**ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ Т.Г. ШЕВЧЕНКА**

СТРІЛЕЦЬКА Н. М.

ДІЯЛЬНІСТЬ КИЇВСЬКОГО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА З РОЗВИТКУ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У КІНЦІ XIX – НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ

МОНОГРАФІЯ

Чернігів – 2012

УДК 373.5: 51(09)
ББК В1р.г
С 85

Науковий редактор – **Зайченко Іван Васильович,** доктор педагогічних наук, професор

Рецензенти:
Березівська Лариса Дмитрівна, доктор педагогічних наук, професор, учений секретар Інституту педагогіки НАПН України
Сидоренко Віктор Костянтинович, доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України

Стрілецька Н.М
С 85 **Діяльність Київського фізико-математичного товариства з розвитку шкільної математичної освіти у кінці XIX – на початку XX століття (1889–1919):** [текст]: [монографія] / Н.М. Стрілецька; [ред. І. В. Зайченко] – Чернігів, 2012. – 296 с.

ББК В1р.г
ISBN 978–611–507–008–4 УДК 373.5: 51(09)

У монографії проаналізовано багатогранну діяльність Київського фізико-математичного товариства, яке існувало при університеті Св. Володимира впродовж 1889–1919 рр.; розкрито внесок найвидатніших його учасників: В. Єрмакова, К. Щербини, П. Долгушина, Г. Флоринського, Е. Шпачинського, К. Лебединцева, М. Оглобліна, М. Володкевича та ін. у розвиток шкільної математики у кінці XIX – на початку XX століття.

Монографія адресована викладачам середніх і вищих навчальних закладів, учням старших класів і студентам, працівникам освіти, всім, хто цікавиться історією і методикою математики.

Рекомендовано до друку Вченою радою Чернігівського національного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка (*Протокол №3 від 31 жовтня 2012 р.)*

ISBN 978–611–507–008–4

ЗМІСТ

Технічний редактор ***О. Клімова***

Комп'ютерна верстка
та макетування ***О. Клімова***

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 17500-6250 ПР від 16.11.2010 р.

Підписано до друку 14.06.12 р. Формат 60 x 90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 19,19. Обл.-вид. 17,59.
Наклад 350 прим. Зам. № 619.
Редакційно-видавничий відділ ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка.
14013, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
Тел. 65-17-99.
chnpu.tipograf@gmail.com

математики с культурой украинского народа. По вопросам содержания школьной математики, предлагались: методические разработки по усовершенствованию изложения конкретного традиционного материала в святи с повышением научности изложения, по изучению теории в два этапа (выделение пропедевтического курса), новая методология изложения теории (в курсах арифметики, алгебры, геометрии); обоснование необходимости применения способов рационализации решения задач, освобождение от схоластики; реализация принципа наглядности при изучении чисел (геометрическая интерпретация) в школьном курсе алгебры. Предложены и разработанные теории – как дополнения к содержанию традиционного курса (неэвклидовая геометрия, расширение смысла действий над именованными числами, приближенные вычисления), материал для углубленного изучения математики. В исследовании сделано актуализацию педагогических идей участников Общества: В. Ермакова, Э. Шпачинского, К. Щербины, К. Лебединцева. П. Долгушина, Г. Флоринского, М. Володкевича, М. Оглоблина в контексте модернизации современного школьного математического образования.

Streletska N.M. The activity of the Kyiv Physical and Mathematical Society in the development of the school mathematics education in the late XIX – early XX century. – Manuscript.

In the monograph the activity of the Physical and Mathematical Society that functioned at the Kyiv University of St. Volodymyr during 1889-1919 is considered; conditionally VI periods of the Society's activity were selected and the main areas of its work were; it was theoretically summed up the experience of the pedagogical area of the activity of the Kyiv Physical and Mathematical Society by the example of the improving of the school mathematics education; the importance of the Society members contribution to the development of the school mathematics in the late XIX – early XX century were considered (analysis of program projects in mathematics; analysis of mathematics schoolbooks; project development of the program in the mathematics for male gymnasiums; the argumentation of purpose and methods of mathematics teaching; the updating of the learning content with new ideas and theories; the argumentation of means of education aims and personality development during mathematics learning); the updating of pedagogical ideas and methods and mathematics heritage of the members of the Kyiv Physical and Mathematical Society was made: V. Yermakov, K. Shcherbyna, P. Dolgushyn, G. Florynskyi, K. Lebedyntsev, M. Ogloblin, M. Volodkevych and others in the context of the modernization of the modern school mathematics education.

ПЕРЕДМОВА

Соціально-економічні перетворення, які відбуваються в сучасному суспільстві, ставлять перед педагогічною теорією і практикою нові проблеми щодо підвищення якості математичної освіти та удосконалення її цільового й змістово-процесуального компонентів. На цьому наголошується в основних законодавчих і нормативних документах, які забезпечують реформування системи освіти в Україні на сучасному етапі, – Законі України "Про освіту" (1996), "Національній доктрині розвитку освіти" (2002), Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) (2001), Концепції профільного навчання у старшій школі (2009). Концептуальні положення, розроблені в них, визначають навчання математики передусім як цілеспрямований, особистісно орієнтований процес інтелектуального розвитку учнів, формування в них уявлення про сутність математичного знання, ознайомлення з ідеями та методами математики, її роллю у пізнанні і перетворенні дійсності, формування практичної, життєвої та соціально-ціннісних компетентностей.

Необхідною умовою ефективного розв’язання поставлених завдань модернізації шкільної математичної освіти є глибоке вивчення й осмислення вітчизняної педагогічної спадщини кінця XIX – початку XX століття з метою виявлення особливостей попереднього досвіду розробки особистісно орієнтованого навчання шкільної математики, підвищення її наукового, загальноосвітнього, загальнокультурного рівнів. У зазначеному контексті вивчення педагогічного доробку Київського фізико-математичного товариства кінця XIX – початку XX століття є актуальним, оскільки діяльність Товариства сприяла розвитку та якості шкільної математичної освіти того часу. Узагальнення й актуалізація педагогічних ідей Товариства у сучасних умовах створить можливість їх врахування при розробці нових підходів до удосконалення математичної підготовки учнів.

Хронологічні межі монографії охоплюють період з 1889 по 1919 рр. Нижня межа пов’язана із заснуванням фізико-математичного товариства при Імператорському Університеті імені Св. Володимира.

Верхня межа дослідження визначається новим станом розвитку освіти і науки у Радянській Україні, коли відбувалась докорінна реорганізація та ліквідація багатьох вищих навчальних закладів та громадсько-наукових об’єднань. Цим же роком датується остання знайдена дослідником згадка про існування Київського фізико-математичного товариства.

Узагальнення і систематизація наукового доробку з проблеми дослідження дали змогу виокремити головні періоди історіографії означеного питання: період існування Товариства (1889 – 1919 рр.); радянський (1920 – 1990 рр.) та пострадянський (включає добу незалежності України).

Встановлено, що для першого періоду характерні праці відомих на той час педагогів-математиків – огляди, критичні статті, замітки, в яких оцінювались аспекти як спільних, так і окремих робіт членів Київського фізико-математичного товариства.

Так, приват-доцент Харківського університету С. Н. Бернштейн на сторінках "Педагогічного збірника" [31] схвально

Стрелецкая Наталия Михайловна. Деятельность Киевского физико-математического общества по развитию школьного математического образования в конце XIX – начале XX столетия. – Рукопись.

В монографии установлено, что на учреждение Общества и его деятельность существенное влияние оказали социально-экономические, организационно-научные и образовательные факторы.

Киевское физико-математическое общество создано в 1889 году на базе математической секции Общества исследователей природы, которое действовало в то время при университете Св. Владимира. Одной из задач Общества было способствование улучшению преподавания физики и математики в средней школе. Выделены шесть периодов деятельности Киевского физико-математического общества: "Начало деятельности (1889-1890 гг.)"; "Активизация культурно-просветительской и благотворительной деятельности (1891-1901 гг.)"; "Активизация исследований, направленных на реформирование школьного математического образования (1902-1908 гг.)"; "Активизация научно-исследовательской деятельности на основании государственной поддержки (1909-1913 гг.)"; "Активизация общественной деятельности Общества (1914-1916 гг.)"; "Период упадка деятельности Общества (1917-1919 гг.)", а также основные направления его работы: научно-исследовательское, педагогическое, просветительское, благотворительное, общественно-активное.

Теоретически обобщен опыт педагогического направления деятельности Киевского физико-математического общества на примере решения различных проблем школьного математического образования. Раскрыт вклад в развитие школьной математики в конце XIX – в начале XX столетия. Так, продвижению передовых методических идей в среднюю школу (идеи функциональной зависимости, аналитической геометрии, введение дифференциального и интегрального исчисления, идеи развития понятия о числе, пропедевтического курса геометрии, приближенных вычислений) способствовали обсуждение и анализ на заседаниях Общества различных проектов программ и учебников по математике; разработка проекта программы по математике для мужских гимназий и, в соответствии с ней, создание учебников и пособий по арифметике, алгебре, геометрии. Как показано в исследовании, новизной для того времени было обоснование цели обучения математики, сформулированное К. Щербиной, соединяющее обучающую, развивающую и воспитательную задачи. Соответствие основного метода обучения ступени обучения математики было предусмотрено еще в проекте созданной обществом программе по математике для мужских гимназий (1907), немного позже они обоснованы К. Лебединцевым как конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный методы. Надлежащее внимание уделяло Общество проблемам реализации задач обучения математики. Членами Общества были предложены средства, методы и приемы развития мышления и памяти учащихся, раскрыта связь обучения математики и общего развития личности, определены пути воспитания эстетических чувств, взаимопомощи и товарищества, указана важность связи

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МОНОГРАФІЯ

СТРІЛЕЦЬКА
Наталія Михайлівна

ДІЯЛЬНІСТЬ КИЇВСЬКОГО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА З РОЗВИТКУ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У КІНЦІ XIX – НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ (1889–1919)

Стрілецька Н.М
С 85 **Діяльність Київського фізико-математичного товариства з розвитку шкільної математичної освіти у кінці XIX – на початку XX століття (1889–1919):** [текст]: [монографія] / Н.М. Стрілецька; [ред. І. В. Зайченко] – Чернігів, 2012. – 297 с.

ББК В1р.г
ISBN 978–611–507–008–4 УДК 373.5: 51(09)

У монографії проаналізовано багатогранну діяльність Київського фізико-математичного товариства, яке існувало при університеті Св. Володимира впродовж 1889–1919 рр.; розкрито внесок найвидатніших його учасників: В. Єрмакова, К. Щербини, П. Долгушина, Г. Флоринського, Е. Шпачинського, К. Лебединцева, М. Оглобліна, М. Володкевича та ін. у розвиток шкільної математики у кінці XIX – на початку XX століття.

Монографія адресована викладачам середніх і вищих навчальних закладів, учням старших класів і студентам, працівникам освіти, всім, хто цікавиться історією і методикою математики.

відгукнувся на видану К. М. Щербиною працю "Математика в русской средней школе" (1908). Він зробив коротку характеристику роботи та вказав на цінність її для обговорення та проведення реформи середньої математичної освіти. Вчений у працях "Проект учебного плана для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом" [32] та "Об изменении программ по математике" [33] проаналізував розроблений Київським фізико-математичним товариством проект плану з математики для чоловічих гімназій – "Київський проект" (1907) і звернув увагу на деякі недоліки розробленого Товариством плану. На його думку, у плані недостатньо пов'язані нововведення з тим, що залишилось від традиційного матеріалу, через це будова курсів математичних дисциплін мала "мозаїчний характер". Небажаним було віднесення систематичного вивчення основ аналітичної геометрії до 8 класу, оскільки "цим пізнім вивченням зовсім зводиться до нуля практичне значення аналітичної геометрії при розв'язуванні задач" [32, с. 245]. Аналітична геометрія, на його думку, мала б обмежуватись теоріями прямої і кола. Вчений пропонував замість стереометрії в шостому класі вивчати основи тригонометрії і аналітичної геометрії, а курс стереометрії віднести до сьомого класу. Це дало б можливість "замінити недостатньо строгу в науковому відношенні теорію вимірювання об'ємів і поверхонь шкільного курсу теорією, яка є безпосереднім застосуванням інтегрального числення" [32, с. 246]. С. Бернштейн мав інші погляди і стосовно будови курсу математики випускного класу. В останньому класі в учнів мало б сформуватись уявлення про зміст, методи (в загальних рисах), задачі і застосування математики у важливих галузях людської діяльності. Завдання курсу математики випускного класу – популяризація математики та сприяння орієнтуванню учнів у виборі майбутньої професії.

У цілому ж робота Київського фізико-математичного товариства оцінювалась С. Н. Бернштейном як така, що "йде на зустріч потребам часу і дає в повній мірі задовільну основу для детального обговорення плану викладання математики в середній школі" [32, с. 248].

У посібнику Ф. Мрочека і В. Філіповича "Педагогика математики" [164, с. 296] зроблена замітка про те, що "Київський проект" один з небагатьох проектів програми з математики у Російській імперії, у якому в основу побудови курсу арифметики й алгебри покладено ідею функціональної залежності.

М. Нечаєвим у праці "О начальном преподавании алгебры" [174] була проаналізована доповідь В. П. Єрмакова "О начальном преподавании алгебры", зачитана на засіданнях Київського фізико-математичного товариства" (надрукована у журналі "Вестник опытной физики и элементарной математики", №102). Педагог обґрунтував власні розходження з поглядами вченого-математика щодо використання дужок в арифметиці; необхідності ознайомлення з різними методами розв'язування задач, що неодмінно приводять дітей до думки про застосування умінь тотожно перетворювати вирази (як основного завдання алгебри за В. Єрмаковим) і, таким чином, знаходити раціональний спосіб розв'язування задач. Натомість М. Нечаєв пропонує розглядати загальний метод розв'язування однорідних задач, що пояснює доцільність буквених узагальнень в алгебрі. Теорію введення від'ємних чисел, запропоновану В. Єрмаковим, педагог аналізує разом з підручниками з алгебри М. Шапошнікова й Дмитрієва та робить висновок, що лише В. Єрмакову вдалося пояснити введення цих чисел раціонально, останні автори роблять це штучно [174, с.22]. М. Нечаєв пропонує ввести до програми алгебри пропедевтику розв'язування рівнянь, оскільки основне завдання алгебри, на його думку, є оволодіння алгебраїчним методом розв'язування задач – методом складання рівняння.

Певне уявлення про внесок М. Володкевича у роботу Товариства з розвитку шкільної математики дає рецензія на його книгу "К вопросу о реформе преподавания математики", зроблена автором за підписом Р. Г. на сторінках журналу "Вестник воспитания" [241]. Книга висвітлює питання, що обговорювались на засіданні товариства у доповіді "Обоснование пропедевтического курса геометрии" (1909). Р. Г. подає коротку характеристику роботи та висловлює побажання, щоб особливості побудови пропедевтичного курсу геометрії,

317.ф.16. "Київський університет, м. Київ"
оп. 469.
Спр. 508. Отчёт о деятельности физико-математического общества при университете Св. Владимира за 1916 г., 1917 р., 8 арк.
318. ф.16. "Київський університет, м. Київ"
оп. 334.
Спр. 73. Отчёт о деятельности физико-математического общества при университете Св. Владимира за 1905 г., 1906 р., 10 арк.

Інститут рукопису Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського

319. Ф.VIII. Київський університет Св. Володимира
Спр. 3286. Отчёт о деятельности физико-математического общества при университете Св. Владимира за 1917-1918 гг., 1918 р., 12 арк.

Державний архів Чернігівської області

320. ф. 804 – Droздівське вище початкове училище,
оп. 1.
Спр. 3. Протоколы педсоветов 1912-1913 гг., 1913 р., 94 арк.

Педагогічний музей України

321. Ж.К.У.В. Наглядная геометрия III Кл. 1909-1910.

АРХІВНІ ДЖЕРЕЛА

Центральний державний історичний архів України, м. Київ

311. ф. 707. "Управління Київського навчального округу"
оп. 158.
Спр. 106. Дело о результатах наблюдения проф. Киевского университета Демченко, Ясницкого и Букреева за состоянием преподавания законоведения и математики в реальных училищах и мужских гимназиях, 1907 р., арк. 15-16 зв.
312. ф. 707. "Управління Київського навчального округу"
оп. 35.
Спр. 52. Переписка с проф. Киевского университета М. Авенариусом о результатах осмотра им Белоцерковской гимназии, 1869, арк. 1-3.
313. ф. 707. "Управління Київського навчального округу"
оп. 195.
Спр. 12.Об исходотайствовании Физико-математического общества субсидии в сумне 500 руб., 1909 р., арк. 3-4.

Державний архів міста Києва

314. ф.16. "Київський університет, м. Київ"
оп. 479.
Спр. 183. Дело совета университета о регистрации учёных обществ, 1919 р., арк. 8-13.
415. ф.16. "Київський університет, м. Київ"
оп. 328.
Спр. 119. Об учреждении в Университете физико-математического общества, 1889 р., 21 арк.
316.ф.16. "Київський університет, м. Київ"
оп. 465.
Спр. 386. Отчёт о деятельности физико-математического общества при университете Св. Владимира за 1913 г., 1914 р., 6 арк.

розроблені педагогом, скоріше реалізувались у навчальній літературі.

Аналіз статей та підручників учасників Товариства, що пов'язані з доповідями, зробленими на його засіданнях, знаходимо у журналі "Вестник опытной физики и элементарной математики". Так, замітка В. Солертинського [257] містила аналіз статті Ф. Мацона "Именованные величины". В ній автор відстоює традиційний погляд на викладання іменованих чисел у курсі арифметики загальноосвітньої школи і не погоджується з поясненням Ф. Мацона про можливість іменованого множника та ділення різнорідних іменованих чисел.

К. Щербиною був зроблений аналіз підручника П. Матковського "Основы алгебры" [307], де втілені ідеї, розглянуті у доповіді цього ж автора "Выделение некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе" (1890). Педагог рекомендував ознайомитись з цією книгою не тільки учням, що бажають ґрунтовно вивчати вищу математику, а й викладачам, особливо початківцям.

Варто зазначити, що К. Щербиною у праці "Математика в русской средней школе" [306] вперше дається огляд роботи Київського фізико-математичного товариства з реформування математичної освіти за період 1903-1907 рр., а також обґрунтовуються нововведення та зміни, які пропонувались Товариством у проекті плану з математики для чоловічих гімназій (1907).

Короткий огляд доповідей, зроблених на засіданнях Київського фізико-математичного товариства секретарем товариства М. В. Оглобліним, – вчителем математики Олександрівської київської гімназії за 1912-1913 рр. з векторіального аналізу, механіки, теорії площ, викладено у ювілейному збірнику цього закладу [137, с. 278-279].

Отже, обсяг літератури першого періоду з теми дослідження незначний і має переважно джерелознавчий характер. Інтереси дослідників спрямовані лише до деяких праць учасників Товариства, що висвітлюють ідеї удосконалення змісту шкільної математики на нових концептуальних засадах. Вперше діяльність Товариства подається і в історико-педагогічному аспекті, проте для невеликого періоду і з окремого напряму. Узагальнюючої ж праці не було.

Вивчення історіографії радянських часів з теми дослідження показало, що науковці торкалися найбільш відомих робіт учасників Товариства, що мали помітний вплив на розвиток методики математики в радянській школі.

Чільне місце діяльність Київського фізико-математичного товариства знайшла у книзі О. В. Ланкова "До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики" (1953) [132]. Автор повідомляє деякі факти заснування Товариства, характеризує його склад, а також дає короткий аналіз методичних ідей вчених та педагогів, а саме: В. П. Єрмакова, Д. О. Граве, К. М. Щербини, К. Ф. Лебединцева, О. М. Астряба.

У монографії Б. М. Білого "Методика викладання математики. Становлення і розвиток в УРСР" (1971 р.) [35] та його статті "Вопросы методики математики в работе Киевского физико-математического общества (1890-1917)" [28] наводяться відомості з історії заснування Київського фізико-математичного товариства (1889 р.); визначаються періоди найбільш активного обговорення питань з методики математики; подається коротка характеристика діяльності Товариства з питань реформування математичної освіти та, зокрема, доповіді К. Щербини "Обзор главнейших трудов и мнений по вопросу об улучшении программ по математике" (1907 р.). Б. М. Білий висвітлює мету навчання математики, виголошену К. Щербиною, та спосіб її досягнення – введення в курс математики середньої школи елементів вищої математики. Автор коротко аналізує проект програми з математики для гімназій, складеної Київським фізико-математичним товариством (1907 р.), описує логіку викладання систематичного курсу дробів та суть методичного підходу формування поняття множення та ділення на дріб, викладених у праці К. Щербини "О преподавании систематического курса обыкновенных дробей" (1911 р.). Б. М. Білий дає короткий аналіз і статті В. П. Єрмакова "Приближенное вычисление" (1905), більш детально зупиняючись на розв'язанні вченим задачі: "скільки у кожному з даних чисел утримати цифр, щоб результат одержався з даною точністю" [36, с.14]. Характеризуючи доповідь В. П. Єрмакова

305. Шульгина-Іщук Н. Задачник до систематичного курсу арифметики. – Ч.2: (Дроби) / Н.Шульгина-Іщук: 2-ге вид. – К. : Вид "Т-ва шк. освіти". [Друк. АТ "Петро Барський"], 1918. – 116 с.
306. Щербина К. М. Математика в русской средней школе / К. М. Щербина. – К. : Типография Императорского Университета св. Владимира, 1908. – 152 с.
307. Щербина К. Начала алгебры. Учебное пособие. П. И. Матковский (Рецензии) / К. Щербина // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 97. – С. 130–135.
308. Щербина К. М. О преподавании систематического курса обыкновенных дробей / К. М. Щербина / Университетские известия. – 1912. – № 8. – С. 1–22.
309. Щербина К. М. Примерные программы и объяснительные записки, напечатанные в "Материалах по реформе средней школы" / К. М. Щербина // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1916. – № 658. – С. 224–231.
310. Щербина К. М. Примерные программы и объяснительные записки, напечатанные в "Материалах по реформе средней школы" / К. М. Щербина // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1916. – № 659. – С. 270–284.

292. Швець В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії / В. Швець, А. Прус // Математика в школі. – 2009. – № 4. – С. 17–24.
293. Шевельова О. Ретроспективний аналіз проблеми вивчення теорії та практики наближених обчислень / О.Шевельова // Математика в школі. – 2007. – № 8. – С. 28 – 32.
294. Шевченко В. Є. До питання про вивчення аксіоматичного методу, загальних питань аксіоматики та геометрії Лобачевського / В. Є. Шевченко // Методика викладання математики. – К. : Радянська школа, 1969. – Вип. 5. – С. 81–89.
295. Шевченко В. Є. Про вивчення геометрії Лобачевського в школі / В. Є. Шевченко // Методика викладання математики.– К. :Радянська школа, 1971. – Вип. 7. – С. 92–99.
296. Шкиль Н. И. К 75-летию "Наглядной геометри" А. М. Астряба / Н. И. Шкиль, Н. П. Дичек // Математика в школе., 1984. – № 4. – С. 74–76.
297. Шиманський І. Є. Іменовані числа в систематичному курсі арифметики / І. Є. Шиманський // Нариси з методики викладання арифметики / [за ред. проф. О. М.Астряба]. – Київ: Радянська школа, 1950. – С. 52–69.
298. Шпачинский Э. К. Отчёты о заседаниях ученых обществ / Э. К. Шпачинский. – 1890. – № 98. – С. 11.
299. Шпачинский Э. К. Синтез и анализ в математике / Э. К. Шпачинский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1891 – № 109. – С. 2–8.
300. Шпачинский Э. К. Синтез и анализ в математике / Э. К. Шпачинский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1891 – № 110. – С. 27–34.
301. Шпачинский Э. К. Синтез и анализ в математике / Э. К. Шпачинский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1891 – № 113. – С. 81–91.
302. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П. А. Широков. – 2-е изд. – М. : Наука, 1983. – 80 с.
303. Шмигевський М. В. Видатні математики / М. В. Шмигевський. – Харків: Вид. гр. "Основа", 2004. – 176 с. – (Бібліотека журналу "Математика в школах України"; вип. 6 (18)).
304. Шоферовська Л. Про введення в курс математики основної школи задач на цінні папери / Л. Шоферовська, В. Швець // Математика в школі. – 2004. – № 4. – С. 10–13.

"Два правила приближенного вычисления" (1892-1895 рр.), автор вказує на вихідні теоретичні положення, з яких випливають правила суми та різниці, а також добутку і частки наближених значень величин. У монографії висвітлені основні ідеї праці П. Долгушина "Вычисления по приближению" (1907 р.). Б. М. Білий дає огляд ще й таких доповідей як "Неевклидова геометрия в средней школе" (1912 р.) П. Долгушина, "О преподавании геометрии" (1895 р.), "О роли памяти в математике" (1894 р.). В. Єрмакова. Автором вказуються і особливості реалізації деяких ідей Київського фізико-математичного товариства у тогочасних підручниках, зокрема ідеї розвитку поняття про число (у підручнику Д. О. Граве "Основы алгебры", 1915), ідеї функціональної залежності (у підручнику К. Ф. Лебединцева "Курс алгебры для средних учебных заведений" ч. I-II, 1909-1910).

П. Ф. Данилюк в дисертаційному дослідженні "Перший на Україні методико-математичний журнал та його роль у боротьбі за покращення математичної підготовки учнів" (1971 р.) [72] послідовно розкриває такі питання: боротьба журналів "Журнала элементарной математики" (1884-1886 рр.) та "Вестника опытной физики и элементарной математики" (1886 – 1917 рр.) за удосконалення усних, письмових і, зокрема, наближених обчислень; наближення курсу геометрії до життєвої практики; популяризація елементів вищої математики; пропагування ідей реформи шкільної математичної освіти. У зв'язку із поставленими завданнями, проаналізовані і доповіді членів Товариства, що були опубліковані на сторінках вказаних журналів.

У збірнику "Київські математики-педагоги" за редакцією А. М. Боголюбова [110] висвітлюється життєвий шлях, науково-педагогічна діяльність та методичні концепції робіт педагогів, у тому числі і учасників Київського фізико-математичного товариства, а саме: В. П. Єрмакова (стаття Л. Граціанської), П. О. Долгушина (стаття Л. Граціанської), Д. О. Граве (стаття В. Добровольського), К. Ф. Лебединцева (стаття Є. Лебединцевої, К. Рупасова), К. М. Щербини (стаття Н. Бетіної), А. М. Астряба (стаття Б. Білого, Г. Олійника) й ін.

Педагогічна спадщина О. М. Астряба з проблем удосконалення змісту й організації шкільної математичної освіти досліджена у дисертації Н. П. Дічек "Проблемы школьного математического образования в педагогическом наследии А. М. Астряба" (1985) [75]. Зокрема, висвітлюється життєвий і творчий шлях педагога, досліджуються розроблені ним питання методики навчання геометрії, арифметики, проведений аналіз підручників та методичних посібників О. М. Астряба.

У дисертації І. В. Зайченка "Развитие педагогической мысли в прогрессивной педагогике Украины второй половины XIX столетия" (1988 р.) [101] проводиться аналіз періодичних видань "Школьное обозрение", "Педагогический сборник", "Основа", "Киевский телеграф", а також "Журнал элементарной математики", "Вестник опытной физики и элементарной математики", розкривається їх роль в поширенні прогресивних думок щодо визначення мети, завдань, змісту, методів навчання і виховання, починаючи від початкової школи і закінчуючи курсами гімназій та реальних училищ.

Ювілейний нарис та праця з історії математики "Історія Київського Університету" [105], "Математика в Киевском университете. Киевское физико-математическое общество" [147] містять огляд наукової діяльності відомих учених Київського університету та коротку характеристику їх участі у роботі Київського фізико-математичного товариства. У джерелі [147] подаються й статистичні дані: кількість років існування Товариства (28), кількість засідань (462) та кількість членів Товариства (350) за усі роки діяльності. Проте, вони не є повними, оскільки базуються лише на звітах і протоколах Товариства, надрукованих за 1890-1917 рр. Не врахованими залишились архівні документи, що містять інформацію про подальшу діяльність Товариства.

З’ясовано, що дослідження науковців радянського періоду у галузі розвитку шкільної математичної освіти та методико-математичної думки в Україні в кінці XIX – початку XX століття характеризуються висвітленням діяльності Товариства у контексті розв’язання більш широких або ж дотичних завдань, мають певне ідеологічне упередження, оскільки побудовані на марксистсько-ленінському методологічному підході. Вони є

278. Труды I-го Всероссийского Съезда Преподавателей математики. – Т. III. – С.- Петербург : Типография "Север" , 1913 – 114 с.
279. Университет Св. Владимира в царствование Императора Александра III. 1881-1994. – Киев : Типография Императорского Университета Св. Владимира. – 1884. – 35, [6] с.
280. Устав гимназий и прогимназий ведомства министерства народного просвещения // Журнал Министерства Народного Просвещения. – 1871. – № 8. – С. 42–77.
281. Устав физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира // Университетские известия. – 1890. – № 1. – С. 1–5.
282. Учебный план математики и математической географии // Журнал Министерства Народного Просвещения. – 1890. – №12. – С. 125 – 139.
283. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: [посібник для учнів серед. закладів освіти] ⁄ [за ред. М.Й. Ядренка. – 2-ге вид] / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 2003. – 591 с.
284. Флит М. Ф. Школа в России в конце XIX – начале XX вв.: [методическое пособие] / М. Ф. Флит. – Л. : Ленинградское предприятие "Экстерн", 1991. – 96 с.
285. Флоринский Г. К вопросу о нахождении сумм одинаковых степеней членов арифметической прогрессии / Г. К. Флоринский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1904 – № 371. – С. 253–257.
286. Хинчин А. Я. Понятие об отношении двух чисел / А. Я. Хинчин // Математика в школе. – 1941. – № 2. – С. 13–15.
287. Циркулярное предложение гг. попечителям учебных округов в действие устава реальных училищ // Журнал Министерства Народного Просвещения. – 1872. – № 8. – С. 184–195.
288. Чехов Н. В. Типы русской школы в их историческом развитии / Н. В. Чехов. – Москва: Издание Т-ва "Мир", 1923. – 149 с.
289. Шапошников Н. А. Краткое руководство арифметики соединённое с методикой и систематическим сборником типических задач / Н. А. Шапошников. – М.: Типография Т-ва И. Д. Сытина, 1891. – 60 с.
290. Шарко В. Арихметика: Систематичний курс – Ч.2: (Дроби) / В. Шарко. – К. : Всеукр. коопер. вид. союз. [Друк Т-ва "Час"], 1919. – 80 с.
291. Швец М. Н. О приближенных числах / М. Н. Швец. – К. : "Радянська школа", 1968. – 124 с.

269. Стукало Н. М. Реалізація О. М. Астрябом ідей Київського фізико-математичного товариства в підручнику "Наочна геометрія" (1909) / Н. М. Стукало // О. М. Астряб – засновник наукової школи з методики математики в Україні: матеріали вузівської науково-практичної конференції, присвяченої 150-річчю від дня народження відомого українського педагога і математика. (м. Чернігів, 3 вересня 2004 року) / [за ред. проф. І. В. Зайченка]. – Чернігів, 2005. – С. 18–21.
270. Стукало Н. М. Вивчення арифметичних таблиць як основа навчання початкової арифметики за "Методичним посібником" (1890 р.) Т.Г. Лубенця / Н. М. Стукало // Т.Г. Лубенець і просвітницький рух в Україні другої половини ХІХ – початку ХХ століття : матеріали вузівської науково-практичної конференції, присвяченої 150-річчю від дня народження відомого українського педагога і просвітителя. (м. Чернігів, 21 лютого 2005 року) / [за ред. проф. І. В. Зайченка]. – Чернігів, 2005. – С. 18–21.
271. Стукало Н. М. Методико-математичні погляди С. Ф. Русової (1856-1940) / Н. М. Стукало // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка : збірник. – Чернігів : ЧДПУ, 2006. – Вип. 39. – С. 160–162.
272. Стукало Н.М. Про розвиток шкільної математичної освіти на Чернігівщині в другій половині ХІХ – на початку ХХ століття / Н. М. Стукало // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г.Шевченка: збірник. – Чернігів : ЧДПУ, 2006 – Вип.42. – С. 34–41.
273. Стукало Н. Виховання культури мислення та його розвиток у процесі навчання математики (з історії Київського фізико-математичного товариства кінець ХІХ – початок ХХ ст.) / Н. Стукало // Рідна школа. – 2010. – №1–2. – С. 55–61.
274. Сухоруков В. И. Возникновение предмета методики математики и его развитие (до 1914 г.).: автореф. дис. на соиск. научн. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "методика математики" / В. И. Сухоруков.– К., 1974. – 20 С.
275. Тесленко И. Ф. О неевклидовых геометриях в средней школе / И. Ф. Тесленко // Математика в школе. – 1952. – № 4. – С. 33–40.
276. Труды I-го Всероссийского Съезда Преподавателей математики. – Т. 1. Общие собрания. – С.-Петербург: Типография "Север", 1913. – 609 с.
277. Труды I-го Всероссийского Съезда Преподавателей математики. – Т. II. Секции. – С.- Петербург : Типография "Север", 1913. – 364 с.

цінні з фактологічного погляду та порівняння під час аналізу доробку Товариства.

Третій етап (із 1991 р. по теперішній час) історіографії проблеми представлений джерельною базою вітчизняних дослідників історії педагогічної та методико-математичної думки (Л. М. Вивальнюк, М. Я. Ігнатенко, Л. Д. Березівська, Л. В. Кузьмич, С. І. Стрілець, А. В. Риженко, Г. П. Бевз, В. Г. Бевз та ін.). Дослідження їх фундаментальних праць свідчить, що вони вирізняються системністю, об'єктивізмом, багатим фактологічним матеріалом, оновленим висвітленням педагогічної та методико-математичної думки в історичному розрізі часу. Однак проблема діяльності Київського фізико-математичного товариства висвітлюється фрагментарно, в контексті досліджень методико-математичної спадщини окремих учених, діяльності просвітницьких товариств, історії розвитку математичної думки в Україні.

Так, у посібнику Л. М. Вивальнюка та М. Я. Ігнатенка "Елементи історії математики" (1996) [52] розкривається наукова діяльність професорів Київського університету П. Ромера, М. Ващенка-Захарченка, В. Єрмакова, Г. Букреєва, Д. Граве та ін., наявна коротка характеристика роботи Київського фізико-математичного товариства, особлива увага звертається на становлення алгебраїчної школи Д. Граве, зокрема окреслена тематика семінарів Д. Граве, охарактеризований методичний підхід ученого щодо формування умінь студентів з проведення наукових досліджень. Автори висвітлюють гірку правду про трагічну долю найталановитішого представника цієї школи М. Кравчука, рідкісний талант якого "навіки замуровано в застінках радянських концтаборів" [52, с.178].

У монографії Л. Д. Березівської "Освітньо-виховна діяльність київських просвітницьких товариств (друга половина ХІХ – початок ХХ ст.)" (1999) [29] проаналізовано, систематизовано і узагальнено напрями, зміст і форми освітньо-виховної діяльності київських просвітницьких товариств другої половини ХІХ – початку ХХ ст.

Так, громадські об'єднання, що створювались у Російській імперії у другій половині ХІХ – на початку ХХ століття, відносно провідного напряму їх діяльності умовно поділені Л. Д. Березівською на три основні типи.

– Науково-просвітницькі, що сприяли розвитку освіти у цілому або певних її видів.

– Науково-педагогічні, що розробляли питання теорії і шкільної практики та популяризували свої досягнення у галузі педагогіки.

– Професійні учительські організації, що сприяли розв'язанню правових, професійних, моральних та матеріальних проблем учителів, а також підвищенню їх професійної підготовки.

Автором охарактеризовано просвітницький напрям діяльності наукових товариств: Київського товариства природодослідників (1869), Київського фізико-математичного товариства (1889), Київського юридичного товариства (1877), Археологічного товариства (1872) – при Київській духовній семінарії, Товариства любителів соціальних знань (1910) – при Київському комерційному інституті та ін. Він виражався у відкритті лекторіїв, виданні науково-популярної літератури, а також звітів і протоколів засідань, доповідей, що обговорювались на засіданнях, розширенні зв'язків з іншими організаціями, науковцями, науковими товариствами, громадськими діячами, організації з'їздів, експедицій тощо.

Одним із завдань у дисертації Л. В. Кузьмич "Розвиток математики та методики її навчання в південному регіоні України (кінець XIX – початку XX ст.)" (1998) [128] є розкриття значення діяльності журналів "Журнала элементарной математики" і "Вестника опытной физики и элементарной математики" у висвітленні питань загально дидактичного й методико-математичного змісту та ін., а тому проаналізовано статті, які обговорювались і на засіданнях Київського фізико-математичного товариства авторів В. Єрмакова, К. Щербини, П. Долгушина (які уже згадувались). Крім цього дається характеристика структури та розглядається основна суть проблеми доповідей П. Матковського "Выделение некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе" (1890 р.), Д. Єфремова "Общее решение в целых числах неопределенных

---

258. Сорокин Н. А. О сумме цифр при различных системах счисления / Н. А. Сорокин // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 105. – С. 161–169.
259. Степанов С. Л. Обозрение проектов реформы в средней школы в России. (1899 – 1905 гг) / С. Л. Степанов // Журнал Министерства Народного Просвещения. – 1907. – №1. – С. 34 – 82.
260. Стрілець С. І. Розробка К. Лебединцевим програм з математики. / С. І. Стрілець // Математика в школі. – 2002. – № 6. – С. 48 – 51.
261. Стрілець С. І. Педагогічна спадщина К. Ф. Лебединцева (1878-1925): [монографія] / С. І. Стрілець. – Чернігівський педагогічний університет, 2004. – 196 с.
262. Стукало Н. М. Основні напрямки діяльності Київського фізико-математичного товариства з проблем шкільної математичної освіти (1890-1917 рр.) / Н.М.Стукало // Наукові записки Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова: збірник наукових праць. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. – Вип. 59.– С.126–134.
263. Стукало Н. М. Діяльність Київського фізико-математичного товариства з реформування шкільної математики в кінці XIX- на початку XX ст. / Н.М.Стукало // Наукові записки. Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя МОН України: збірник. – 2005. – № 5. – С.165 – 169.
264. Стукало Н. М. Питання пропедевтичного курсу геометрії в діяльності Київського фізико-математичного товариства і сучасна школа / Н. М. Стукало // Математика в школі. – 2006. – № 1. – С. 51–54.
265. Стукало Н. М. Вивчення неевлідової геометрії в середній школі (за методикою П.О. Долгушина (1912 р.)) / Н. М. Стукало // Математика в школі. – 2006. – № 4. – С. 34–39.
266. Стукало Н. Микола Володкевич про формування соціальних цінностей особистості вихованця / Н.М.Стукало // Джерела. Науково-методичний вісник. – 2007. – № 3-4. – С. 4–14.
267. Стукало Н. Київське фізико-математичне товариство як науковий, педагогічний та просвітницький центр (1889-1919 рр.) / Н. Стукало // Фізика та астрономія в школі. – 2010. – № 4. – С. 46–48.
268. Стукало Н. Київське фізико-математичне товариство як науковий, педагогічний та просвітницький центр (1889-1919 рр.). Закінчення / Н. Стукало // Фізика та астрономія в школі. – 2010. – №5. – С. 40–43.

244. Родников В. Историческая записка о состоянии Киево-Подольской женской гимназии 1861-1911 / В. Родников. – К. :Б.и., 1912. – 224 с.
245. Руководство прямолинейной тригонометрии для гимназий и реальных училищ / [составил А. Малинин]. – Москва: Типография Т-ва И. Д. Сытина, 1913. – 120 с.
246. Сарана О. А. Математичні олімпіади / О. А. Сарана. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 344 с.
247. Сборник алгебраических задач. Часть вторая / [составили Н. А. Шапошников, Н. К. Вальцов]. – М. : Типография Императорского Московского Университета, 1909. – 188 с.
248. Сборник действующимх постановлений и распоряжений по женским гимназиям и прогимназиям Министерства народного просвещения с последовавшими с 1870 года изменениями и дополнениями / [составил М. Родзевич]. – СПб. : Типография д-ра М. А. Хана, 1884. – 238 с.
249. Семенов С. Народная школа и сельское хозяйство / С. Семенов // Черниговская земская неделя. – 1915. – № 41. С. 1–2.
250. Сергунова О. П. Задачі в систематичному курсі арифметики. /О. П. Сергунова, О. М. Астряб // Нариси з методики викладання арифметики / [під ред. проф. О. М. Астряба]. – Київ: Радянська школа, 1950. – С. 200–249.
251. Синцов Д. IV Международный математический конгресс в Риме 6-11 апреля / Д. Синцов // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1908. – № 460. – С. 73–81.
252. Силин А. В. Открываем неевклидову геометрию / А. В. Силин, Н. Шмакова. – М.: "Просвещение", 1988. – 126 с.
253. Лебединцев К.Ф. Учение о простейших функциях и их графиках / К.Ф. Лебединцев. – Петроград – Киев: Сотрудник, 1916. – 140 с.
254. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: [підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл] / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.
255. Соколов М. П. Остатки схоластики в современных учебниках арифметики / М. П. Соколов // Университетские известия. – 1895. – № 7. – С. 1–17.
256. Соколов М. Еще раз к вопросу об умственном развитии / М. Соколов // Вестник воспитания. –1893. – №3. – С. 33–53.
257. Солертинский В. Письмо в редакцію / В. Солертинский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 61. – С. 15.

уравнений 1-й степени" (1890 р.), К. Шпачинського "Синтез и анализ в математике" (1891 р.).

У монографії С. І. Стрілець "Педагогічна спадщина К. Ф. Лебединцева (1878-1925)" (2003)[261] аналізуються деякі із згаданих вище праць членів Товариства. Автор ознайомлює також з історією створення Київського фізико-математичного товариства, коротко зупиняючись на питаннях мети та змісту його діяльності. Більш детально охарактеризовано "Проект учебного плана по математике для мужских гимназий" (1907 р.), розробленого Товариством, робиться ґрунтовний аналіз підручників з алгебри К. Лебединцева, що певною мірою реалізували ідеї названого проекту.

