\cdot 10^{-2}} = \frac{T'}{400}$; скоротивши одержимо рівняння $\frac{1}{150} - 0{,}005 = \frac{T'}{400}$. Звідки $T' = \frac{40}{15} - 2 \approx 0{,}67$ (К/с).

III етап. Отже, температура газу підвищується зі швидкістю 0,67 К/с.

Відповідь. 0,67 К/с.

Задачі, що мають геометричні моделі пропонуємо для самостійного розв'язування.

11. Паром підтягують до берега за допомогою канату, який намотують на коловорот, зі швидкістю *40 м/хв*. Коловорот знаходиться на березі на *10 м* вище, ніж поверхня води. Знайдіть швидкість руху парому в той момент часу, коли він знаходиться на відстані *30 м* від берега.

Вказівка. Геометричною моделлю даної задачі є прямокутний трикутник *AOB*, в якому катети *OA=10 м*; *OB=x(t)* – відстань від парома до берега, а гіпотенуза *AB=S(t)* – відстань від парому до коловорота, який знаходиться в точці *A*.

Відповідь. $-\frac{40}{3}\sqrt{10} м/хв$.

12. Судно, яке рухається зі швидкістю *8 км/год*, кидає якір. Дно при цьому знаходиться на глибині *1 км*. Якір зачіплюється за дно, і канат від нього витягується в напрямку від носа до корми по прямій лінії. З якою швидкістю канат скочується з судна в момент часу, коли занурена його частина має *2 км* у довжину?

Вказівка. Геометричною моделлю даної задачі є прямокутний трикутник з катетами *x(t)* і *h*, де *x(t)* – відстань, яку пройшло судно після того, як був кинутий якір; *h* – глибина дна, та гіпотенузою *l(t)* – довжиною зануреної частини каната.

Відповідь. $4\sqrt{3} км/год$.

3. Задачі на застосування похідної до дослідження функцій (на монотонність, на екстремум, найбільше та найменше значення, за загальною схемою на основі якого будується її графік**), які є математичними моделями прикладних задач.**

З'ясуємо роль і місце цих задач при підготовці до вивчення теоретичних питань курсу та при закріпленні тільки що набутих теоретичних знань і формуванні математичних умінь. Покажемо, як можна використовувати цей тип задач та ілюстративні життєві приклади у процесі навчання, виходячи з різних дидактичних цілей.

Прикладні задачі на застосування похідної до дослідження функції на монотонність.

Зупинимось на етапах процесу навчання, під час яких розгляд практичних життєвих ситуацій сприятиме засвоєнню учнями теоретичного матеріалу.

Розпочнемо з етапу повторення понять *зростаючої та спадної функції на проміжку*, відомих учням з курсу алгебри основної школи. Розглянемо таку задачу.

Приклад 1. На рисунку 2 представлена зміна тиску крові вздовж судинного русла. Як залежить тиск крові від товщини ділянки судинної системи? На якій ділянці тиск найбільший, а на якій найменший?

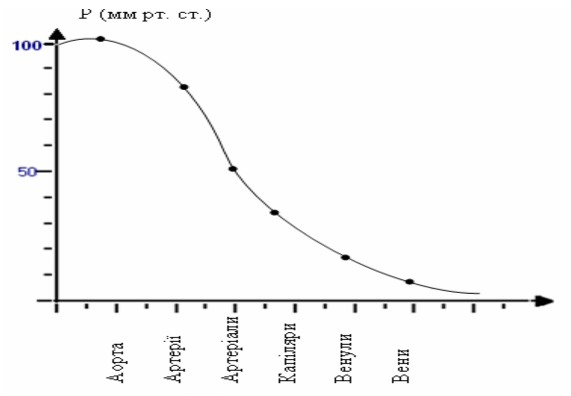

Рис. 2

Аналізуючи цей графік, учні зможуть пригадати поняття спадної функції на проміжку та алгоритм дослідження функції на монотонність.

Розгляд практичних проблемних ситуацій буде корисним і під час вивчення *ознак зростання і спадання функцій*. Застосуємо похідну до дослідження на монотонність функції, яка є математичною моделлю такої прикладної задачі.