У розвідці А. В. Риженка "Педагогічні ідеї науково-природничих товариств України (кінець XIX – початок XX століть)" (2003) [218] висвітлюються погляди окремих членів Київського фізико-математичного товариства та інших науково-природничих товариств України (Київського товариства дослідників природи, Товариства дослідників Волині) на зміст освіти і навчання молоді та на шляхи і методи виховання.

Коротка характеристика діяльності Київського фізико-математичного товариства, а також висвітлення методичних ідей його учасників є і у праці Г. П. Бевза "Математика в школах України" (2009)[25, с.35-36].

У монографії В. Г. Бевз "Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів"(2005) [19] висвітлюються біографічні дані та наукові інтереси учасників Товариства В. П. Єрмакова, Д. О. Граве, П. Є. Ромера, а також проаналізовані праці педагогів-математиків О. М. Астряба та К. Ф. Лебединцева, що здійснили помітний вплив на розвиток методики математики в радянській школі. Так, В. Г. Бевз звертає увагу читача на постановку К. Ф. Лебединцевим мети навчання математики (праця "Метод обучения математике в старой и новой школе", 1914), на вперше здійснену реалізацію вченим у підручнику "Руководство алгебры" (у 2 частинах 1918-1919 рр. видання) змістової лінії функціональної залежності, обґрунтування методики навчання математики як наукової системи у праці "Вступ до сучасної методики математики" (1925); класифікацію та обґрунтування К. Ф. Лебединцевим методів навчання математики. У монографії дається характеристика посібника вченого "Викладання алгебри і початків аналізу", виданого уже у наш час (1984 р.).

В. Г. Бевз, зокрема, висвітлює погляди О. М. Астряба щодо розв'язування задач на побудову та їх місце в курсі геометрії середньої школи, значення для розвитку учнів та у набутті ними навичок практичного застосування теорем та тверджень до конкретних випадків й визначенні умов існування геометричної фігури (праця "Методика розв'язування задач на побудову"). Автором подається і коротка характеристика інших робіт вченого: "Наглядная геометрия" (1909), "Задачник по наглядной геометрии (1916), "Курс дослідної геометрії в чотирьох частинах" (1923) та ін., проаналізовані проблеми загальної методики математики, серед яких реалізація завдання політехнічного навчання.

Аналіз історіографії розвитку педагогічних ідей у діяльності Київського фізико-математичного товариства свідчить про наявність достатньої кількості досліджень, що дають уявлення про мету та зміст роботи Товариства, праці з проблем шкільної методики математики його найвідоміших діячів: П. Долгушина, В. Єрмакова, К. Щербини, О. Астряба, К. Лебединцева, Д. Граве. Проте, висвітлюється не повний доробок Товариства, залишаються невідомими та маловідомими імена педагогів-математиків М. В. Оглобліна, А. Д. Білімовича, Ф. Ю. Мацона, М. М. Володкевича та ін.; потребують вивчення і узагальнення погляди на проблеми мети, завдань та методів навчання математики; невизначені періодизація та напрями діяльності Товариства.

Отже, аналіз історіографії з проблеми дослідження свідчить, що на сьогоднішній день не існує праці, що дає цілісне уявлення про систему педагогічних поглядів і характер діяльності Київського фізико-математичного товариства.

Нами виокремлено й проаналізовано чотири групи джерел, що стали підґрунтям написання монографії.

Першу групу утворюють: дослідження з історії України та історії науки [43, 182, 170, 52, 76, 60, 145, 237]; ювілейні видання з історії Київського університету [105, 147, 53, 279, 235]; звіти про стан і діяльність Київського університету [215-218];

232. Програма систематичного курсу арихметики (аритметики) і термінологія. Зложена математичною комісією Українського товариства шкільної освіти. – Київ : Б.в., 1917. – 15 с.
233. Программы восьмиклассных коммерческих училищ. Министерства торговли и промышленности. – СПб : Типография Министерства Внутренних Дел, 1914. – 252 с.
234. Проект учебного плана по математике для мужских гимназий с одним древним (латынским) языком, составленный Варшавским кружком преподавателей физики и математики // Вестник опытной физики и элементарной математики. –1908. – № 471. – С. 338–342.
235. Пятидесятилетие Императорского Университета Св.Владимира. 1834-1884. Речь произнесенная на юбилейном Акте Университета ординарным профессором М.Ф. Владимирским-Будановым. – Киев : Типография Императорского Университета Св.Владимира. – 1884. – 60 с.
236. Рабцевич В. З. Методика начальной арифметики / В. З. Рабцевич. – Чернигов : Типография губернского земства, 1899. – 142 с.
237. Развитие физики в России (очерки) – Т.1: [пособие для учителей] / [сост. А. Ф. Кононков; под.ред. А. С. Предводителева и Б. И. Спасского]. – М. : "Просвещение", 1970– 415 с.
238. Резолюции II-го Всероссийского съезда преподавателей математики // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1914 – № 603. – С. 50–51.
239. Резніченко З. О. Питання про неевклідові геометрії та аксіоматичний метод на факультативних заняттях в середній школі / З. О. Резніченко // Методика викладання математики.– К.:Радянська школа, 1970. – Вип. 6. – С. 114–121.
240. Резніченко З. О. Елементи геометрії Лобачевського в шкільному курсі математики / З. О. Резніченко // Методика викладання математики.– К.:Радянська школа, 1971. – Вип. 7. – С. 100–108.
241. Рецензія на книгу Н. Н. Володкевича "К вопросу о реформе преподавания математики" // Вестник воспитания. – 1911. – №4. – С. 42–44.
242. Рецензии // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890. – № 97. – С. 130–135.
243. Риженко А. В. Педагогічні ідеї науково-природничих товариств України (кінець XIX – початок XX століть / А. В. Риженко. – К.: Наук. світ, 2003. – 30 с.

222. Панчишина В. А. Геометрия для младших школьников: [учеб. пособие по геометри] / В. А. Панчишина, Э. Г. Гельфман, В. Н. Ксенева, Н. Б. Лобаненко.– Томск : Изд-во Том. ун-та, 1994. – 134 с.
223. Погорєлов О. В. Планіметрія: [підруч. для 7–9 кл. серед. шк. – 3-тє вид] / О. В. Погорєлов. – К. : Освіта, 1998. – 223 с.
224. Положение о кадетских корпусах.: [Електронный ресурс] // сайт: Интернет-энциклопедия "Кадеты России". – дата відкриття 23 квітня 2001 р. – Режим доступу до документу : http://www.ruscadet.ru/history/doc/1886.htm
225. Проект учебного плана по математике для мужских гимназий (Приложение) // Щербина К. М. Математика в русской средней школе. – К. : Типография Императорского Университета св. Владимира, 1908. – С. 129–144.
226. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень: [Електронний ресурс] // сайт: Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України. Офіційний веб-сайт. – Режим доступу до документу: http://www.mon.gov.ua/education/average/prog12/matem_pr.pdf
227. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту: [Електронний ресурс] // сайт: Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України. Офіційний веб-сайт. – Режим доступу до документу: http://www.mon.gov.ua/education/average/prog12/matem_st.pdf
228. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).: [Електронний ресурс] // сайт: Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України. Офіційний веб-сайт. – Режим доступу до документу : http://www.mon.gov.ua/education/ average/ prog12/matem_pogl.pdf
229. Программы, учебные планы и правила реальных училищ / [составил Горбунов]. – М.: Типография А. Г. Кольчугина, 1892 – 130 с.
230. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 кл. – К. : Шкільний світ, 2005. – 65 с.
231. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків / Підготували: Н. С. Прокопенко, Н. П. Щекань. – К. : Навчальна книга, 2003. – 301 с.

Загальний статут Імператорських Російських університетів [176, 177]; історико-педагогічні дослідження [128, 72, 144, 36, 29], архівні матеріали, що збереглися у Центральному державному історичному архіві (ф. 707) про інспекцію професорами університету викладання математики у середніх навчальних закладах; звіти професорів університету про перевірку екзаменаційних робіт випускників гімназій і реальних училищ [186-188]. На їх основі з'ясовані економічні чинники, що стимулювали розвиток науки та сприяли реформуванню освіти в Україні, охарактеризовано науково-педагогічну діяльність професорів Київського університету, обґрунтовано необхідність появи наукових об'єднань при університетах у кінці XIX – на початку XX століття. До цієї ж групи належать фундаментальні філософські й педагогічні праці того часу: О. Мусін-Пушкін "Среднеобразовательная школа в России и ее значение" [171], П. Каптерєв "Дидактические очерки. Теория образования" [108], М. Демков "Начальная народная школа, ее история, дидактика и методика" [74], І. Андрєєвський "Классическое и реальное образование" [8], П. Каторп "Философия как основа педагогики" [109], праці з історії розвитку вітчизняної освіти, а саме: Л. Березівська "Реформування шкільної освіти в Україні у XX столітті" [30], А. Лопухівська "З історії розвитку гімназій і ліцеїв в Україні" [139], С. Степанов "Обозрение проектов реформы средней школы в России (1899 – 1905) [259], М. Фліт "Школа в России в конце XIX – в начале XX вв." [284], М. Чехов "Типы русской школы в их историческом развитии" [288], Г. Кондратьєва "Школьное математическое образование в России (вторая половина XIX века)" [123], "Очерки истории профессионально-технического образования в СССР" [220] та ін., а також нормативні документи для середніх навчальних закладів того часу [4, 248, 224, 229, 233, 280, 286, 287] та ін. Вони дозволили охарактеризувати систему шкільної математичної освіти в Україні в кінці XIX – на початку XX ст., з'ясувати концепцію шкільної математичної освіти того часу, прослідкувати тенденції щодо удосконалення традиційної загальноосвітньої школи на початку XX ст.

До другої групи джерел відносяться: друкований орган Київського фізико-математичного товариства – "Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира" за 1890-1916 рр. [189-213], Статут Київського фізико-математичного товариства [281], архівні матеріали, що збереглися у Державному архіві м. Києва (ф. 16) та у Центральному державному історичному архіві у м. Києві (ф. 707), відділі рукописів ЦНБ імені В. Вернадського (ф. VIII): звіти про діяльність, справа про заснування товариства, справа про реєстрацію наукових товариств, справи про клопотання субсидії. Вони дали можливість визначити мету, зміст, основні напрями та періодизацію діяльності Товариства.

До третьої групи джерел можна віднести матеріали тогочасних періодичних видань ("Вестник опытной физики и элементарной математики", "Вестник воспитания", "Педагогический сборник", "Циркуляр по Киевскому учебному округу", "Русская школа", "Университетские известия"), ювілейні збірники загальноосвітніх навчальних закладів, праці I і II з'їздів викладачів математики (1911-1912 та 1912-1913 н.р.) – [78, 276-278, 244, 137], додатки до протоколів засідань Київського фізико-математичного товариства, методичні посібники та підручники з математики. Особливу цінність для нашого дослідження має підшивка практичних робіт з "Наочної геометрії" учениць О. Астряба (1909-1910), що працював викладачем у жіночому комерційному училищі М. Володкевича [321]. Ці джерела дозволили охарактеризувати стан розробки певного питання у шкільних підручниках з математики, проаналізувати та систематизувати доповіді з проблем шкільної математики, що робились на засіданнях Київського фізико-математичного товариства (1890-1919 рр.), а також прослідкувати розвиток виголошених на засіданнях педагогічних ідей у навчальній та методичній літературі того часу.

До четвертої групи джерел належать сучасні підручники математики, методичні посібники, науково-педагогічні статті та статті з історії математики у журналах "Математика в школі", "Методика викладання математики", "Дидактика математики", психолого-педагогічна та енциклопедично-довідкова література, за допомогою яких вдалося прослідкувати генезис педагогічних ідей членів Київського фізико-математичного товариства та з'ясувати значення педагогічних концепцій, навчально-

---

210. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1912 г. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1913. – XV, 51 с.
211. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1913 г. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1914. – 18, 134 с.
212. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1914-1915 гг. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1916. – 16, 120 с.
213. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1916 г. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1917. – XX, 109 с.
214. Отчёты о заседаниях ученых обществ // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 97. – С. 135–137.
215. Отчет Императорского Университета Св.Владимира за 1907 год. – Киев : Типография Акционерного О-ва Н. Т. Корчак-Новицкого, 1912. – 33 с.
216. Отчет о состоянии и деятельности Киевского Императорского Университета Св. Владимира за 1908 год. – Киев : Типография Акционерного О-ва Н. Т. Корчак-Новицкого, 1913. – 75 с.
217. Отчет о состоянии и деятельности Императорского Университета Св. Владимира за 1909 год. – Киев: Типография Императорского Университета Св. Владимира, Акционерного О-ва печатного и изд. Дела Н. Т. Корчак-Новицкого. – 1914. – 67 с.
218. Отчет о состоянии и деятельности Императорского Университета Св. Владимира за 1912 год. – Киев : Типография Акционерного О-ва Н. Т. Корчак-Новицкого, 1913. – 98 с.
219. Отчет о состоянии и деятельности Императорского Университета Св. Владимира в 1914 году. – Киев : Типография Императорского Университета Св. Владимира, Акционерного О-ва Н. Т. Корчак-Новицкого, 1915. – 75 с.
220. Очерки истории профессийно-технического образования в СССР / [под.ред. С. Я. Батышева]. – М.: Педагогика, 1981. – 352 с.
221. Панішева О. Прийоми запам'ятовування навчального матеріалу / О. Панішева // Математика в школі. – 2007. – № 3. – С. 24–28.

200. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1901. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1902. – 16, 123 с.
201. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1902. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1903. – 16, 148 с.
202. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1903 г. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1904. – 16, 73 с.
203. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1904 г. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1905 .– 128 с.
204. Отчёты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимира за 1906 г. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1907. – 19, 119 с.
205. Отчёт и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимир за 1907 г // Университетские известия – 1908. – №9. – С. 1–15.
206. Отчёт и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимир за 1908 г. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1909. – 17, 102 с.
207. Отчёт и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимир за 1909 г. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1910. – 16, 111 с.
208. Отчёт и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете Св. Владимир за 1910г. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1911. – X, 96 с.
209. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1911. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1912. – 20, 220 с.

методичних праць, рекомендацій для сучасного етапу реформування шкільної математичної освіти.

Монографія складається з передмови, двох розділів, висновків до них та післямови. У післямові, відповідно до розробленої нами моделі аналізу, узагальнені: виявлені умови (соціально-економічні, організаційно-наукові та освітні) становлення й діяльності Київського фізико-математичного товариства; виділені й охарактеризовані періодизація та основні напрями діяльності Київського фізико-математичного товариства (1889-1919), тенденції та особливості його роботи у кожному з періодів; проаналізована спадщина Київського фізико-математичного товариства з галузі шкільної математичної освіти; внесок Товариства у розвиток проблем мети, завдань, змісту, методів навчання шкільної математики, що розкривається у дослідженні; здійснена актуалізація педагогічних ідей Товариства у контексті модернізації сучасної шкільної математичної освіти в Україні. У додатках наведені маловідомі архівні матеріали, що стосуються теми дослідження, список праць членів Київського фізико-математичного товариства з проблем шкільної математики у хронологічному порядку за усі роки діяльності та аналіз деяких праць членів Товариства, пов'язаний з їх висвітленням в основній частині монографії.

РОЗДІЛ

1

СТАНОВЛЕННЯ Й ДІЯЛЬНІСТЬ КИЇВСЬКОГО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА (1889 –1919 рр.)

190. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1891. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1892. – VI, 46 с.
191. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1892. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1893. – 116, 7 с.
192. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св. Владимира за 1893. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1894. – 52, 57, 32 с.
193. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1894. – Киев : Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1895. – 15, 42 с.
194. Отчеты и протоколы физико-математического общества при императорском университете им. Св. Владимира за 1895. – Киев : Типогафия Императорского университета Св. Владимира, 1896. – 9, 96 с.
195. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1896. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1897. – 16, 60 с.
196. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1897. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1898. – 14, 78 с.
197. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1898. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1899. – 164, 14 с.
198. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1899. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1900. – 13, 141 с.
199. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св.Владимира за 1900. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1901. – 16, 110 с.

180. Оглоблин Н. В. К теории площадей и центров тяжести плоских фигур / Н. В. Оглоблин // Отчет и протоколы физико-матемaтематического общества. Приложения к протоколам. – К. : Типография Университета Св. Владимира, 1912. – С. 33–47.
181. Оглоблин Н. Обзор учебников анализа бесконечно малых для дополнительного класса реальных училищ / Н. Оглоблин // Циркуляр по Киевскому учебному округу. – Киев, 1909. – №1. – С. 120–133.
182. Онопрієнко В. І. Історія української науки XIX – XX століть: [навч.посібник] / В. І. Онопрієнко. – К.: Либідь, 1998. – 302 с.
183. О преподавании арифметики и алгебры: Публичные лекции Проф. Императорского Университета Св.Владимира В. П. Ермакова / [записаны и составлены Н. Мукаловым]. – Киев: Типография Императорского Университета Св. Владимира, Н. Т. Корчак-Новицкого, 1900. – 61 с.
184. Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике / В. Н. Осинская. – К. : Рад.шк., 1989. – 192 с.
185. Острогорский А. Материалы по методике геометрии в связи с изучением учебников: [учебное пособие для начинающих учителей] / А. Острогорский. – С. – Петербург : Типография М. М. Стасюлкича, Вас. Остр., 2 лин., 7. – 1884. – 175 с.
186. Отзыв профессора Университета Св. Владимира Г. К. Суслова о письменных ответах по математике учеников гимназий на испытаниях зрелости в 1906 г. – Киев : Типография Т-ва И. Н. Кушнирев, 1906. – 48 с.
187. Отзыв профессора Университета Св. Владимира Г. К. Суслова о письменных ответах по математике учеников гимназий на испытаниях зрелости 1913 года. – Киев : Типография Т-ва И. Н. Кушнирев, 1913. – 52 с.
188. Отзыв профессора Университета Св. Владимира Б. Я. Букреева описьменных ответах по математике лиц подвергавшихся окончательным испытаниям в 1906 году в реальных училищах Киевского учебного округа. – Киев : Типография Т-ва И. Н. Кушнирев, 1913. – 18 с.
189. Отчеты и протоколы физико-математического общества при Императорском Университете им. Св. Владимира за 1890. – Киев: Типогафия Императорского Университета Св. Владимира, 1891. – 30, 92 с.

1.1. Соціально-економічні та організаційно-наукові умови становлення й діяльності Київського фізико-математичного товариства

Як відомо, у кінці XIX – на початку XX ст. українці не мали власної національної держави. Наддніпрянська Україна входила до складу Російської імперії й була піддана процесам русифікації та інтеграції до територіального, економічного, політичного й культурного простору Росії. Все це зумовило виникнення двох протилежних суспільних явищ – участі української інтелігенції у боротьбі за формування й розвиток національної ідеї та відродження української культури (діяльність членів Громад, "Просвіт" тощо) або ж у розбудові культури, яка, через неможливість представлення праць рідною мовою, визнавалась російською (зокрема, діяльність у сферах науки та освіти).

Економічний розвиток України даного періоду, як і всієї Російської імперії, характеризувався завершенням промислового перевороту (1860-1880-ті рр.) та переходом суспільства до індустріальної стадії капіталізму, що було наслідком проведених державних реформ 60-70-их рр.

Так, під впливом аграрної реформи (1861 р.) відбулось розшарування селянства, впроваджувалась безстанова форма землеволодіння, сформувався досить високий рівень концентрації землі. У сільськогосподарському виробництві значного поширення набули застосування техніки та використання вільнонайманої праці.

Відміна кріпосного права, проведення фінансової реформи (1862 р.) спричинили швидкий розвиток господарювання на принципах ринкових відносин. За свідченням дослідників історії, якщо у 1860 році в Україні налічувалось 2147 фабрик і заводів то у 1895 році їх кількість зросла до 30313 [43, с. 266]. Оснащення фабрично-заводських підприємств відбувалось новітніми технікою та технологіями виробництва на основі використання парового двигуна та системи машин.

Швидкого розвитку набули й галузі важкої промисловості: кам’яновугільна, залізорудна, металургійна.

Розвиток ринкових відносин, нарощення капіталу великих підприємців потребувало розширення території збуту та виходу вітчизняної продукції на світовий ринок, що стимулювало розвиток залізничного транспорту, суднобудівництва та морського торгового флоту, банківської справи.

Все це вимагало невідкладних змін в освіті та науці. Так, необхідною умовою забезпечення потреб пануючих класів було здобуття народом певного рівня освіти. Державний апарат влади, у свою чергу, потребував в усіх галузях діяльності чиновників з ґрунтовними спеціальними знаннями.

Отже, економічні потреби Російської імперії поставили на порядок денний розв’язання проблем шкільної освіти, що певним чином відобразились у низці реформ 60-90-их рр., а саме:

– створення широкої мережі початкових навчальних закладів та збільшення кількості нижчих та середніх навчальних закладів;

– перегляд принципу становості навчання, конструювання змісту шкільної освіти на нових концептуальних засадах, відмінних від класицизму;

– можливість залучення до навчальної справи громадських та приватних осіб [123].

Нові способи виробництва, видобутку й обробки сировини висували перед науковцями, що працювали в Україні, практичні проблеми, стимулювали розвиток науки. У цей період з’являються нові теорії та галузі природничо-математичних наук: засновується фізична хімія (М. Бекетов), порівняльна патологія, ембріологія, мікробіологія (І. Мечников), відбувається відкриття періодичного закону (Д. Мендєлєєв), створюється теорія стійкості та рівноваги механічних систем (О. Ляпунов),

167. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / А. Я. Блох, В. А Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; [сост. В. И. Мишин]. – М.:Просвещение, 1987. – 416 с.
168. Мижуев П. Исторический очерк развития учебного дела в России / П. Мижуев // Народное образование в России. – 2000. – № 10. – С. 217–219.
169. Мітельман І. М. Деталізована програма та календарно-тематичне планування / І. М. Мітельман. – Х. : Видав. гр. "Основа", 2003. – 80 с.
170. Микитюк О. М. Теорія і практика організації науково-дослідної роботи у вищих закладах освіти України в ХІХ ст. дис…д. пед. наук: 13.00.01 / О. М. Микитюк. – Х., 2003. – 405 с.
171. Мусин-Пушкин А. Среднеобразовательная школа в России и ее значение / А. Мусин-Пушкин. – Петроград: Типография Главного Управления Уделов, 1915. – 163 с.
172. Немов Р. С. Психология: [учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: в 3 кн. – 4-е изд] – Кн. 2: [Психология образования] / Р. С. Немов. – М. : Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2002. – 608 с.
173. Нелін Є. П. Методи розв’язування геометричних задач (додаток) / Є. П. Нелін // Геометрія в таблицях. – Харків : Світ дитинства, 2001. – 32 с.
174. Нечаев Н. О начальном преподавании алгебры / Н. Нечаев. – Спб. : Типография М. Стасюлевича, 1892. – 32 с.
175. Никитин Н. Н. Съезды преподавателей математики в России / Н. Н. Никитин // Известия АПН РСФСР. – вып. VI. – М., 1946. – С. 139–155.
176. Общий устав Императорских Российских университетов // Журнал Министерства Народного просвещения. – 1884. – Сентябрь. – С. 27-61.
177. Общий Устав Императорских Российских Университетов: [Електронный ресурс] // сайт: lib.ru: Библиотека Максима Мошкова. – дата створення 18 грудня 1994 р. – Режим доступу до документу / http://lib.ru/TEXTBOOKS/
178. Оглоблин Н. В. Определение степени точности при логарифмических вычислениях / Н. В. Оглоблин // Университетские известия. – 1912. – № 9. – С. 1–12.
179. Оглоблин Н. В. Отчет о командировке на второй Всероссийский съезд преподавателей математики / Н. В. Оглоблин // Летопись Императорской Александровской киевской гимназии. – Т. ІІІ. – 1913-1914 гг. – Киев : Б.и., 1914. – С. 231–243.

155. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть III) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 63. – С. 45–60.
156. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть IV) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 75. – С. 41–56.
157. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть V) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 77. – С. 81–91.
158. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть VI) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 82. – С. 181–197.
159. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть VII) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 83. – С. 201–218.
160. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть VIII) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1889. – № 84. – С. 221–227.
161. Межейнікова Л. С. Математичні задачі з фінансовим змістом / Л. С. Межейнікова, В. О. Швець. – Х. : Вид. група "Основа", 2004. – 96 с. – (Серія "Бібліотека журналу "Математика в школах України""; Вип.2 (26)).
162. Мерзляк А. Г. Математика: [підруч. для 5 класу] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2005. – 288 с.
163. Мерзляк А. Г. Математика: [підручник для 6 класу] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2006. – 304 с.
164. Мрочек В. Педагогика математики. – Т.1. :[исторические и методические этюды] / В. Мрочек, Ф. Филиппович. – Спб. : Книгоиздательство О. Богдановой, 1910. – 380 с.
165. Метельский Н. В. Очерки истории методики математики / Н. В. Метельский. – Минск : Высшая школа, 1968. – 341 с.
166. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / [В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчишина и др.]; под ред. В. А. Гусєва. – М. : Академия, 2004. – 368 с.

психологія мислення (І. Сєченов), методи визначення критичних температур і тиску (школа молекулярної фізики М. Авенаріуса) та ін. Головними осередками дослідницької роботи й популяризації наукових знань в Наддніпрянській Україні були університети (Харківський, Новоросійський, Київський) та вищі технічні навчальні заклади [170]. Одним із провідних осередків у справі просвітництва, рівня викладання та наукових досліджень був Київський університет Св. Володимира (заснований у 1834 р.). Науково-педагогічна діяльність викладачів університету Св. Володимира відображалась у написанні підручників з навчальних дисциплін з рекомендаціями та вказівками для студентів. Так, у 60-80-их роках на фізико-математичному факультеті були складені посібники й курси лекцій П. І. Рахманіновим "Основы теоретической динамики", М. М. Шиллером "Основы физики", М. Є. Ващенком-Захарченком "Высшая алгебра", "Курс неевклидовой геометрии", В. П. Єрмаковим "Теория векторов на плоскости", М. А. Бунге "Химическая технология", В. Ю. Шидловським "Руководство по астрономии", М. Ф. Хандріковим "Система астрономии", М. В. Бобрецьким "Руководство по зоологии" та ін. з використанням найновіших досягнень світової науки [76, 235]. Починаючи з 1863 року, відбувається значне поповнення матеріальної бази університету лабораторіями, клініками, кабінетами, новими колекціями і музеями, астрономічною обсерваторією, семінаріями; вводяться нові форми занять студентів – практичні заняття, науково-дослідна робота, позанавчальні семінарські заняття. У лекційному викладанні посилюється роль наочності. Поповнення матеріальної бази вплинуло й на кількість наукових досліджень і публікацій викладачів. Так, якщо до 50-их років XIX століття дослідницька робота була незначною і обмежувалась переважно дисертаційними роботами, то лише за 1855-1875-ті рр. видано більш ніж 550 монографій і статей. Публікаціям наукових праць сприяло й заснування при університеті науково-періодичного видання "Университетские известия" (1861 р.) [235].

Період 90-ті роки XIX та початок XX століття характеризується подальшим розширенням навчальних програм курсами, що ознайомлювали студентів з новими розділами наук, поповненням та розширенням кількості навчально-допоміжних установ, активізацією роботи студентських наукових гуртків, розширенням та поглибленням тематики наукових досліджень викладачів [52, 105, 215-219].

Аналіз історико-математичних праць [105, 147, 52] засвідчує, що вчені Київського університету за період кінця XIX – початку XX століття збагатили математичну науку розв'язанням нових проблем. Зокрема, М. Є. Ващенко-Захарченко (1825-1912) заклав основи нової галузі – операційного числення, зробив внесок в ріманову теорію функцій складної змінної та ін.; цінні уточнення у теорії збіжності рядів, більш раціональні способи викладу теорії диференціальних рівнянь у цілих і частинних похідних, теорії ймовірності тощо, запропонував В. П. Єрмаков (1845-1922); низку проблем аналітичної механіки, гідравліки, теорії опору, геометрії поверхонь розв'язав І. І. Рахманінов (1826-1896); основи "методу кватерніонів", що полягає у поєднанні аналітичних та геометричних методів дослідження, обґрунтував П. Е. Ромер (1835-1899); вагомий внесок у розвиток таких відділів математики як лінійна алгебра, теорія чисел, теорія груп, теорія алгебраїчних чисел, еліптичні функції, математична теорія побудови географічних карт та ін. зробив Д. О. Граве (1863-1939); певні проблеми теорії фуксових функцій, теорії рядів тощо успішно розв'язав Б. Я. Букреєв (1859-1962); розробкою та застосуванням нових методів доведень в теорії трансцендентних функцій займався П. М. Покровський (1857-1901); розширення, удосконалення відомих методів інтегрувань диференціальних рівнянь у частинних похідних у класичних дослідженнях мають наукові праці Г. В. Пфейфера (1872-1946); як розробник нових методів інтегрувань деяких диференціальних рівнянь динаміки та основ неголономної механіки відомий у науковому світі В. П. Воронець (1871-1923) та ін.

143. Максименко С. Д. Загальна психологія: [навч.посіб. – 2-ге вид., стереотип] / С. Д. Максименко, В. О. Соловієнко. – К. : МАУП, 2001. – 256 с.
144. Маланюк М. П.Стежинки до коренів істини. Маловідомі факти з історії розвитку педагогіки математики на України / М. П. Маланюк, Г. М. Возняк. – Тернопіль: Б.в., 1993. – 58 С.
145. Марчевский М.Н. Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879-1954) / М.Н.Марчевский // Историко-математические исследования. – Вып. IX. – М., 1956. – С. 613–666.
146. Марюкова Н. Е. Фузионизм в школьной геометрии: исторический, математический, реальный аспекты / Н. Е. Марюкова. – Брянск : Изд-во БГПУ, 2000. – 176 с.
147. Математика в Киевском университете. Киевское физико-математическое общество / [под ред. И. З. Штокало и др.]. – К.: Наукова думка, 1967. – Т.2. – С. 474–481.
148. Математика: 6 кл.: [підруч. для загальноосвіт. навч. закл.] ⁄ [автори тексту Г. П. Бевз, В. Г. Бевз]. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.
149. Математика. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень: [укладачі: Бурда М. І., Глобін О. І., Нелін Є. П.] / [Електронний ресурс] // сайт: Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України. Офіційний веб-сайт. – Режим доступу до документу: http://www.mon.gov.ua/education/average/prog12/matem_ak.pdf
150. Материалы по реформе средней школы. Петроград, 1915 // Журнал Министерства народного просвещения. – 1915. – Кн. XII. – С. 246–283.
151. Матковский П. И. Выделение некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе / П. И. Матковский // Педагогический сборник. – № 4. – 1892.– С. 385–396.
152. Матковский П. И. Начала алгебры: [учебное пособие]. Ч. 1 / П. И. Матковский. – К. : Тип. С. В. Шульженко. Изд. автора, 1890.– VI, 227 с.
153. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть I) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1888.– № 55. – С. 145–158.
154. Мацон Ф. Ю. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (часть II) / Ф. Ю. Мацон // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1888.– № 56. – С. 169–175.

129. Кузьмич Л. В. Розвиток математики та методики її навчання в південному регіоні України (кінець XIX – початку XX ст.): автореф. дис. на здобуття наук ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02. "Теорія та методика навчання (математика)" / Л. В. Кузьмич. – К, 1998. – 20 с.
130. Кучер Б. М. Елементарний виклад основ геометрії Лобачевського / Збірник матеріалів про М. І. Лобачевського і його геометрію / Б. М. Кучер, В. М. Свириденко. – Житомир, 1958. – С. 53–103.
131. Кушнир И. Шедевры школьной математики. Книга 1 / И. Кушнир. – Киев: Астарта, 1995. – 576 с.
132. Ланков О. В. До історії розвитку передових ідей в Російській методиці математики / О. В. Ланков. – К.: Рад. шк., 1953. – 180 с.
133. Лебединцев К. Ф. Курс алгебры для средних учебных заведений. – Ч. I. / К. Ф. Лебединцев.– Петроград-К.: Сотрудник, 1916.– 250 с.
134. Лебединцев К. Ф. Метод обучения математике в старой и новой школе: [собр. ст. по вопр. преподавания математики] / К. Ф. Лебединцев. – Москва : Типо-литография Т-ва И. М. Кушнерева и К°., 1914. – 100 с.
135. Лебединцев К. Ф. Курс алгебры для средних учебных заведений. – Ч.II. / К. Ф. Лебединцев. – Петербург – К.: Сотрудник, 1911. – 331 с.
136. Левитас Г. Г. Фузионизм в школьной геометри / Г. Г. Левитас // Математика в школе. – 1995. – № 6. – С. 21–26.
137. Летопись Императорской Александровской киевской гимназии 1912-1913 гг. – Т.II – Киев : Б.и., 1913. – 395 с.
138. Литовченко З. М. Наближені обчислення / З. М. Литовченко, Н. В. Елизаветіна. – К. : Рад.шк., 1988. – 125 с.
139. Лопухівська А. В. З історії розвитку гімназій і ліцеїв в Україні: [посібник для вчителя] / А. В. Лопухівська. – К. : ІСДО, 1994. – 100 с.
140. Лубенець Т. Г. Методическое руководство к Сборнику арифметических задач / Т. Г. Лубенець. – К.: Тип. С. В. Кульженко, 1890. – 91 с.
141. Маєргойз Д. М. Звичайні дроби // Нариси з методики викладання арифметики / [за ред. проф. О.М.Астряба] / Д. М. Маєргойз. – Київ: Радянська школа, 1950. –.С. 89 –137.
142. Мазинг К. Заметка о преподавании математики в наших гимназиях / К. Мазинг // Журнал Министерства Народного Просвещения. – 1872. – №2. – С. 162.

Проте, вивчення історичних джерел [53, 279, 235, 215-219] дає змогу стверджувати, що фінансування наукових досліджень проводилось не регулярно та безсистемно, поповнення фондів, колекцій необхідними приладами, експонатами, літературою, розширення приміщень було "хронічною потребою" навчально-допоміжних установ. Крім цього, давалися в знаки й внутрішні проблеми організації наукового дослідження: для окремо взятого вченого огляд досліджень з певної галузі науки та галузей з нею суміжних, що стрімко розвивались та розгалужувались, значно ускладнювався, виникала й потреба усного обміну думками з іншими спеціалістами.

Як відомо, реформи вищої школи, ознаменовані статутами російських імператорських університетів (1863 та 1884 рр.), надавали певної самостійності в їх розвитку у залежності від місцевих умов. Одним із напрямів самостійності університетів було створення наукових товариств. За визначенням Л. Березівської, товариство – це об’єднання людей з певною метою, напрямами діяльності та формами її вираження [29, с. 5]. Так, розпочали свою діяльність Київське товариство природодослідників (1869), Київське юридичне товариство (1877), Київське історичне товариство Нестора-літописця (1872), Харківське математичне товариство (1879), Новоросійське товариство природознавців (1876), Київське фізико-математичне товариство (1889) тощо.

Таким чином, недостатнє фінансування державою наукових досліджень мало компенсуватись їх підтримкою за рахунок членських внесків та пожертвувань учасників організованих товариств, до того ж, вирішувались проблеми концентрації наукового потенціалу, координації досліджень, кількість яких стрімко зростала, ефективного обміну інформацією, а також популяризації науки, впровадження колективної форми роботи над вирішенням наукових проблем та ін.

Наукові товариства менше підлягали й контролю держави у порівнянні з Академією наук (що функціонувала у Петербурзі) та самими університетами [182]. Важливе місце посідали наукові товариства у громадсько-педагогічному русі за модернізацію змісту шкільної освіти.

Ознайомлення з архівними джерелами [311, 312, 186-188] та історико-педагогічними дослідженнями [72, 73, 128] переконують, що впродовж досліджуваного періоду зв'язок академічних кіл Київського університету фізико-математичного факультету з середніми навчальними закладами проводився постійно. Передусім викладачі університету намагались розв'язати питання розриву між наукою математикою і відповідним шкільним предметом. Важлива роль у цьому належить професору В. П. Єрмакову, який започаткував у Києві видавництво журналу "Журнал элементарной математики" (1884), пізніше "Вестник опытной физики и элементарной математики" (1886-1917), що призначався для вчителів і учнів. Так, теорія ймовірностей, проблеми теорії чисел, математичні теорії комерційної діяльності й страхування, символічне числення, неевклідова геометрія, методи геометричних побудов тощо популяризувались на сторінках журналу в елементарному викладі. Обов'язки професорів у сфері інспекції загальноосвітніх закладів навчального округу, перевірка екзаменаційних робіт випускників гімназій та реальних училищ вимагали й обізнаності та співпраці у галузі педагогічної науки.

Так, ще у 1869 році професор фізики Київського університету М. Авенаріус у звіті про огляд Білоцерківської гімназії зазначав, що "викладач фізики і математики виконує свої обов'язки добросовісно. І якщо бажано б було чути від учнів більш задовільні відповіді то це залежить не від більшої старанності викладача, а від необхідності внесення змін у зміст та методи навчання предмета" [312, арк. 1]. Успіхи учнів з математики учений пов'язує з їх початковою підготовкою. Тому викладачам він радив звертати увагу на засвоєння учнями арифметики – як основи усіх інших математичних предметів. Особливо важливим при цьому є вибір методів навчання. Найпоширенішим на той час застосовувався такий метод навчання, коли учитель сам повідомляв правила (у вигляді теореми), сам їх доводив або пропонував міркування

115. Кліндухова В. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи / В.Кліндухова, В.Швець // Математика в школі. – 2008. – №2. – С.3 – 8.
116. Кліндухова В. М. Ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень в школі / В. М. Кліндухова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 24. – Донецьк : Фірма ТЕАН, 2005. – С. 288–293.
117. Кравчук В. Алгебра: [пробний підручник для 9 класу / за редакцією З. І. Слєпкань] / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 248 с.
118. Кравчук В. Алгебра:[підручник для 7 класу / за редакцією З. І. Слєпкань] / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 192 с.
119. Кравчук В. Алгебра: [підручник для 8 класу / за редакцією З. І. Слєпкань] / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 232 с.
120. Кравчук В. Математика: [підручник для 5 класу] / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2005. – 208 с.
121. Кравчук В. Математика 6 клас / В. Кравчук, Г. Янченко – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 288 с.
122. Колмогоров А. Н. Геометрия: [учеб. пособие для 6-8 кл. сред. шк.] / А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. – М. : Просвещение, 1982. – 383 с.
123. Кондратьева Г. В Школьное математическое образование в России (вторая половина XIX века) / Г. В. Кондратьева. – М.: Издательство МГОУ, 2005. – 128 с.
124. Концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) // Педагогічна газета. – 2002. – № 1 (91), січень.
125. Концепція математичної освіти 12-річної школи // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 12–17.
126. Корінь Г. О. – Вивчаємо наближені обчислення / О. Г. Корінь // Математика в школі. – 2003. – № 2. – С. 35 – 42.
127. Коршак Н. Вільгельм Конрад Рентген – перший лауреат Нобелівської премії з фізики / Н. Коршак, Є. Коршак, Т. Буяло // Фізика та астрономія. – 2005. – № 4. – С. 53–54.
128. Кузьмич Л. В. Розвиток математики та методики її навчання в південному регіоні України (кінець XIX – початку XX ст.). дис…канд. пед. наук: 13.00.02. / Л. В. Кузьмич. – Херсон, 1998. – 204 с.

101. Зайченко И В. Развитие педагогической мысли в прогрессивной журналистике Украины второй половины XIX столетия: дис…канд. пед.наук: 13.00.01 / И. В. Зайченко. – К., 1988. – 182 с.
102. Зайченко І. В. Історія педагогіки : [у двох книгах].– Книга І. Історія зарубіжної педагогіки: [Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів] / І. В. Зайченко. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2010. – 624 с.
103. Зайченко І. В. Історія педагогіки: [у двох книгах].– Книга ІІ. Школа, освіта і педагогічна думка в Україні: [Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів] / І. В. Зайченко. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2010. – 1032 с.
104. Иванов А. Е. Российское "ученое сословие" в годы Второй отечественной войны / А. Е. Иванов // Вопросы истории естетство-знания и техники.– 1999. – №2. – С. 108–127.
105. Історія Київського Університету. – К. : Видавництво Київського університету, 1959. – 629 с.
106. Каган В. Первый Всероссийский съезд преподавателей математики / В. Каган // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1912. – № 554. – С. 49–54.
107. Каменецкий С. Е. Методика решения задач по физике в средней школе. / С. Е. Каменецкий, В. П. Орехов. – М. : Просвещение, 1987. – 336 с.
108. Каптерев П. Ф. Дидактические очерки. Теория образования / П. Ф. Каптерев. – Петроград : Типография "Виктория", 1915. – 434 с.
109. Каторп П. Философия как основа педагогики. Перевод с немецкого / П. Каторп. – М. : Издание Н. Н. Клочкова, 1910. – 106 с.
110. Киевские математики-педагоги / [под ред.чл.-кор. АН УССР. А.Н. Боголюбова]. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.
111. Киевское общество естествоиспытателей (записка, сообщенная советом общества) / Учреждения Университета Св. Владимира (1834-1884) / [под ред. ордин. проф. В.С. Иконникова]. – К.: Типография Университета Св. Владимира, 1884. – С. 47–48.
112. Киселёв А. Систематический курс арифметики / А. Киселев. – М.-Петроград : Типография Т-ва Разумовских, 1918. – 248 с.
113. Киселев А. Элементарная алгебра / А. Киселев. – М.: Типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1909. – 346 с.
114. Киселев А. П. Элементарная геометрия / А. П. Киселев. – М. : Издание товарищества под фирмой "В. В. Думнов – насл. Бр. Слаевых", 1914. – 404 с.

розв'язування задачі. Проте для учнів 10-12 років будь-яке доведення ще складне для розуміння. Задовільність відповідей учнів, яким пропонують довести теорему, пояснюється їх гарною пам'яттю. Але якщо зрозуміти теорему він не в змозі, то й механічне запам'ятовування не тривале. Як наслідок – учні не тільки не розуміють арифметичних дій, але й не пам'ятають їх. Учений пропонує ознайомитись із методикою навчання арифметики А. Дістервега, зокрема рекомендує починати вивчати будь-яке теоретичне питання з конкретних прикладів – учні мають навчитись розмірковувати над конкретними предметами під керівництвом учителя. І, за необхідністю, від конкретного переходити до загального. На думку М. Авенаріуса, наочність має стати основою, що сприяє свідомому засвоєнню арифметичних правил. У курсі алгебри вчений радить звертати більше уваги на формування умінь учнів складання і розв'язування рівнянь. Оскільки лише у цьому разі вони зможуть зрозуміти значення алгебраїчного методу при розв'язуванні задач [312].

Геометрія, на думку М. Авенаріуса, викладається у гімназії з більшим успіхом, ніж інші математичні предмети. Нечітке розуміння доведень теорем учнями вчений виявляє лише у випадку застосування способу границь (за підручником геометрії Буссе). М. Авенаріус уважає, що даний спосіб помилково використовується у підручнику, оскільки ґрунтується на застосуванні до незалежних змінних, проте без будь-яких зауважень застосовується і до залежних змінних [313, арк. 3]

Професор математики Київського університету Б. Букрєєв у 1907 році відвідав уроки математики у реальних училищах міста Києва: Г. Цалькера та при Євангельсько-Лютеранській церкві. В училищі Г. Цалькера професор відвідав 3, 4, 5, 7 класи викладачів математики Орловського і Танрова та в училищі Св. Катерини 5-6 класи викладача математики Левенберга. Б. Букрєєв дав гарну характеристику викладачам училища Г. Цалькера як молодих та перспективних педагогів, що впевнено і спокійно викладають свій предмет. Учений проте зауважив, що посібник з геометрії Фролова (7 видання, 1898 р.), за яким ведеться навчання аналітичної геометрії є застарілим, оскільки у ньому не знайшли місця деякі геометричні поняття, зазначені у програмі (наприклад, поняття числового ексцентриситету еліпса) або ж існують неточності у формулюванні деяких означень понять.

Уроки викладача Левенберга – досвідченого педагога, характеризуються продуманістю, інтересом, умінням тримати увагу усього класу. Підручники Давидова, якими користуються учні Левенберга учений вважає також застарілими [311].

Професори Київського університету за дорученням куратора Київського навчального округу залучались і до проведення повторного аналізу та оцінювання письмових робіт з математики випускників гімназій та реальних училищ. У різні роки таку місію виконували В. Єрмаков (1885 р.), Б. Букрєєв (1995-1915 рр.), Г. Суслов (1906-1915 рр.) та ін.

Звіти вчених складалися з статистичної обробки результатів іспитів по усьому навчальному окрузі (визначення середнього балу за результатами іспиту у кожній гімназії та по округу у цілому, процентного відношення успішності по гімназіях й округу та динаміки її зміни упродовж двох років), а також загальної характеристики рівня математичної підготовки та розвитку випускників гімназій, об'єктивності оцінювання їх робіт членами комісії. Проведення аналізу робіт випускників гімназій (реальних училищ) робилося з метою з'ясування можливих причин прогалин у знаннях та навичках учнів з математики, доцільності підібраних учителями задач для більш повного розкриття набутих знань, умінь та навичок учнів з математики. З цього ж приводу давались рекомендації щодо підвищення ефективності навчання математики [186-188].

Так, основні зауваження проф. В. П. Єрмакова до перевірених письмових робіт з геометрії випускників гімназії м. Житомира у 1885 р. стосувались культури письмових обчислень учнів. Більшість учнів при розв'язуванні геометричної задачі не мали навичок раціоналізації обчислень, залишали не спрощеними ірраціональні вирази тощо. Вчений відмічав, що учителі занадто захоплюються перевантаженням матеріалу

86. Елементи стереометрії в курсі математики основної школи: [навч.посіб.для студ.мат.спец.вищ.навч.закл] / Л. Філон, В. Швець. – К.:Вид. дім "Шкіл. Світ": Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с.
87. Ермаков В. П. В чём сущность алгебры? / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1896. – № 5. – С. 458–467.
88. Ермаков В. П. Два правила приближённого вычисления / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1892. – № 4. – С. 359–365.
89. Ермаков В. П. Приближённое вычисление / В. П. Ермаков // Вестник опытной физики и элементарной математики. –1905. – №№ 388–390, С. 87–91, 98–105, 130–137.
90. Ермаков В. П. Определение одночлена в алгебре / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1893. – № 12. – С. 578–581.
91. Ермаков В. П. О начальном преподавании алгебры: (Речь, произнесённая на собрании Киевского физико-математического общества 22.XI.1890 г.) / В. П. Ермаков // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 102. – С. 101–109.
92. Ермаков В. П. О преподавании алгебры / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1892. – № 5. – С. 442–472.
93. Ермаков В. П. Определение и цель алгебры /В. П. Ермаков // Вестник опытной физики и элементарной математики – 1890. – № 98. – С. 34–35.
94. Ермаков В. П. Разложение многочленов на множители / В. П. Ермаков / Педагогический сборник. – 1895. – № 8. – С. 109–119.
95. Ермаков В. П. Роль памяти в математике / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1894. – № 5. – С. 460–466.
96. Ермаков В. П. Педагогический парадокс / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1898. – № 2. – С. 127–130.
97. Ермаков В. П. О преподавании геометрии / В. П. Ермаков // Педагогический сборник. – 1895. – № 10. – С. 327–336.
98. Ефремов Д. Общее решение в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени / Д. Ефремов // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 97. – С. 4–9.
99. Ефремов Д. Общее решение в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени (продолжение) / Д. Ефремов // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1890 – № 99. – С. 41–47.
100. Зайченко І. В. Педагогіка: навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів / І. В. Зайченко. – К.: "Освіта України", "КНТ", 2008. – 528 с.

учнів: дис…канд. пед. наук. : 13.731. / П. Ф. Данилюк. – К., 1971. – 230 с.
73. Дахия С. А. "Журнал элементарной математики" и "Вестник опытной физики и элементарной математики" / С. А. Дахия // Историко-математические исследования. – М., 1956. – Вып. IX. – С. 537–613.
74. Демков М. И.. Начальная народная школа, ее история, дидактика и методика / М. И. Демков. – Москва : Типография Т-ва И. Д. Сытина , 1911. – 329 с.
75. Дичек Н. П. Проблемы школьного математического образования в педагогическом наследии А. М. Астряба : дис…канд. пед.наук: 13.00.01. / Дичек Наталия Петровна. – К., 1985. – 169 с.
76. Добровольский В.А. Развитие математики в Киевском университете от его основания до 1917 г. : автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. физ-мат наук / В.А. Добровольский. – Москва, 1956. – 16 с.
77. Добровольский В. А. Д. А. Граве (1863-1939) / В. А. Добровольський. – М. : Наука, 1968. – 111 с.
78. Доклады, читанные на II Всероссийском Съезде Преподавателей математики в Москве. – М. : Отдельный оттиск из журнала "Математическое образование" за 1915, 1915. – 320 с.
79. Долгушин П. Вычисления по приближению. Вып. 1 / П. Долгушин. – К. : Типография Императорского Университета Св. Владимира, 1908. – 36 с.
80. Долгушин П. Вычисления по приближению. Вып. II / П. Долгушин. – К. : Типография Императорского Университета Св. Владимира, 1908. – 73 с.
81. Долгушин П. А. Систематический курс геометрии для средних учебных заведений / П. А. Долгушин. – Петербург–Киев: Сотрудник : Тип. Наследн. К. Круглянскаго, 1912.– VIII, 247 с.
82. Долгушин П. А. Неэвклидова геометрия в средней школе / П. А. Долгушин // Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. – Т.1 – Общие собрания. – Спб., 1913. – С. 150–155.
83. Долгушин П. А. Теория вычислений по таблицам / П. А. Долгушин // Отчёт и протоколы физико-математического общества при университете им. Св.Владимира за 1910 г. (приложение). – К., 1911. – С.87-96.
84. Долгушин П. Систематический курс алгебры для средних учебных заведений / П. Долгушин. – Петербург – Киев : Сотрудник, 1913. – 221 с.
85. Дудко Л. Елементи народної математики / Л. Дудко, Л. Баб'як. – Білецька // Математика в школі. – 2002. – № 4. – С.51–53.

зайвими теоремами, тому й часу на формування учнями обчислювальних навичок майже не вистачало [72, с. 64].

Аналогічні зауваження зустрічаємо і у висновках до перевірених робіт з геометрії у 1895 р. Б. Я. Букреєва. Про роботи учнів Лубенської гімназії він писав:

"Учні знайомі з елементами геометрії і тригонометрії. Загальна формула для розв'язування задачі виведена лише в одній роботі" [72, с. 64]. Учений у своєму відгуку по Новгород-Сіверській гімназії відзначає той недолік, що "гімназисти не уміють користуватися таблицями логарифмів" [там само], по Чернігівській – "гімназисти при виконанні рисунка не уміють креслити геометричні тіла" [там само].

У 1906 році у звіті про перевірку письмових робіт з математики на атестат зрілості випускників гімназій Київського навчального округу Г. К. Суслов, перш за все, піддає критиці складання або підбір учителями задач для іспитів з алгебри, що "все більше приймають шаблонний вигляд і являють собою механічну суміш часткових задач органічно не пов'язаних одна з одною" [186]. Переважно це були задачі на розв'язування невизначених рівнянь, застосування біному Ньютона, на прогресії, рідше зустрічались задачі на неперервні дроби, рівняння з радикалами, квадратні, показникові і логарифмічні рівняння та складні відсотки. У розв'язанні таких задач учні можуть використовувати лише знання тих чи інших прийомів розв'язування без розуміння їх суті, що не сприяє математичному розвитку [186].

Наприклад, розглянемо задачу з алгебри, запропоновану на іспиті у Новгород-Сіверській гімназії:

"Дехто купив злиток золота, розраховуючи його продати з баришем за таку суму, у яку перетворились би 920 крб. 87 коп., віддані на приріст на 10 років з 5% річними; насправді він продав злиток за 1125 крб., причому зазнав збитків. Скільки він сам заплатив за злиток, якщо бариш, на який він розраховував, більше збитків у стільки разів, скільки одиниць у добутку:

$$(2\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{12})\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)?\text{" [170, 34].}$$

Г.К. Суслов пропонує вибирати задачі, що не потребують складних арифметичних обчислень та які базуються на дослідженні [186, с.2]. Він також зазначає, що знання учнями зовнішніх прийомів (використання правил, теорем, формул, техніка обчислень) є задовільним, проте їх не достатньо для уявлення про загальний математичний розвиток учнів. На його думку, у розв’язанні задач, має бути описання ходу міркувань з обґрунтуванням вибору того чи іншого прийому [186, с. 4].

З геометрії майже усі задачі були запропоновані на знаходження елементів многогранників та площ поверхонь і об’ємів тіл обертання. Учений також зазначає, що відсутність в учнів навичок у тригонометричних та логарифмічних перетвореннях, до яких зводилось розв’язання задачі, призводило до невірного розв’язку [186, с. 8].

Усі висновки професорів учителі детально вивчали і намагалися реалізувати у своїх роботі.

Письмовий іспит з алгебри в 1913 році містив уже три окремих питання: "перше питання – задача на складання рівняння та елементарне дослідження формул для коренів рівняння з перевіркою результатів; два інші питання на розв’язування одного з рівнянь: невизначеного, логарифмічного, показникового, ірраціонального або завдання на застосування бінома Ньютона" [187, с. 3].

Г.К. Суслов даючи загальну характеристику рівню математичної підготовки випускників гімназій зауважує, що як завжди задовільним є знання учнями формул та техніки обчислень. Перші завдання іспитів були підібрані Управлінням Округу, перш за все, для з’ясування свідомого ставлення учнів до використання теорем і формул, розуміння їх суті. Це дало змогу виявити основний недолік у знаннях випускників – поверховість знань і безпорадність перед простими математичними питаннями. Теми з геометрії для іспиту у 1913 році являли собою задачі на комбінації тіл обертання з многогранниками.

58. Волович М. Б. Учитывать потребности курса физики при изучении темы "Измерение геометрических величин" / М. Б. Волович, Г. В. Шахбазян // Математика в школе. – 1986. – №6. – С. 37–40.
59. Галузинський В. М. Педагогіка: теорія та історія / В. М. Галузинський, М. Б. Євтух. – К. : "Вища школа", 1995. – 237 с.
60. Гапак О.М. Київське товариство природодослідників та його роль у зародженні реформаторського руху в математичній освіті / О.М. Гапак // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 15-17 травня., 2008 р., Київ. : Матеріали конф. – К. :ТОВ "Задруга", 2008. – 420 с.
61. Геометрія: підручник для 10 кл. загально освіт. навч. закл. : профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К. : Ґенеза, 2010. – 232 с.
62. Горохольська А. Невизначені рівняння / А. Горохольська // Математика в школі. – 2003. – № 6. – С. 36–43.
63. Граве Дмитрий. Начала алгебры / Дмитрий Граве. – Петроград : Издание К. Л. Риккера, 1915. – 316 с.
64. Грацианская Л. Н. Павел Александрович Долгушин /Киевские математики-педагоги / [под.ред.чл. – кор. АН УССР А.Н. Боголюбова] / Л. Н. Грацианская. – К. :Вища школа, 1979. – С. 52–58.
65. Грацiанська Л. Н. Нариси з народної математики України / Л. Н. Грацiанська. – Київ : Вид-во Київського університету, 1968. – 95 с.
66. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.
67. Глушков П. М. Всеросійські з’їзди викладачів математики (1912 – 1914 рр) / П. М. Глушков // Методика викладання математики. – Вип. 1. – К. : Рад. Шк., 1964. – С. 139 – 156.
68. Гусев В. А. Геометрия 5-6 / В. А. Гусев. – М. : Русское слово, 2005. – 240 с.
69. Давыдов А. Элементарная геометрия в обьёме гимназического курса // А. Давыдов. – Москва : Издание книжного магазина В. В. Думнова под фирмою "Наслед. бр. Салаевых", 1907. – 348 с.
70. Давыдов А.Ю. Начальная алгебра / А. Ю. Давыдов. – М., 1866. – 590 с.
71. Данилюк П. Ф. Первый на Украине методико-математический журнал и его значение в борьбе за улучшения математической подготовки учащихся: автореф. дис. на соиск. научн. степени канд. пед. наук : спец. 13.731 "методика преподавания математики" / П. Ф. Данилюк.– К., 1971. – 30 с.
72. Данилюк П. Ф. Перший на Україні методико-математичний журнал та його роль у боротьбі за покращення математичної підготовки

44. Бондарёв С. И. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики / С. И. Бондарёв // Русская школа. – 1914. – № 3. – С. 70 – 73.
45. Боровик В. Н. Методика викладання математики в середній школі. Методична розробка теми: "Боротьба за прогресивні ідеї в методиці математики в Росії у кінці XIX – на початку XX століття" / В. Н. Боровик. – Київ : Вища школа, 1970. – 39 с.
46. Боровик В. Н. Курс математики: [навч. посібник для студ. педагогічних факультетів педінститутів] / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. – К.: Вища шк., 1995. – 392 с. :іл.
47. Брадис В. М. Как надо вичислять / В. М. Брадис. – Москва : Просвещение, 1965. – 80 с.
48. Брадис В. М. Теоретическая арифметика / В. М. Брадис. – М. : Учпедгиз, 1954. – 208 с.
49. Вагіна Н. С. Навчальна практика учнів основної школи з математики / Н. С. Вагіна // Математика в школі. – 2004. – № 4. – С. 32–40.
50. Варишнюк Н. Наступність у вивченні поняття величин між початковими і 5-6 класами / Н. Варишнюк // Математика в школі. – 2003. – № 8. – С. 25–27.
51. Вивальнюк Л. М. Київська алгебраїчна школа / Л. М. Вивальнюк. – Чернігів : Чернігівський державний педагогічний інститут, 1958 – 18 с.
52. Вивальнюк Л. М. Елементи історії математики: [навч. посібник] / Л. М. Вивальнюк, М. Я. Ігнатенко. – К.: Ін-т змісту і методики навчання, 1996. – 178 с.
53. Владимирский-Буданов М. Ф. История императорского Университета Св. Владимира. – Т.1. : Университет Св.Владимира в царствование Императора Николая Павловича / М. Ф. Владимирский-Буданов. – Киев : Типография Императорского Университета Св.Владимира. – 1884. – 677 с.
54. Возняк Г. М. Математика: [проб. підр. для учнів 6 кл. загальноосвітніх навчальних закладів] / Г. М. Возняк, Г. М. Литвиненко. – К. : Освіта, 2002. – 240 с.
55. Возняк Г. М. Математика 5 / Г. М. Возняк, Г. М. Литвиненко, М. П. Маланюк. – К. :Освіта, 2002. – 171 с.
56. Володкевич Н. Н. К вопросу о реформе преподавания математики / Н. Н. Володкевич. – Киев-Петербург : Сотрудник, 1910. – 60 с.
57. Володкевич Н. Н. Задачи педагогической деятельности. О принципах, которые должны быть положены в основу преподавания естествознания в средней школе / Н. Н. Володкевич. – Киев : Типография С. В. Кульженко, 1905. – 74 с.

Розглянемо для прикладу завдання для іспитів, запропонованих у V Київській гімназії у 1913 році.

Алгебра

1. "Два мандрівника одночасно вирушили в подорож; перший з них проїхав a верст, другий – b верст; причому другий проїжджав за годину на c верст більше, ніж перший. Скільки годин їхав перший, якщо він був у дорозі на t годин менше другого? При яких залежностях між a, b, c, t задача допускає два дійсні додатні розв'язки ?

2. Розкласти вираз за формулою Ньютона: $\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)^{16}$.

3. Розв'язати рівняння: $100\cdot 10^{2x-1}=\sqrt[5]{1000^7}$ " [187, с.17].

Геометрія

"Радіус кулі, вписаної у правильну шестикутну піраміду з двогранним кутом при основі α, дорівнює r. Знайти бічну поверхню зрізаної піраміди, що відтинає площина, дотична до вписаної кулі і паралельна площині основи піраміди; $\alpha = 59°14'14''$; $r = 50{,}678$ д" [187, с.18].

Найбільшу трудність з алгебри, як відмічає Г.Суслов, учні зустріли при розв'язуванні першої задачі з параметрами.

Дійсно, задача зводиться до складання квадратного рівняння:

$ct_1^{\,2}+(a-b+ct)\cdot t_1+at=0$, (де t_1 – час руху першого мандрівника).

Необхідною і достатньою умовою існування двох дійсних коренів даного рівняння є $D>0$, тобто $(a-b+ct)^2-4act>0$, або $(a-b+ct)^2>4act$, ($a>0$, $b>0$, $c>0$, $t>0$ – за умовою задачі).

Із формули коренів рівняння:

$$t_{1,2}=\frac{b-a-ct\pm\sqrt{(a-b+ct)^2-4act}}{2c}$$

випливає, що додатних значень t_1 і t_2 будуть набувати за умови: $b-a-ct>0$, або $\dfrac{a-b}{c}>t$.

Відповідь. $(a-b+ct)^2 > 4act$, $\frac{a-b}{c} > t$, (де a, b, c, t – додатні дійсні числа).

Випускники ж проводили повні дослідження рівняння відносно кожного з параметрів, що до нього входять. Вчений робить висновок, що учні (а також рецензенти їх робіт) не усвідомили до кінця що від них вимагається у задачі.

Геометрична задача, як відмічає Г.К. Суслов розв'язана ледве задовільно. Учні не уміють робити логарифмічні перетворення, спрощувати формули, мають нечітку просторову уяву, у поясненнях багато неточностей таких як "куля дотикається до граней по найменшій відстані, тобто по апофемі" або "лінія ділить двогранний кут навпіл" [187, с. 18], "центр кулі пройде через висоту піраміди" тощо [187, с. 12].

Більш плідною діяльність професорів університету щодо вирішення проблем шкільної математичної освіти могла бути лише на основі тісної співпраці з викладачами середніх навчальних закладів. Така форма роботи була передбачена статутом наукових (математичних) товариств.

Так, першим математичним товариством в Україні вважають математичне відділення Новоросійського товариства природодослідників (1876). Секція елементарної математики і фізики при цьому відділенні утворилась у 1888 році, яка під керівництвом проф. університету І. Слєшинського та за діяльної участі В. Кагана, С. Шатуновського, В. Преображенського, Х. Гофмана, П. Злотчанського, Е. Шпачинського (з 1891 р.) працювали над питаннями методів навчання математики, неевклідової геометрії, змісту шкільної геометрії, теорії геометричних побудов, розробки пропедевтичного та систематичного курсів тригонометрії тощо [36, с. 10-12].

Харківське математичне товариство (1879) об'єднало професорів університету: В. Імшенецького, К. Андрєєва, М. Тихомадрицького, О. Ляпунова, Д. Сінцова, С. Бернштейна, В. Стєклова, В. Бейера, М. Крилова й ін. та викладачів середніх навчальних закладів: О. Грузинцева (викладач 1-ї чоловічої гімназії, пізніше – ординарний професор Харківського

30. Березівська Л.Д. Реформування шкільної освіти в Україні у XX столітті: [монографія] / Л. Д. Березівська. – Київ : Богданова А. М., 2008. – 406 с.
31. Бернштейн С. К. М. Щербина "Математика в русской средней школе" / С. Бернштейн. // Педагогический сборник. – 1909. – № 12. – С. 512–515.
32. Бернштейн С. Н. Проект учебного плана для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом / С. Н. Бернштейн // Педагогический сборник. – 1908. – № 9. – С. 241–248.
33. Бернштейн С. Н. Об изменении программ по математике / С. Н. Бернштейн // Педагогический сборник. 1909. – № 11. – С. 370–388.
34. Бетина Н. П. Константин Моисеевич Щербина / Киевстие математики-педагоги / [под ред. чл.-кор. АН УССР А. Н. Боголюбова] / Н. П. Бетина – К. : Вища школа, 1979. – С. 117–124.
35. Библиография // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1900 – № 297. – С. 211–212.
36. Білий Б. М. Методика викладання математики. Становлення і розвиток в УРСР / Б. М. Білий. – К. : [редакційно-видавничий відділ Київського торгово-економічного інституту], 1971. – 286 с.
37. Билимович А. Реформа преподавания математики в Германии / А. Билимович. – Киев : Типография Императорского Университета Св. Владимира, 1907. – 28 с.
38. Билимович А. Д. Международная конференция о преподавании математики / А. Д. Билимович // Университетские известия. – 1915.– № 10. – С. 49 –71.
39. Билимович А. Д. Две модели // Сборник статей, посвященных проф. Г. К. Суслову / А. Д. Билимович. – Киев : Типография Императорского Университета Св. Владимира, 1911. – С. 163–166.
40. Біляніна О. Я. Геометрія: 10 кл.: академ. рівень: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / О. Я. Біляніна, Г. І. Білянін, В. О. Швець. – К. : Генеза, 2010. – 256 с.
41. Биография (Николай Михайлович Бубнов): [Електронний ресурс] // сайт: Русский биографический словарь. – дата публікації 23.06.2007. – Режим доступу до документу: http://www.peoples.ru/science/history/ nikolaj_bubnov/index.html.
42. Богданович М. Б. Методика викладання математики в початкових класах / Богданович М. Б., Козак М. В., Король Я. А. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2001. – 386 с.
43. Бойко О.Д. Історія України: посібник / О. Д. Бойко. – К. : Видавничий центр "Академія", 2002. – 656 с.

13. Арифметика / [сост. А.Малинин и К.Буренин]. – М. : Т-во Печатня С. П. Яковлева, 1911 – 248 с.
14. Архимович З. Н. А. Сорокин (Некролог) / З. Архимович // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1896 – № 235. – С. 169–171.
15. Астряб Ал. Наглядная геометрия / Ал. Астряб – Киев-Петербург : Сотрудник, 1909. – 152 с.
16. Астряб О. М. Наочна геометрія. / О. М. Астряб – К. : Державидав УРСР, 1922. – 131 с.
17. Атанасян Л. С. Курс элементарной геометрии. Ч. 1. Планиметрия / Л. С. Атанасян, Н. С. Денисова, Е. В. Силаев. – М. : "Санкс-Пресс", 1997. – 303 с.
18. Бевз Г. П. Геометрія: Підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт. Навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Вежа, 2001. – 272 с.
19. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: [монографія] / В. Г Бевз. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.
20. Бевз Г. П. Методи навчання математики / Г. П. Бевз. – Х. : Вид. група "Основа", 2003. – 96 с. – (Серія "Бібліотека журналу "Математика в школах України""; вип. 4).
21. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
22. Бевз Г. П. Виховання учнів математикою / Г. П. Бевз. – Х. : Вид. група "Основа", 2004. – 96 с. – (Серія "Бібліотека журналу "Математика в школах України""; вип. 5).
23. Бевз Г. П. Математика: Підруч. для 5 кл.загальноосвіт. навч. закл. // Г. П. Бевз, В. Г. Бевз – К. : Зодіак – ЕКО, 2005. – 352 с.
24. Бевз Г. П. Алгебра: Проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – 3-тє вид. / Г. П. Бевз.. – К. : Освіта, 2000. – 303 с.
25. Бевз Г. П. Математика в школах України / Бевз Г. П. – К. : Пед.преса, 2009. – 160 с.
26. Бекаревич А. Н. Приближённые вычисления в средней школе / А. Н. Бекаревич. – Минск : Народная асвета, 1979. – 96 с.
27. Бекаревич А. Н.Формирование понятия числа в 4-8 классах / А. Н. Бекаревич. – Минск : Народная асвета, 1985. – 120 с.
28. Белый Б. Н. Вопросы методики математики в работе Киевского физико-математического общества (1890 – 1917 гг.) / Б. Н. Белый // Математика в школе. – 1962. – № 4.– С. 84–88.
29. Березівська Л. Д. Освітньо-виховна діяльність київських просвітницьких товариств (друга половина XIX – поч. XX ст.): [монографія] / Л. Д. Березівська. – К. : Видавництво "Молодь", 1999. – 192 с.

університету), В. Шилова (директор Харківського реального училища), С. Раєвського, П. Руднєва, А. Зибера, В. Стоянова та ін. Педагогічний відділ Товариства приділяв найбільшу увагу підготовці викладачів математики в університетах, аналізу поширених підручників і посібників, розглядались способи розв’язування задач з курсів алгебри та геометрії, обговорювались програми з математики і фізики в середній школі, питання письмових іспитів з математики тощо [145, с. 647, 170, с. 248-249].

Значною мірою сприяло розвитку вітчизняної шкільної математичної освіти Львівське Наукове товариство імені Т. Г. Шевченка, створене у 1879 році (Західно-Українські землі на той час входили до складу Австро-Угорщини). Учасниками математично-природничо-лікарської секції товариства, математиками: О. Савицьким, П. Огоновським, В. Левицьким, М. Зарицьким, М. Чайковським та ін. були створені перші на українській мові підручники з математики, розроблялись окремі питання змісту навчання математики, формувалась українська математична термінологія [36, с. 11], [144].

Визначну роль у розвитку прогресивних тенденцій шкільної математичної освіти в Україні в кінці XIX – на початку XX ст. відіграло Київське фізико-математичне товариство (1889-1919 рр.) і, зокрема, його представники: Г. Суслов, В. Єрмаков, Д. Граве, А. Білімович, К. Щербина, К. Лебединцев, М. Володкевич, О. Астряб, П. Долгушин та ін.

1.2. Розвиток шкільної математичної освіти в кінці XIX – на початку XX ст.

У кінці XIX – на початку XX століття в Україні, що входила до складу Російської імперії, існувала "станова позанаціональна, платна, централізована шкільна освіта" [30, с. 22]. Вона окреслена Статутами навчальних закладів, прийнятими в 60-90 рр. XIX ст. й здійснювалась у двох напрямах: класичному та реальному. В основу першого покладені "початки віри, моральності, громадянського обов'язку і ґрунтовного навчання" [171, с. 107], а другий базувався на практичних засадах й готував до промислово-виробничої, технічної, комерційної й ін. діяльності.

Міністр освіти Д. О. Толстой (роки перебування на посаді: 1866 – 1880) зробив класицизм пануючим напрямом – класичний характер мали всі три ступені загальної освіти: початкова школа, нижча школа та середня школа (гімназія).

Початкові загальноосвітні навчальні заклади поділялись на приходські 1–4-х класні училища (за Статутом 1828 р.), міністерські початкові училища (за Положенням 1875 р.); церковнопарафіяльні школи (за Правилами 1884 р.) й ін. Випускникам початкових училищ надавалось право вступати до нижчих та середніх навчальних закладів.

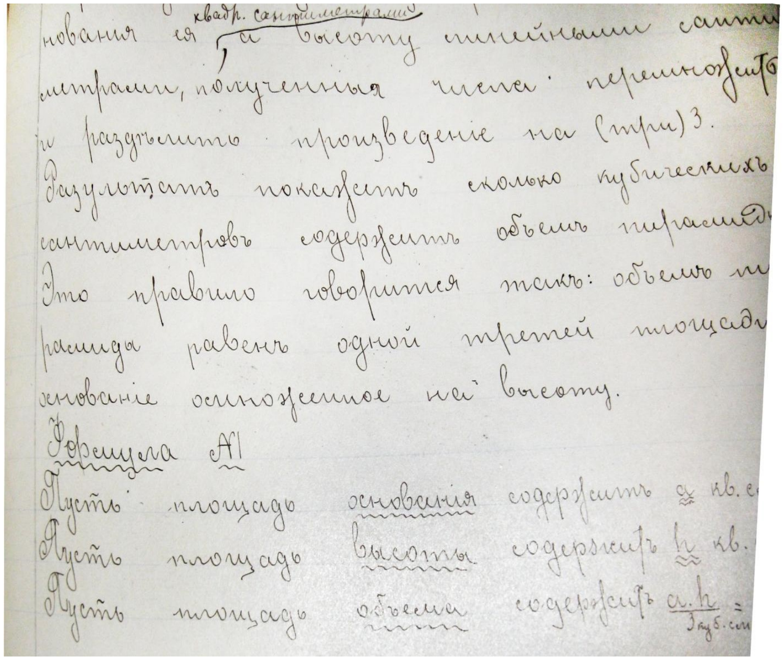
Мета початкових училищ – "утверджувати в народі релігійні й моральні поняття і поширювати початкові корисні знання", до яких "Положення" відносить і "чотири арифметичні дії" [284]. Так, у однокласних початкових училищах (3-4 роки навчання) на арифметику в кожному відділенні, що відповідало певному року навчання, відводилось 5 год. на тиждень. Така ж кількість годин відводилась на вивчення математики і в кожному відділенні двокласних початкових училищ МНО (5 років навчання). В останніх, крім арифметики, запроваджувався елементарний (практичний) курс геометрії [123, с.59]. Таким чином, курс математики (арифметики, геометрії) у початкових училищах мав пропедевтичний характер.

До нижчих загальноосвітніх навчальних закладів належали міські училища (за Положенням 1872 р.): трикласні та чотирикласні; земські училища (за Статутом 1872 р.); сільські початкові училища (за Положенням 1874 р.) та вищі початкові училища (за Положенням 1912 р.) з чотирирічним терміном навчання.

Нижча загальноосвітня школа розширювала програму початкової – включала частково систематичні курси основ наук,

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агрономическая помощь в России / [под. ред. В. В. Морачевского]. – Петроград : Издание департамента земледелия, 1914 – 607 с.
2. Александров А. Д. О геометрии Лобачевского // А. Д. Александров // Математика в школе. – 1993. – № 2. – С. 2–7.
3. Александров А. Д. О геометрии Лобачевского / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1993. – № 3. – С. 2–5.
4. Александров В. Подробные правила и учебные программы всех классов женских гимназий и прогимназий Ведомства Министерства Народного Просвещения / В. Александров. – Одесса : Книгоиздательство "Школа". – 1917. – 117 с.
5. Александров И. И. Розыскание условий равенства и подобия с помощью геометрических задач на построение / И. И Александров. // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1892 – № 154. – С. 204–207.
6. Александров П. С. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях. / П. С. Александров, А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1941. – № 2. – С. 1–13.
7. Анастасьев А. Основы успешного обучения. Очерки дидактики. / А. Анастасьев. – Казань : Издание книжного магазина А. А. Дубровина, 1902. – 204 с.
8. Андреевский И. С. Классическое и реальное образование / И. С. Андреевский. – Глухов : Печатня наслед. Шумицкого, 1900. – 53 с.
9. Андронов И. К. Арифметика дробных чисел и основных величин / И. К. Андронов. – М. :Учпедгиз, 1955. – 344 с.
10. Андронов И. К. Возникновение и развитие 14 международных математических конгрессов / И. К. Андронов // Уч. записки Моск. обл. пединстута. – 1967. – Т. 35. – вып. 5. – С. 3–19.
11. Андронов И. К. Три этапа в развитии международного школьного математического образования / И. К. Андронов // Уч. записки Моск. обл. пединстута. – 1967. – Т. 35. – вып. 5. – С. 66 –77.
12. Антонович О. Я. Новое учёное общество в Киеве / О. Я. Антонович // Киевское слово. – 1890. – № 882. – С. 3.



нования ея квадр. сантиметрами, а высоту линейными санти

метрами, полученныя числа перемножить

и раздѣлить произведеніе на (три) 3.

Результатъ покажетъ сколько кубическихъ

сантиметровъ содержитъ объемъ пирамид

Это правило говорится такъ: объемъ п

рамида равенъ одной третей площад

снованіе умноженное на высоту.

Формула №1

Пусть площадь основанія содержитъ a кв. с

Пусть площадь высоты содержитъ h кв.

Пусть площадь объема содержитъ $\frac{a.h}{3\text{куб.см}} =$

Джерела: [321].

зокрема, короткі систематичні курси арифметики, алгебри та геометрії. Так, у Дроздівському вищому початковому училищі Ніжинського повіту на математику (арифметику, алгебру та геометрію) на всі класи разом відводилось 23 год. [320, арк. 57]. Після закінчення нижчого загальноосвітнього закладу випускники мали право вступати до середніх спеціальних закладів.

У середній загальноосвітній школі вивчались більш закінчені систематичні курси, що включали основи наук. Курс математики в них містив арифметику, алгебру, геометрію та тригонометрію. Основними типами середніх загальноосвітніх закладів вважались чоловічі класичні гімназії (і прогімназії – неповні гімназії) та реальні училища Міністерства народної освіти.

Чоловіча гімназія була провідною ланкою між початковою та вищою освітою, відкривала доступ до університету та до вищих спеціальних навчальних закладів. Таким чином, утворювалась умовна неперервність освіти (нижчі навчальні заклади були тупиковими). Крім цього, загальну освіту класичного характеру отримували й у закладах інших відомств, наприклад Синоду [171].

Статут чоловічих гімназій був затверджений 30 липня 1871 року, а реальних училищ – 15 травня 1872 року [280, 261]. Невеликі зміни до даних статутів відбулися відповідно у 1890 та у 1888 рр. Термін навчання в гімназіях становив 8 років (з підготовчим класом 9-10 років), в прогімназіях, як правило, 4 роки (плюс 1-2 роки в підготовчому класі). На математику в ній (на всі класи разом) відводилось 30 тижневих годин. Перед предметом ставилась виключно формальна мета навчання.

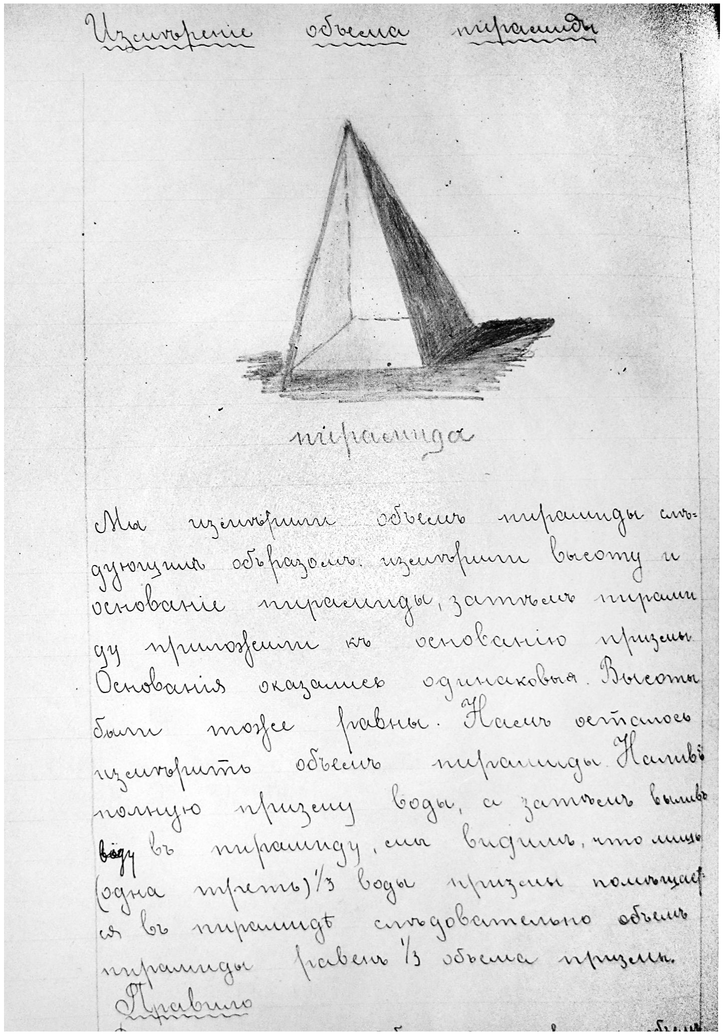
Реальні училища давали загальну освіту, пристосовану до практичних потреб і здобуття технічних знань. Тому програма з математики була розширеною у порівнянні з гімназіями, на її вивчення (на всі класи разом) відводилась 31 година на тиждень. Тривалість навчання становила 6 років. Щоб бути допущеним до екзамену у вищі технічні навчальні заклади (доступ до університету був закритий), необхідно було пройти ще й курс додаткового сьомого класу [287].

У досліджуваний період існувало три типи жіночих гімназій: Маріїнські (відомства імператриці Марії за Статутом 1862 р.), міністерські (за Статутом 1871 р.) та приватні, що дотримувались правил та програм гімназій Міністерства народної освіти [248, с.1]. Жіночі гімназії МНО являли собою "відкриті навчальні заклади для учениць усіх станів" з терміном навчання 7 років. Кількість тижневих годин, що виділялись на математику на всі класи разом, починаючи з підготовчого, становила 25 год. [4]. За даним статутом у жіночих гімназіях створювався 8-й додатковий клас, після закінчення якого ученицям надавалось право викладати початковий курс російської історії, російської мови та арифметики у гімназії і право вступати на вищі педагогічні курси без іспитів [139]. З математичних дисциплін у додатковому (педагогічному) класі програмою за 1911 р. передбачалось вивчення теоретичної арифметики (1 год.), алгебри (2 год.), геометрії (2 год.), тригонометрії (2 год.) та методики арифметики (2 год.) [244, с.60]. З аналізу програм з математики (для загальноосвітніх класів) для жіночих гімназій МНО [4], можна зробити висновок, що вони являли собою скорочений варіант відповідних програм з математики для чоловічих гімназій. Програми з математики додаткового класу жіночих гімназій, крім повторення за попередні класи, містили теми, що доповнювали даний курс до обсягу його вивчення у чоловічих гімназіях.

Уряд дозволяв відкривати й приватні навчальні заклади трьох розрядів: а) училища першого розряду (не менше 6 класів); б) училища другого розряду (не менше 3 класів); в) училища третього розряду (1-2 класні). При цьому засновник училища мав зобов'язання проводити навчання за підручниками, затвердженими МНО [284, с.31].

Для підготовки вчителів для початкових та нижчих училищ відкривались учительські семінарії ("Положення" 1870) та вчительські інститути ("Положення" 1872). Викладачами

"Измерение объема пирамиды. 1910 год. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. С. Врачинской"

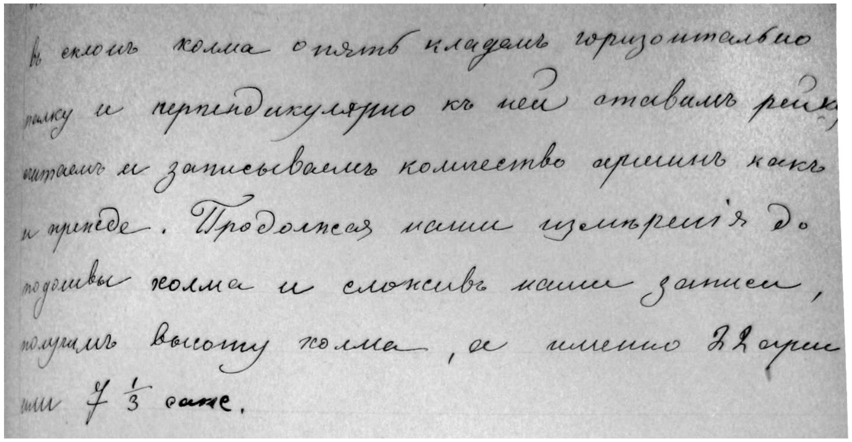


Измѣреніе объема пирамиды

пирамида

Мы измѣрили объемъ пирамиды слѣдующимъ образомъ: измѣрили высоту и основаніе пирамиды, затѣмъ пирамиду приложили къ основанію призмы. Основанія оказались одинаковыя. Высоты были тоже равны. Намъ осталось измѣрить объемъ пирамиды. Налили полную призму воды, а затѣмъ вылили воду въ пирамиду, мы видимъ, что лишь (одна треть) 1/3 воды призмы помѣщается въ пирамидѣ слѣдовательно объемъ пирамиды равенъ 1/3 объема призмы.