Приклад 2. Розмір популяції бактерій в момент часу t (в годинах) задається формулою $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$. Протягом якого часу популяція зростає? Починаючи з якого моменту часу її чисельність почне зменшуватися?

Розв'язання. Знайшовши похідну функції $p(t)$ і розв'язавши нерівність $10^4-2\cdot10^3t>0$, на основі ознаки зростання функції на проміжку робимо висновок про те, що протягом п'яти годин чисельність популяції буде збільшуватися. А оскільки $p'(t)<0$ при $t>5$, то на основі ознаки спадання функції стверджують, що після п'ятої години чисельність популяції почне зменшуватися.

Відповідь. протягом 5 годин чисельність популяції буде збільшуватись, а після 5-ї години чисельність популяції почне зменшуватися.

Наступні задачі пропонуємо для самостійного розв'язування.

А

1. Попит на деякий товар визначається функцією $x=\dfrac{a}{p}-b$, де x – попит, p – ціна, a, b – деякі додатні сталі. Вивчіть поведінку виручки в залежності від попиту продукції і в залежності від ціни.

Відповідь. Зі зростанням ціни виручка зменшується (в даній моделі), а зі зростанням попиту виручка зростає.

2. Деяка епідемія поширюється за законом $p(t) = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, де $t \in [0;15]$, $p(t)$ – відсоток тих, що захворіли протягом t діб, від загального числа мешканців. Протягом скількох діб відсоток тих, що захворіли, буде зростати, а протягом скількох діб буде спадати? Протягом скількох діб швидкість зміни відсотку тих, що захворіли, буде збільшуватися, а протягом скількох діб буде зменшуватися?

Відповідь. Відсоток тих, що захворіли буде збільшуватися протягом перших 10 діб, з 10-ї до 15-ї доби відсоток тих, що захворіли буде зменшуватися. Швидкість зміни відсотку тих, що захворіли буде збільшуватися протягом перших 5 діб, а потім буде зменшуватись.

Застосування похідної до дослідження на екстремум функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі.

Під час введення понять *екстремальні точки* (точки максимуму і мінімуму функції) та *екстремуми функції* (максимум і мінімум функції) доцільно розглянути приклади наведеного нижче типу, наочність яких допоможе учням зрозуміти та засвоїти означення названих понять.

Приклад 3. 1) Проаналізуйте графік залежності густини ρ води (в *г/см*^{3}) від температури t (в ℃) (рис. 3). При якому значенні температури вода має найбільшу густину? Чому дорівнює найбільше значення густини води?

2) Проаналізуйте графік залежності витрат палива y судном на *1 км* шляху від швидкості судна v (в *км/год*) (рис. 4). Яка най економніша швидкість судна? Скільки палива буде витрачати судно на *1 км* шляху при такій швидкості?

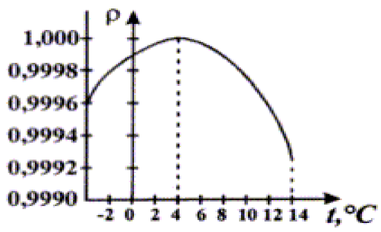

Рис. 3

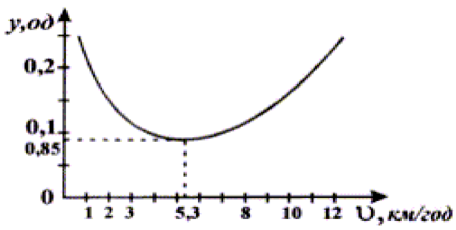

Рис. 4

Використовуючи рисунки 3, 4 легко показати учням існування інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який міститься в області визначення функції $y = f(x)$, для всіх x з якого, відмінних від x_0, виконується одна з нерівностей $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0)$.

Після того, як учні усвідомлять останнє, слід ввести означення точок екстремумів та екстремумів функцій.

Означення 1. Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою максимуму*** цієї функції цієї функції, якщо знайдеться $\delta - окіл$ $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ [10, с.54].