Правило



въ склонъ холма опять кладемъ горизонтально
лку и перпендикулярно къ ней ставимъ рейк
читаемъ и записываемъ количество аршинъ какъ
и прежде. Продолжая наши измѣренія до
подошвы холма и сложивъ наши записи,
получимъ высоту холма, а именно 22 арши
ши 7 $\frac{1}{3}$ саж.

математики середніх навчальних закладів ставали випускники університетів.

До середніх професійних навчальних закладів належали, зокрема, кадетські корпуси, комерційні та технічні училища. Основним завданням кадетських корпусів (за Положенням 1886 р.) з терміном навчання 7 років була попередня підготовка до військової служби. Ці навчальні заклади підпорядковувались Військовому міністерству. Зміст курсу математики в них наприкінці XIX століття відповідав курсу реальних училищ, проте кількість годин на його вивчення відводилось більше – 36 год на тиждень [224, 123, с.73].

Діяльність комерційних училищ регламентувалася Положенням про комерційні навчальні заклади (1896 р.) та Положенням про комерційні навчальні заклади зі внесеними змінами (1900 р.). Такі училища (чоловічі й жіночі, а також змішані) засновувались Товариствами поширення комерційної освіти та підпорядковувались Міністерству торгівлі й промисловості та Міністерству фінансів. Разом із різними спеціально комерційними знаннями училища надавали й загальну освіту. Так, за програмами 1914 року на математику (на всі класи разом – 7 років навчання) відводилась 31 година. Зміст курсу математики у комерційних училищах наближався до відповідного курсу класичних гімназій (з тією відмінністю, що програми училищ втілювали прогресивні методичні ідеї досліджуваного періоду) [233, с. 55-64].

Програми середніх технічних училищ (4 роки навчання) були затверджені Міністерством народної освіти у 1895 р. і діяли з незначними змінами до 1917 р. Математика вивчалась у І та ІІ класах: у І – геометрія (елементи стереометрії) і плоска тригонометрія; у ІІ – відомості з аналітичної геометрії. У пояснювальній записці до програми з математики проголошувався як прикладний, так і загальноосвітній напрями вивчення предмету [220, с.73].

З огляду на те, що класичні гімназії та реальні училища були основними типами загальноосвітніх шкіл, що готували до здобуття вищої освіти та реалізовували відповідно класичний та реальний напрями освіти, а програми (зокрема, з математики), методи й форми навчання та виховання у них були певним орієнтиром відповідно для складання програм та наслідування у середніх та нижчих навчальних закладах, є доцільним висвітлення концептуальних засад класичної та реальної середньої освіти кінця XIX – початку XX ст. Для нашого дослідження це важливо й тому, що діяльність Київського фізико-математичного товариства була спрямована на удосконалення шкільної математичної освіти (що відповідала чоловічим класичним гімназіям).

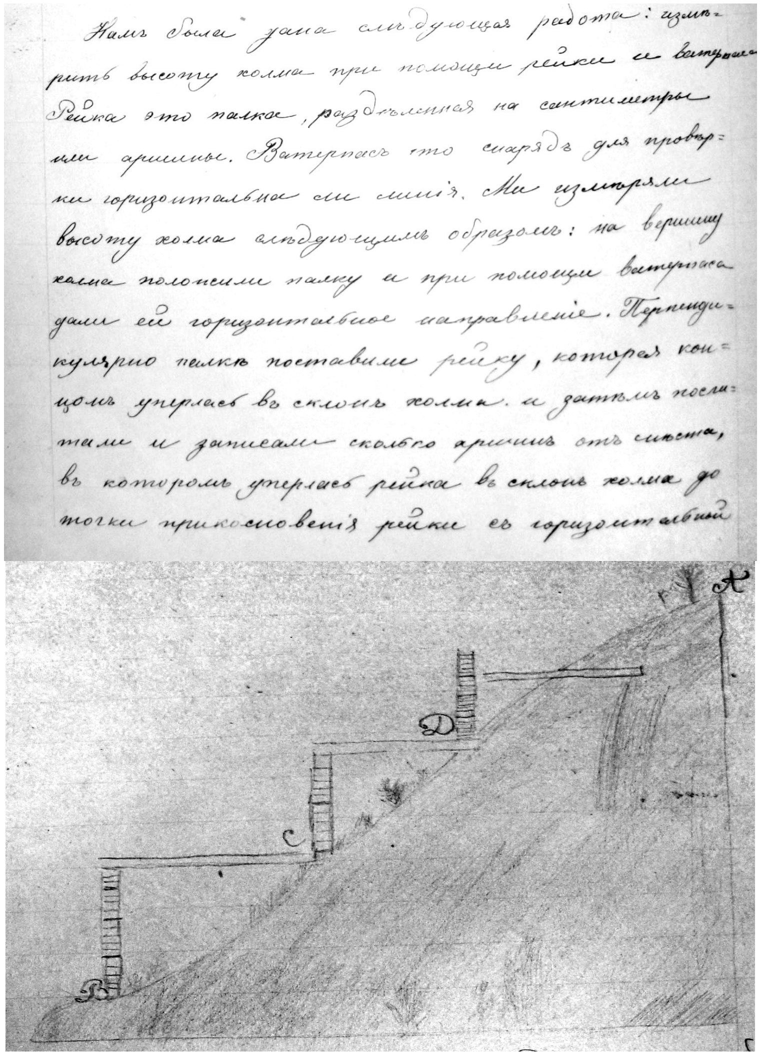
Класичне спрямування тогочасних гімназій полягало у тому, що принципи освіти, а також зміст, мета, форми, методи, засоби навчання базувались на основах філософії ідеалізму. Особливістю гімназії була підготовка до життя, пов’язаного з інтелектуальною діяльністю (діяльністю розуму), а тому офіційна позиція щодо змісту гімназичного курсу полягала у доцільності вивчення тих предметів, що мало спираються на життєву практику [171].

Представники класичної освіти, якими були на той час М. Н. Катков, Д. А. Толстой, А. М. Георгієвський та ін. проводили в життя теорію, розвинену у педагогічних концепціях філософів: Г. Песталоцці, А. Дістерверга, Й. Гербарта, П. Барта та ін. за якою процес набуття знань деяких предметів не лише розвиває розум у буквальному сенсі, але й породжує особливі розумові якості: логічність мислення, правильність суджень, обдуманість висновків, глибину мислення тощо не лише стосовно предмета, що вивчається, а й стосовно загального розумового розвитку людини [171, 104]. До таких предметів загальноосвітнього курсу відносили класичні мови й математику.

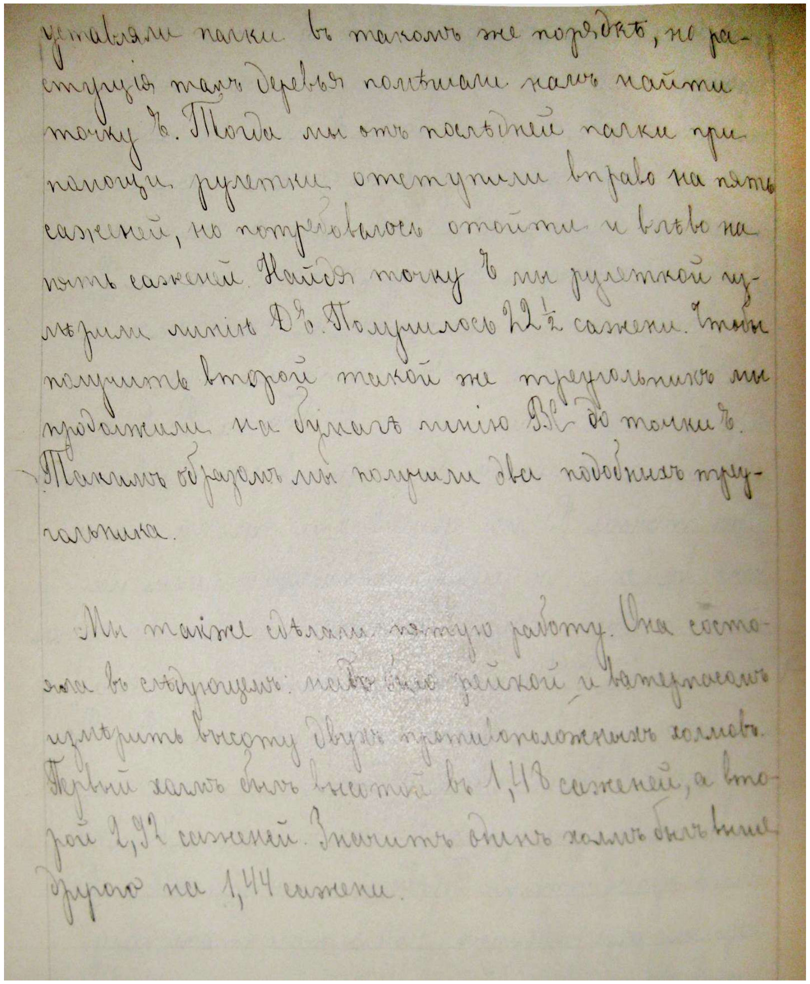
Розглянемо характерні особливості класичної і реальної систем освіти.

Предмети, які вивчались у класичній школі певним чином відповідали "енциклопедії наук", що склалась ще за олександрійського й римського періоду. Остання, як відомо, містила: *trivium* (граматику, риторику, діалектику) та *quadrivium*

"Вычисление высоты холма. 1910 год. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. Я. Рогалевич"



Намъ была дана слѣдующая работа: измѣ=
рить высоту холма при помощи рейки и ватерпаса.
Рейка это палка, раздѣленная на сантиметры
ли аршины. Ватерпасъ это снарядъ для провѣр=
ки горизонтальна ли линія. Мы измѣряли
высоту холма слѣдующимъ образомъ: на вершину
холма положили палку и при помощи ватерпаса
дали ей горизонтальное направленіе. Перпенди=
кулярно палкѣ поставили рейку, которая кон=
цомъ уперлась въ склонъ холма. и затѣмъ посчи=
тали и записали сколько аршинъ отъ мѣста,
въ которомъ уперлась рейка въ склонъ холма до
точки прикосновенія рейки съ горизонтальной



уставляли палки въ такомъ же порядкѣ, но растущія тамъ деревья помѣшали намъ найти точку Е. Тогда мы отъ послѣдней палки при помощи рулетки отступили вправо на пять саженей, но потребовалось отойти и влѣво на пять саженей. Найдя точку Е мы рулеткой измѣрили линію DЕ. Получилось 22½ сажени. Чтобы получить второй такой же треугольникъ мы продолжили на бумагѣ линію ВЕ до точки Е. Такимъ образомъ мы получили два подобныхъ треугольника.

Мы также сдѣлали пятую работу. Она состояла въ слѣдующемъ: нужно было рейкой и ватерпасомъ измѣрить высоту двухъ противоположныхъ холмовъ. Первый холмъ былъ высотой въ 1,48 саженей, а второй 2,92 саженей. Значитъ одинъ холмъ былъ выше другого на 1,44 сажени.

(арифметику, геометрію, астрономію, музику) й відображала три основні напрями пізнання:

– пізнання буття;
– моральне пізнання;
– естетичне пізнання.

Проте назви предметів та їх зміст у класичній гімназії другої половини XIX століття зазнали певних змін. Так, граматика включала російську, стародавні та нові іноземні мови, риторика називалась теорією словесності (із включенням історії літератури), діалектика – логікою, астрономія – космографією. Курс арифметики доповнений курсом алгебри. До риторики в античні часи входило вивчення історії, географії і політики як допоміжних дисциплін, а також етики і фізики. Ці знання увійшли до гімназійних програм як самостійні дисципліни, проте природознавство (хімія, біологія) і фізика були скорочені до мінімуму, а етика, як окрема галузь, викладалась на уроках Закону Божого [8, с.35 – 41, 171, с. 97].

В основу вивчення світу і наук про нього покладені наступні філософські категорії:

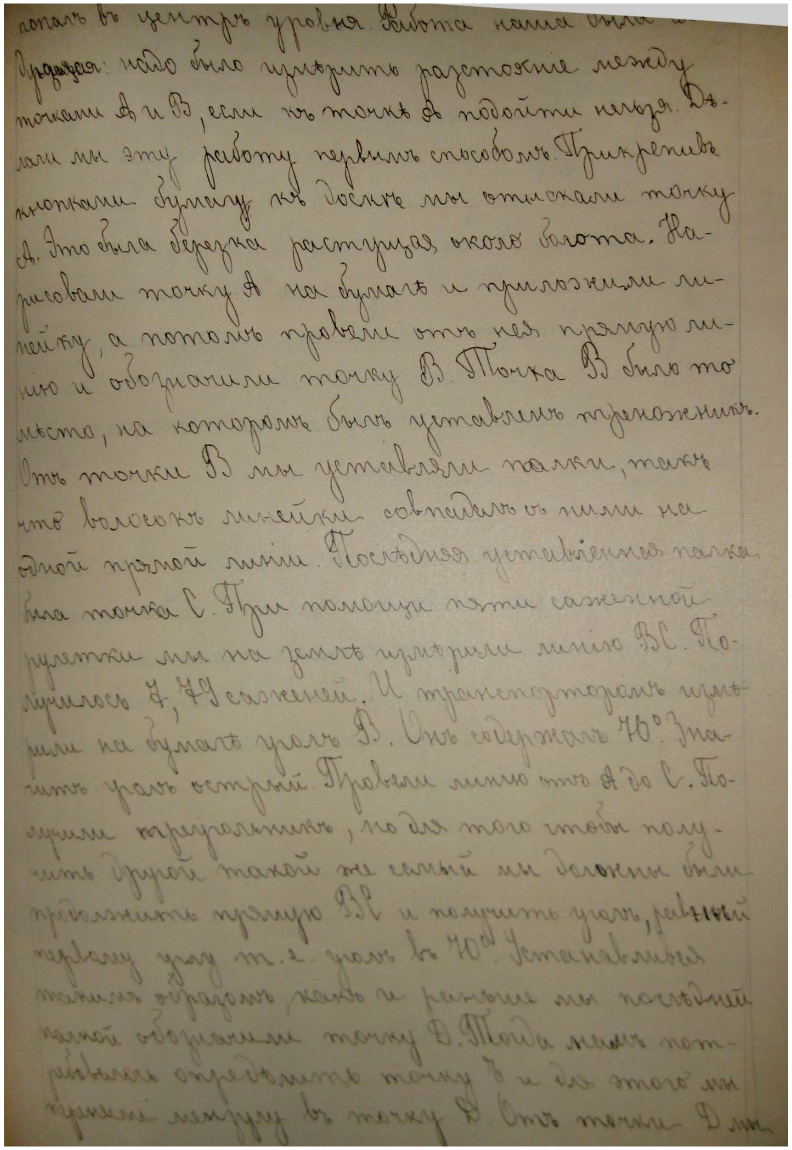
– категорії буття – мета, форма;
– категорії розуму – кількості (поняття єдності, множини, цілісності) та якості (поняття реальності, заперечення, обмеження) (за Аристотелем);
– схемою чистих понять розсудку вважався простір;
– основний логічний закон – закон тотожності (за Кантом).

Оскільки істинно сущим вважалась форма, а "матерія – ніщо", причина руху та засіб виробництва нехтувались як зовнішні, окремі умови існування явищ. Найвищою суспільною метою виховання і навчання (Ідеалом) та самовиховання мала стати *Досконала людина* – предмет любові, безумовна істина, вище благо і краса. Тому класична школа ще називалась гуманістичною. Освітня досконалість (мета навчання та самонавчання упродовж усього життя) людини полягала у розумінні нею суті (форм) речей та мети й внутрішнього сенсу явищ. Духовна досконалість (мета виховання та самовиховання) – у спокійному самоволодінні, не бунтівному стані духу, що будує життя просвітлене свідомістю. Метою навчання у гімназії було повідомлення учню певних поглядів, урівноваження його душевних здібностей, приведення до системи знань, при цьому розвиток розумових здібностей розглядався як наслідок навчання.

Провідним принципом класичного навчання було вивчення довершених (ідеальних) форм, які вважались вищими стадіями розвитку явищ, при нехтуванні їх еволюцією (хоч в дійсності, можливо, і не існувало таких форм). Норми моралі, етичні норми, естетичні приклади й закони логіки мали стати критеріями для оцінки явищ та формувати "правильний" напрям розуму. Навіть сам розвиток тлумачився як аналітичне розкриття форми, а не низка неперервних змін. Закон причинності виникнення явищ пояснювався існуванням Абсолютної Волі або Абсолютного Розуму. Пріоритетною здібністю або найвищою божественною здібністю вважався розум людини – ступінь пізнання, що полягав у формуванні й упорядкуванні знань, їх систематизації. Чуттєве пізнання нехтувалось й переважала спіритуалізація (одухотворення, ідеалізація) предметів та явищ. Так, користувались поняттям "дух навчання" під яким розуміли сенс, мету, систему, план навчання. У зв’язку з цим перевага надавалась навчальним програмам і планам над методами і засобами навчання [8, с.7-16].

Форма розглядалась як благо і краса. Вищою формою, ідеєю ідей вважався Бог. Виховання означало розкриття ідеальної форми у вихованця. Засобом виховання вважалось знання. Саме знання було силою, що формує і упорядковує волю і почуття, урівноважує духовні здібності. Самовиховання або розкриття форми у собі зумовлювалось пізнанням досконалої форми, обмеженням і самообмеженням, тобто виключенням усього індивідуального (нерозумного) і поводження відповідно до досконалої форми.

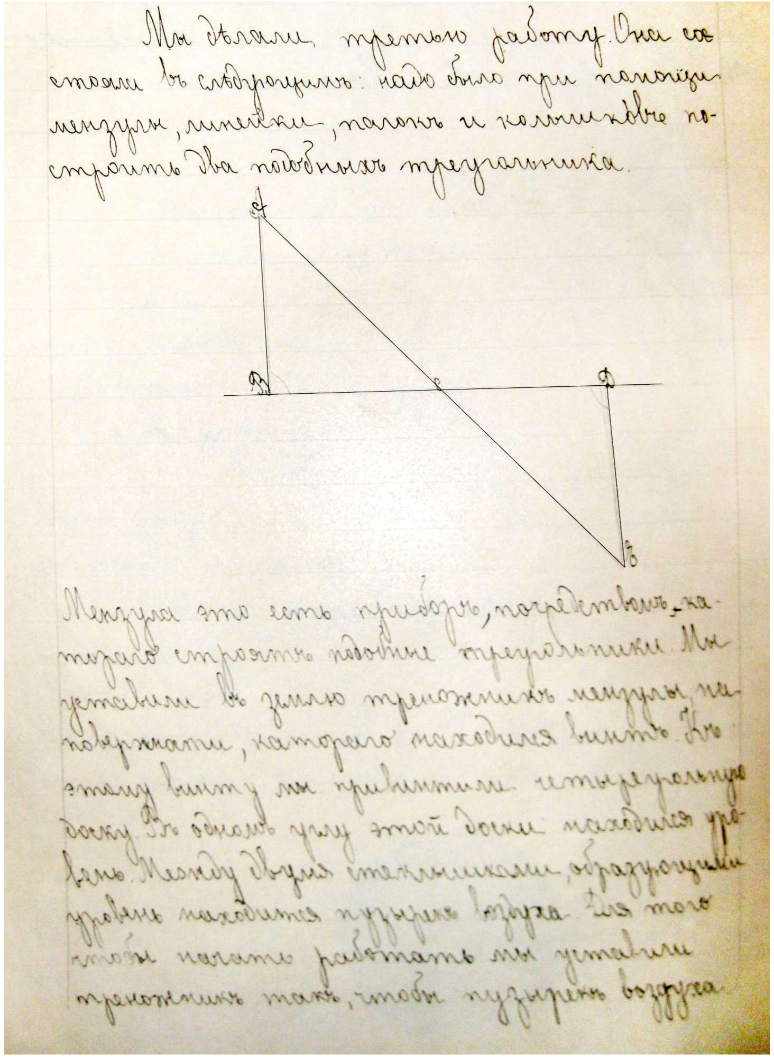
Другим принципом можна назвати принцип підпорядкування (нижча форма потребує підпорядкування вищій формі, форма потребує підпорядкування чуттєвого, одиничне



попалъ въ центръ уровня. Работа наша была

трудная: надо было измѣрить разстояніе между точками А и В, если къ точкѣ А подойти нельзя. Дѣлали мы эту работу первымъ способомъ. Прикрепивъ кнопками бумагу къ доскѣ мы отыскали точку А. Это была березка растущая около болота. Нарисовали точку А на бумагѣ и приложили линейку, а потомъ провели отъ нея прямую линію и обозначили точку В. Точка В было то мѣсто, на которомъ былъ установленъ треножникъ. Отъ точки В мы уставляли палки, такъ что волосокъ линейки совпадалъ съ ними на одной прямой линіи. Последняя установленная палка была точка С. При помощи пяти саженной рулетки мы на землѣ измѣрили линію ВС. Получилось 7,79 саженей. И транспортиромъ измѣрили на бумагѣ уголъ В. Онъ содержалъ 70°. Значитъ уголъ острый. Провели линію отъ А до С. Получили треугольникъ, но для того чтобы получить другой такой же самый мы должны были продолжить прямую ВС и получить уголъ, равный первому углу т.е. уголъ въ 70°. Устанавливая такимъ образомъ, какъ и раньше мы последней палкой обозначили точку D. Тогда намъ потребовалось определить точку Е и для этого мы перенесли мензулу въ точку D. Отъ точки D мы

"Измерение недоступного расстояния. 1910 год. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. Р. Барабтарло"



Мы дѣлали третью работу. Она состояла въ слѣдующемъ: надо было при помощи мензулы, линейки, палокъ и колышковъ построить два подобныхъ треугольника.

Мензула это есть приборъ, посредствомъ котораго строятъ подобные треугольники. Мы установили въ землю треножникъ мензулы, на поверхности, котораго находился винтъ. Къ этому винту мы привинтили четырехугольную доску. Въ одномъ углу этой доски находился уровень. Между двумя стеклышками, образующими уровень находится пузырекъ воздуха. Для того чтобы начать работать мы установили треножникъ такъ, чтобы пузырекъ воздуха

підпорядковується ідеальному, загальному). Даний принцип лежить в основі обов'язку та дисципліни учнів.

За цим же принципом давалось і обґрунтування методу як шляху руху думки від загального до часткового як єдиного правильного (дедуктивний метод) [8, с.9-17].

Для підтримки і формування спокійного і розсудливого настрою, а також за принципом впливу вищої форми (вчителя) на нижчу (учня) використовувались догматична форма (метод за сучасною термінологією) навчання. За принципом розкриття форми розуму (розумовий розвиток), як здібності упорядкування знань, усвідомлення суті речей – використовувалась і діалогічна форма (зокрема, евристичний метод).

Третій принцип – єдність навчання і виховання полягав у тому, що вивчення довершених форм (ідей, теорій, понять, законів, правил, систем тощо) одночасно було вивченням етичних і естетичних зразків (норм) і таким чином формувалися критерії краси і моральності [8].

Виділимо ще один – *четвертий принцип*, що характеризував класичний напрям освіти – закон "*триєдиного руху синтезу*" (за Песталоцці) або *основний закон педагогіки.* За ним пояснювалась організація змісту навчання і виховання (включно до уроку та його окремих питань). Три головні ступені пізнання відповідають трьом душевним здібностям: сприймання (або наївний розсудок), розсудок, розум. Сприймання – усвідомлення одиничного, виділення форми із матерії (наприклад, формування абстрактних понять за сучасною термінологією), розсудок – споглядання низки окремих об'єктів для встановлення ідейного зв'язку між ними (наприклад, класифікація понять); розум – встановлення шуканої останньої єдності (наприклад, системи понять). За цим же принципом пояснювалось і утворення окремого поняття. Таким чином, навчання характеризувалось систематичністю знань (енциклопедизмом), що мали міцно закріпитись в пам'яті. Тому міцна пам'ять учня була необхідною умовою його успішності та пріоритетною здібністю [109, с.83-86, 8].

Даний закон пояснював також існування відповідності між загальним розвитком інтелекту, волі та естетичного розвитку і ступенем навчання, наприклад, математики (так само як і мови, історії, природознавства тощо). У цьому й бере початок концентрація змісту освіти навколо певного ступеня навчання, де усі предмети взаємодіють між собою, є один для одного корисною опорою та узгоджуються на усьому шляху розвитку учня і, таким чином, сприяють утворенню у його свідомості основ стрункого світогляду. Проте питання концентрації та пов’язане з ним питання міжпредметних зв’язків крім з’ясування їх суті не було у достатній мірі розроблене для реалізації у практиці навчання [108, с. 211, 109, с. 87].

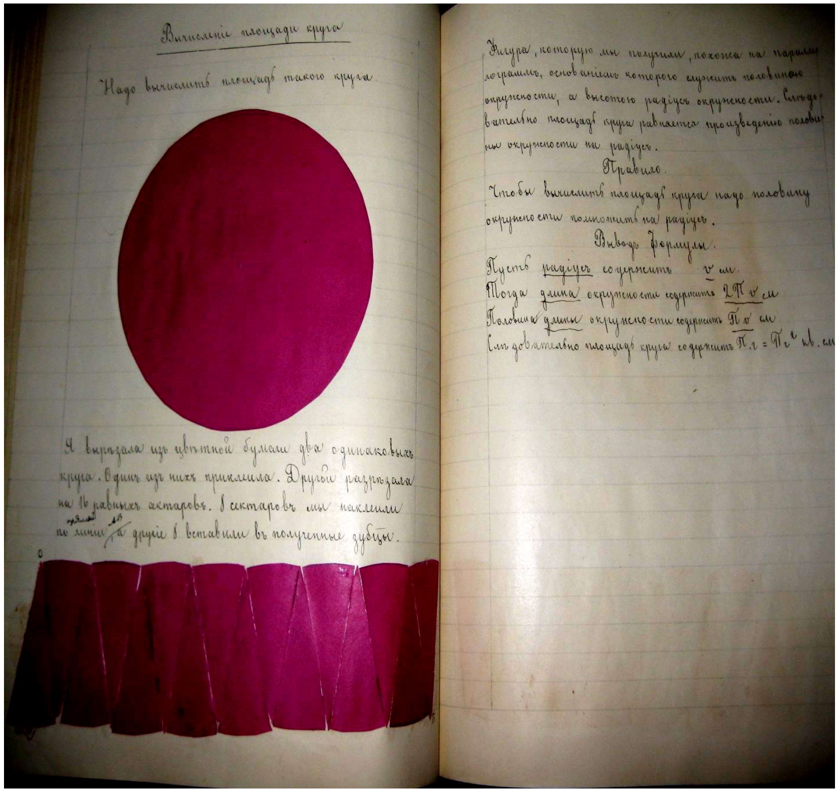
Головне місце математики у системі класичної освіти обґрунтовувалось необхідністю вивчення форм протяжностей (геометрія, тригонометрія) і часу (арифметика, алгебра), а також тим, що формальна логіка, як засіб пізнання, має найбільше поле застосувань при вивченні математичних істин. Прибічники класицизму відстоювали положення про недоцільність введення диференціального й інтегрального числення та аналітичної геометрії, пояснюючи це тим, що класична наука переважно займалась статикою (установленими відношеннями) явищ та нехтувала рухом, прогресом (зміною явищ) [8, с. 38-39].

Програми реальних училищ за статутом 1888 р. відрізнялись від класичних гімназій тим, що не містили стародавніх мов та вивчення логіки, а також більшою, у порівнянні з гімназією, кількістю годин на фізику, географію, російську мову і, особливо, на математику та нові іноземні мови [159].

Сучасна педагогіка творцем теорії матеріальної (реальної) освіти вважає Г. Спенсера (1820-1903) [59, с. 147]. Склад загальноосвітнього курсу за Г. Спенсером формується з урахуванням п’яти видів людської діяльності, необхідної для розумного і щасливого життя: самозбереження, здобування засобів до життя, виховання потомства, виконання соціальних функцій і дозвілля [108, с.119]. Крім цього, матеріальна освіта керується наступними філософськими принципами [8, с.5 -7]:

– категоріями буття: матерія, сила (за Аристотелем)

"Вычисление площади круга. 1910 год. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. С. Ворочинской"



Вычисленіе площади круга

Надо вычислить площадь такого круга.

Я вырѣзала изъ цвѣтной бумаги два одинаковыхъ круга. Одинъ изъ нихъ приклеила. Другой разрѣзала на 16 равныхъ секторовъ. 8 секторовъ мы наклеили по прямой линіи АВ, а другіе 8 вставили въ полученные зубцы.

Фигура, которую мы получили, похожа на параллелограммъ, основаніемъ котораго служитъ половина окружности, а высотою радіусъ окружности. Слѣдовательно площадь круга равняется произведенію половины окружности на радіусъ.

Правило.

Чтобы вычислить площадь круга надо половину окружности помножить на радіусъ.

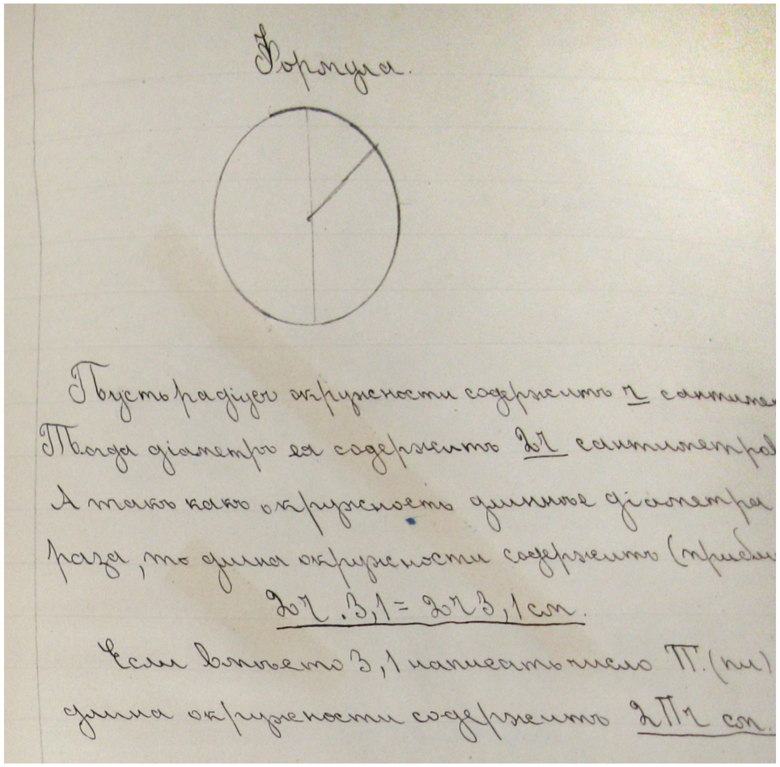
Выводъ формулы.

Пусть радіусъ содержитъ r см.

Тогда длина окружности содержитъ $2\pi r$ см

Половина длины окружности содержитъ πr см

Слѣдовательно площадь круга содержитъ $\pi . r = \pi r^2$ кв. см



Формула.

Пусть радіусъ окружности содержитъ r сантим

Тогда діаметръ ея содержитъ $2r$ сантиметро

А такъ какъ окружность длиннѣе діаметра

раза, то длина окружности содержитъ (прибл

$2r.3,1 = 2r3,1$ см.

Если вмѣсто 3,1 написать число π.(пи)

длина окружности содержитъ $2\pi r$ см.

– категоріями розуму: модальності (можливість, дійсність, необхідність) та відношення (самобутність, причинність, взаємодії) (за Кантом).

– схемою чистих понять розсудку служив час (за Кантом);

– основний логічний закон – закон достатньої підстави;

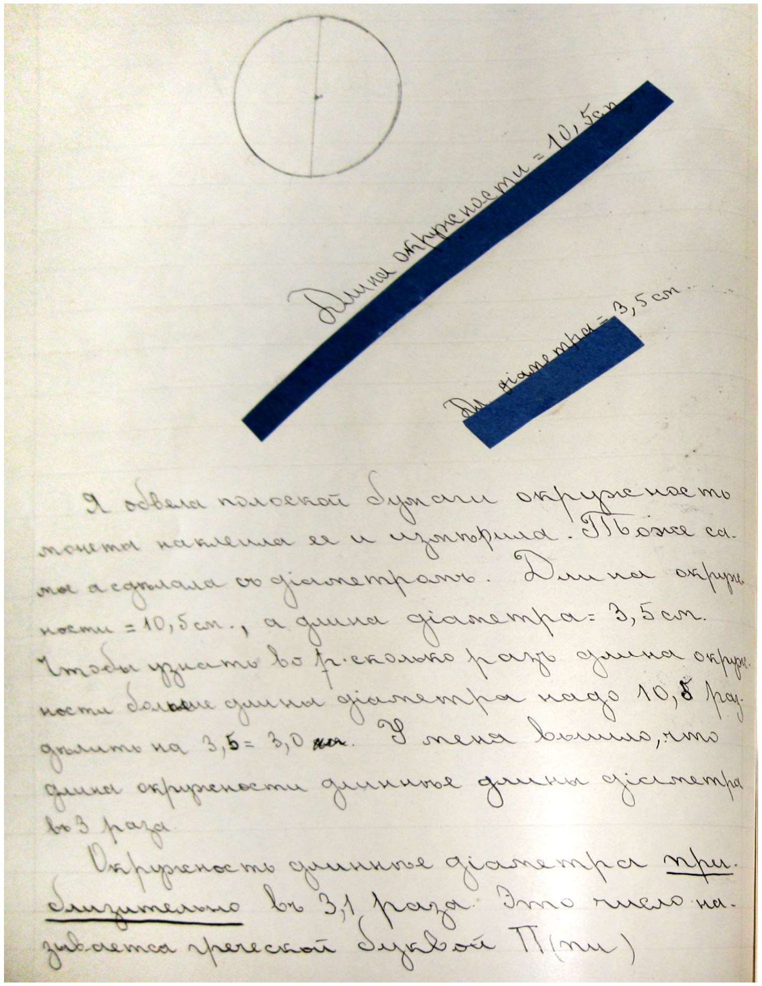
– види руху: 1) виникнення і знищення; 2) зміна, зміна якості; 3) збільшення, зменшення; 4) переміщення в просторі (за Аристотелем).

Матерія і сила – самобутні незалежні принципи. Форма і мета мають другорядне значення. При постійній зміні явищ форма зливається з методом (процесом). Формалізм властивий матеріальній науці, проте він розуміється як строго наукове, витончене дослідження [8, с. 32], або ж розумові прийоми та методи обробки фактичного знання. Формальні знання – поверхові знання [108]. Навчання розглядалось як процес, методичний розвиток здібностей, збудження мислительної діяльності. Головним принципом матеріальної освіти можна назвати принцип *корисності*. За ним знання, що мали закріпитись у пам'яті розглядались як сума знань (а не система), яка без практичного застосування визнавалась мертвим капіталом. Дійсність обґрунтовувалась як світ феноменів, підпорядкованих закону фізичної чи логічної необхідності. Бог – природа, його закони – закони природи. Діяльність, праця – ототожнюється зі щастям. Інтуїція і споглядання розглядалось як чуттєве спостереження. Виділимо другий принцип: оскільки матерія визначає форму, *критерієм істинності вважався метод індуктивний, дослідний*. Іншим критеріям (логічного, етичного, естетичного) не надавалось достатньої уваги. Воля – діяльнісна. Енергійний діяльнісний характер людини – найвища мета виховання. Та оскільки критеріїв оцінки явищ, зразків поведінки матеріальна наука не мала, то і виховання мало умовний характер: краса і естетика полягала у витонченості методів, прийомів, ходах гри, у діях та вчинках тощо; мораль – у підкоренні успіху, силі, багатстві, проповіді праці, накопиченні багатства і їх експлуатації; почуття обов'язку розглядалось як почуття залежності від фізичних сил. У концепції матеріальної освіти заперечувалась також і дисципліна. Благом вважалось прагнення до досягнення певної мети (наприклад, збільшення суми матеріальних цінностей) [8, с.17-32].

Відтворити у процесі навчання і виховання методи природи й історичний хід розвитку людини – мета реальної освіти. Як наслідок – висувається *принцип наступності* навчання – пов'язування нових знань із раніше набутими, приведення в рух усього відомого, розрив уже утворених асоціацій, намагання утворити нові, постійний рух уявлень. У навчанні пропагувалось використання методів індуктивного – як руху думки від конкретного до загального та дедуктивного як оберненого до індуктивного. Курс математики у реальній школі міг включати аналітичну геометрію, диференціальне й інтегральне числення. Практична частина (розв'язування задач) повинна була домінувати над теорією [8, с. 43]. Концентрація змісту загальноосвітньої школи визначалась деяким предметом навчання, як точки перетину різноманітних знань (що мав найбільше фактичних та логічних зв'язків з іншими предметами).

Слід зазначити що на початку ХХ ст. існувало й інше обґрунтування теорії формальної (класичної) та матеріальної (реальної) освіти. Матеріальна освіта ототожнювалась з енциклопедизмом за різноманітністю предметів, що мали вивчатись у загальноосвітньому курсі: "за намаганням дати якомога більше матеріалу у навчанні і за слабкістю розвитку методів для обробки і оволодінням даним матеріалом" [108, с.199]. Формальна – полягала в умінні володіти при невеликій кількості фактичного знання різними розумовими прийомами, формами мислення, методами доведення, законами тощо [108, с. 200-207]. Формальна освіта набула поширення у школах західної Європи та російських духовних школах в епоху середньовіччя, матеріальна – у школах Європи XVIII – початку XIX століття. Класицизм та реалізм в освіті другої половини XIX століття визначався за дещо іншими ознаками – переважанням у складі загальноосвітнього курсу наук раціонального або ж фактичного змісту (якщо зміст навчального предмету передбачав вивчення порівняно невеликої кількості фактів, проте великої

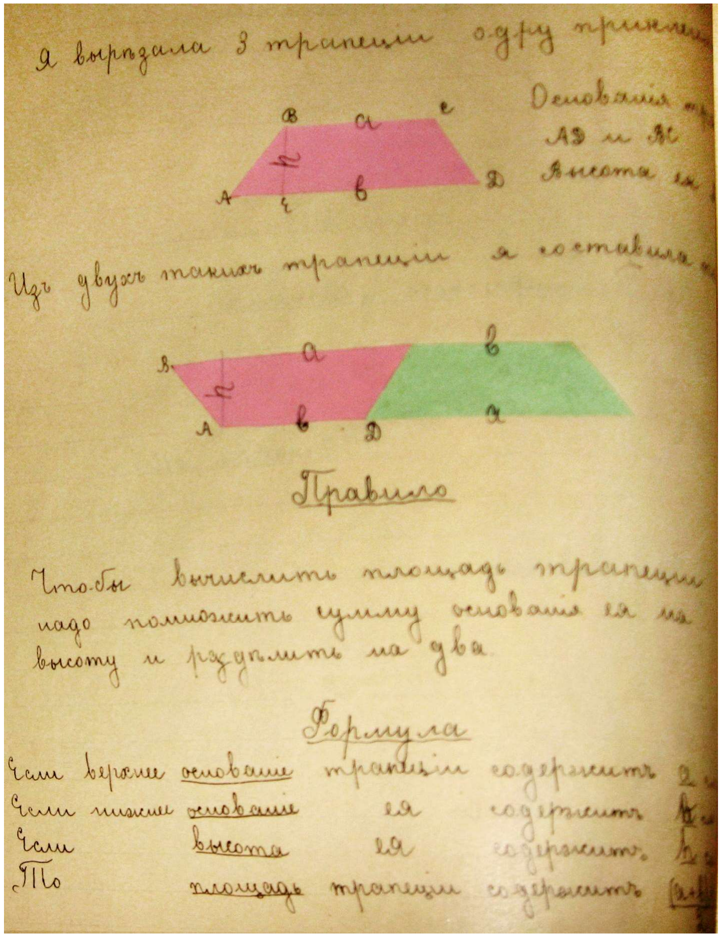
"Вычисление длинны окружности. 1910 год. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. Ф. Маранич"



Я обвела полоской бумаги окружность монеты наклеила ее и измерила. Тоже самое сделала съ діаметромъ. Длина окружности = 10,5 cm., а длина діаметра = 3,5 cm. Чтобы узнать во сколько разъ длина окружности больше длины діаметра надо 10,8 разделить на 3,5 = 3,0 [illegible]. У меня вышло, что длина окружности длиннѣе длины діаметра въ 3 раза.

Окружность длиннѣе діаметра **приблизительно** въ 3,1 раза. Это число называется греческой буквой П (пи)

"Вычисление площади трапеции. 14 декабря 1909 года. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. Н.Радзийовской"



Я вырѣзала з трапеціи одну прикл

Основанія тр
АD и ВС
Высота ея

Изъ двухъ такихъ трапецій я составила

Правило

Чтобы вычислить площадь трапеціи надо помножить сумму основанія ея на высоту и раздѣлить на два.

Формула

Если верхнее основаніе трапеціи содержитъ а
Если нижнее основаніе ея содержитъ b
Если высота ея содержитъ h
То площадь трапеціи содержитъ (а+

кількості різного роду зв'язків між фактами у вигляді формул і законів, узагальнень та доведень, що сприяють розумовій активності або ж навпаки). До раціональних наук відносились класичні мови, математика, логіка, філософія. До фактичних – історія, географія, природознавство (біологія, фізика, хімія) [108]. Проте, на нашу думку, ці ознаки класичної та реальної освіти не є достатніми, оскільки відображають відмінності щодо одного компонента освіти – змісту.

Класичний напрям загальноосвітньої школи, незважаючи на його панівне становище кінця XIX – початку XX століття, не набув підтримки у більшості діячів освіти і, фактично, як засвідчують тогочасні праці з теорії та розвитку освіти [171], [8], як у класичних гімназіях, так і у реальних училищах відбувалось змішування педагогічних елементів, побудованих на протилежних філософських напрямах (ідеалізму та матеріалізму). Відмінність між двома провідними типами загальної середньої освіти була помітною лише у змісті. Так, з аналізу програм курсу арифметики, алгебри, геометрії та тригонометрії для реальних училищ, можна зробити висновок, що дане завдання вирішувалось шляхом доповнення відповідних курсів математики гімназій темами, важливими для вивчення споріднених предметів – поглиблення змісту (Додаток А).

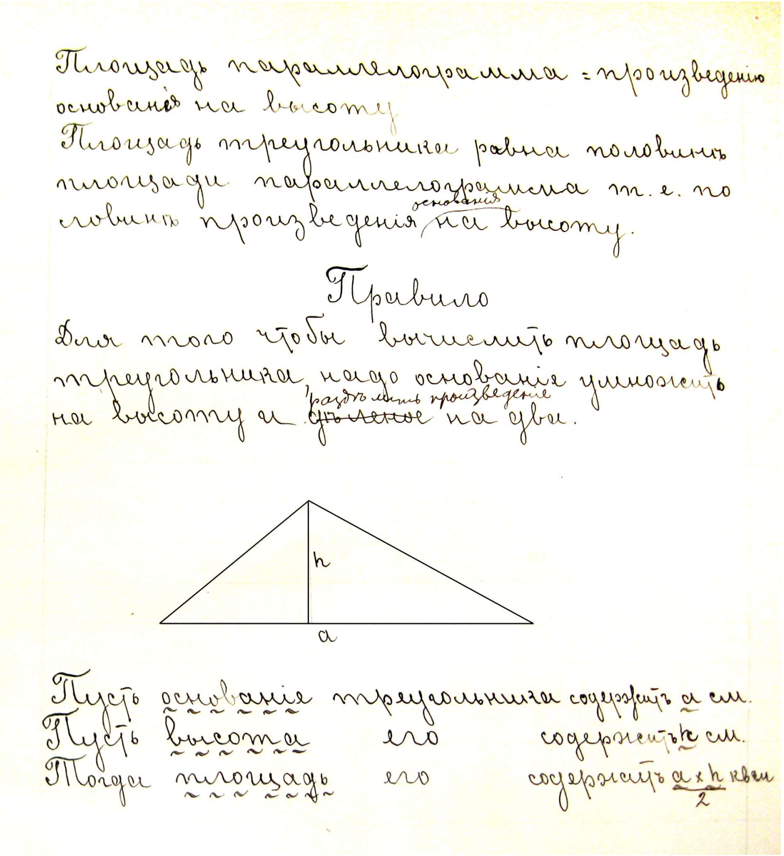
Критикуючи панівну у країні систему класичної освіти за вербалізм, книжність, інтелектуалізм, авторитаризм, відірваність від потреб та інтересів дитини і життя, прогресивні педагоги початку XX ст. по-різному бачили шляхи перебудови та подальшого розвитку вітчизняної системи освіти. Розвиток вітчизняної педагогічної думки відбувався в контексті світового педагогічного процесу. В кінці XIX – на початку XX ст. в багатьох країнах відбулись шкільні реформи, зокрема в Франції, Німеччині, Сполучених Штатах. Традиційній системі навчання протиставляється інша, яка має організовуватись, враховуючи потреби, інтереси і здібності дитини, а знання – отримуватись в результаті їх відкриття учнем в процесі діяльності – "навчання за допомогою дії" (основоположниками цієї системи навчання – педоцентричної в педагогіці вважаються Д. Дьюї, Г. Кершенштейнер, В. Лай А. Фер'єр, О. Декролі) [100, с. 93].

У вітчизняній педагогіці того часу виділялось кілька освітніх концепцій: "вільного виховання" (Н. Венцтель, М. Рубінштейн, Я. Чепіга, С. Русова), "школи навчання" (В. Вахтєров, П. Каптєров), "трудової школи" (П. Блонський, М. Рубінштейн). Кожна з концепцій мала свої специфічні особливості щодо мети, критеріїв, принципів відбору й побудови змісту освіти, методів і форм навчання тощо. Проте загальними ідеями всіх напрямів щодо теорії змісту освіти, були посилення зв'язку навчання з життям, довколишнім середовищем; побудова викладання на близькому учням матеріалі, введення до змісту освіти краєзнавчої складової.

Як відомо, в XVII – середині XIX ст. головним об'єктом досліджень в математиці стають залежності між величинами як кількісні відношення дійсного світу в процесі їхньої зміни, що пов'язано із створенням аналітичної геометрії Р. Декартом (1596–1650) та аналізу нескінченно малих І. Ньютоном (1643–1727) і Г. Лейбніцем (1646–1716). Вивчення змінних величин і функціональних залежностей стало базою для математичного аналізу. Основні закони механіки і фізики почали записуватись за допомогою диференціальних рівнянь, задача інтегрування яких розглядалась як одна з найважливіших задач математики [303].

Працями геометрів М. Лобачевського (1826 р.) і Я. Больяї (1832 р.) з неевклідової геометрії, К. Гаусса (1827 р.) з внутрішньої геометрії поверхонь; аналістів: О. Коші з основ теорії функцій комплексної змінної; Р. Дедекінда, Г. Кантора, К. Вейєрштрасса (1872 р.) зі створення строгої теорії ірраціональних чисел; алгебраїстів Н. Абеля (1824 р.) та Е. Галуа (1832 р.) з теорії груп й ін. почався перегляд основ науки математики й перебудова елементарної математики, що в свою чергу вимагало відповідних змін і в шкільному викладанні [11].

Рух за модернізацію шкільної математики набув міжнародного характеру. Питання викладання математики у середній школі стали одними з важливих у діяльності чотирьох міжнародних математичних конгресів, що відбулись у Цюріху (1897 р.), Парижі (1900 р.), Гельденберзі (1904 р.), Римі (1908 р.). На четвертому конгресі було прийнято за пропозицією професора Д. Е. Сміта (США) постанову про організацію Міжнародної комісії для вивчення програм і методів викладання

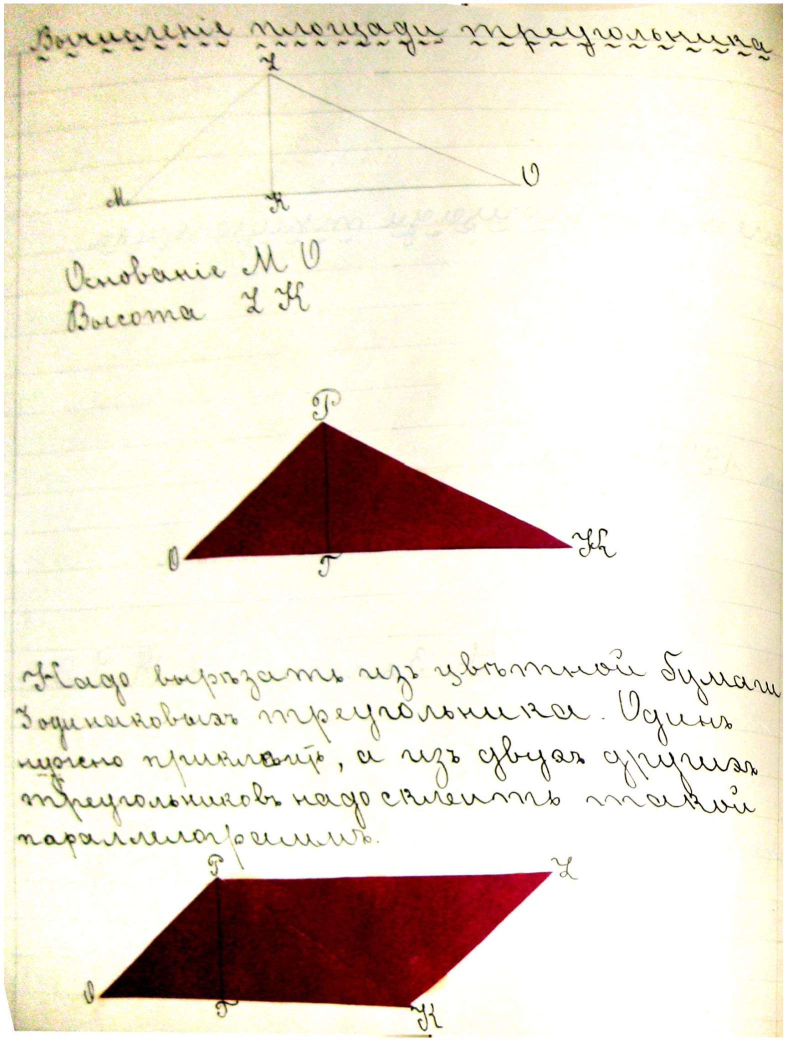


Площадь параллелограмма = произведенію основанія на высоту
Площадь треугольника равна половинѣ площади параллелограмма т. е. половинѣ произведенія основанія на высоту.

Правило
Для того чтобы вычислить площадь треугольника, надо основаніе умножить на высоту и раздѣлить произведеніе ~~дѣленное~~ на два.

Пусть основаніе треугольника содержитъ a см.
Пусть высота его содержитъ h см.
Тогда площадь его содержитъ $\frac{a \times h}{2}$ кв. см

"Вычисление площади треугольника. 30 ноября 1909 года. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. М. Герасимус"



Вычисленіе площади треугольника

Основаніе М О
Высота Л К

Надо вырѣзать изъ цвѣтной бумаги 3 одинаковыхъ треугольника. Одинъ нужно приклеить, а изъ двухъ другихъ треугольниковъ надо склеить такой параллелограммъ.

математики в школах різних країн, вивчення основних сучасних тенденцій викладання, що виявляються в національних реформах математичної освіти. За результатами роботи Міжнародної комісії з модернізації шкільної математики (та її національних підкомісій) були визначені основні напрями розвитку шкільної математичної освіти в багатьох країнах світу:

– підвищення загальноосвітнього рівня учнів введенням в шкільне викладання елементів диференціального й інтегрального числення, аналітичної геометрії, поняття функції;

– зближення між собою окремих навчальних предметів шкільної математики, насамперед, арифметики з алгеброю, елементів тригонометрії і аналізу, геометрії конструктивної з метричною і аналітичною, а також реалізація міжпредметних зв'язків з фізикою, географією, кресленням тощо;

– збільшення ролі обчислювальних методів у шкільному курсі: наближених, інструментальних, графічних, табличних та номографічних;

– необхідність введення в навчальні програми закладів, що готують вчителів, курсу "Елементарної математики" з точки зору вищої;

– широке використання наочності та геометричних моделей, введення елементів історизму в шкільне викладання;

– виховання математичної культури учнів у зв'язку з розвитком функціонально-аналітичного, алгебраїчно-оперативного та геометрично-конструктивного мислення тощо [45, 36, 251].

Важливою подією в історії розвитку математичної освіти стали I і II Всеросійські з'їзди викладачів математики, що відбулись під час зимових канікул 1911-12 та 1913-14 навчальних років.

Делегати з'їздів обґрунтували необхідність змін у характері викладання математики, з'ясували недоліки структури і змісту курсу: логічну необґрунтованість, розходження з науковими даними, відсутність домінуючих ідей, таких як число, функція тощо. Багато із розглянутих на з'їздах питань були раніше вирішені і обговорені на засіданнях Київського фізико-математичного товариства (1889-1919).

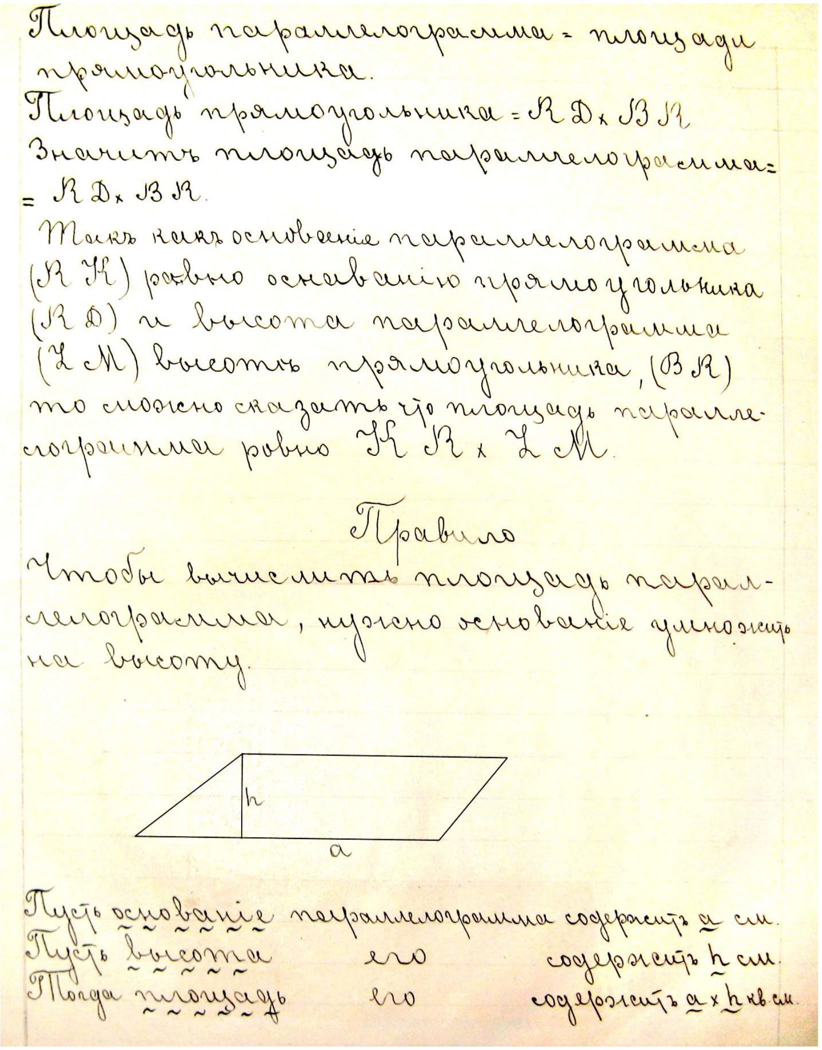
Усе це вплинуло й на політику Міністерства народної освіти щодо пошуку нової моделі школи – доступної і менш тривалої з вираженим практичним характером, в якій би задовольнялись потреби і нахили учнів, і, водночас, щоб спеціалізація не була ранньою. Провідною особливістю розвитку гімназичної освіти, що відображена в проектах шкіл міністерських комісій та Статутів (1900, 1901, 1904, 1905, 1915) була тенденція до побудови єдиної двоступеневої загальноосвітньої школи з фуркацією на другому ступені навчання (створенням спеціалізованих відділень з поглибленим вивченням предметів за інтересами, потребами і нахилами учнів) [150, 171, 259, 306].

Попри різноманітність підходів щодо побудови нової загальноосвітньої школи, можна прослідкувати певну подібність поглядів педагогічних діячів кінця XIX – початку XX століття на місце класичної гімназії (або ж класичної гілки) у системі тогочасної освіти:

– класична гімназія не повинна бути основним типом середньої школи;

– класична гімназія має задовольняти потребу в отриманні ґрунтовної гуманітарної освіти.

У відповідності до загальних положень профільного навчання проектів шкіл був визначений такий напрямок розвитку шкільної математичної освіти, як забезпечення належного рівня і обсягу змісту предмету щодо окремого спеціалізованого відділення. Крім цього, внутрішньопредметні потреби розвитку шкільної математики (практика викладання) визначили наступний напрямок – удосконалення змісту викладання предмету: скорочення тем, що не мали важливого освітнього значення; більш раціональний розподіл матеріалу за роками навчання; введення в курс середньої школи пропедевтичного курсу геометрії, наближених обчислень, поняття функціональної залежності, аналітичної геометрії, основ аналізу нескінченно малих (усі ці положення обґрунтовувались матеріалістичною наукою) тощо. Проте, спроби реформування шкільної математичної освіти як і загальноосвітньої школи в цілому не мали характеру наступності – не враховувався позитивний досвід попередніх напрацювань (як міністерських комісій, так і



Площадь параллелограмма = площади прямоугольника.

Площадь прямоугольника = R D × B R

Значитъ площадь параллелограмма = = R D × B R.

Такъ какъ основеніе параллелограмма (R K) ровно основанію прямоугольника (R D) и высота параллелограмма (L M) высотѣ прямоугольника, (B R) то можно сказать что площадь параллелограмма ровно K R × L M.

Правило

Чтобы вычислить площадь параллелограмма, нужно основаніе умножить на высоту.

Пусть основаніе параллелограмма содержитъ a см.

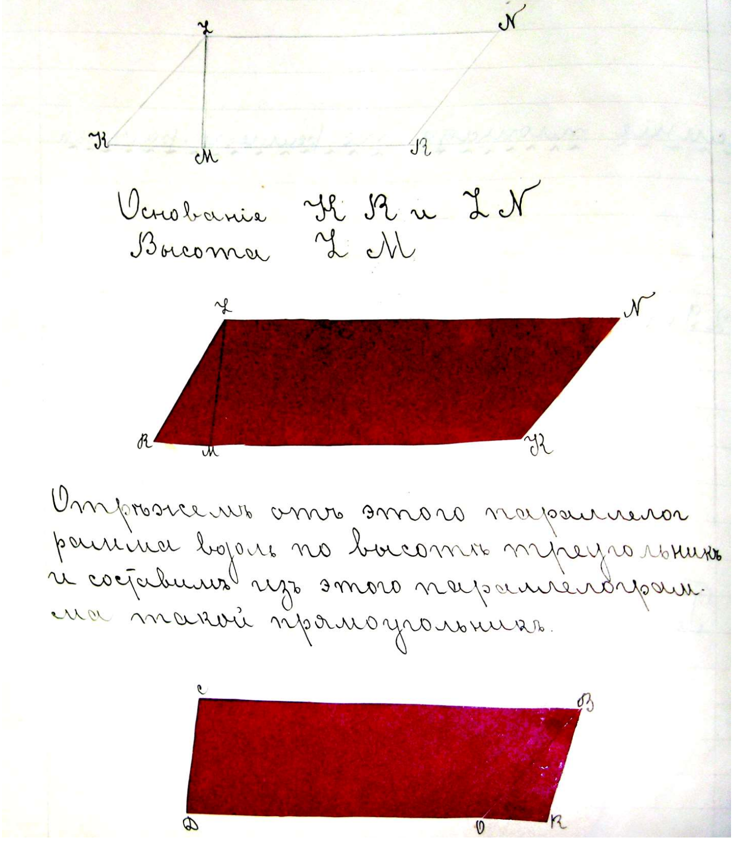
Пусть высота его содержитъ h см.

Тогда площадь его содержитъ a × h кв. см.

Додаток И

Приклади практичних робіт з "Наочної геометрії" учениць жіночого Київського комерційного училища М. Володкевича:

"Вычисление площади параллелограмма. 29 ноября 1909 года. Работа ученицы III класса Ж.К.У.В. М. Герасимус"



Основание KR и LN
Высота LM

Отрѣжемъ отъ этого параллелограмма вдоль по высотѣ треугольникъ и составимъ изъ этого параллелограмма такой прямоугольникъ.

вітчизняних учених, в тому числі і Київського фізико-математичного товариства, й зарубіжний досвід з питань реформування). Як наслідок – відсутність провідних ідей у змісті навчання математики – розвиток поняття про число та ідеї функціональної залежності; елементи вищої математики: аналітичної геометрії та аналізу нескінченно малих мали відокремлений характер від традиційного курсу (пропонувались як додатковий курс).

1.3. Київське фізико-математичне товариство. Періодизація та основні напрями діяльності (1889-1919 рр.)

Висвітлення особливостей діяльності Київського фізико-математичного товариства з розвитку шкільної математичної освіти потребує розгляду названої освітньої роботи під кутом зору складової діяльності Товариства в цілому.

Аналіз архівних джерел показав, що Київське фізико-математичне товариство було створене на базі математичної секції товариства природодослідників (1869-1932), яке діяло при університеті Св. Володимира. Секція проводила й значну просвітницьку роботу, що було певним внеском у розвиток математичної освіти. Так, згідно з § 2 Статуту, Товариство природодослідників мало право організовувати публічні лекції для поширення природничо-історичних знань серед осіб, що не мали можливості здобуття відповідної освіти або ж проявляли інтерес до розвитку науки. Таким чином, із дозволу куратора Київського навчального округу затверджувались систематичні читання з природничих наук і математики. Відомо, що у 1870-

1871 та 1871-1872 навчальних роках членами Товариства був прочитаний повний дворічний, а у 1872-1873 та у 1874-1875 рр. – трирічний курс, що містив найголовніші галузі природознавства, а також алгебру й геометрію. У 1876 – 1877 навчальному році М. М. Шиллер від імені Товариства прочитав курс фізики, а алгебру й геометрію читав М. Є Ващенко-Захарченко [111, 60].

Одним з чинників, так званого "відгалуження" математичної секції з реорганізацією у фізико-математичне товариство, стало затвердження нового Статуту університетів (1884 р.), згідно з яким відбувається збільшення кафедр, а отже й професорсько-викладацького штату. У зв'язку з цим, належної уваги й підтримки потребувала зростаюча кількість наукових досліджень з нових галузей наук [235, с. 18]. Київське фізико-математичне товариство засноване відомими вченими-математиками й фізиками М. Авенаріусом (1835-1895), Б. Букреєвим (1859-1962), М. Ващенком-Захарченком (1825-1912), В. Єрмаковим (1845-1922), І. Рахманіновим (1826-1896), П. Ромером (1835-1899), Г. Сусловим (1857-1935), М. Хандріковим (1837-1915), М. Шиллером (1848-1910), Е. Шпачинським (1842-1912). Шостого лютого 1889 р. вони підписали пропозицію[1] про організацію Товариства, а 26 листопада того ж року Міністр народної освіти, граф І. Д. Делянов, затвердив Статут фізико-математичного товариства при Імператорському університеті Св. Володимира (Статут Товариства наведений у Додатку Б). Згідно з § 1 Статуту, метою організації було сприяння й підтримка розвитку наукових досліджень з різноманітних галузей фундаментальних та прикладних наук математики й фізики (та наук з ними суміжних), популяризації

---

[1] Пропозиція про заснування наукового товариства при університеті, як засвідчують архівні документи [315], подавалась до Ради університету на ім'я ректора у формі заяви від групи професорів стосовно клопотання перед Міністром народної освіти про затвердження проекту статуту створюваного товариства (проект статуту додавався). Після схвалення проекту статуту Радою університету, ректор, на основі поданої заяви та рішення Ради університету, порушував клопотання через куратора навчального округу до Міністра народної освіти.

Многокутнику – число, що дорівнює сумі чисел, які відповідають складовим трикутникам.

М. В. Оглоблін робить огляд синтетичної частини теорії площ, при цьому посилається на працю Ж. Адамара "Лекції з елементарної геометрії". Автор доповіді пропонує довести три теореми:

"У будь-якому трикутнику добуток сторони на відповідну висоту не залежить від вибору сторони";

"Якщо яку-небудь точку О площини з'єднати з вершинами трикутника, то алгебраїчна сума площ трикутників, що мають вершини в т. О, дорівнює площі даного трикутника, при чому напрям межі даного трикутника визначається напрямом меж останніх трикутників".

"Якщо яку-небудь точку О площини з'єднати з вершинами многокутника, то алгебраїчна сума площ трикутників, що мають вершини в т. О, дорівнює алгебраїчній сумі площ трикутників, із яких складається даний многокутник, при чому напрям меж перших трикутників визначається напрямом сторін многокутника, а напрям меж других трикутників такий же як і напрям межі многокутника".

Із останньої теореми випливають два наслідки:

Кожна із зазначених сум не залежить від положення точки О, ні від способу, яким даний многокутник розбивається на трикутники. Цю суму називають площею многокутника.

Площа многокутника дорівнює сумі площ многокутників, із яких він складається.

Джерела: [180].

$$\psi(s,b)=\xi(b)Q(s) \qquad (3.7)$$

Оскільки $\psi(s,b)$ є а, то звідси матимемо: $Q(s)=\dfrac{a}{\xi(b)}$.

Аналогічно можна записати: $Q(s)=\dfrac{b}{\xi(a)}$, оскільки *s*, а значить і Q(s) – симетрична функція.

Отже $\dfrac{a}{\xi(b)}=\dfrac{b}{\xi(a)}$, або $a\xi(a)=b\xi(b)$.

Дві функції $a\xi(a)$ і $b\xi(b)$ двох незалежних змінних рівні лише за умови що вони постійній величини.

Нехай ця постійна $\dfrac{1}{k}$, тоді матимемо:

$$Q(s)=kab, \qquad (3.8).$$

А із (6) випливає:

$$Q(s)=Q(s_1)+Q(s_2) \qquad (3.9).$$

Рівність (Ж.8) – є залежність, про яку йшлось у першій умові. Рівність (З.9) виражає залежність між числом, що відповідає якій-небудь фігурі, і числами, що відповідають двом її складовим частинам. При цьому *Q(s)* є будь-яка однозначна функція, за якою аргумент *s* обчислюється однозначно.

Знаючи $Q(s)$, $Q(s_1)$, $Q(s_2)$, можна завжди знайти s, s_1, s_2. Проте, для зручності, замість чисел s, s_1, s_2 будемо завжди говорити про числа S, S_1, S_2 такі, що $S = Q(s)$, $S_1 = Q(s_1)$, $S_2 = Q(s_2)$. Прийом, яким користується М. В. Оглоблін полягає у тому, що замість однієї функції, що визначається однозначно (числа, яке приписується фігурі), виявляється зручніше користуватись іншою, що є деякою однозначною функцією від першої.

За домовленістю для прямокутника приймають $k = 1$; тоді для $a = 1$ і $b = 1$ буде $S = 1$.

Далі автор пропонує довести твердження про те, що паралелограму потрібно приписати те ж число, що й прямокутнику, який має з ним однакові основу і висоту. Трикутнику – число, рівне половині добутку основи на висоту.

результатів цих досліджень, а також сприяння вирішенню найактуальніших проблем з питань викладання шкільної математики й фізики та поширення прогресивних методичних ідей серед педагогічних кіл Росії [281].

До 1903 року обов'язки голови Київського фізико-математичного товариства виконував М. Шиллер, а потім, у зв'язку з його призначенням на посаду директора Харківського технологічного інституту, головою товариства впродовж усіх останніх років його існування обирався Г. Суслов.

Г.К. Суслов – голова Київського фізико-математичного товариства (1903-1919 рр.)

Учасники Київського фізико-математичного товариства проживали у найвіддаленіших містах Російської імперії та Європи. Географія міст включала Київ і Харків, Тамбов і Одесу, Рівне й Астрахань, Умань і Варшаву, Єкатеринослав і Москву, Санкт-Петербург, Пірей (Греція) та Геттінген (Німеччина). Переважну більшість членів Київського фізико-математичного товариства становили професори й викладачі Київського університету та Політехнічного інституту м. Києва (створеного у 1898 рр.), магістранти, а також викладачі київських середніх навчальних закладів. Чимало учасників мали професії військових, військових та гірничих інженерів, інженерів-технологів, інженерів-залізничників, інженерів шляхів сполучень, лікарів, що свідчить про активний інтерес передових верств суспільства до проблем розвитку науки і шкільної освіти та, зокрема, про їх високу культуру.

Ми умовно виділили основні періоди діяльності Київського фізико-математичного товариства (1889-1919) відносно яких і охарактеризуємо її. В основі періодизації покладено найбільшу активність товариства з певного напряму роботи:

Перший період – "Початок діяльності (1889 – 1890 рр.)". У ці роки визначаються напрями діяльності Товариства (затвердження Статуту) та відбувається активізація роботи з основних напрямів – *обговорення наукових та освітніх проблем*, дослідженням яких займались окремі учасники Товариства. Так, наукові проблеми й спрямування започатковані професорами університету: М. Авенаріусом, Б. Букреєвим, В. Єрмаковим, М. Шиллером, Г. Пфейффером, Г. Сусловим, І. Чир’євим, Й. Косоноговим, Г. Де-Метцом, К. Жуком, та ін. У їх доповідях були представлені результати досліджень з таких розділів експериментальної та теоретичної фізики як механіка, термодинаміка, електрика і магнетизм, оптика, теорія випромінювання й ін. Реферати та доповіді учених містили дослідження і з фундаментальної та прикладної математики: алгебри та теорії чисел, інтегрального числення, теорії диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії поверхонь, теорії визначення орбіт та ін.

Особливістю виділеного періоду є значна кількість доповідей з проблем шкільної математичної освіти. Так, з 55 усіх

Отримали тотожність, оскільки залежність між s_1, s_2 та b неможлива, а s – є функцією від s_1 і s_2. Диференціюючи цю тотожність по s_1, а отриманий результат по s_2, отримаємо: $\frac{\partial^2\psi(s,b)}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial s_1}\frac{\partial s}{\partial s_2}+\frac{\partial\psi(s,b)}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial s_1\partial s_2}=0.$ Цю рівність можна записати у вигляді:

$$\frac{\frac{\partial^2\psi(s,b)}{\partial s^2}}{\frac{\partial\psi(s,b)}{\partial s}}=-\frac{\frac{\partial^2 s}{\partial s_1\partial s_2}}{\frac{\partial s}{\partial s_1}\frac{\partial s}{\partial s_2}}$$

Помічаємо, що ліва частина рівності не залежить від b, і є деякою функцією від s (оскільки права частина цієї рівності не залежить від b). Позначивши цю функцію через P(s), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2\psi(s,b)}{\partial s^2}=P\cdot\frac{\partial\psi(s,b)}{\partial s},$$

проінтегрувавши яке та ввівши позначення деяких функцій від b через $\xi(b)$ і $\eta(b)$ та $\int e^{\int Pds}ds=Q(s)$, матимемо:

$$\psi(s,b)=\xi(b)Q(s)+\eta(b) \qquad (3.5).$$

Підставивши це значення $\psi(s,b)$ та відповідні вирази для $\psi(s_1,b)$ та $\psi(s_2,b)$ у рівність (4), матимемо:

$$Q(s)=Q(s_1)+Q(s_2)+\frac{\eta(b)}{\xi(b)} \qquad (3.6)$$

Оскільки у дану залежність s від s_1 і s_2 не повинно входити b, то $\frac{\eta(b)}{\xi(b)}$ має бути постійною величиною ($\frac{\eta(b)}{\xi(b)}=C.$).

Тоді рівність (3.5) набуває вигляду: $\psi(s,b)=\xi(b)(Q(s)+C)$, і що $Q(s)$ – довільне значення невизначеного інтегралу, можна вважати, що постійна величина включена у це значення, тобто C=0 і $\eta(b)=0$. Тоді рівність (3.5) набуває вигляду:

Додаток З

Огляд доповіді М. В. Оглобліна "К теории площадей и центров тяжести плоских фигур"

М. Оглоблін дає наукове обгрунтування теорії площ плоских фігур (багатокутників), що розглядалась у шкільному курсі геометрії – "аналітичної теорії площ".

Педагог вводить поняття фігури її частин та визначає спосіб приписування числа фігурі на основі умов:

"1) Число, що відповідає якій-небудь фігурі є однозначна неперервна функція величин, які повністю визначають фігуру незалежно від її положення;

2) Це число є однозначною, неперервною функцією чисел, що відповідають частинам даної фігури і при даних числах не залежить від форми фігур".

Так, прямокутнику зі сторонами a і b відповідає число s, яке за першою умовою, є однозначною неперервною функцією від a і b. Нехай, $s=\varphi(a,b)$.

Ця функція є симетричною:

$$\varphi(a,b)=\varphi(b,a) \qquad (3.1)$$

Розіб’ємо прямокутник прямою, паралельною стороні b на два прямокутники відповідно зі сторонами: a_1 b і a_2 b так, що

$$a = a_1+a_2. \qquad (3.2)$$

$$s_1=\varphi(a_1,b);\;\; s_2=\varphi(a_2,b) \qquad (3.3)$$

Нехай, розв’язуючи рівняння (3.1) відносно а, отримаємо: $a=\psi(s,b)$, аналогічно, розв’язуючи рівняння (3.3) отримаємо: $a_1=\psi(s_1,b)$; $a_2=\psi(s_2 b)$. Тоді на основі (3.2) отримаємо:

$$\psi(s,b)=\psi(s_1,b)+\psi(s_2,b).$$

зроблених повідомлень 15 стосувались переважно удосконалення змісту шкільних арифметики й алгебри (виголошені В. П. Єрмаковим "Общий взгляд на современное состояние и значение математики", "О преподавании арифметики", "О приближенных вычислениях", "Определение и цели алгебры", "О начальном преподавании алгебры", Д. Д. Єфремовим "О решении неопределенных уравнений", О. П. Зонненштралем "Об иррациональных числах", Ф. Ю. Мацоном "Об именованных числах", І. І. Матковським "Выделение некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе", Я. П. Мішиним "О наглядном объяснении арифметических действий по способу Масе", М. Я. Сорокіним "О сумме цифр при различных системах счисления", І. І. Чир’євим "Соотношение между сторонами и углами тетраэдра", "О постулате Эвклида", "О целых, дробных и несоизмеримых числах") [189].

Починаючи з першого року діяльності Товариства, доповіді з проблем шкільної освіти детально обговорюються і, разом з пропозиціями щодо їх вирішення, схваленими на засіданнях, друкуються в "Отчетах и протоколах физико-математического общества" (1891–1917). Деякі доповіді друкуються й у інших періодичних виданнях (в журналах: "Вестник опытной физики и элементарной математики", "Университетские известия", "Педагогический сборник", "Циркуляры по киевскому учебному округу" та ін.), а також видаються окремими примірниками.

Особливо важливу роль у висвітленні роботи Товариства, популяризації його ідей та агітації щодо співучасті у діяльності відіграв головний редактор "Вестника опытной физики и элементарной математики" (1886-1898) Е. К. Шпачинський. Під час його перебування на посаді заступника голови Товариства (1890-1891), на сторінках журналу друкувались не лише протоколи засідань, чимало доповідей залишило свій слід у формі зроблених Е. К. Шпачинським рефератів та анотацій.

Другий період – "Активізація культурно-просвітницької та доброчинної діяльності (1891-1901 рр.)". У ці роки найбільш чіткою, ніж в інші роки, стає тенденція *проведення платних публічних лекцій* у стінах Університету. Крім цього, розширюється коло проблематики провідних напрямів – обговорюються дослідження з нових проблем фізико-математичних наук та шкільного викладання основ цих наук, а також з історії наук та філософії.

Так, починаючи з 1891 р. членами об’єднання читались платні публічні лекції, а зароблені лекторами кошти йшли не лише в казну Товариства, але й на різні доброчинні заходи. Одним із таких заходів було збирання коштів у фонд "Товариства допомоги знедоленим студентам". "Знедоленими" на той час називали незабезпечених студентів (із числа різночинців), які не мали достатніх коштів на житло, їжу та навчання [105, с. 40]. На користь бідних студентів були прочитані лекції П. І. Броунова, В. В. Ігнатовича-Завілейського, Р. М. Савельєва (1891 р.). У тому ж році читались публічні лекції і на користь потерпілих від неврожаю. Як відомо з історії, катастрофічна посуха 1891 року спричинила голод у 42 губерніях Російської імперії у тому числі і на території України (її чорноземної частини) [1, с.80, 405]. Лекції В. П. Єрмакова, П. Н. Вєнюкова, С. М. Богданова, С. Н. Реформатського, П. Я. Армашевського, В. П. Фабриціуса, П. І. Броунова та ін. за ініціативою П. І. Броунова, увійшли у спеціальний збірник допомоги голодуючим селянам, який видав проф. М. В. Лучицький. У збірнику, зокрема, містились лекція П. Броунова "Погода и ее предсказание", де розглянуто питання про вплив посухи на ґрунт і рослини, та вказані заходи боротьби зі стихією, а також лекція В. Єрмакова з методики навчання математики "О преподавании алгебры" [105, с.140].

У 1893 – 1894 рр. лекції читались на користь фонду імені М. І. Лобачевського, який збирався Казанським математичним товариством для встановлення пам'ятника знаменитому російському геометру та для призначення премії за твори в галузі геометрії. Були прочитані лекції Р. М. Савельєва "Изменяется ли наш климат?", М. М. Шиллера "Как мы понимаем солнечные лучи", В. В. Ігнатовича-Завілейського "Электрический трамвай в Киеве", Й. Й. Косоногова "Преобразование газов в жидкое

Кожна з них визначає положення іншої, бо має місце рівність $OA\cdot OA'=ON^2$, де OA, OA' – відстані від центра базового кола до відповідної взаємної точки, ON – радіус базового кола. Автор наголошує, що аксіоматичні властивості прямої такі ж як і в прямої Лобачевського, але всі прямі Рімана перетинаються (бо всі діаметри базового кола перетинаються в його центрі, тому і відповідні дуги, які мають назву прямих, за даною моделлю також перетинаються) (див. рис. Ж.6).

Правильність теореми про суму кутів трикутника Рімана перевіряється на основі інтуїції, накладаючи прямолінійний трикутник на трикутник Рімана.

Таким чином, учні самі в змозі визначити, що "сума внутрішніх кутів трикутника, утвореного прямими Рімана, більше розгорнутого" (рис. Ж.7).

П. Долгушин коротко зупиняється на загальній властивості геометрії Евкліда (параболічної), Лобачевського (гіперболічної) та Рімана (еліптичної): "будь-який можливий рух фігури відбувається без зміни її елементів". Ця властивість є також ознакою трьох розглянутих геометрій: якщо геометрична система в просторі трьох вимірів має кінцеву неперервну послідовність рухів, і якщо кожним двом точкам відповідає певна відстань, яка не змінюється при русі і перетворюється на нуль лише для двох співпадаючих точок, а інших інваріантних співвідношень між точками не існує то така геометрична система зводиться або до геометрії Евкліда, або до геометрії Лобачевського, або до геометрії Рімана.

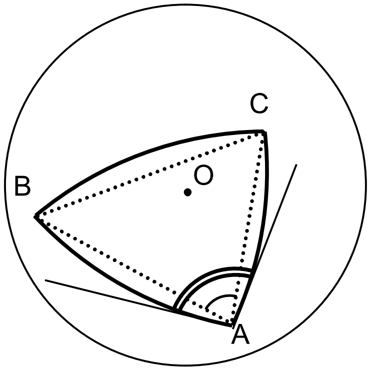


Рис. Ж.7

Джерела: [82].

Лобачевського, для кожної точки *A* кола пучка знайдеться точка *A′*, що лежить на продовженні *OA*, де *O* – центр базового кола. Тоді *A* і *A′* – взаємні точки (Рис. Ж.6).

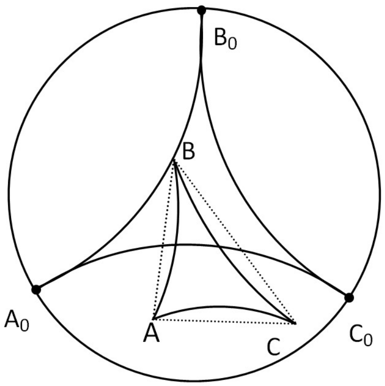


Рис. Ж.5

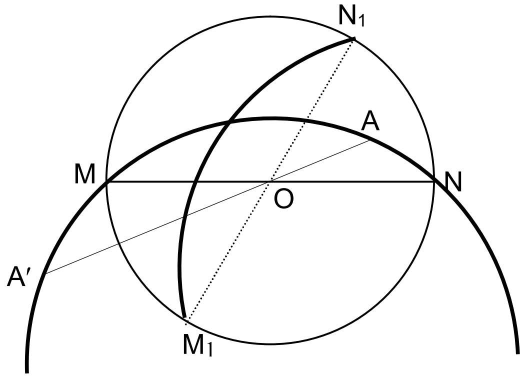


Рис. Ж.6

состояние и критическая температура", В. І. Зайончевського "Спектральный анализ и его использование в изучении строения небесных тел", Г. Г. Де-Метца "Новые опыты с переменным током и демонстрация опытов Томсона и Тесла" та ін. Чистий прибуток від цих лекцій у розмірі 355 крб. був переданий Казанському математичному товариству [193, с.3].

У 1895 році Й. Й. Косоноговим була прочитана публічна лекція "Об Х-лучах Рентгена". Як відомо, українець Іван Пулюй (1845-1918) мав безпосереднє відношення до відкриття Х-променів, або променів великої проникності через людське тіло. Вперше у світі саме І. Пулюй створив трубку, що випромінює Х-промені, досліджував їх іонізаційний вплив та робив якісні "рентгенівські знімки". К. Рентген (1845-1923), використовуючи трубку за конструкцією І. Пулюя (дещо удосконалену), експериментально довів їх невидиму природу. Він також вивчав властивості Х-променів та пояснив можливість їх застосування у медицині та промисловості [127, *53*]. Члени Київського фізико-математичного товариства, як і вчені всієї Російській імперії, замовчували причетність І. Пулюя до епохального відкриття. І лише у 1915 році у першому номері журналу "Сообщения Киевской рентгенологической комиссии" Ч. Бялобржевський у статті "К юбилею профессора К. Рентгена" формулює свою позицію щодо історичної несправедливості: "Таким чином, він (К. Рентген) зрадив гуманній загальнолюдській точці зору, яка притаманна вченому, не виключаючи в той же час любові до своєї країни" [243, с. 25-26].

У сфері наукової діяльності даного періоду зростає кількість виступів із історії фізико-математичних наук. Так, аналізувались праці видатних учених як минулих років, так і науковців того часу: Б. Франкліна, Л. Гельмгольца, Евкліда, М. Лобачевского, А. Столєтова, К. Рентгена, П. Чебишова, К. Вейєрштрасса, А. Кундта, а також робились біографічні нариси та огляди праць учасників Київського фізико-математичного товариства І. І. Рахманінова, П. М. Покровського, П. Е. Ромера, М. О. Сорокіна, М. П. Авенаріуса.

Важливе значення для історії математики мали праці професора кафедр стародавньої історії та історії середніх віків М. М. Бубнова (працював в університеті з 1891 по 1919 рр.), який вперше розкрив систему арифметики Герберта Аврилакського (кінець 940-их – 1003 рр.) – відомого ученого середньовіччя. М. Бубнов довів її класичне походження, а також обґрунтував що саме від неї походить сучасна арифметика, за якою закріпилась назва – "індо-арабська".