Означення 2. Значення функції в точці максимуму називають ***максимумом функції.***

Аналогічні означення даються для *точки мінімуму* і для *мінімуму функції.*

Зміст розглянутих прикладів може бути дещо іншим, його слід обирати залежно від профілю класу в якому вивчається дана тема. Ці приклади мають ілюстративний характер і відносяться до завдань *першого рівня складності (А).*

Пропонуємо один з них для *самостійного опрацювання.*

3. На рисунку 5 представлений графік величини $r = r(t) = t\,e^{-t^2}$ (відповідних одиниць), якою задається реакція організму на певну дозу ліків через t годин після їх введення. Через скільки годин після вживання ліків реакція найбільша? Чому дорівнює найбільше значення величини реакції?

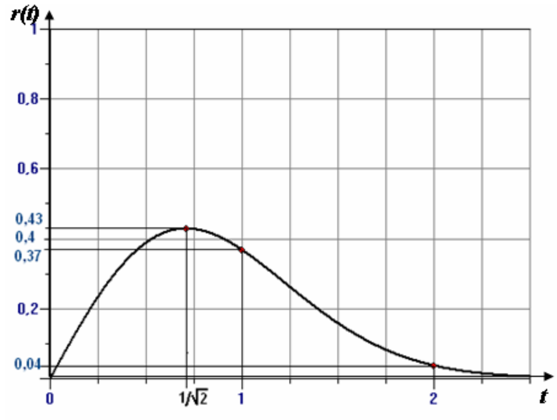

Рис. 5

Основні теореми змістової лінії курсу "Похідна та її застосування", які використовуються в практичних розрахунках, представлені *необхідною і достатньою умовами існування екстремумів функцій.* Тому прикладні задачі, складені на основі даних теорем, застосовуються для повторення або закріплення знань і формування вмінь використовувати ці теореми в нових умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі.

Розглянемо задачі природничого змісту, в яких похідна застосовується з метою *дослідження функції на екстремум*.

Приклад 4. Реакція організму на введені ліки може виражатися у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу чи інших фізіологічних показників. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків, а ступінь реакції у визначається функцією $y=f(x)=x^2(a–x)$, де a – деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

Сформульована задача є прикладом задачі природничого змісту, математична модель якої міститься в умові. Задачі такого типу відносяться до задач *другого рівня складності (Б).* Її можна розглянути на етапі актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед вивченням достатньої умови існування екстремуму в точці.

Після того, як учні будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, корисно розглянути з ними розв’язання цієї задачі та запропонувати для самостійного розв’язування декілька подібних задач.

Розв’язання. Знайшовши похідну функції, яка є математичною моделлю даної задачі і розв’язавши рівняння $2ax - 3x^2 = 0$, з’ясуємо, що дана функція має єдину критичну точку $x_0 = \dfrac{2a}{3}$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з ”+” на ”-”, то на основі *достатньої умови існування екстремуму в точці,* робимо висновок, що точка $x_0 = \dfrac{2a}{3}$ є точкою максимуму функції y.

Відповідь. реакція максимальна при $x = \dfrac{2a}{3}$.

Дану задачу можна розглянути і під час засвоєння *другого правила дослідження функції на екстремум,* передбаченого програмами профільного [8] та поглибленого рівнів [9].

Оскільки значення другої похідної функції $y = f(x) = x^2(a - x)$ в точці $x_0 = \dfrac{2a}{3}$ від’ємне: $y``\left(\dfrac{2a}{3}\right) = -2a$, то на основі *достатньої ознаки екстремуму функції* (в термінах другої похідної) можна стверджувати, що точка x_0 є точкою максимуму функції y.

Пропонуємо декілька задач для самостійного опрацювання.

4. Швидкість зростання y популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0{,}001\,x(100 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкість зростання дорівнює нулю?

Відповідь. 50 особин, 100 особин.

5. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено в годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2 = t^2 e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Відповідь. $r_1(1) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$, $r_2(2) = \dfrac{4}{e^2} \approx 0{,}54$. У другого виду ліків максимальна реакція вища, але вони діють повільніше

6. Залежність коефіцієнта корисної дії гідравлічного насоса від його продуктивності (витрат) G (*м*^{3}/*с*) виражається формулою $\eta = \dfrac{11}{9} - \dfrac{1}{3\sqrt{G}} - \dfrac{\sqrt{G}}{9}$. Яким буде максимальний ККД насоса і при яких витратах G він досягається?