Герберт Аврилакський увійшов в історію як папа Сильвестр ІІ (999 – 1003) та відомий учений середньовіччя. З юнацьких років, будучи монахом, він багато подорожував Європою з метою здобуття освіти. Відвідав монастирські школи та бібліотеки Франції, Німеччини, Італії, Іспанії, де ознайомився, зокрема, і з арабською та індійською наукою. З математики Герберт написав праці: "Regula de abaco computi" ("Правила обчислень на абаці"), "Libellus de numerorum divisione" ("Описання позиційної нумерації"), "Geometria" ("Геометрія") та ін. Більшість учених ХІХ століття вважали Герберта учнем арабів, який переніс у Європу індо-арабські цифри і арифметику під назвою абака. М. М. Бубнов спростовує ці судження та доводить, що у цілій низці праць з математики знання Герберта є класичними. Головним джерелом дослідження вченого стала збірка листів Герберта (983-997 рр.). За висновками М. М. Бубнова, абацисти Х ст., у тому числі й Герберт, користувались цифрами, що були запозичені греками у одного із урало-алтайських народів середньої Азії. Подібними цифрами користувались і в Індії, проте кількість відомих індусам цифр перевищувала дев’ять, а запис чисел не мав позиційного характеру. За допомогою грецького абака вони отримали сучасне значення позиційності. Один із видів грецького абака являв собою лічильний стіл із десятковими колонами, на яких розкладались жетони. Серед жетонів був і немічений цифрою – прообраз нуля.

Ці питання вчений висвітлив у доповідях "О происхождении цифр. (Боэциевский вопрос)" (1900), "Происхождение механизма арифметических действий" (1900), а також у пізніших доповідях "Древне-греческий абак и его значение в вопросе о

прямій, називаються паралельними до прямої *MAN* (*PM* в одному напрямку, *PN* – в іншому). Таким чином учні переконуються, що "через точку, що не лежить на прямій Лобачевського можна провести дві і тільки дві півпрямі (що належать різним прямим), паралельні даній".

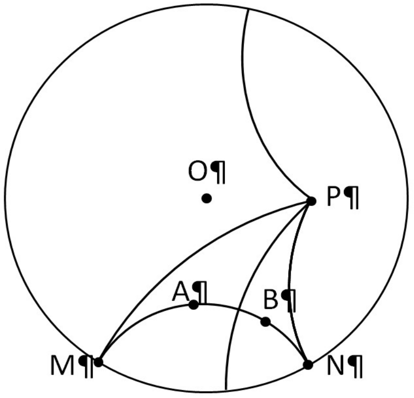


Рис.Ж.4

Як наслідок заміни аксіоми паралельних, теорема про суму кутів трикутника набуває іншого змісту: "сума внутрішніх кутів трикутника, обмеженого відрізками прямих Лобачевського, менше розгорнутого". Правильність теореми учні спостерігатимуть, накладаючи трикутник Лобачевського на трикутник Евкліда.(див. Рис. Ж.5). Автор також наводить приклад найбільшого із трикутників Лобачевського, вершини $A_0B_0C_0$ якого лежать на базовому колі, сторони попарно паралельні, а кути дорівнюють нулю (Рис. Ж.5)

Розглядаючи наступну геометричну систему – одну із еліптичних геометрій Г. Рімана (1826-1866), автор вказує на її основну відмінність – у системі аксіом відсутня аксіома про паралельні. Інтерпретація Пуанкаре геометрії Рімана являє собою пучок кіл, що перетинають базове коло (круг) по діаметру. Для даної моделі вводиться поняття взаємних точок відносно базового кола. Аналогічно відповідному поняттю в геометрії точка базового кола, на промені *PO*, як на стороні, будуємо кут, що дорівнює куту *OAP*. Друга сторона побудованого кута перетне промінь *OA* в шуканій точці *A′*).

Наступним кроком є доведення ще однієї ознаки кола, перпендикулярного до базового: "Будь-яке коло, що проходить через пару взаємних точок, перпендикулярне до базового". Після цього вводиться поняття прямої Лобачевського: "Якщо *M* і *N* точки перетину кіл з центрами в точках *O* і *O′*(базового кола з ортогональним до нього колом), то дуга *MAN*, що знаходиться в середині базового круга відіграє роль прямої Лобачевського, причому припускається, що точки базового кола недоступні (нескінчено віддалені)" (рис. Ж.3).

П. Долгушин розглядає аксіоми геометрії Лобачевського. Так, "через дану точку *A* проходить безліч прямих Лобачевського, бо взаємні точки *A* і *A′* не визначають кола; через дві дані точки *A* і *B* проходить лише одна пряма Лобачевського, оскільки точки *A*, *A′* і *B* повністю визначають коло зв'язки" (рис. Ж.3). Учні мають також ознайомитись з поняттям довжини відрізка прямої Лобачевського *AB*, яка знаходиться за формулою:

$AB = k\cdot\lg\left(\frac{AM}{BM}:\frac{AN}{BN}\right)$, де *AM*, *BM*, *AN*, *BN* – довжини Евклідових дуг.

Використовуючи формулу довжини відрізка, виводиться рівність *AB*+*BC*=*AC*

$$AB+BC=k\cdot\lg\left(\frac{AM}{BM}:\frac{AN}{BN}\right)+k\cdot\lg\left(\frac{BM}{CM}:\frac{BN}{CN}\right)=k\cdot\lg\left(\frac{AM}{CM}:\frac{AN}{CN}\right)=AC,$$

де *k* – деяка стала, що залежить від вибору одиниці вимірювання відрізків), а це означає, що в геометрії Лобачевського справедлива аксіома вимірювання відрізків.

Виконання аксіоми паралельних Лобачевського спостерігається на моделі (рис. Ж.4). Автор пропонує через точку *P*, що не лежить на прямій *AB*, провести півпрямі Лобачевського *PM* і *PN*. Будь-яка пряма Лобачевського, що проходить всередині кута *MPN* перетинає *MAN*, інші півпрямі, проведені з точки *P*, не зустрічають *MAN*; півпрямі *PM* і *PN*, які не належать одній

происхождении современной арифметики" (1904), "Операции на абаке" (1904) та ін. [41, 198–203].

До кола наукових питань, що обговорювались на засіданнях Товариства, починають включатись і проблеми філософії, а саме: зв'язок філософії з природознавством та математикою. Професор Г. І. Челпанов (1862-1936), (працював в Київському університеті з 1892 по 1907 рр.) намагався довести, що лише ідеалістична філософія відповідала стану тогочасної науки. Час і простір він вважав апріорними категоріями, що не пов'язані з емпіричним досвідом і об'єктивною дійсністю. Свої погляди вчений розкривав у доповідях: "О реальности пространства", "О природе времени", "Философские взгляды Дюбуа-Реймонда", "Емпириокритицизм А. Авенариуса", "О априорности числа" та ін. [189–213].

На засіданнях Товариства виділеного періоду доповідались результати досліджень фізичної наукової лабораторії, заснованої М. П. Авенаріусом у 70-их рр. XIX століття. Учасники Товариства М. П. Авенаріус, В. І. Зайончевський, Й. Й. Косоногов, Я. Н. Жук, К. Н. Жук та ін. працювали у лабораторії над проблемою критичного стану тіл. Важливим внеском у світову науку стали розроблені ними методи визначення критичних температур і тиску, а також їх числових значень для цілої низки рідин і розчинів. Так, довідник "Физических таблиц Ландольта і Бернштейна" (1894 р.) містив значення критичних температур, чверть з яких уперше було установлено науковцями лабораторії М. Авенаріуса [237]. У 1892 році на засіданнях Київського фізико-математичного товариства Й. Косоноговим проведена демонстрація критичних температур деяких рідин [191].

Варто зазначити, що із 524 усіх прочитаних на засіданнях повідомлень 49 стосувались питань шкільної математичної освіти. Зокрема, обговорювались питання про інтегроване початкове викладання арифметики й алгебри, обсяг й послідовність вивчення деяких тем алгебри, необхідність вилучення із підручників застарілого матеріалу (типізація задач за правилами), про роль механічного та логічного запам'ятовування у засвоєнні матеріалу, крім цього, продовжувалась розробка теорії та методики вивчення окремих розділів та тем гімназичного курсу математики, переважно арифметики й алгебри (доповіді Е. Гуріна, В. Єрмакова, О. Зоненштраля, Ф. Мацона, Я. Мішина, 1. Чир’єва, П. Долгушина, О. Лобанського, М. Соколова, П. Покровського, Г. Дивільковського, Л. Хонакадопула, П. Матковського, Г. Суслова), увага приділялася й методам розв’язування задач (доповіді В. Єрмакова, І. Александрова, П. Покровського).

Третій період – "Активізація досліджень, спрямованих на реформування шкільної математичної освіти (1902-1908 рр.)". На засіданнях Товариства набувають широкого *обговорення питання реформування шкільної математичної освіти* як у Російській імперії, так і за кордоном. Зокрема, на основі власних спостережень, досвіду викладання аналізується стан навчання математики в середніх навчальних закладах Росії, країн Західної Європи та Америки (доповіді В. Єрмакова, М. Володкевича, К. Лебединцева, З. Архімовича, О. Яницького, О. Астряба, О. Білімовича, В. Лорченка); аналізуються й програми з математики (та їх проекти) середніх навчальних закладів Росії та країн Західної Європи (доповіді І. Зєхова, О. Зоненштраля, Г. Суслова, О. Білімовича, К. Щербини), а також тогочасні підручники з математики вітчизняні і закордонні (доповіді М. Соколова, П. Долгушина, М. Оглобліна).

Лейтмотивом діяльності у цій сфері стає розробка програми з математики для чоловічих гімназій, відома в історії педагогіки як "Київський проект" (1907), який був одноголосно схвалений членами Товариства на засіданні 14 травня 1907 р. Основою оновлення змісту шкільної математичної освіти слугували: ідея функціональної залежності у зв’язку з вченням про нескінченно-малі і з поняттям про координати; ідея розвитку поняття про число (від цілого додатного до комплексного) [306, с. 129-135].

У зв’язку з проробленою Товариством роботою було розв’язане й питання визначення мети навчання математики.

допомогою пучка кіл, перпендикулярних до деякого базового кола (круга).

Учений ознайомлює із властивістю радіусів перпендикулярних кіл, проведених в точку перетину цих кіл: "Якщо коло з центром в точці O' перпендикулярне до основного кола з центром в точці O, то радіуси $O'N$ і ON, проведені в точку перетину N кіл, взаємно перпендикулярні, оскільки перпендикулярні до відповідних дотичних" (рис. Ж.3), а також з ознакою кола, перпендикулярного до даного: "… будь-яке коло, центр якого O' лежить на дотичній до базового кола, а радіус дорівнює $O'N$, перетинає останнє під прямим кутом".

Далі вводиться поняття взаємних точок відносно базового кола як таких, що утворюються в результаті перетину півпрямої, початок якої є центром базового кола, з колом, перпендикулярним до нього (на рис. Ж.3 точки A і A' – взаємні). Автор розглядає властивість взаємних точок: "Якщо півпряма з початком в центрі базового кола перетинає ортогональне коло в точках A і A', то $OA\cdot OA'=ON^2$", де ON – радіус базового кола. Цю властивість покладено в основу способу знаходження положення однієї із взаємних точок за відомим положенням іншої: "Щоб побудувати точку A' за даною A, достатньо на базовому колі взяти будь-яку точку P (рис. Ж.3) і в куті POA провести антипаралель із точки P для PA, яка перетне півпряму OA в шуканій точці A'" (іншими словами, із властивості взаємних точок випливає подібність трикутників AOP і POA' за двома сторонами і кутом між ними. Тому $\angle OAP=\angle OPA'$. Таким чином, побудувавши трикутник AOP, де P – довільна

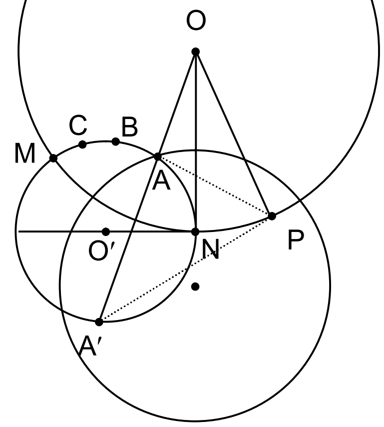


Рис. Ж.3

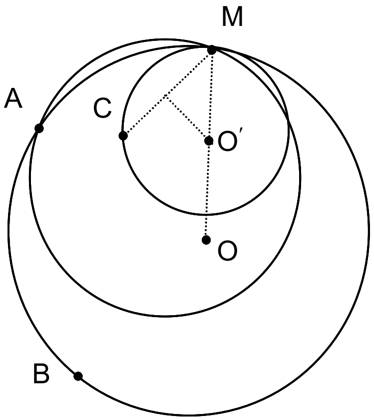


Рис. Ж.1

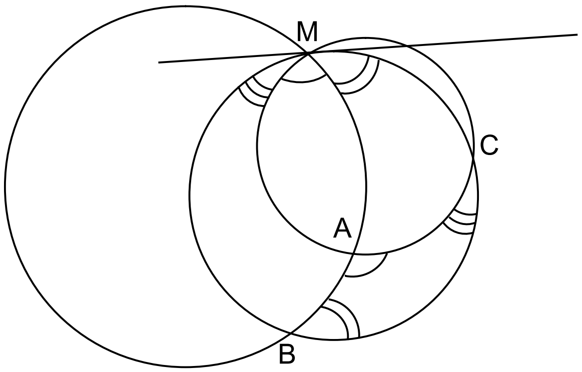


Рис. Ж.2

Позначивши рівні кути на моделі (рис. Ж.2), учням демонструється, що сума внутрішніх кутів трикутника, утвореного трьома колами пучка, які перетинаються, дорівнює сумі кутів, що лежать навколо точки *M* по один бік дотичної, тобто розгорнутому.

Уявлення про геометрію Лобачевського, яка відрізняється від геометрії Евкліда аксіомою про паралельні, автор вводить за

Серед проблем шкільної математики помітне місце займає удосконалення змісту навчання геометрії, зокрема, аналізується логічна структура викладу геометрії в шкільних підручниках (порядок вивчення теорем, залежність між різними їх видами, формулювання означень), а також питання, пов'язані зі стереометричними малюнками та моделями, розв'язуванням геометричних задач. Продовжують висвітлюватись і питання наближених обчислень, звертається увага на виклад тригонометричного матеріалу тощо (доповіді А. Білімовича, В. Єрмакова, М. Столярова, Г. Дивільковського, І. Бєлянкіна, П. Долгушина, Г. Флоринського та ін.). Усього із 239 зроблених за даний період повідомлень 44 стосуються питань шкільної математичної освіти.

При активній участі професорів та викладачів університету (М. Хандрікова, А. Шидловського Ч. Бялобржевського, Р. Савєльєва, С. Реформаторського, Д. Граве, О. Білімовича, П. Воронця, С. Каляндика й ін.) продовжують розроблятись наукові проблеми з молекулярної фізики, кінетичної теорії газів, акустики, теорії відносності, атомної фізики, теорії диференціальних рівнянь, теорії рядів, теорії функцій, теорії ймовірностей, аналітичної геометрії, векторного аналізу, аналітичної механіки, інтегрування рівнянь динаміки, динаміки неголономних систем, теорії твердого тіла, а також фізичної хімії, фізичної географії, метеорології та агрометеорології, кліматології, геології, фізіології, біології тощо [189 –213].

У виділений період читаються й популярні лекції. Так, у роки російсько-японської війни (1904-1905 рр.) збір від прочитаних лекцій Київського фізико-математичного товариства сумою 410 крб. 11 коп. було передано генералу-ад'ютанту А. М. Куропаткіну "на користь поранених воїнів на Далекому Сході та їх родичів" [203, с. 11].

Четвертий період – "Активізація науково-дослідної діяльності на основі державної підтримки (1909-1913 рр.)".
У ці роки *наукові дослідження Товариства з фізики починають проводитись на власній базі*, що значно поповнюється науковою

літературою та фізичними приладами за рахунок субсидій Міністерства народної освіти.

Починаючи з 1909 року Київське фізико-математичне товариство отримувало грошову допомогу (субсидію) Міністерства народної освіти. Вона надавалась одноразово, відповідно до клопотання Ради університету на ім’я Міністра народної освіти, порушеного на основі заяви-прохання від голови Товариства [313]. В різні роки допомога міністерства складала від 300 до 1500 крб. Частина субсидії використовувалась на придбання фізичних приладів і препаратів, яких на 1 січня 1911 р. нараховувалось 34 одиниці. Решта – на закупівлю наукової літератури та виписку періодичних видань. На 1 січня 1914 р книжковий фонд Київського фізико-математичного товариства налічував 1794 одиниці і, крім цього, 53 назви періодичних видань [316].

Все це створювало сприятливі умови для проведення експериментальних досліджень з фізики та написання наукових робіт. Зокрема, у 1913 році були закінчені й надруковані наукові роботи С. І. Каляндика "Проводимость пар солей", А. І. Зарубіна "Закон наложения Кюри в связи с ионизацией твердых диэлектриков", М. П. Пашського "Тепловой эффект при смешивании жидкостей", П. Г. Лапинського "Поглощение электромагнитных волн в магнитных металлах" [209, *XVI*].

Вагому частину доповідей за даний період діяльності Товариства складали демонстрації дослідів та нових фізичних приладів, математичних моделей, реферати про досягнення фізико-математичних наук в Російській імперії та за кордоном; повідомлення про результати спостережень метеорологічної та астрономічної обсерваторій міста Києва, геологічних експедицій та ін.

Так, у 1910 році на засіданні Товариства А. Д. Білімович продемонстрував дві моделі, зроблені засобами механічного кабінету університету Св. Володимира і призначені для навчальних цілей математики та механіки [208]. Перша модель мала використовуватись для демонстрації різних положень одного тріедра (тригранника) прямокутних осей АВС відносно

Додаток Ж

Методика навчання неевклідової геометрії (із праці Долгушин П. А. Неэвклидова геометрия в средней школе)

В геометрії Евкліда за моделлю Пуанкаре, під "прямими" розуміють пучок кіл (множину кіл), що мають спільну точку *M*, яка уявно вважається недоступною – нескінченно віддаленою. Через це кожне таке коло – лінія розімкнута в точці *M* (очевидно, що поняття "точки" і "площини" відповідають традиційним уявленням про ці об’єкти).

Учні мають переконатися в тому, що вибрана модель задовольняє аксіомам геометрії Евкліда. Наочно демонструється, що через дану точку *A* можна провести нескінченну кількість прямих Евкліда (на моделі – нескінченну кількість кіл пучка). Через дві дані точки *A* і *B* проходить тільки одна пряма Евкліда (на моделі – тільки одне коло пучка, бо точки *A*, *B*, *M* визначають лише одне коло). Паралельними прямими Евкліда на даній моделі є кола, які не мають жодної спільної доступної точки (ті, які мають лише одну спільну уявно недоступну точку *M*). Через точку *C*, що не лежить на прямій АВ, проходить лише одна пряма, паралельна даній (на моделі – через точку *C*, яка не належить колу АВМ з центром в точці *O*, проходить тільки одне коло пучка, "паралельне" даному, оскільки центр кола O' лежить на перетині прямої *MO* і серединного перпендикуляра до відрізка *MC*) (рис. Ж.1).

На наочній основі учні повинні впевнитись, що сума кутів трикутника АВС (рис. Ж.2) дорівнює 180 градусів (розуміючи під кутом між двома кривими кут між дотичними до цих кривих, проведених з точки їх перетину). Попередньо автор доводить таку теорему: "Відповідні кути, утворені при перетині двох кіл, з вершинами у двох точках перетину рівні" .

Способом підстановки легко впевнитись, що рівняння (Є.1) задовольняють вирази:

$$x = X + \mu X_0,\ y = Y + \mu Y_0,\ z = Z + \mu Z_0...,\ t = T + \mu T_0,\ (Є.10),$$

де μ може мати довільне числове значення. При цілих значеннях μ формули (Є.10) мають інший вигляд загального розв'язку даного рівняння (Є.1).

Отже, загальний розв'язок невизначеного рівняння можна скласти, знаючи один із часткових розв'язків його і ще один із часткових розв'язків для рівняння з вільним членом, що дорівнює нулю.

У розглянутому прикладі якщо взяти $u = 171$, отримаємо рівняння: $15x + 6y + 20z = 171$; один із часткових його розв'язків є $x = -3, y = 6, z = 9$.

Рівняння $15x + 6y + 20z = 0$ має частковий розв'язок $x = -6$, $y = 5$, $z = 3$. Загальний розв'язок даного рівняння запишемо у вигляді: $x = -3 - 6\mu$, $y = 6 + 5\mu$, $z = 9 + 3\mu$, де μ – довільне ціле число.

Джерела: [98, 99].

іншого XYZ, площин кутів Ейлера (кути, що описують поворот абсолютно твердого тіла у тривимірному евклідовому просторі) та утворення сферичних трикутників (див. рис. 1.1). Друга модель (див. рис. 1.2) – демонстрація властивості перспективи (перспективна відповідність точок фігури і її зображення, не залежить від кута, утвореного площиною фігури і площиною зображення) [39].

Київське фізико-математичне товариство відстоювало прогресивну для свого часу позицію щодо вищої освіти жінок – дійсними його членами, починаючи з 1910 року, обирались і випускниці вищих жіночих курсів. Вищі жіночі курси, як одна із складових системи вищої освіти для жінок в Російській імперії, були засновані на систематичному університетському характері викладання.

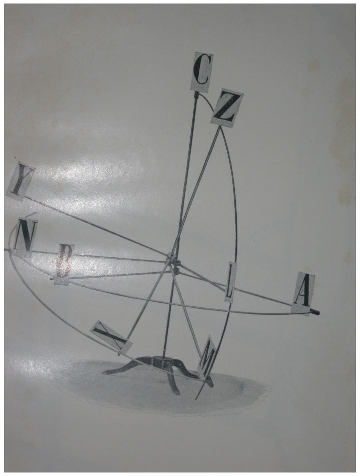


Рис. 1.1

Рис. 1.2

З 1878 року по 1889 рік існувало 2 відділення чотирьохрічного терміну навчання на Київських вищих жіночих курсах: історико-філологічне та фізико-математичне, а з часу відновлення їх роботи – у 1906 році були відкриті юридичний та медичний відділи. Викладали на курсах переважно професори Київського університету – багато з них були членами Київського фізико-математичного товариства.

Тісний зв’язок встановлюється між Київським фізико-математичним товариством і створеним Д. О. Граве у 1904 році семінаром для студентів. Створення відомої математичної школи було продовженням уже існуючої традиції в університеті, за якою студенти, починаючи з перших курсів, залучались до семінарської форми роботи. Остання полягала у реферуванні праць за спеціальністю після вивчення літератури, рекомендованою навчальною програмою. Семінари проводились у позалекційний час. Таку роботу студентів практикували і М. Є. Ващенко-Захарченко, В. П. Єрмаков, Б. Я. Букрєєв [77], [105]. Однак, Д. О. Граве надав семінару творчого, дослідницького характеру з поєднанням як колективної, так і індивідуальної форм роботи. Так, вчений привчав студентів самостійно доводити теореми з вищого аналізу, що містились у довіднику без доведення, і лише у разі утруднень дозволяв звертатись до відповідної літератури. Студенти 3-4 курсів мали самостійно розібратись з великими відділами алгебри і теорії чисел, що не входили на той час до програм університетів, та запропонувати власні способи доведень важливих теорем [77, с. 81]. У 1910 році колективна праця студентів-математиків університету застосовувалась для обчислення таблиць індексів для усіх простих модулів показникових порівнянь другої тисячі (для першої тисячі таблиця була складена К. Г. –Я. Якобі), що для теорії чисел було корисним у розумінні спрощення складних обчислень [51, 77, с. 28]. Учасники семінару Д. О. Граве, а згодом і стипендіати (аспіранти): Є. І. Жилінський, О. Ю. Шмідт, В. П. Вельмін К. Ф. Абрамович, Б. М. Делоне були членами Київського фізико-математичного товариства з 1911 по 1918 рр. Виступи стипендіатів містили результати їх перших наукових досягнень.

За даний період кількість повідомлень з питань шкільної математичної освіти становила 29 із 178 зроблених повідомлень. Їх особливістю є реалізація ідей, відображених у "Київському проекті". Так, увага науковців та викладачів математики середніх

величини, ні елементів 1-го рядка. Для цього віднімемо від елементів 3-го рядка відповідні елементи 2-го, помножені на 3, отримаємо: $\begin{vmatrix} 15 & 6 & 20 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$ Домноживши елементи третього рядка на 2 і віднявши їх від відповідних елементів 2-го рядка, отримаємо: $\begin{vmatrix} 15 & 6 & 20 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta = 1.$ Порівнюючи цей визначник з визначником (Є.4), отримаємо: $\begin{matrix} \alpha_1 = 0, \ \beta_1 = 1, \ \gamma_1 = 1, \\ \alpha_2 = 1, \ \beta_2 = 0, \ \gamma_2 = 1. \end{matrix}$

Таким чином, розв’язання даного невизначеного рівняння зводиться до розв’язання такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 15x + 6y + 20z = u, \\ y + z = u_1, \\ x + z = u_2. \end{cases}$$

Розв’язавши ці рівняння, матимемо:

$x = \Delta_x = u - 6u_1 - 14u_2,$

$y = \Delta_y = u - 5u_1 - 15u_2,$ де u – задане ціле число, а цілі

$z = \Delta_z = -u + 6u_1 + 15u_2,$

числа u_1 і u_2 підбираються довільно.

Із формул (Є.8), що виражають загальний розв’язок рівняння (Є.1), отримуються часткові розв’язки того ж рівняння, якщо замість u_1, u_2, …u_{n-1} підставити певні цілі числа. Запишемо однин із часткових розв’язків у вигляді $x = X, \ y = Y, \ z = Z,$ … $t = T$.

Якщо в формулах (Є.8) замість u взяти нуль, то вони виразять загальний розв’язок рівняння $ax + by + cz + ... + kt = 0$

(Є.9)

Нехай один із часткових розв’язків цього рівняння виражається рівностями: $x=X_0, y=Y_0, z=Z_0,$ … $t=T_0$.

формул випливає, що розв’язки в цілих числах невизначеного рівняння 1-го степеня з n невідомими виражаються цілими поліномами 1-го степеня від $n-1$ невизначених величин u_1, u_2, $\dots u_{n-1}$.

Автор наводить приклад розв’язування рівняння в цілих числах: $15x+6y+20z=u$, де u – деяке ціле число.

Запишемо послідовно коефіцієнти рівняння і суміжні з ним ряди, утворені описаним вище способом: $\begin{matrix}15,\ 6,\ 20\\ 3,\ 6,\ 2\\ 1,\ 0,\ 2\\ 1,\ 0,\ 0\end{matrix}$.

Беремо визначник $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$; домноживши елементи 1-го стовбця на 2 і додавши їх до відповідних елементів останнього стовбця, отримаємо $\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$. В цьому визначнику до елементів 1-го стовбця додамо відповідні елементи 3-го, а потім помножимо елементи 3-го стовбця на 3, додавши до них відповідні елементи 2-го стовбця, отримаємо визначник: $\begin{vmatrix}3&6&2\\0&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=1$. Далі домножимо елементи другого стовбця на 2 і додамо їх до відповідних елементів 1-го стовбця, а потім елементи 2-го стовбця домножимо на 3 і додамо їх до відповідних елементів 3-го стовбця, отримаємо визначник: $\begin{vmatrix}15&6&20\\2&1&3\\7&3&10\end{vmatrix}=1$, елементи 1-го рядка ніщо інше, як коефіцієнти даного рівняння. Його можна спростити, не змінюючи ні його

навчальних закладів зосереджується на ролі інтуїції і логіки в математиці, у зв’язку з цим обґрунтовується необхідність пропедевтичного курсу геометрії на основі індуктивно-лабораторного методу, пропонується розробка викладу неевклідової геометрії в середній школі, продовжується робота над удосконаленням теорії і методики вивчення дробових, від’ємних та ірраціональних чисел (у напрямі реалізації принципу розвитку поняття про число), наближених обчислень, розв’язування рівнянь (доповіді М. Володкевича, М. Оглобліна, Д. Граве, М. Делоне, П. Долгушина, К. Щербини, І. Чир’єва).

П’ятий період – "Активізація громадянської діяльності членів Товариства (1914-1916 рр.)". Характерною є участь Товариства у військово-промисловій мобілізації країни та організації й проведенні рентгендосліджень поранених.

Тяжке становище в країні, породжене Першою світовою війною (1914-1917 рр.), вплинуло на напрям та характер наукових досліджень Товариства. По всій імперії були певною мірою загальмовані фундаментальні теоретичні дослідження, що не мали практичного застосування в оборонній галузі [104]. Гостра недостача лікарських препаратів потребувала швидкого розвитку фармацевтичної промисловості. Невідкладності вимагало виробництво вибухових речовин, протигазових засобів тощо. Під керівництвом учасника товариства С. М. Реформатор-ського (він же з 1910 р. голова фізико-хімічного товариства) у лабораторії при Університеті було налагоджено випуск хлороформу та деяких лікарських препаратів [219, с. 38-39].

У цьому ж році під головуванням проф. Й. Косоногова створена комісія допомоги пораненим шляхом рентгенівського дослідження, до складу якої увійшли всі члени Товариства, що працювали у галузі фізики. На 20 жовтня 1914 року у рентгенівських кабінетах, створених комісією, було проведено більше 1000 досліджень найбільш складних випадків. Проте на облаштування нових кабінетів такими приладами і матеріалами, як рентгенівські трубки, флюоресцентні та підсилюючі екрани, свинцеве скло, запобіжні фартухи тощо, потрібні були нові кошти. Для цього, на засіданні Товариства 20 жовтня 1914 року одноголосно постановили клопотати перед Міністерством народної освіти про субсидію у 1500 крб. на рентгенкабінети [195, с.VIII-IX]. Відомо, що всього комісією були проведені дослідження у десяти військових госпіталях м. Києва і у лікарні для робітників [104, 219].

Третього червня 1915 року Товариством була створена комісія у складі: Ч. Т. Бялобржевського, Н. Б. Делоне, О. М. Зарубіна, В. К. Роше, Г. К. Суслова, П. Я. Харченка для участі у військово-промисловій мобілізації країни. Комісія представляла фізико-механічну секцію Військово-промислового комітету. У її завдання входило: 1) виправлення фізичних інструментів, що використовуються в армії (оптичні, електричні прилади, телефони та ін.), виготовлення запасних частин до них; 2) залучення до справи і підготовка нових працівників, переважно з числа учнів та студентів [211, с.VI].

Восени 1915 року військове командування віддало наказ про евакуацію Київського університету до м. Саратова до жовтня 1916 року [105, с.71]. Тому терміном на один рік засідання Товариства були припинені.

Після повернення з евакуації, Товариство відновлює свою діяльність. За 1915-1916 рр. було проведено 11 засідань, на яких прочитано 19 повідомлень, чотири з них стосуються проблем шкільної математики. Так, обговорюються робота Міжнародної комісії з модернізації шкільної математичної освіти, проект реформи шкільної математичної освіти 1915 року, пропонується удосконалення теорії неперервних дробів (доповіді А. Білімовича, К. Щербини). При організації працює дві комісії: комісія з розробки наукових і практичних питань, пов'язаних із влаштуванням аеродинамічної труби в садибі Київського університету та комісія зі складання звернення до Міністра народної освіти стосовно проекту програм з математики, запропонованого міністерством у 1915 році.

За п'ять виділених періодів члени Київського фізико-математичного товариства брали активну участь у роботі з'їздів російських природодослідників і лікарів, з'їздів викладачів природничих наук, педагогічних з'їздів, з'їздів викладачів

числа взаємнопрості, крім випадку, коли f' дорівнює одиниці. Отже, складаючи таким чином суміжні ряди, ми неодмінно доходимо до такого ряду, в якому найменше число, що не дорівнює нулю за абсолютною величиною дорівнює одиниці, тому в наступному ряді, останньому із суміжних, найбільше число буде 1, а решта – нулі.

Якщо виконувати всі зазначені дії в оберненому порядку над яким-небудь із суміжних рядів, отримаємо числа попереднього ряду. Таким чином, із останнього ряду можна прийти послідовно до першого (Є.5).

Візьмемо визначник $\begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\ ...0 \\ 0\ 1\ 0\ ...\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ ...\ 0 \\ .... \\ 0\ 0\ 0\ ...1 \end{vmatrix} = 1.$

Виконуючи послідовно над відповідними членами стовбців його ті ж дії, які повинні виконувати над числами останнього із суміжних рядів для переходу до попередніх рядів, ми отримаємо ряд суміжних визначників, що дорівнюють одиниці, в яких елементи першого рядка є числами відповідних суміжних рядів.

Таким чином, завжди можна знайти визначник, що дорівнює одиниці, перший рядок якого відрізняється від даного ряда коефіцієнтів *a, b, c, ... , k,* тільки місцями коефіцієнтів. Його можна привести до визначника виду (Є.4) шляхом переміщення стовбців. Всі коефіцієнти такого визначника є цілими числами. Отже, завжди можна знайти такі цілі числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, ..., \lambda_1, ... \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, ..., \lambda_{n-1}$, при яких має місце рівність $\Delta = 1$. При таких значеннях коефіцієнтів в додаткових рівняннях (Є.2) розв'язки даного рівняння (Є.1) виразяться формулами: $x = \Delta_x$, $y = \Delta_y$, $z = \Delta_z$,... , $t = \Delta_t$ (Є.8). Тут визначники не містять невизначених величин, крім u_1, u_2, …u_{n-1}. Якщо припустити, що ці величини можуть мати тільки цілі числові значення, то за формулами (Є.8) знайдемо загальний розв'язок в цілих числах даного невизначеного рівняння (Є.1). Із закону утворення цих

де
$$\Delta = \begin{vmatrix} a\ b\ c\ \ldots & k \\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \ldots & \lambda_1 \\ \alpha_2\ \beta_2\gamma_2 \ldots & \lambda_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-1}\ \beta_{\text{n-1}}\gamma_{n-1} \ldots \lambda_{n-1} & \end{vmatrix} \qquad (\text{Є}.4).$$

Замінивши у визначнику елементи 1-го стовбця послідовно числами u, u_1, u_2, $\ldots u_{n-1}$, отримаємо Δ_x; аналогічно знаходять Δ_y і т.д.

Далі пропонується підібрати для коефіцієнтів при невідомих такі цілі числові значення, щоб визначник (Д.4) дорівнював одиниці. При цьому автор користується прийомом, що був описаний у "Вищій алгебрі" проф. Сохотського (цей прийом використовують для знаходження найбільшого спільного дільника кількох чисел).

Написавши послідовно коефіцієнти рівняння (Є.1):

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k, \qquad (\text{Є}.5)$$

вибирають найменший із них за абсолютною величиною l і ділять на нього всі останні. Далі, утримуючи в ряду (Д.5) число l, замінимо всі інші числа цього ряду їх остачами від ділення на l. Отримаємо новий ряд чисел:

$$a', b', c', \ldots, k', \qquad (\text{Є}.6)$$

з яких, крім l, хоча б одне число не дорівнює нулю (бо за припущенням коефіцієнти рівняння (Є.1) – взаємно прості числа). Ряди (Є.5), (Є.6) називають суміжними. Виберемо із ряду (Є.6) найменше із чисел за абсолютною величиною f', відмінне від нуля; утримуючи це число, замінимо всі останні їх остачами від ділення на нього; отримаємо наступний суміжний ряд: $a'', b'', c'', \ldots, k''$, (Є.7), в якому, крім f', є хоча б одне число, яке не дорівнює нулю, бо в протилежному випадку всі числа ряду (Є.6) були б кратними числу f'. Останнє означає, що числа ряду (Є.5) мали б спільний множник f', а це суперечить припущенню, що

математики, математичних, фізичних й філософських зарубіжних з’їздів та конгресів, а також в організації та проведенні з’їздів, що відбувались у Києві.

Шостий період – "Період занепаду діяльності Товариства (1917-1919 рр.)". Характеризується значними перервами у роботі Київського фізико-математичного товариства під час революційних потрясінь та частих змін урядів у м. Києві та її припиненням.

Так, у 1917 році було проведено 6 чергових засідань, на яких заслухано 14 доповідей, дві з них присвячені вирішенню проблем шкільної математики, а саме П. А. Долгушина "Графическое исследование делимости на произведение взаимно простых чисел" та М. В. Оглобліна "О статье Н. М. Михальского: "Возвышение полинома в целую положительную степень"". У 1918 році було проведено 7 засідань і заслухано 13 повідомлень. За два останні роки до організації приєдналось й 5 нових дійсних члена Товариства [319]. У 1918 р. через фінансову скруту не друкувались "Университетские известия". Була паралізована й робота лабораторій, кабінетів клінік, наукових товариств, що існували при університеті. Відомо, що фізико-математичне Товариство просило через правління університету Гетьманський уряд невеликої допомоги на наукові роботи з фізики й на друкування праць Товариства, проте прохання не було задоволене [105, с. 323].

З архівних фондів відомо, що Товариство продовжувало свою діяльність і в 1919 році. Так, за повідомленням Комісара Київського університету в Управління Губвиконкому від 16 червня 1919 року (справа № 1140), в закладі існувало 15 наукових товариств, серед яких і Київське фізико-математичне. Для перереєстрації Товариства у Губвиконком було надано "Устав Физико-математического общества при Киевском Университете" [314].

Дослiднику, на жаль, не вдалося знайти відомостей про існування і діяльність Товариства у подальші роки. Проте існує імовірність, що істотним фактором у припиненні його роботи стала реформа вищої школи 20-их рр., її наслідком, як відомо, було злиття з Київським університетом деяких вищих навчальних закладів із наступною реорганізацією у Київський вищий інститут народної освіти (ВІНО), а також постанова Наркомосвіти УРСР про відокремлення наукової роботи від вищих навчальних закладів [105, с. 350]. За таких умов Київське фізико-математичне товариство втратило функції однієї з провідних організацій, що мала право визначати тематику та сприяла розробці й популяризації наукових досліджень з фундаментальних та прикладних наук фізики й математики, а також удосконаленню викладання основ цих наук у середній школі. Уся науково-дослідна робота мала зосередитись тепер в Академії наук УРСР та в спеціальних науково-дослідних установах (таких, як Інститут Педагогіки УРСР), що перебували в іншому віданні – Науковому комітеті НКО УРСР. "Записки Київського інституту народної освіти", де друкувались наукові праці професорів ВІНО почали виходити лише з 1926 року [105, с. 347-350].

Таким чином, Київське фізико-математичне товариство (1889-1919 рр.) являло собою унікальне явище, властиве лише для своєї епохи. Його діяльність характеризується такими основними напрямами: науково-дослідним (розробка та обговорення наукових проблем, дослідження у галузі фізики, що проводились на власній базі Товариства, участь у роботі багатьох наукових вітчизняних й закордонних з’їздів та конгресів), педагогічним (розробка й обговорення проблем шкільного викладання математики й фізики, створення програм, підручників та методичних посібників, участь в педагогічних з’їздах), просвітницьким (читання популярних наукових лекцій у стінах університету, обрання дійсними членами Товариства випускниць вищих жіночих курсів, магістрантів, людей різного професійного спрямування, поширення передових наукових та освітніх ідей на сторінках різних видань), благодійницьким (участь у різних доброчинних заходах), громадсько-активним (участь у військово-промисловій мобілізації країни, організація й проведення рентгендосліджень поранених). Усього Товариством

Додаток Є

Огляд праці Д. Ефремова "Общее решение в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени"

Нехай необхідно знайти цілі розв’язки рівняння 1-го степеня

$$ax + by + cz + \ldots + kt = u \qquad (Є.1)$$

з *n* невідомими *x, y, z, …t.* Коефіцієнти *a, b, c, …k* при невідомих і відомий член вважають цілими числами. Для того, щоб задача була можлива, припускають, що коефіцієнти при невідомих – числа взаємно прості.

Д. Єфремов пропонує доповнити дане рівняння системою з *n-1* рівнянь 1-го степеня з тими самими невідомими:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \ldots + \lambda_1 t = u_1, \\ &\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \ldots + \lambda_2 t = u_2, \\ &\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \ldots + \lambda_3 t = u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1} y + \gamma_{n-1} z + \ldots + \lambda_{n-1} t = u_{n-1}, \end{aligned} \qquad (Є.2)$$

в якій коефіцієнти при невідомих і відомі члени поки що невизначені. Отримаємо систему n рівнянь з *n* невідомими, розв’язками якої будуть:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ \mathrm{y} = \frac{\Delta_{\mathrm{y}}}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \ldots,\ t = \frac{\Delta_t}{\Delta}, \qquad (Є.3)$$

попередньої множини чисел, набули повну загальність – стали справедливими і для розширеної множини чисел.

Ідея розширення поняття про число є основною і для побудови сучасного шкільного курсу математики загальноосвітньої школи. Але, на відміну від запропонованого П. Матковським формально-логічного напряму викладу теорії, в теперішніх підручниках та методичних посібниках реалізований реально-конкретний напрямок розвитку поняття про число, за

яким введення понять та правил виконання дій в розширеній множині чисел відбувається індуктивно у зв'язку з дійсністю та конкретними уявленнями учнів. У дидактичному відношенні останній напрямок найбільш задовольняє психологічним особливостям вікових груп учнів (5-6 класів). Проте, на сьогодні деякими авторами, наприклад О. Бекаревичем [27], розроблена методика формування поняття нового числа (цілого від'ємного), за комбінованим методом, де формально-логічний спосіб використовується для обгрунтування правил дій над числами розширеної множини.

Джерела: [151–152]

було проведено 475 засідань, на яких обговорено близько 150 доповідей з проблем шкільної математичної освіти (див. Додаток В). Товариство налічувало 355 дійсних членів.

Висновки до першого розділу

Заснування та діяльність Київського фізико-математичного товариства (1889) були зумовлені низкою вагомих передумов, серед яких пріоритетна роль належить соціально-економічним чинникам. Так, перехід Російської імперії до індустріальної стадії капіталізму в кінці XIX ст., зумовив інтенсивний розвиток науки в Україні (з'являються нові теорії й галузі природничо-математичних наук), піднесення рівня університетського викладання науки, в тому числі й у Київському університеті (курси лекцій включають найновіші досягнення світової науки, активно застосовуються нові форми занять студентів: практичні, семінарські заняття, науково-дослідна робота, зростає роль наочності), впровадження різних форм зв'язку між викладачами Київського університету й середніми навчальними закладами (співробітництво в педагогічних журналах, інспектування навчальних закладів, перевірка екзаменаційних робіт випускників шкіл). У Київському університеті здійснюються наукові дослідження у галузі теорії функцій, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, аналітичної механіки, операційного числення, гідравліки, теорії опору, геометрії поверхонь, лінійної алгебра, теорії чисел, теорії груп, теорії алгебраїчних чисел, неголономної механіки та ін. Проте, через відсутність в Україні національної держави, інтеграційну та русифікаторську політику самодержавства, здобувати освіту та представляти наукові праці рідною мовою видавалось неможливим.

Організаційно-наукові чинники полягали у наданні можливості створення наукових товариств статутами російських імператорських університетів (1863, 1884 рр.); потребі науковців у співпраці, спілкуванні з іншими спеціалістами, координації досліджень; недостатній державній підтримці науки в Київському університеті, наприклад, у фінансуванні, формуванні належної бібліотечної та технічної бази тощо.

Система шкільної освіти на українських землях, що входили до складу Російської імперії в кінці XIX – на початку XX ст., характеризувалася різнотипністю та різнорівневістю навчальних закладів, платним, становим, релігійно-моральним, монархічно-відданим характером навчання. Математика, як загальноосвітній предмет, в залежності від типу навчального закладу мала пропедевтичний (початкові навчальні заклади), частково-систематичний (нижчі навчальні заклади) та систематичний (середні навчальні заклади) характер. Програми з математики, форми, методи навчання для гімназій та реальних училищ були певним орієнтиром для середніх та нижчих навчальних закладів. Спроби реформування шкільної математичної освіти в Російській імперії (1900, 1901, 1904, 1905, 1915), передбачали нові концептуальні засади: оновлення змісту шкільної математики у відповідності з тогочасними науковими досягненнями, відмову від формально-логічного викладання предмету та ін.

Засновниками Київського фізико-математичного товариства були відомі вчені-математики й фізики М. Авенаріус (1835-1895), Б. Букреєв (1859-1962), М. Ващенко-Захарченко (1825-1912), В. Єрмаков (1845-1922), І. Рахманінов (1826-1896), П. Ромер (1835-1899), Г. Суслов (1857-1935 та ін. Метою діяльності об’єднання було сприяння й підтримка розвитку наукових досліджень з фундаментальних та прикладних наук математики й фізики (та наук з ними суміжних), а також удосконалення методик навчання шкільної математики й фізики.

У дослідженні виділено та охарактеризовано VI основних періодів діяльності Товариства: *"Початок діяльності (1889-1890 рр.)"; "Активізація культурно-просвітницької та доброчинної діяльності (1891-1901 рр.*)"; *"Активізація досліджень, спрямо-*

що всі властивості тезиса справедливі також і для нових чисел бо, при виведенні цих властивостей, спираються на основні закони попереднього ряду чисел, що залишаються справедливими і для нового поняття тезису.

Вираз для означення оберненої операції П. Матковський виводить наступним чином: "Нехай $(a \cup b) \cup (c \cup d) = x = y \cup z.$ Тоді за означенням лізиса маємо:

$(y \cup z) \circ (c \cup d) = (a \cup b),$ або

$(y \circ c) \cup (z \circ d) = (a \cup b),$ або

$(y \circ c) \circ b = (z \circ d) \circ a,$

$y \circ (c \circ b) = z \circ (d \circ a),$

$y = d \circ a;\ \ z = c \circ b.$ Отже, $x = (d \circ a) \cup (c \circ b).$ Оскільки $d \circ a$ і $c \circ b$ – числа початкової системи, то x є числом початкової або ж узагальненої системи чисел" [151, с.*395*]. Неважко довести, що обернена операція (лізис) завжди однозначна, тобто якщо $X \circ B = Z \circ B,$ то і $X = Z.$

Оскільки тезис і лізис над числами узагальненої множини мають такі ж основні властивості, що й для попередньої системи чисел, то можемо стверджувати, що тотожності, що виражають зв’язок тезиса з лізисом залишаються справедливими і для нових чисел. Якщо під A, B, C і D розуміти числа узагальненої системи, то матимемо:

$$(A \cup B) \circ B = (A \circ B) \cup B = A;$$

$$A \cup (B \circ C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B;$$

$$(A \circ B) \cup C = (A \cup C) \circ B = A \circ (B \cup C);$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \circ C = (A \circ C) \cup B;$$

$$(A \cup B) \circ (C \cup D) = (A \circ C) \cup (B \circ D);$$

$$(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \circ D) \cup (B \circ C).$$

Отже, на прикдаді законів, що виражають зв’язок між прямими і оберненими операціями, П. Матковський показав, що твердження, які мали смисл тільки за основних положень

$(a \cup b) \circ b = a$. Відповідно до принципу перманентності (загальності) необхідно дати такі означення, які б не порушували попередніх властивостей чисел і включали б в себе відомі закони і умови операцій над числами початкового ряду. На думку П. Матковського потрібно звернути увагу на те, що при переході від нижчої системи чисел до вищої втрачаються деякі ознаки дій початкової системи чисел (наприклад, при переході від множення натуральних чисел до множення дробів втрачається ознака збільшення числа і т.д.), тобто "з розширенням обсягу поняття, зменшується його зміст" [151,с. 393].

Розглянемо основні етапи введення нових понять розширеної множини чисел.

Якщо $a \cup b$ *і* $c \cup d$ є числами початкового ряду, то $a \cup b \overset{>}{\underset{<}{=}} c \cup d$ тоді, коли $a \circ d \overset{>}{\underset{<}{=}} b \circ c$. Поширючи дане твердження на випадок, коли числа $a \cup b$ і $c \cup d$ є числами нової множини (керуючись принципом загальності), матимемо два означення: "Два числа виду $a \cup b$ і $c \cup d$ називаються рівними, коли $a \circ d = b \circ c$. Із двох чисел $a \cup b$ і $c \cup d$ перше називається більшим (меншим) другого, якщо $a \circ d \overset{>}{\underset{<}{}} b \circ c$ " [там само].

Поняття про пряму дію (тезис) над числами розширеного ряду (тут автор обмежується прямою операцією, яка має той самий ступінь, що і обернена – відносно якої відбулось розширення початкового ряду чисел) встановлюється шляхом поширення властивості, доведеної для чисел попереднього ряду, на нову множину чисел: $(a \cup b) \circ (c \cup d) = (a \circ c) \cup (b \circ d)$. Означення має чіткий смисл, оскільки числа $a \circ c$ і $b \circ d$ належать попередньому ряду. При такому виборі означення основні закони прямої операції залишаються справедливими і для нових чисел. Автор наводить доведення основних законів: $A \circ B = B \circ A$; $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$. Після цього можна вважати,

ваних на реформування шкільної математичної освіти (1902-1908 рр.)"; "Активізація науково-дослідної діяльності на основі державної підтримки (1909-1913 рр.)"; "Активізація громадянської діяльності членів Товариства (1914-1916 рр.)"; "Період занепаду діяльності Товариства (1917-1919 рр.)". Основними напрямами роботи Київського фізико-математичного товариства були: науково-дослідний, педагогічний, просвітницький, благодійницький, громадсько-активний.

Суттєвим фактором у припиненні роботи Київського фізико-математичного товариства стала реформа вищої школи 20-их рр.

РОЗДІЛ

2

ІДЕЇ УЧАСНИКІВ КИЇВСЬКОГО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА У ГАЛУЗІ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

"а) якщо тричленний тезис асоціативний, то і тезис із довільного кінечного числа членів також асоціативний;

б) кожний асоціативний тезис підлягає переставному закону" [151, с. 390-391].

До означення оберненої операції приходять наступним чином. Нехай потрібно знайти таке число x, яке будучи пов'язане тетично з b утворює a: $x\circ b=a.$ В силу однозначності тетичної операції таке число єдине. Операцію, за допомогою якої знаходимо x із рівняння $x\circ b=a,$ назвемо оберненою або літичною. Якщо позначити шукане число x через $a\cup b,$ то означення лізиса можна виразити рівністю: $(a\cup b)\circ b=a.$ Неважко побачити, що, крім даної рівності, існує й така $(a\circ b)\cup b=a.$ Отже, маємо закон незмінюваності відносно відповідних операцій тезиса і лізиса:

"с) число не зміниться, якщо пов'язати його тетично і літично з одним і тим самим числом, виконуючи операцію в довільному порядку" [151, с. 391].

Закони, що виражають зв'язок між тезисом і лізисом, встановлюються аналогічно до розглянутої вже теорії дії віднімання. Із них автор виділяє два важливих співвідношення, що слугують основою розширення числової множини чисел ("системи чисел"):

3) $(a\cup b)\circ(c\cup d)=(a\circ c)\cup(b\circ d);$

$>$ $>$

4) якщо $a\cup b=c\cup d$, то $a\circ d=b\circ c$ і навпаки.

$<$ $<$

Розширення попередньої числової множини мотивується необхідністю знаходження числа x, яке б задовольняло рівність $x\circ b=a,$ якщо в попередній системі такого числа немає. У формі постулату приймається твердження, "що існує одне, і притому тільки одне число нової природи, що не належить до попередньої системи і задовольняє даній вимозі" [151, с. 392]. Тоді, позначивши це чило символом $x=a\cup b,$ отримаємо:

Кожну записану рівність можна читати як з ліва на право, так і навпаки (відповідно до поняття рівності: якщо А=В, то і В=А.). Тому маємо два математичні твердження тісно пов'язані між собою. Спосіб доведення цих рівностей – "спосіб перевірки" грунтується на використанні основних законів додавання, означення дії віднімання та її властивості – однозначності дії. Розглянемо доведення рівності $a-(b+c)=(a-b)-c$. "Ліва частина рівності представляє те число, до якого додавши $b+c$ повинні отримати a. Оскільки різниця має лише одне значення, то залишається показати, що і права сторона представляє те число, до якого додавши $b+c$, отримаємо a" [151, с.388]. Дійсно, $(a-b)-c+b+c=(a-b)-c+c+b=((a-b)-c+c)+b=$
$=(a-b)+b=a$.

Теорія дії ділення будується аналогічно теорії дії віднімання. Необхідно лише замінити відповідно слова "різниця" і "сума" на "частку" і "добуток", а знаки множення і ділення поставити замість знаків додавання і віднімання відповідно.

Якщо зв'язок між діями однакового ступеня виражаються рівностями переставного і сполучного характеру, то зв'язок між діями різних ступенів – рівностями, що виражають розподільний закон (автор розглядає 4 перші арифметичні дії).

П. Матковський узагальнює наведену теорію для 4 дій над числами натурального ряду на довільну множину ("систему") чисел для визначення наслідків, що "випливають із даних формальних тверджень про ту чи іншу операцію" [151, с. 389].

Нехай дано систему чисел $a, b, c, d, \ldots$, отже, дано і критерій визначення відносної їх величини, встановлено поняття рівності і нерівності. Нехай можна пов'язати тетично (прямою операцією) два будь-яких об'єкти цієї системи. Результат такого зв'язку завжди однозначний і можливий, тобто завжди визначений і є одним із об'єктів c цієї ж системи. Позначивши тезис символом $a\circ b$, запишемо: $a\circ b=c$.

Далі потрібно прийняти наступні умови: якщо $a=b$, $c=d$, то і $a\circ c=b\circ d$ і якщо $a>b$ і $c=d$, то $a\circ c>b\circ d$; $a\circ b=b\circ a$; $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$. Із цих основних положень випливають властивості, що підлягають доведенню:

Доробок Київського фізико-математичного товариства з галузі шкільної математичної освіти складається з доповідей учасників товариства (близько 150), виголошених на засіданнях, зафіксованих у протоколах та видрукуваних у додатках до протоколів за усі роки існування Товариства; розробленого проекту програми з математики для чоловічих гімназій (1907); статей учасників Товариства, надрукованих у різних педагогічних журналах ("Вестник опытной физики и элементарной математики", "Университетские известия", "Педагогический сборник", "Циркуляры по киевскому учебному округу" та ін.) і об'єднаних наступною ідеєю: у них розвинуті теоретичні положення, апробовані на засіданнях Товариства. Цією ж ідеєю об'єднані вказані та проаналізовані нами підручники, методичні й навчальні посібники з математики для середньої школи, педагогічні праці, доповіді з'їздів, лекції, учнівські роботи. Систематизація науково-педагогічної, навчально-методичної та просвітницької діяльності з розвитку шкільної математичної освіти зроблена за проблемно-тематичним принципом.

2.1. Діяльність Київського фізико-математичного товариства з реформування шкільної математичної освіти

2.1.1. Аналіз програм, підручників та матеріалів з питань реформування шкільної математичної освіти. Київське фізико-математичне товариство уважно слідкувало за спробами проведення реформ, змінами до програм шкільної математики в Російській імперії, що здійснювались на початку XX ст., станом вітчизняної педагогічної думки з проблем реформування, при цьому, вважало за доцільне ознайомитись і з тим, в яких країнах подібні удосконалення в навчальних програмах уже відбулися і які спостерігаються результати навчання. Так, у 1902-1908 рр. на засіданнях Товариства обговорювались особливості навчання математики у російських середніх навчальних закладах та у школах Сполучених Штатів, Франції, Швейцарії (доповіді К. Ф. Лебединцева, М. М. Володкевича, О. М. Яницького); програми з математики французьких ліцеїв (доповіді Г. К. Суслова, О. М. Астряба); були проаналізовані французькі підручники: "Арифметика" Ж. Таннері (доповідь П. О. Долгушина), "Алгебра" Е. Бореля (доповідь М. В. Оглобліна) та ін. [201, 202].

Упродовж 1903-1904 рр. Київським фізико-математичним товариством аналізується і проект програми з математики для кадетських корпусів (доповіді І. І. Зєхова, О. П. Зонненштраля, Г. К. Суслова).

Проект програми з математики, створений при Головному управлінні військово-навчальних закладів (1903 р.), мав на меті дещо удосконалити чинну на той час програму затверджену в травні 1898 року. Проект разом із інструкцією для експериментальної перевірки викладання математики був введений у трьох кадетських корпусах (1-му, Псковському і Донському) з початку 1903-1904 навчального року [306, с.95].

Третього листопада 1903 р. на засіданні Товариства виступив викладач математики Київського кадетського корпусу І. І. Зєхов з доповіддю "По поводу программ по арифметике в кадетских корпусах".

Зміни в новій програмі з алгебри полягали в скороченні деяких тем курсу (був вилучений додатковий і повторювальний курс з арифметики, вивчення метричної системи мір вважалось не обов'язковим), а також в перенесенні окремих тем арифметичного матеріалу до курсу алгебри та геометрії.

Після обговорення проекту програми з арифметики, в якому брали участь І. І. Зєхов, К. М. Щербина, Г. М. Попруженко, Г. О. Дивільковський, М. О. Столяров, В. П. Єрмаков, К. Ф. Лебединцев, І. І. Косоногов та ін., були ухвалені положення щодо можливого удосконалення проекту програми. Вони зводились до введення в курс арифметики пропедевтичного

логарифмування. Кожна пряма дія разом із відповідною їй оберненою становлять один ступінь. Так додавання і віднімання – дії першого ступеня, множення і ділення – другого, піднесення до степеня, добування арифметичного кореня n-го степеня та логарифмування – третього ступеня.

Однією з головних задач теорії є виділення основних законів. Ще при вивченні натурального ряду чисел необхідно звернути увагу, що переставний, сполучний закони додавання можна вважати неявним означенням дії додавання. Всі властивості додавання є наслідками її однозначності та основних законів. Всі властивості дії множення випливають із її однозначності, переставного, сполучного і розподільного законів. В основі вчення про степінь лежить закон показників степенів.

Теорія ж обернених операцій встановлюється шляхом приєднання до законів відповідної прямої операції означення оберненої. Так, наприклад, теорія дії віднімання будується наступним чином: після формулювання означення дії, з'ясовується її основна властивість – однозначність, тобто, що різниця двох чисел має лише одне значення. Для цього достатньо помітити, що якщо $x+b=z+b$, то $x=z$, бо якщо $x>z$ або $x<z$, то $x+b>z+b$ або $x+b<z+b$, що суперечить положенню.

Зв'язок між дією додавання і віднімання (що обмежується випадком можливих різниць) розкривається такими властивостями:

$(a - b) + b = (a + b) - b = a;$

$a - (b+c) = (a - b) - c = (a - c) - b;$

$(a + b) - c=(a - c) + b = a+(b-c);$

$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d);$

$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c).$

З останньої рівності випливає, що якщо $a - \overset{>}{\underset{<}{=}} c - d$, *то*

$a+d \overset{>}{\underset{<}{=}} b+c.$

Додаток Е

Ідея розширення поняття про число в елементарній алгебрі (огляд доповіді П.І. Матковського)

П. І. Матковський у доповіді "Виділення деяких законів алгебри і утворення поняття про нове число" описав формально-логічний напрям розширення поняття про число, що пов'язаний з внутрішньою потребою математики зробити обернені операції можливими в усіх випадках.

Операції над числами натурального ряду автор поділяє на прямі (тетичні) і обернені (літичні). Перш за все, на його думку, має бути з'ясовано властивості та зв'язки між прямими операціями (діями) на прикладі операцій натурального ряду чисел. Так, найпростіша дія – додавання є основною дією. Її властивості – однозначність і можливість, тобто результат дії завжди визначений і є одним із чисел натурального ряду. При умові рівності всіх компонентів дії додавання – отримується поняття про дію множення, яке є не що інше як повторене додавання. Ця операція також однозначна і можлива. Аналогічно, при умові рівності всіх компонентів дії множення, можна розглядати значення добутку як результат нової дії – піднесення до степеня. Однозначність і можливість є властивостями і для цієї операції. Повторення піднесення до степеня може створювати за аналогією нову операцію, але вона не розроблена в теоретичному відношенні і не має значення для практичної діяльності. Автор дає наступне означення оберненої операції: "Під оберненою операцією розуміють таку, в якій за шуканим прямої операції і одному із даних необхідно знайти інше шукане" [151, с. 386].

За змістом означення, обернених операцій має бути 6, але, беручи до уваги, що сума і добуток підлягають переставному закону, таких операцій буде 4. Для операції піднесення до степеня існують дві обернені – добування кореня і

курсу дробів, повторювального курсу арифметики "для належного обґрунтування прийомів арифметичних викладок"; вилучення розв'язування задач на облік векселів (ІІІ клас). На думку більшості членів Товариства, привчати учнів користуватись підручниками необхідно не раніше, ніж на другому році навчання. Домашні ж завдання з опрацювання теорії в першому класі мають бути "обмежені вимогою, щоб учні обмірковували поставлені запитання" [202, с.16-17].

Восьмого грудня 1903 року була заслухана доповідь викладача математики і фізики Київського Володимирського кадетського корпусу О. П. Зонненштраля "По поводу новых программ по алгебре в кадетских корпусах". Програми з алгебри рекомендувались двох видів: систематична (звичайна орієнтовна програма) і методична (пропонувались деталізовані методичні вказівки щодо опрацювання тем систематичної програми).

Удосконалення програм з алгебри характеризувалось введенням пропедевтичного курсу алгебри (в ІІІ класі), поняття про змінні і сталі величини та про функціональну залежність (у випускному VII класі) та ін.

Київське фізико-математичне товариство вказало на деякі недоліки нової програми ("систематичної"), а саме: "в програмі повністю ігнорується основна ідея алгебри, за якою числа вводяться з метою узагальнення дій"; вказано на нераціональний розподіл змістової лінії – розв'язування рівнянь (теореми про еквівалентність рівнянь були віднесені до курсу VII класу, тоді як в курсі V класу розв'язуються рівняння з радикалами і квадратні рівняння з двома невідомими); недоліком програми визнано також неможливість використати вчення про границі до узагальнення дій на ірраціональні числа" [202, с.19].

Методична програма містила вказівки стосовно застосування нового методу навчання – "методу доцільних задач" (розробленого С. І. Шохор-Троцьким) до вивчення алгебраїчного матеріалу. Так, наприклад, для мотивації вивчення віднімання многочленів, вчителем підбиралась задача, розв'язування якої зводилось до складання рівняння виду $(ax+b)-(cx+d)=f$. Розв'язування рівняння вимагало уміння віднімати многочлени.

За результатами ухвалених положень, стосовно обговорюваного проекту програми, Київське фізико-математичне товариство вважало не бажаними навіть досконалі методичні програми "оскільки вони досвідченого викладача обмежують і роблять викладання мертвим, а вчителю-початківцю суттєвої користі принести не можуть через стислість" [202, с. 18]. Більшість членів Товариства відстоювало позицію, що розв'язувати рівняння до наперед підібраної задачі недоцільно до узагальнення дії, а складання рівнянь без їх розв'язання зовсім не корисно. На нашу думку, правильний висновок Товариства, що не можна один даний метод пропонувати застосовувати до всіх тем курсу.

У останньому пункті ухвалених положень наявні висновки проведеного аналізу: "Відсутність наукової системи в розглядуваній програмі, ігнорування основних положень алгебри, і, поряд з цим, гонитва за несуттєвими дрібницями, некоректність термінології змушують визнати, що застосування цієї програми небажане і таке, що може внести повну смуту як в розум учнів, так і вчителів-початківців" [202, с. 19].

Товариство продовжило аналіз програми з математики для кадетських корпусів на засіданні 16 лютого 1904 року, на якому було заслухане повідомлення Г. К. Суслова "По поводу новых программ по тригонометрии в кадетских корпусах". У пояснювальній записці до програми рекомендувалось розподілити вивчення матеріалу тригонометрії на два концентри. У першому концентрі (V клас, 1 год. на тиждень) діти мали оволодіти навичками розв'язування трикутників, у другому концентрі (VII клас, 2 год. на тиждень в II півріччі) – вивчати властивості тригонометричних функцій. Розподіл матеріалу I концентру передбачав поступовий перехід від менш витончених способів розв'язування трикутників до більш витончених. Такий шлях вважався "найбільш доцільним в освітньому і практичному відношеннях" [306, с. 103].

На засіданні була прийнята низка положень, у яких пропонувалось визнати невдалим нововведення щодо розв'язування трикутників шляхом переходу від "незручних прийомів розв'язування" до "більш раціональних", а також

Введення від'ємних чисел за В. П. Єрмаковим на основі "методу пар"	**Введення від'ємних чисел у підручнику алгебри А. Кисельова**
Нехай А – многочлен (додатний або від'ємний) або число (додатне чи від'ємне) і нехай від нього треба відняти від'ємне число ($-b$). Матимемо: $A-(0-b)=A-0+b;$ $A-(-b)=A+b$ Правило 3. *Щоб відняти від'ємне число, потрібно додати рівне йому за величиною додатне число.*	Наслідок 3. Відняти від якогонебудь числа від'ємне число, означає до першого числа додати абсолютну величину дугого $7-(-3) = 7+3 =10$. Доведення. Дійсно, відняти – 3 із 7 означає, за означенням дії віднімання, знайти таке число, яке у сумі з (–3) дає 7; таке число є 10, оскільки $10+(-3)=7$.
$(0-a)\cdot b = 0\cdot b - ab$, *або* $(-a)\cdot b=-ab$; *на основі переставного закону множення* $b\cdot(-a)=(-a)\cdot b=-ab$ *– добуток двох чисел з різними знаками є число від'ємне.* *На основі правила множення многочленів:* $(0-a)(0-b)=$ $=0\cdot 0 - 0\cdot b - a\cdot 0+ab$, *або* $(-a)\cdot(-b)=+ab$ *– добуток двох від'ємних чисел є число додатне.* Правило 4. *Щоб помножити два числа, кожне з яких може бути як додатним, так і від'ємним, потрібно насправді їх перемножити і поставити знак плюс, якщо два числа мають однакові знаки і знак мінус, якщо знаки різні.*	Умова 2. *Домовились виконувати множення від'ємних чисел за тим самим правилом, за яким при множенні многочленів, перемножаються їх члени, а саме: перемножити два які завгодно числа означає перемножити їх абсолютні величини і поставити перед добутком знак +, якщо обидва співмножники мають однакові знаки, і знак –, якщо вони мають різні знаки.* $(+2)\cdot(-3) = -(2\cdot 3) = -6$; $(-3)\cdot(+2) = -(3\cdot 2) = -6$. $(-2)\cdot(-3) = +(2\cdot 3) = 6$; $(-3)\cdot(-2)=+(3\cdot 2) =+6$.

Джерела: [92, 113].

Додаток Д

Порівняльна таблиця методичних підходів вивчення від′ємних чисел за працею В. П. Єрмакова "О преподавании алгебры" (1892) та підручником А. П. Кисельова "Элементарная алгебра" (1909)

Таблиця 1

Введення від'ємних чисел за В. П. Єрмаковим на основі "методу пар"	Введення від'ємних чисел у підручнику алгебри А. Кисельова
Умови	
1. *Двочлену* (3 – 8*) дається особлива назва – від'ємний двочлен.* 2. *На випадок неможливої різниці (у многочлені) поширюватимуться всі положення (властивості) виведені для додатних чисел (коли різниця можлива).* Тоді $3 - 8 = 0 - 5 = -5$ – простіший вигляд двочлена	1. *Різницю між однаковими числами будемо вважати такою, що дорівнює* 0. 2. *Різниця між меншим числом і більшим приймається рівною надлишку більшого числа над меншим, взятим зі знаком "–".* $7 - 10 = -3$; $p - (p+q) = -q$.
Означення від'ємного числа	
Число із знаком "–" перед ним назвемо від'ємним	Число із знаком "–" перед ним називається від'ємним
Правила дій над цілими числами	
$7 + (0 - 9) = 7 + 0 - 9 = 7 - 9 =$ $= 0 - 2 = -2$ або $a+(0 - b) = a + 0 - b = a - b$. Правило 1. *Щоб додати додатне і від'ємне число, потрібно знайти їх різницю і поставити знак більшої кількості.* $(0 - a) + (0 - b) = 0 - a + 0 - b =$ $= 0 + 0 - a - b = -(a + b)$ отже $(-a)+(-b)=-(a+b)$ Правило 2. *Щоб додати від'ємні числа, потрібно їх насправді додати і перед сумою поставити знак мінус.*	Наслідок 1. Додати до якого-небудь числа 0 – означає залишити його без змін. Доведення. Із умови $7 - 7 = 0$ за означенням дії віднімання, маємо: $7 + 0 = 7$. Наслідок 2. *Додати до якого-небудь числа від'ємне число, означає від першого числа відняти абсолютну величину другого*. Доведення. *Дійсно із умови* $7 - 10 = -3$, *за означенням дії віднімання* $10+(-3)=7$.

навчання користуванню тригонометричними таблицями до попереднього ознайомлення з основними властивостями тригонометричних функцій. Сама програма з тригонометрії критикувалась за беззв'язність тем та неякісне редагуванням її змісту та пояснювальної записки до неї [203, с.12].

Восьмого травня 1906 року на засіданні Товариства було заслухано повідомлення З. А. Архімовича "К вопросу о состоянии математики в средней школе". Доповідь присвячена огляду праць третього з'їзду діячів технічної і професійної освіти в Росії 1903-1904 рр. Зокрема розглядались доповіді російських педагогів Д. Ройтмана і М. Завадського.

Д. Ройтман у доповіді "Про можливість перетворення програм з математики в середніх навчальних закладах, як загальноосвітніх, з метою надати цьому предмету змісту, що більш відповідає сучасним вимогам загальної і спеціальної освіти" пропонував наступні зміни в системі викладання шкільної математики: скорочення навчального матеріалу, його концентрацію (збільшення обсягу матеріалу і кількості годин для кожного окремого класу). У результаті – термін навчання в середній школі мав становити сім років. Особливістю програм з математики, запропонованих Д. Ройтманом, була спроба ввести в курс середньої школи основи вищого аналізу, пропедевтичного курсу геометрії та арифметики, а також застосування методів вищого аналізу до визначення довжини кола і площі круга, знаходження об'єму піраміди, обчислення поверхонь і об'ємів деяких тіл обертання та ін.

М. Завадський у виступі "К вопросу о реформе преподавания математики" пропонував в основу навчання математики покласти геометрію, як найбільш конкретний вид навчання. На його думку, арифметика має вивчатись як допоміжна наука до геометрії, задачі – розв'язуватись переважно із галузі геометрії, значно раніше потрібно ознайомлювати з алгеброю, ніж це передбачалось офіційною програмою, всі задачі, на так звані правила, розв'язувати за допомогою рівнянь, необхідно ввести до програми загальноосвітніх, середніх технічних, нижчих технічних училищ початки диференціального та інтегрального числення та ін. [306, с.89]. На думку Товариства, розглянуті програми пропонували нові ідеї, цікаві для всебічного вивчення, але далекі від практичного застосування.

Доповідь З. Архімовича "викликала жвавий обмін думками… в результаті вирішено після канікул переглянути програми з математики в середній школі і опрацювати нові програми, беручи до уваги відповідні роботи в цьому напрямі комісій, які скликались при Міністерстві і при Київському навчальному окрузі" [203, с.14].

Двадцять п'ятого вересня 1906 року з доповіддю на тему "Ф. Клейн о реформе преподавания математики" виступив А. Д. Білімович [204, с.15]. Основні ідеї доповіді були більш ґрунтовно викладені і розвинуті в роботі автора "Реформа преподавания математики в Германии" (К., 1907).

Зокрема, були висвітлені погляди відомого німецького геометра, професора Геттінгенського університету Ф. Клейна про необхідність введення в шкільний курс математики основ диференціального та інтегрального числення, "як центральних питань шкільної математики". Модернізація курсу математики за Ф. Клейном мала наступний характер:

1. В Untersecund'і (так називався рік навчання у німецькій школі, що відповідав 5 класу гімназій Російської імперії) передбачалось ознайомлення з графічним зображеннями найпростіших функцій, виду $y = ax + b$; $y = x^2$; $y = \frac{1}{x}$. При вивченні теорії алгебраїчних рівнянь та тригонометрії мали розглядатись більш складні функції та їх графічне зображення.

2. Передбачалось паралельне ознайомлення учнів із застосуванням функцій в різних галузях діяльності, особливо у фізиці.

3. У prim'і (відповідала 7-8 класам гімназій) ознайомлення із загальною ідеєю диференціального та інтегрального числення.

4. Обсяг навчального матеріалу повинен бути різним у залежності від різних типів шкіл.

5. Деякі розділи традиційного курсу математики, що не мають ні практичного ні загальноосвітнього значення мали бути вилучені [37, с. 11].

іменованих чисел аналогічне до означення дії множення (так зауважує автор). Цю дію можна означити також і як дію, обернену до множення.

Автор вважає, що загальноприйняте в шкільній практиці означення дії множення, зміст якого полягає в скороченому додаванні, не може бути узагальненим, бо не охоплює всіх можливих випадків. Ф. Мацон пропонує замість нього означення, яке було відоме ще до Д. Валліса: "помножити А на В означає знайти нову величину С, відношення якої до величини А дорівнює В". Означення дії ділення може, на його думку бути таким: "ділення є дія, обернена до множення, за допомогою якої шукається один із множників за даним добутком і іншим множником". Або сформульованим у такому вигляді: "Поділити А на В, значить знайти відношення С даних величин". Щодо означення відношення двох величин, то автор узагальнює означення Евкліда, опускаючи, за його словами, непотрібні зауваження відносно однорідності величин, що порівнюються, і доповнюючи його вказівкою, яка залежність мається на увазі: "відношення є взаємозалежність двох величин, що полягає в їх прямопропорційності однієї до одної". Таким чином, зміст відношення має функціональний характер. Автор доповнює означення міркуванням, що значення відношення є той коефіцієнт, або множник, який потрібно приписати до другої величини, щоб отримати першу. Значення відношення дорівнює частці від ділення першої величини на другу; значення може бути або абстрактним або іменованим числом.

Згідно із сучасними вимогами до математичних означень понять, запропоновані узагальнені означення дії множення і ділення двох величин мають суттєвий недолік – вони породжують логічне коло, а тому не можуть мати практичного застосування. Так, поняття "відношення" в широкому сенсі, на яке спираються попередні два означення, автор зводить до ділення двох величин (однорідних або різнорідних). З іншого боку, ділення двох величин зводиться до знаходження їх відношення.

Джерела: [153 – 160].

Автор зауважує, що учні тільки поступово зможуть збагнути ці істини, особливо першу, що базується на розумінні математики як науки прикладної.

Задачі про площі, об'єми, швидкості, прискорення падаючих тіл дозволяють усвідомити, що кожного разу, коли геометричними або фізичними дослідженнями, тобто шляхом спостереження і досліду, виявлена між деякими величинами залежність прямої і оберненої пропорційності, ця залежність зводиться до дії множення або ділення цих величин і може бути виражена за допомогою математичних знаків.

Ф. Мацон підводить і до загального означення дії множення іменованих чисел. Для цього він пропонує не об'єднувати "перших випадків арифметичного множення" (множення на натуральне число та звичайний дріб), а до них поступово приєднувати низку нових прикладів, пов'язаних із іменованими числами, при цьому зміст кожної задачі і пов'язаної з її розв'язком дії розкривати окремо. Лише в повторювальному курсі автор вважає за потрібне показати, що всі розглянуті випадки можуть бути зображені у вигляді: $A \cdot B \cdot C \cdot ...$ При цьому обов'язковими є вимоги: перша – визначити числовий коефіцієнт за правилами множення абстрактних чисел, і друга – визначити найменування добутку, через найменування окремих множників, які підпорядковані законам дій над кількісними символами.

Означення має бути наступним: "Перемножити дві або декілька величин, означає перемножити за правилами множення арифметичних абстрактних чисел їх числові значення; приписати до цього результат добутку найменувань". Щодо дії ділення іменованих величин, то пропонується розглядати її в аналогічному порядку. Спочатку ця дія має бути розв'язанням задачі про порівняння двох чисел з метою визначення у скільки разів одне більше іншого або скільки разів одне міститься в іншому. Потім, розв'язується задача про поділ числа на кілька рівних частин – тобто розглядаються випадки алгебраїчні, після яких вивчаються випадки ділення іменованих величин. Всі випадки можна подати у вигляді $\frac{A}{B}$, в якому виражені вимоги, подібні до розглянутих при дії множення. Означення дії ділення

З ґрунтовною доповіддю "Обзор главнейших трудов и мнений по вопросу улучшения программ по математике в русской средней школе" 19 лютого і 5 березня виступив К. М. Щербина, який узагальнив роботу Київського фізико-математичного товариства з модернізації програм з математики для середньої школи. Її було опубліковано в додатках до протоколів Товариства за 1907 рік та видано окремим виданням: "Математика в русской средней школе" (К.,1908).

К. М. Щербина проаналізував орієнтовну програму з математики для чоловічих гімназій 1890 р.; праці комісій і груп при Московському навчальному окрузі; матеріали комісій викладачів математики київських середніх навчальних закладів; праці комісії міністра освіти Н. П. Боголєпова (1900 р.); проект положення "єдиної середньої школи" міністра П. С. Ванновського (1901 р.); праці з удосконалення програм з математики в комерційних училищах; праці третього з'їзду діячів технічної і професійної освіти в Росії (1903-1904 рр.); проекти програм з математики в кадетських корпусах; проекти реформи середньої школи при міністрах Г. Е. Зенгері (1904 р.) та В. Г. Глазові (1905 р.); програму з математики для реальних училищ (1906) тощо.

Вказавши як на переваги всіх проектів програм й навчальних планів, так і на їх недоліки, автор визначив шлях покращення змісту і якості математичної освіти середніх навчальних закладів, за яким необхідно реалізувати низку наступних завдань.

1. Переосмислення мети викладання математики.
2. Перебудова курсу елементарної математики таким чином, щоб центральним його стержнем була "ідея функціональної залежності у зв'язку з вченням про нескінченно-малі і з поняттям про координати".
3. Скорочення тих тем, які не мають важливого освітнього значення.
4. Введення циклічного розподілу навчального матеріалу.
5. Гармонійне поєднання теорії і задач, що сприятиме досягненню "загального математичного розвитку".

6. Викладання пропедевтичного курсу геометрії, починаючи з підготовчого класу.

7. Відведення належного місця усному рахунку і наближеним обчисленням.

8. Приділення особливої уваги дошкільній і початковій математичній підготовці дитини.

9. Узгодження курсів різних відділів математики між собою та з курсами інших предметів.

10. Проведення час від часу підсумків вивченого. У випускному класі повинні бути повторювальні курси з необхідним доповненням і узагальненням [306, с.124-127].

Робота такого характеру, як засвідчує С. Н. Бернштейн [31], була першою в історії методики математики.

Другого квітня 1907 р. Товариством була створена комісія в складі К. М. Щербини П. О. Долгушина, Г. К. Суслова, А. Д. Білімовича для розробки питання про реформу викладання математики в Росії. Результатом її діяльності став так званий "Київський проект" – проект програми з математики для чоловічих гімназій, що був одноголосно схвалений членами Товариства на засіданні 14 травня 1907 р. і позитивно оцінений педагогічною громадськістю [32, 306]. В основу проекту покладені ідеї оновлення змісту шкільної математичної освіти в дусі реформістського руху, розвинуті К. Щербиною у вищезгаданій праці: розвиток поняття числа і функціональної залежності, необхідність введення елементів аналітичної геометрії та математичного аналізу, використання геометричних перетворень, обґрунтування пропедевтичних курсів та ін.

Спробу пов'язати ідеї функції та елементи вищої математики з традиційним шкільним курсом математики було реалізовано і в "Проекте учебного плана по математике для мужских гимназий с одним древним (латынским) языком", створеного Варшавським гуртком викладачів фізики і математики (автор Д.Н. Мордухай-Болтовський й ін., 1908 р.), огляд якого на засіданні Товариства 15 вересня 1908 р. зробив Г. К. Сусловим [206].

до ділення абстрактного числа на іменоване. При виконанні згаданих задач автор радить утримувати під час дій символи найменувань, брати дані в різних мірах. Учні мають навчитись передбачати міри, в яких повинен бути виражений результат, скорочувати однакові найменування подібно до рівних множників діленого і дільника.

Таким чином, наведені задачі дають змогу ознайомити учнів з усіма основними положеннями теорії іменованих величин.

Достатній матеріал для більш свідомого засвоєння цих істин дає вивчення деяких фізичних величин.

Перш за все поняття про швидкість, що означає відстань, пройдену за одиницю часу; звідси зрозуміло, що при рівномірному русі швидкість отримується як шлях поділений на час: $v = \frac{s}{t}$. Доведенням можливості ділення різнорідних величин і в даному випадку є осмисленість результату дії. Говорячи про швидкість, учні мають подумки поєднувати складові поняття довжини і часу. Автор радить позначати значення швидкості, приписуючи найменування у вигляді частки: $5\frac{ф}{с}$, $40\frac{\text{в}}{\text{год}}$, $75\frac{\text{м}}{\text{хв}}$ та пропонує розглянути задачу на визначення часу при даних відстані і швидкості.

Далі пропонується розглядати ще й такі величини і поняття, як кутова швидкість та робота. Таким чином, діти повинні усвідомити основні положення про дії над іменованими числами (мається на увазі множення та ділення іменованих чисел на іменовані):

– геометричні, фізичні істини та міркування розкривають зміст цих дій і служать перевіркою їх правильності;

– символи найменувань підлягають формальним законам алгебри;

– множення або ділення двох іменованих величин дають у результаті величину нового найменування.

шуканою, то результат може отриматись тільки множенням або діленням в крайньому випадку двох іменованих чисел, добуток найменувань яких відповідатиме шуканому найменуванню.

При вивченні ділення іменованих чисел, на думку Ф. Мацона, робиться традиційна помилка, що є наслідком означення дії множення. Як правило, прийнято пояснювати учням два можливі способи ділення: 1) іменованого числа на абстрактне і 2) двох іменованих однорідних величин.

Свідоме розв’язання даного питання дають задачі про прямокутник і паралелепіпед.

Квадратні міри показують, що є можливим випадком ділення їх на лінійні – як розв’язання задачі на визначення невідомої сторони прямокутника за відомими площею і стороною. Об’ємні міри дають можливість трьох випадків ділення різнорідних величин, а саме:

$\frac{об'єм}{площа} = лінія$: як розв’язання задачі про визначення висоти паралелепіпеда за даним об’ємом і за даною площею основи.

$\frac{об'єм}{лінія} = площа$: як розв’язання задачі про визначення площі однієї грані за даними об’ємом і ребром, перпендикулярним до цієї грані.

$\frac{об'єм}{лінія \cdot лінія} = лінія$: як розв’язання задачі про визначення ребра за об’ємом і даними двома іншими ребрами прямокутного паралелепіпеда.

Ці задачі пояснюють, що, по-перше, інколи можливе ділення різнорідних іменованих величин і, по-друге, що частка від ділення буде мати інше найменування ніж ділене.

Суть міркувань про можливість наведених випадків ділення полягає в осмисленні результату дії.

Необхідно звертати увагу, що обернені випадки, а саме $\frac{площа}{об'єм}$, $\frac{лінія}{площа}$, $\frac{лінія}{об'єм}$ не мають сенсу. Ці випадки аналогічні

Тринадцятого квітня 1909 року заслухано повідомлення М. В. Оглобліна – викладача математики Імператорської Олександрівської київської гімназії на тему: "Об учебниках анализа бесконечно-малых дополнительного класса реальных училищ" [181].