Відповідь. $\max \eta = \eta(3) = 84\%$.

7. Підприємство виробляє протягом інтервалу часу задану величину x певних об'єктів (речей). При цьому воно повинно платити податок $C(x)=x^2-20x+400$ (*грн*). Середні єдині загальноприйняті податки $C_m = \dfrac{C(x)}{x}$. Скільки об'єктів повинно виробляти підприємство, щоб платити мінімальний середній єдиний податок?

Відповідь. 20 об’єктів.

8. На основі статистичних досліджень фірма встановила функцію прибутку від ціни p за одиницю продукції: $f(p) = -50p^2 + 500p$. Визначте граничний прибуток фірми залежно від ціни p. При якому значенні ціни граничний прибуток буде максимальним? При якому значенні ціни фірма зазнає збитків?

Вказівка. Граничний прибуток є похідною від функції прибутку.

Відповідь. Граничний прибуток при збільшенні ціни до 5 тис. грн. зростатиме, при ціні на одиницю продукції 5 тис. грн. буде максимальним. Якщо ціна на одиницю продукції буде більшою за 5 тис. грн., то фірма зазнає збитків.

Сформульовані задачі можна віднести до *найпростіших задач на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції*.

Це можна зробити оскільки *цільова функція,* яка є математичною моделлю запропонованих задач, визначена і неперервна на деякому проміжку P, скінченному чи нескінченному, має тільки один (мінімум) максимум. Отже він і є найменшим (найбільшим) значенням даної функції. Включення їх у процес навчання допоможе підготувати учнів до розв'язування більш складних задач даного типу.

Більш складними є задачі, розв’зування яких передбачає *побудову математичної моделі.* Побудова математичних моделей потребує певних знань з дисциплін природничого циклу.

Розглянемо задачу *третього рівня складності (В).*

Приклад 5. При якій кислотності сума гідроген-іонів H^+ і гідроксид-іонів OH^- в одиниці об’єму води буде найменшою?

Розв’язання. Введемо позначення: x – концентрація гідроген-іонів H^+, y – концентрація гідроксид-іонів OH^-. Пригадаємо хімічний закон: $xy = k$, де k – стала для води (при 25ºС $k = 10^{-14}$).

Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $u = x + y = x + \frac{k}{x}$. Продиференціювавши функцію $u(x) = x + \frac{k}{x}$, знаходимо: $u'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$. $u'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{k}$. Оскільки $x > 0$, то функція має єдину критичну точку на всій області визначення. Знайшовши другу похідну $u''(x) = \frac{2k}{x^3}$ та її значення в критичній точці $u''(\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k}} > 0$, на основі достатньої умови існування екстремуму функції робимо висновок, що точка $x = \sqrt{k}$ є точкою мінімуму. Завдяки єдиності стаціонарної точки функція $u(x)$ досягає в ній найменшого значення. За згаданим законом $y = \sqrt{k}$. Отже, сума іонів води буде найменшою, якщо концентрації іонів H^+ і OH^- будуть рівні між собою, тобто при нейтральній реакції.

Відповідь. При $x = y = \sqrt{k}$ *(при нейтральній реакції).*

У даній статті ми обмежились розглядом використання прикладних задач під час навчання учнів застосування похідної до дослідження функції на монотонність та екстремум. Наступні типи прикладних задач, а саме, задачі на застосування похідної з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції та задачі на застосування похідної до дослідження функцій за загальною схемою та методика навчання учнів їх розв'язування будуть розглянуті нами у наступній статті, яка буде продовженням даної.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі навчання математики: Посібник для вчителя.- К.: Рад шк., 1989.-128с.
3. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл./ Л.М. Вивальнюк, О.І. Соколенко, Ю.В. Костарчук та ін. – К.: Рад. шк., 1991.-175 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.-331 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 2.- 272 с.
6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.6-27.
7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.28-51.
8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.52-83.
9. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.84-121.

10. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.

11. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів:Сіверянська думка,2002.-128с.

12. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.

13. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.-метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: ”Тираж”, 1997.-127с.

14. Ткач Ю.М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчально-методичний посібник / Ю.М. Ткач. – Х.: Вид-во ”Ранок”, 2011.-176с.