Основи аналізу нескінченно малих були введені до програм реальних училищ у 1906 році. Відповідно до міністерської програми були видані й підручники для нового курсу: О. Воїнова "Основы анализа бесконечно-малых с дополнительными статьями по алгебре" (1906), Д. Горячева "Основы анализа бесконечно малых (учебник для дополнительного класса реальных училищ)" (1908), П. Рабіновича "Основы анализа бесконечно-малых. Руководство для учащихся VII класса реальных училищ" (1907), М. Білібіна "Основы анализа бесконечно малых (для дополнительного класса реальных училищ" (1907), А. Кисельова "Начальное ознакомление с производными (курс VII класса реальных училищ)" (1908), А. Пареного "Основы анализа бесконечно малых" (1909), В. Александрова "Основы анализа бесконечно малых в связи с дополнительными статьями по алгебре" (Ч.І, Ч.ІІ, 1908).

М. Оглоблін робить порівняльний аналіз цих та інших підручників, а також дає рекомендації щодо удосконалення дидактичної обробки теорії курсу. Проблема науковості викладу аналізу нескінченно малих була пов’язана з тим, що програма рекомендувала оминати теорію несумірних (ірраціональних чисел), тоді як у науковій теорії учення про ірраціональне число передує ученню про границі, змінювався підхід і щодо ознак мінімуму та максимуму функції, які замість використання ряду Тейлора рекомендувалось виводити на основі ознак зростання та спадання функції. Теорія інтегрального числення відповідно до програми мала розпочинатись із вивчення поняття визначеного інтегралу, після цього учні мали вивчати невизначений інтеграл.

Автори підручників по-різному виходили з цього положення. В. Александров, М. Білібін, А. Кисельов вводили поняття несумірного числа. В. Александров це робив незалежно від поняття границі. Двоє інших авторів у своїх підручниках пропонували строго-науковий виклад теми про несумірні числа, причому несумірне число у них визначалось нескінченним рядом чисел, що мають певні властивості.

Доведення ознак мінімуму та максимуму функції з використанням ряду Тейлора було здійснено у підручниках В. Александрова та С. Воїнова.

Вивчення невизначеного інтегралу перед вивченням визначеного інтегралу було запропоновано у підручниках А. Воїнова, Д. Горячева, П. Рабіновича, А. Пареного.

М. Оглоблін звертає увагу на стислість викладу, його науковість, строгість, послідовність та доступність і, водночас, відповідність обсягу матеріалу кількості відведених програмою годин на вивчення курсу, на забезпечення викладу геометричними ілюстраціями та достатню кількість практичних вправ.

За висновком рецензента найбільше даним принципам відповідали підручники А. Кисельова та М. Білібіна, менш науковим був виклад Д. Горячева та А. Воїнова, підручники останніх трьох авторів мали найбільше різного типу неточностей, нераціональних способів викладу матеріалу та деяких недоліків [181, с.132].

Київське фізико-математичне товариство уважно стежило і за роботою Міжнародної комісії з розгляду питань математичної освіти. Десятого жовтня 1914 року з доповіддю "Международная конференция о математическом образовании. Париж 1-4 квітня 1914 р." [38] виступив приват-доцент Київського університету А. Д. Білімович. Доповідач якомога детально висвітлив роботу конференції та її матеріали, звертаючи увагу на питання, що мали практичний інтерес як для діяльності Товариства, так і для вітчизняних педагогів та авторів підручників, які безпосередньо впроваджували ідеї реформи в життя. Йшлося, перш за все, про результати, отримані від введення диференціального та інтегрального числення у вищі класи середньої школи в різних країнах. Зокрема, про обсяг і особливості вивчення таких тем курсів диференціального та інтегрального числення: функції однієї і декількох змінних; які функції диференціюються; поняття про похідну; введення поняття про інтеграл;

квадратами), необхідно найменування результату перетворити в метри квадратні або в фути квадратні. Це досягається підстановкою: $ф = \alpha \cdot м$ або $м = \frac{1}{\alpha}ф.$

Отримаємо: $abф \cdot м = ab\alpha м^2 = abф\frac{1}{\alpha}ф = \frac{ab}{\alpha}ф^2.$

Таким чином з'ясовується, що із символа найменування може виділятись числовий множник і що символи найменувань, так само як і числові множники, підлягають переставному закону.

Далі рекомендується розглянути задачу на обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда (ці задачі, на думку автора, є доступними при проходженні курсу арифметики або початкової алгебри). Задача дає можливість з'ясувати, що дія множення іменованих чисел має сенс в наступних випадках:

1) множення трьох лінійних мір;
2) множення квадратних мір на лінійні і навпаки.

Зміст дії полягає у знаходженні об'єму паралелепіпеда за відомою геометричною закономірністю (правилом).

Як і у випадку знаходження площі прямокутника, учні повинні тренуватись при розв'язуванні задач на визначення об'єму в перетворенні виразів з іменованими множниками.

Питання, яке може виникнути при розгляді даних прикладів, зауважує автор, стосується множення чотирьох лінійних мір (так само як і площ, площ і об'ємів, об'ємів між собою). Автор радить показати, що така дія не має змісту, бо вона не відображає жодної відомої закономірності дійсності (осмислити результат дії не можливо).

Вчитель має навчити учнів за умовою задачі формально (за домовленістю, що не спирається на дослід) передбачати дії над іменованими числами. Із умови задачі завжди має бути зрозуміло якого найменування шукана величина. Якщо в списку даних задачі є величина цього ж найменування, то вона потребує дій множення або ділення на абстрактні числа, бо будь-який іменований множник змінив би її розмір тобто найменування. Якщо ж в списку даних задачі немає величин, однорідної з домовившись позначати квадратні метри через $м^2$. Приймаючи до уваги, що формально $м \cdot м = м^2$, отримуємо: $3м \cdot 5м = 15м^2$.

Таким чином, за записом дії з даними позначеннями розкривається її зміст – утворення площі прямокутника за його сторонами (*зміст геометричний, а не арифметичний*). Даний приклад дає право стверджувати, що дві лінії (дві довжини) перемножаються і дають в результаті величину нового найменування – площу.

Автор визнає таке пояснення "чисто формальним", оскільки воно базується на алгебраїчних законах дій, але виправданим, бо підтверджується дійсністю.

Усвідомленість результату приводить до того, що учні легко розуміють представлення нового способу множення і що дія множення двох ліній (довжини на ширину) є розв’язанням задачі про визначення площі прямокутника за його сторонами і в цьому її сенс.

Важливо, на думку Ф. Мацона, з’ясувати *геометрично*, що площа по відношенню до сторін має ту ж властивість, як і добуток двох чисел по відношенню до множників, тобто що її величина пропорційна довжинам сторін, а тому повинна визначатись їх добутком. Ці міркування є "важливою основою розглядуваної істини і можуть служити її доведенням".

Далі учні повинні тренуватись у розв’язуванні задач на знаходження площі, утримуючи при виконанні дій буквенні символи найменувань і вводячи для квадратних мір символ показника другого степеня, наприклад:

$$a \cdot ф \cdot b \cdot ф = abф \cdot ф = abф^2.$$

Це важливо тому, що діти привчаються виконувати дії над якісними символами так само, як і над кількісними. Ф. Мацон пропонує сторони прямокутника виражати в різних мірах довжини, наприклад, в футах і метрах щоб показати, що рівність: $aф \cdot bм = abф \cdot м$ також має сенс. Вона показує, що даний прямокутник містить ab таких прямокутників, в яких одна сторона фут, а інша – один метр. Але, оскільки площу прийнято визначати в квадратних мірах (вимірювати одиничними

застосування аналізу нескінченно-малих; максимум і мінімум функції; застосування до фізики; застосування до геометрії; питання про строгість викладання елементів вищої математики в середній школі.

Товариство детально вивчало й матеріали проекту реформи загальноосвітньої школи (1915), підготовлені комісіями при Міністерстві народної освіти під керівництвом міністра П. М. Ігнатьєва. Реформа передбачала перетворення загальноосвітньої школи у національну (російську); самодостатню (що дає загальну освіту, а не тільки готує до вступу у вищі навчальні заклади); семирічну; двоступеневу: перший ступінь – три роки навчання, другий – чотири. Крім цього, особливо відзначалась потреба узгодити курс першого ступеня навчання з курсом перших трьох класів вищих початкових училищ.

Згідно з проектом, навчання на другому ступені мало профільний характер, відповідно до вибраного відділення: 1) новогуманітарного; 2) гуманітарно-класичного; 3) реального – з фізико-математичним ухилом; 4) реального – з історично-природничим ухилом [150].

Основні зміни в проектах програм з математики полягали у вилученні із курсів арифметики, алгебри, геометрії тих тем, які, на думку комісії, не мали важливого освітнього значення: перетворення десяткового періодичного дробу у звичайний, правило обліку векселів, ланцюгове правило, (з арифметики); добування квадратного кореня із многочленів, добування кубічного кореня із чисел (з алгебри); умови рівності тригранних кутів, рівності і подібності призм і пірамід (з геометрії). Крім наведених загальновизнаних скорочень курсу, вилучення стосувалось і пропедевтичного курсу дробів (в І класі), правила змішування (з арифметики) та повторювального курсу математики у випускному класі (крім гуманітарно-класичного відділення).

Нововведеннями до проекту програм були: наочна геометрія (I-III класи), поняття про функції (в курсі 6 класу фізико-математичного напряму та в 7 класі новогуманітарного відділення), введення аналітичної геометрії та основ математичного аналізу в курс реального відділення.

Дев'ятнадцятого жовтня 1916 року на засіданні виступив К. М. Щербина із доповіддю "Критический обзор программ по математике, выработанный комиссией 1915 г. при Министерстве Народного Просвещения". Матеріали доповіді надруковані в журналі "Вестник опытной физики и элементарной математики" під назвою "Примерные программы и объяснительные записки, напечатанные в "Материалах по реформе средней школы". Критичный обзор К. М. Щербины" (1916, №№ 658, 659).

Автор доповіді в цілому негативно оцінив проекти програм та пояснювальні записки до них. Матеріали мали численні недоліки. Зокрема, педагог відзначав, що нормативні документи не були приведені до будь-якої системи відносно послідовності подання навчальних планів і програм. Хаотичне їх розміщення, відсутність в деяких випадках плану (наприклад, до програми з тригонометрії), або ж пояснювальної записки (наприклад, до програми геометрії для новогуманітарного відділення), друкарські коректурні та стилістичні помилки надзвичайно утруднювали користування ними [309, с. 225-231].

Внутрішнє наповнення планів і пояснювальних записок характеризувалось відсутністю узгодженості між обсягом та глибиною вивчення окремих тем і метою відповідного профілю навчання математики; обсягом матеріалу і часом його вивчення. К. Щербина звернув увагу на те, що, наприклад, "вивчення відношення несумірних величин настільки важке для учнів V класу реального відділу фізико-математичного напряму, що пропонують віднести це питання до курсу VI класу, тоді як для учнів, що присвятили себе, переважно гуманітарно-класичним заняттям, воно є уже повністю доступним в V класі, а тому вказуються прийоми його опрацювання…", причому для гуманітарно-класичного відділення математика на другому ступені є другорядним предметом, і кількість годин відводиться майже вдвічі менше, ніж на реальному відділенні [309, с. 270-271].

Аналогічні невідповідності стосувались і вивчення теорії границь та їх застосування в курсі геометрії.

Питання про дослідження рівнянь першого степеня з одним невідомим та дослідження системи двох рівнянь першого степеня з двома невідомими в одному випадку відносилось до

Додаток Ґ

Методика вивчення іменованих чисел у курсі арифметики загальноосвітньої школи (запропонована Ф. Ю. Мацоном)

Ф. Мацон радить якомога раніше пояснити, що бувають випадки, коли множник може бути іменованим числом. Найзручнішим способом при цьому є задача на визначення площі прямокутника за його сторонами (учні мають бути попередньо ознайомлені з поняттям площі та формулою площі прямокутника).

Спочатку, на думку автора, необхідно з'ясувати суть задачі. Нехай, дані дві прямі лінії (довжини двох сторін). Необхідно знайти площу, тобто величину неоднорідну з даними величинами. Її числове значення може бути обчислено за числовими значеннями обох сторін. Але виникає запитання, чи може шукане значення величини шляхом математичних дій отриматись із даних таким чином, щоб в дії розкривався зміст утворення нової величини. Тобто, щоб можна було розрізняти, з якого роду величинами маємо справу і якого роду величину отримаємо в результаті.

Автор вважає, що задовольнити першій умові легко, зберігаючи позначення даних, наприклад: $3\,\text{метри}\times 5\,\text{метрів}$.

Оскільки числове значення шуканої величини і її найменування уже відомі з геометричного розгляду креслення (*визначене методом підрахунку одиничних квадратів*), тому можна записати: $3\,\text{метра}\times 5\,\text{метрів} = 15\,\text{квадр.метрів}$.

Ця формула має "зовнішній вид множення", отже будемо говорити, що 3 метри і 5 метрів перемножаються і дають в результаті 15 квадратних метрів. Її можна записати в більш зручному вигляді, позначаючи найменування однією буквою і

З геометрії пропонувалось розглянути поняття про будову наукової теорії: означення, аксіоми, теореми. Зв'язок між теоремами. Постулат Евкліда; логічні та геометричні методи доведень; методи дослідження.

Вводився курс аналітичної геометрії: Поняття про координати. Відстань між точками. Пряма лінія. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи.

У кінці програми наведені методичні зауваження щодо випускних екзаменів. Товариство вважало за необхідне приділяти увагу на екзаменах не лише наявності в учня формальних знань, а й рівню його математичного розвитку – вмінню послідовно і чітко викладати думки "точною мовою". Письмовий екзамен з математики мав складатись із двох завдань: 1) письмового викладу будь-якого окремого закінченого питання теорії; 2) розв'язання нескладної задачі з повним її дослідженням і, за можливістю, з графічною ілюстрацією.

Джерела: [225].

курсу VII класу (в програмах з алгебри для новогуманітарного відділення та для природничо-історичного напряму реального відділення, гуманітарно-класичного відділення), а в іншому – до V класу (без дослідження рівнянь першого степеня з одним невідомим для фізико-математичного напряму реального відділення). Автор доповіді показав, що дане питання комісією не вирішене як в дидактичному плані, так і у плані відповідності до особливостей навчання математики кожного окремого відділення. К. Щербина відзначив неузгодженість поглядів комісії щодо повторювального курсу математики, основ вищої математики (які входили лише в курс реального відділу школи і не мали органічного зв'язку з курсом математики середньої школи). Недоліками роботи комісії визнано також недостатню увагу до дошкільної підготовки дітей (вимоги до вступаючих в гімназію мало чим відрізнялись від відповідних вимог чинної програми), вилучення пропедевтичного курсу дробів, постановку викладання наочної геометрії, що не у повній мірі відповідала особливостям пропедевтичного курсу геометрії, розробленого та апробованого прогресивними тогочасними педагогами тощо [309].

Серед позитивних пропозицій роботи комісії відзначено вимоги щодо ґрунтовнішого вивчення границь та ірраціональних чисел, ніж у діючій програмі; вилучення складних даних та складних задач (на "правила" в арифметиці), складних прикладів в алгебрі та в геометрії при розв'язуванні задач на побудову; необхідні скорочення курсу; введення наближених обчислень тощо.

Автор робить висновки, що нові програми повинні бути побудовані на зовсім нових основах. Перш за все, має зберігатись принцип наступності: "необхідно більш уважно віднестись до всього того, що зроблено в країні і за кордоном з питання про поліпшення програм"; по – друге, потрібно встановити єдиний підхід відносно основних питань спеціально-наукового, загально-дидактичного, методичного і методологічного характеру. І лише після такої попередньої роботи можна приступити до складання програм. В пояснювальних записках до програм повинні з'ясовуватись "керівні положення" навчання математики [310, с.284].

На засіданні 26 жовтня 1916 року Київське фізико-математичне товариство одноголосно вирішило звернутись до

Міністра народної освіти з листом, в якому викладена позиція Товариства щодо розроблених програм: "реалізація таких програм є небезпечною для загальноосвітніх завдань середньої школи і може призвести до невиправних помилок у справі освіти молодого покоління" [213, с.18].

Проект реформи середньої школи не був затверджений.

Нововведення щодо поділу старших класів середньої школи на спеціалізовані відділення знайшло втілення тільки в наш час. Це відображено у "Концепції шкільної математичної освіти" (1995) (яку розробили М. І. Бурда – Інститут педагогіки АПН України, З. І. Слєпкань – Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Г. М. Литвиненко – Міністерство освіти України) та "Концепції математичної освіти 12-річної школи" (2002), що наслідує попередню (розроблено в лабораторії математичної та фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України). У них визначено завдання й пріоритети розвитку математичної освіти, розроблено структуру й зміст шкільної математики, спрямовані на покращення математичної підготовки випускників середніх шкіл відповідно до нових соціально-економічних запитів держави.

Профільна диференціація навчання в загальноосвітніх школах України вперше була впроваджена починаючи з 2001/2002 навчального року (наказ Міністерства освіти і науки України "Про типові навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів на 2001/2002 – 2004/2005 навчальні роки" за № 342 від 25.04.2001). Сучасна старша загальноосвітня школа реалізує один з напрямів профільного навчання: загальноосвітній, природничо-математичний, суспільно-гуманітарний, філологічний, технологічний, художньо-естетичний, спортивний (наказ МОН № 132 від 23.02.2004 р. "Про затвердження Типових навчальних планів загальноосвітніх навчальних закладів 12-річної школи"), де вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення.

Основою для розробки альтернативних навчальних програм, підручників і посібників, методичних концепцій і ідей є Державний загальноосвітній стандарт з математики. Він є

виду $\frac{0}{0}$. Далі вводиться поняття про похідну та з’ясування її геометричного змісту. Розглядаються похідні функцій: $ax+b$; ax^2+bx+c і $\frac{1}{x}$. У зв’язку із поняттям похідної вивчаються ознаки зростання і спадання функцій. Дається поняття про інтеграл та розглядається геометричний зміст визначеного інтегралу.

Курс тригонометрії містив наступний матеріал: Узагальнення поняння про кут. Одиниці кутів (прямий, градус, радіан). Тригонометричні функції. Їх нулі і нескінченності. Періодичність, парність, непарність тригонометричних функцій. Поняття про функції обернені до тригонометричних; їх багатозначність.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу. Теорема додавання подвійного і половинного аргументу. Зведення тригонометричних функцій до виду, зручного для логарифмування. Тригонометричні таблиці. Розв’язування трикутників. Застосування тригонометрії в топографії.

У восьмому класі необхідно було пройти повторювальний курс математики з узагальненням і систематизацією. Тут розв’язувались задачі на всі відділи.

З арифметики і алгебри пропонувалось розглянути: розвиток поняття про число від цілого додатного до комплексного включно пов’язаного з узагальненням поняття про операції (закони переставний, сполучний, розподільний); основні теореми про подільність (розкладання на прості множники – єдиність; подільність добутку і на добуток); найбільший спільний дільник послідовним діленням (теорія двох чисел); теорему про подільність многочлена від x на $(x-a)$; теорему Безу. Далі пропонувалось довести теореми про еквівалентність рівнянь; дати класифікацію функцій: алгебраїчна, трансцендентна, раціональна і ірраціональна, ціла і дробова. Давалось поняття функцій прямої і оберненої.

задач на обчислення (обчислення за наближенням). Тут планувалось ознайомити учнів з розподілом задач за методами розв'язування; розглядався метод подібності.

У шостому класі в курсі алгебри діти мали ознайомитись з поняттям про многозначність кореня n-ного степеня (на конкретних прикладах для показника, що дорівнює двом і трьом); діями над радикалами; узагальненням поняття про показник (показники від'ємні, дробові, ірраціональні); дії над степенями дробовими і від'ємними. Наступними розділами програми були: "Логарифми. Графічне зображення логарифмічної функції і принципу лінійного інтерполювання. Арифметична і геометрична прогресії. Додаток до перетворення десяткових дробів у звичайні. Розв'язування задач".

Курс геометрії закінчувався вивченням стереометричного матеріалу: взаємне розміщення точок, прямих і площин в просторі. Тут мала розглядатись теорія проекцій, симетрії відносно прямої, площини і точки. Далі, планувалось вивчення многогранників; вимірювання поверхонь і об'ємів призм і пірамід; тіла обертання (циліндр, конус, куля) та вимірювання їх поверхонь і об'ємів.

У сьомому класі з алгебри учні мали навчитись досліджувати рівняння першого степеня з однією і двома невідомими. Потім пропонувалось вивчати нерівності; розв'язування нерівностей першого степеня з одним невідомим; застосування теорії нерівностей до наближеного обчислення. Діти повинні ознайомитись і з розв'язуванням невизначених рівняннь першого степеня з двома невідомими з цілими додатніми числами. Лінія функції набувала своєї умовної завершеності. Тут робиться огляд функцій, які розглядаються в алгебрі, геометрії, тригонометрії і фізиці та їх графічного зображення. Розглядаються функції лінійні, квадратичні, гіперболічні, логарифмічні, тригонометричні, приріст функції при кінцевому прирості незалежної змінної, дається поняття про неперервність функції. Вивчається теорія границь (границя суми, добутку, частки) і пов'язане з нею знаходження невизначеності

складовою частиною Державного стандарту, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2004 р. № 24 (з 1 вересня 2013 р. у частині базової загальної середньої освіти та 1 вересня 2018 р. у частині повної загальної середньої освіти набуде чинності Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти нового покоління, затверджений 23 листопада 2011 р. № 1392). Змісти програм як для основної загальноосвітньої школи, так і для профільних класів узгоджені з базовим змістом середньої освіти шляхом дотримання однакових змістово-методичних ліній та єдності у трактуванні математичних понять. Разом з цим, особливості, ґрунтовність та обсяг вивчення навчального матеріалу різний і визначається додатковими завданнями конкретного профілю, а отже й рівнем математичної підготовки.

Таким чином, у сучасних нормативних документах прослідковується подібність принципів, сформульованих К. М. Щербиною, що мають бути покладені в основу розробки програм профільного навчання математики.

2.1.2. "Київський проект" та його реалізація у тогочасних підручниках математики. Київське фізико-математичне товариство вважало за недоцільне робити відразу докорінну перебудову чинної на той час програми (1890 р.). Необхідне удосконалення програми (див. таблицю 2.1) було зроблене із збереженням існуючого числа тижневих годин (виключення становили VII і VIII класи, де додавалось по 1 годині на тиждень).

Таблиця 2.1

Розподіл годин по класах на тиждень (без підготовчого класу)

Навчальні плани	Кількість годин на тиждень по класах								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Разом
Офіційний	4	4	4	4	5	4	3	3	31
"Київський проект"	4	4	4	4	5	4	4	4	33

Товариство вважало за необхідне вилучення тих тем, що не мали "самостійної цінності" в освітньому і практичному відношеннях, або ж вимагали складного викладу й складних обчислень та ін. З арифметики вилучались наступні відділи:

Церковнослов'янська нумерація; пропорції (перенесені до алгебри); правило обліку векселів і ланцюгове правило; необхідні і достатні умови перетворення звичайних дробів в десяткові даного типу, а також для оберненого перетворення десяткових дробів у звичайні.

З алгебри вилучалось: добування квадратного кореня із многочленів; добування кубічного кореня із чисел; неперервні дроби; теорія сполук; біном Ньютона; розв'язування систем лінійних рівнянь за способом Безу.

З геометрії було вилучено: умови рівності тригранних кутів, рівності і подібності призм і пірамід; відношення поверхонь і об'ємів подібних циліндрів і конусів.

Курси з арифметики та алгебри реалізували дві основні ідеї: першу – "розвиток поняття про число (від цілого додатного до комплексного) в залежності від послідовно введених нових операцій" і другу – "з'ясування і розкриття поняття про функціональну залежність величин" [225].

Перша ідея мала сприяти математичному розвитку учнів і виконувати об'єднуючу функцію для математичних дисциплін. Реалізація другої ідеї мала на меті озброїти випускників середніх навчальних закладів могутнім засобом пізнання дійсності. Повне і чітке розуміння учнями поняття функції, на думку Товариства, буде можливим лише із вивченням аналітичної геометрії і початків диференціального числення. Поняття функціональної залежності повинно було з'ясовуватись і на уроках геометрії (хоча б якісно), розглядаючи образи геометричних фігур змінного типу.

Головною метою курсу геометрії ставилось "якісне і кількісне вивчення просторових форм та розвиток просторових уявлень" [225, с. 6].

Для розвитку геометричних уявлень вважалось за необхідне вивчення законів симетрії, гомотетії, переміщення

прямої; паралельні прямі; многокутники; чотирикутники; властивості хорд кола, січних і дотичних; відносне розміщення двох кіл. В цьому ж класі розглядались основні задачі на побудову методом геометричних місць.

У п'ятому класі план з алгебри містив вивчення піднесення до степеня одночленів і добування коренів з них; піднесення многочленів до квадрату; добування квадратних коренів із чисел. Далі, пропонувалось введення поняття про ірраціональне число у зв'язку з поняттям про нескінченно малі і границю, принципу наближеного обчислення, поняття про дії над ірраціональними числами. А також вивчались дії над квадратними радикалами, звільнення знаменника з-під знака кореня; квадратні рівняння і розкладання квадратного тричлена на множники; розв'язування рівнянь типу: $ax^n + b = 0,$ $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ для $n = 2;$ 3; найпростіші системи рівнянь другого степеня з двома невідомими; ірраціональні рівняння. Учні мали ознайомитись із графічним зображенням лінійної та квадратичної функції однієї змінної (прямою, параболою).

З геометрії після повторення матеріалу попереднього класу планувалось розглянути переміщення фігур на площині; рух поступальний і обертальний; центр обертання; поступальний рух як граничний випадок обертального. Після чого учні мали ознайомитись з вимірюванням кутів у кколі; подібним розміщенням (гомотетія) фігур відносно центра; з будовою і використанням пантографа. Курс геометрії продовжувався вивченням метричних відношень між лінійними елементами трикутника і чотирикутника, правильних многокутників, площ прямолінійних фігур. Далі вивчались довжина кола, поняття про обчислення числа π, площа круга. Зауважимо, що К. Щербина відстоював позицію вивчення останніх тем, використовуючи метод границь. Використання даного методу в курсі геометрії починаючи з 5-6 класів сприятиме математичному розвитку учнів та кращому усвідомленню тих понять, "що складають зміст так званої вищої математики".

Наступним матеріалом було: побудова найпростіших лінійних формул; нескладні задачі на побудову; розв'язування вводилось поняття формули (що відповідало сучасному поняттю про вираз) розв'язування задачі (обчислення виразу); складання формули і обчислення за нею; задачі з конкретними даними і загальні; числа конкретні і загальні; конкретні і загальні формули; позначення загальних чисел.

Далі планувалось вивчення аглебраїчного знакоположення; порядку дій у формулі і використання дужок; читання алгебраїчних формул (та запис їх під диктовку).

Систематичний курс алгебри починався з матеріалу вивчення одночленів і многочленів; додавання і віднімання одночленів і многочленів. Далі – вивчались від'ємні числа, при цьому поняття від'ємного числа вводилось формально. Множення одночленів і многочленів. В цьому ж класі вводяться простіші числові рівняння першого степеня з одним невідомим та розглядається складання рівнянь за умовою задачі.

Пропедевтичний курс геометрії закінчувався обчисленням об'ємів призм, пірамід, циліндра, конуса і кулі (практично).

У четвертому класі з алгебри учні мали вивчати ділення одночленів і многочленів з числовими коефіцієнтами; розкладання многочленів на множники (найпростіші випадки); алгебраїчні дроби; геометричні відношення і пропорцію (перенесено з арифметики); поняття про середнє геометричне і середнє арифметичне.

Далі передбачено вивчення рівняння першого степеня з однією і багатьма невідомими (системи рівнянь) та їх розв'язування способом підстановки і способом додавання. У зв'язку з цим вивчаються теореми про еквівалентність рівнянь, доведення яких необов'язкове.

У цьому ж класі вводиться тема "Розвиток поняття про функціональну залежність".

Систематичний курс геометрії, на відміну від традиційного, розпочинався із введення основних геометричних понять: геометричне тіло, поверхня, лінія, точка. Наступними вивчались теми: фігури і їх рух; пряма та її властивості; площина; коло; кути; трикутник; умови рівності трикутників; співвідношення між елементами трикутника; симетрія відносно

фігур, геометричного креслення. Передбачалось, що основні геометричні уявлення повинні попередньо вироблятись в учнів психологічним шляхом в пропедевтичному курсі геометрії (підготовчий – третій класи гімназій) на основі принципу фузіонізму – одночасного вивчення планіметрії і стереометрії.

У курсі тригонометрії (без зміни змісту предмету) удосконалення стосувалось перебудови тематичного матеріалу у відповідності до оновлення понятійного апарату: введення поняття радіанної міри кута, тригонометричної функції та ін., а також вивчення основних властивостей тригонометричних функцій.

Крім вказаних нововведень, можна відзначити ще й такі переваги даного плану над офіційною програмою: підвищення вимог до обсягу знань і вмінь учнів, що вступали до гімназій (зокрема, важливе значення надавалось практичним умінням вимірювати величини та виконувати дії над їх значеннями, знанням найбільш поширених одиниць вимірювання тощо). Задачі у проекті набувають і самостійного значення (в арифметиці – планується навчання складанню плану до задачі, застосуванню різних способів розв'язування задач "на правила", в геометрії передбачено розподіл задач за методами розв'язування, вивчати методи розв'язування задач на побудову: геометричних місць, подібності, алгебраїчний). Пропонується проектом введення і наближених обчислень, з якими учні починають ознайомлюватись з 2 класу – навчаються отримувати наближені значення шляхом заокруглення десяткових чисел з точністю до одиниці будь-якого розряду, а у 5 класі, у зв'язку із вивченням ірраціональних чисел, формуються уміння виконання дій над наближеними значеннями. У 7 класі передбачено застосування теорії нерівностей до наближених обчислень.

Перевагою "Київського проекту" над тогочасними вітчизняними проектами з математики було, як відомо, послідовне розкриття поняття функціональної залежності, починаючи із 4 класу. Так, у 5-6 класах вивчались лінійна, квадратична та логарифмічна функції, у 7 класі – робився огляд властивостей і графіків функцій, що розглядались раніше в алгебрі, геометрії, тригонометрії, фізиці. А після вивчення елементів теорії границь та поняття про похідну, давались ознаки зростання та спадання функції. У 8 класі розглядалось питання про класифікацію функцій: алгебраїчні та трансцендентні, раціональні та ірраціональні, цілі та дробові, вводилось поняття прямої й оберненої функції. У цьому ж класі вводились елементи аналітичної геометрії.

До недоліків програми, на нашу думку, слід віднести те, що аналітичну геометрію пропонували вивчати в останньому класі, а тому даний курс не мав органічного зв’язку з темами традиційного курсу геометрії. Не передбачалось ознайомлення учнів з похідними більшості основних видів функцій (вивчали похідні лінійної, квадратичної та оберненої пропорційності), застосування визначеного інтегралу до обчислення площ, площ поверхонь та об’ємів геометричних фігур, що позбавляло учнів оволодіння важливим методом обчислення площ та об’ємів. Розв’язування трикутників вивчалось наприкінці курсу тригонометрії, а це, в свою чергу, не сприяло реалізації внутрішньопредметних зв’язків з геометрією [306]. Детальніше з "Київським проектом" можна ознайомитись у Додатку Г.

Новий проект навчального плану з математики Київське фізико-математичне товариство пропонувало ввести, за прикладом Німеччини, у вигляді експерименту лише до кількох навчальних закладів міста Києва [306, с. 135]. А після підтвердження належних результатів експерименту поступово розширювати кількість навчальних закладів, які б працювали за новою програмою.

Проект плану з математики для чоловічих гімназій, створений Київським фізико-математичним товариством, став цінним підґрунтям для подальшого удосконалення змісту шкільного курсу математики. Його поява спонукала до активізації суспільної думки та обговорення в пресі питань, пов’язаних з необхідністю реформи викладання математики. Зокрема, розгляд даного проекту на засіданні Варшавського гуртка викладачів фізики і математики надав можливість створення нового проекту навчального плану з математики для чоловічих гімназій з однією стародавньою (латинською) мовою

розміру і в певному масштабі, використовуючи лінійку, трикутник, циркуль.

У другому класі при вивченні арифметичного матеріалу означення понять мали даватись "більш загальні і точні". Після повторення матеріалу першого класу, розглядались ознаки подільності на 10, 2, 5, 4, 25, 9, 3; розкладання чисел на прості множники; найменше спільне кратне; вивчався систематичний курс звичайних і десяткових дробів (дії над дробами як абстрактними, так і іменованими); округлення десяткових чисел з точністю до одиниці будь-якого розряду; вводилось поняття про періодичні дроби; передбачалось подальше ознайомлення з метричною системою мір. При розв’язуванні задач зверталась увага на усний рахунок та на складання плану розв’язання задачі.

У пропедевтичному курсі геометрії планувалось розглянути обчислення площі трикутника, многокутника; визначення довжини кола і площі круга (практично); обчислення об’єму прямокутного паралелепіпеда; кубічні міри. Далі учні ознайомлювалися б з такими тілами як циліндр, конус та поняттями крива поверхня і площина; набували б навички в кресленні відповідних плоских фігур за допомогою лінійки, трикутника і циркуля, та у вимірюванні кутів транспортиром.

Курс арифметики третього класу починався з повторення вивченого в другому класі. Далі – планувався традиційний розділ: Розв’язування задач на так звані правила: просте і складне правило трьох, правило відсотків, правило пропорційного ділення і змішування та ін. Розв’язування задач на згадані правила передбачалось і в I та II класах "за міркуванням вказувався спосіб їх розв’язування зведенням до одиниці; зверталась увага на пряму і обернену пропорційність, учні мали ознайомитись з поняттям відношення. Вводилось усне і письмове пояснення задач. Далі пропонувалось пройти повторювальний курс арифметики.

У цьому ж класі передбачався алгебраїчний матеріал, що носив пропедевтичний характер, метою якого було формування поняття "загальне число". Так, зверталась особлива увага на вправи, що служать для переходу від арифметики до алгебри;

Пропедевтичний курс геометрії, що розпочинався з підготовчого класу, передбачав реалізацію принципу фузіонізму (одночасного вивчення стереометрії і планіметрії). Починалось вивчення курсу з куба, прямокутного паралелепіпеда, кулі і водночас діти мали ознайомлюватись з відрізками, кутами, плоскими фігурами та іншими елементами просторових фігур: грань куба, пряма лінія, точка, двогранний і тригранний кут, лінійний кут, квадрат, прямий кут, прямокутник, круг, коло. Учні повинні були навчитись креслити згадані плоскі фігури.

У першому класі мала вивчатись нумерація і основні дії над цілими числами (не від'ємними) будь-якої величини. Належне місце відводилось вивченню (практично на задачах) зміни результатів дій в залежності від зміни компонентів. Матеріал з вивчення іменованих чисел мав носити систематичний характер. Тут повинні з'ясовуватись найбільш раціональні прийоми дій над складними іменованими числами, приводитись до системи таблиці мір. В пропедевтичному курсі дробів розглядався спосіб утворення дробів при діленні одного числа на інше, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками у найпростіших випадках, знаходження частини цілого і цілого за його частиною. Далі мав вивчатись пропедевтичний курс десяткових дробів (десяті, соті, тисячні): нумерація, додавання, віднімання, множення і ділення на ціле число. Діти мали ознайомитись з метричною системою мір (метр, сантиметр, міліметр, кілометр; грам, кілограм). Давалось поняття відсотка. При розв'язуванні задач зверталась увага на усний рахунок.

Пропедевтичний курс геометрії починався із повторення геометричного матеріалу підготовчого класу. Потім пропонувались такі теми: Трикутна призма (трикутник, косий кут), правильна шестикутна призма (паралельні прямі і грані, гострий і тупий кут, многокутник) і піраміда з довільною основою (многогранний кут, рівнобедрений і різносторонній трикутник); обчислення площі прямокутника, квадратні міри. Діти мали навчитись креслити згадані плоскі фігури довільного

(1908 р.) [34, с.385, 234]. Пізніше Київський проект, як і доповідь К. Щербини, за словами Міністра народної освіти П. М. Ігнатьєва, були покладені в основу робіт комісій з реформи 1915 року [212, с. 18].

Основні ідеї Київського фізико-математичного товариства (розвиток поняття про число та ідея функціональної залежності) вплинули на створення підручників з математики прогресивного спрямування серед яких варто відзначити підручники Д. Граве "Начала алгебры" (1915) [63], К. Лебединцева "Курс алгебры для средних учебных заведений" (Ч.I–II, 1909-1910) [133, 135], П. Долгушина "Систематический курс алгебры" (1913) [84], які стали основою і орієнтиром е перебудовs шкільної математики та методики її навчання на початку XX ст.

Автори цих підручників мали різне бачення щодо обсягу, методу та послідовності викладу даних стержньових питань змісту алгебри. Зокрема, відмінність е викладs теорії ірраціональних чисел полягала у застосуванні різних наукових підходів – теорії Дедекінда (підручники К. Лебединцева та П. Долгушина), модифікації теорії Вейєрштрасса та Кантора (посібник Д. Граве). Разом з цим підручники включали й питання чинної на той час програми з математики для чоловічих гімназій.

К. Ф. Лебединцев у "Курсе алгебры для средних учебных заведений" вперше чітко і послідовно розкриває ідею розширення поняття про число. Доступність викладу забезпечується реалізацією конкретно-індуктивного методу, зокрема, виклад починається із розв'язування доцільної задачі геометричного або прикладного змісту. У такий спосіб відбувається ознайомлення учнів із величинами, значення яких можуть являти нові числа.

Введення ірраціональних чисел вчений мотивує неможливістю за допомогою цілих та дробових чисел записати розв'язок до наступної задачі: "за стороною квадрата, прийнятої за одиницю, знайти сторону квадрата, що має удвічі більшу площу" [133]. Поряд з демонстрацією незавершеності вимірювання відрізка, несумірного з одиницею проводиться обчислення і запис його наближень з недостачею і надлишком (чисел сумірних), що являють собою відповідні наближення квадратного кореня з числа 2. Тоді саме число $\sqrt{2}$, так само як і $\sqrt{3},\ \sqrt{\frac{3}{4}}$ тощо, за домовленістю вважають "особливим числом, більшим всякого додатного числа, квадрат якого менше підкореневої кількості і (меншим всякого додатного числа), квадрат якого більше підкореневої кількості" [133, с. 48] і називають "несумірним". Дані умови поширювались і на корені іншого степеня. Після ілюстративного обґрунтування необхідності та умов введення нових чисел, К. Ф. Лебединцев наводить і логічне пояснення, що є дидактичною модифікацією теорії ірраціональних чисел за Дедекіндом (полягає у розбитті множини раціональних чисел на два не порожніх класи). На цій основі вводяться означення арифметичних дій над новими числами, а також правила та властивості дій. Варто зазначити, що автор виконання арифметичних дій над несумірними числами зводить до виконання відповідних дій над їх наближеними значеннями, використовуючи метод приростів, розроблений П. О. Долгушиним.

"Систематический курс алгебры" П. О. Долгушина (1913) є більш формалізованим. Нові числа вводяться на дедуктивній основі, після чого наводяться приклади їх застосування. Високий ступінь абстрактності та складності у підручнику зумовлений й тим, що автор вводить нову символіку на противагу традиційній (наприклад, від'ємне число -4 у підручнику позначається як додатне із рискою над ним: $\overline{4}$, знак наближеної рівності: $\supset$). П. О. Долгушин вводить поняття "відносних" чисел, під якими розуміє додатні і від'ємні числа (цілі і дробові), крім цього для зображення додатних чисел він використовує латинські літери, грецькі літери набувають у автора значень як від'ємних, так і додатних. Саме для відносних чисел, як для розширеної області, автор вводить означення рівності, нерівності, арифметичних дій та доводить їх властивості. Введення ірраціональних чисел відбувається на основі теорії Дедекінда. Наукова строгість викладу підтримується й введенням поняття "перерізу

Додаток Г

Аналіз проекту плану з математики для чоловічих гімназій, розробленого Київським фізико-математичним товариством (1907 р.)

Вимоги до дітей, що вступають у підготовчий клас гімназії включали знання дітьми чотирьох арифметичних дій (усно) над цілими числами в межах першої сотні; найбільш вживаних одиниць довжини (аршин, сажень, вершок), маси (фунт, пуд), грошових одиниць (карбованець, копійка), часу (година, хвилина, доба); нумерації в межах першої тисячі, а також додавання і віднімання усно (в особливих випадках) і письмово. Діти повинні були вміти безпосередньо вимірювати довжину, визначати час за показами годинника, розуміти поняття долі одиниці (половина, чверть, третина), виконувати дії над складними іменованими числами на інтуїтивному рівні; володіти навичками розв'язування задач із записом їх розв'язання.

У підготовчому класі за проектом плану з математики продовжувалось вивчення основних дій (усно і письмово) над цілими числами в межах першої тисячі та ознайомлення з одиницями мір (фут, дюйм, верста; лот, золотник; тиждень, місяць, рік, секунда; відро, пляшка; десть; грошові знаки). Зверталась увага на вправи в безпосередньому вимірюванні довжини, визначенні проміжків часу, зважуванні тіл.

Поняття про долі розширювалось, учні мали ознайомитись з найпростішими дробами та навчитись виконувати дії над ними за міркуванням (на інтуїтивному рівні). Передбачалось вивчення нумерації і основних дій над цілими числами до одного мільйона (де множник не перевищував би трьох знаків, а дільник – двох). Зверталась увага на усвідомленість прийомів виконання дій. При розв'язуванні задач належне місце відводилось усному рахунку та складанню плану задачі (усно).

№ з/п	Доповідач	Назва доповіді
134		"Первый съезд преподавателей математики в Петербурге"
135	М.В. Оглоблин	"К теории площадей и центров тяжести плоских фигур"
1913 р.		
136	П.О. Долгушин	"Вычисление корней квадратного уравнения по приближению"
137		"Об одном преобразовании системы двух уравнений с точки зрения эквивалентности"
138		"О непрерывных дробях"
139		"О формуле для ошибки при определении числа по логарифму"
140-141	М.В. Оглоблин	"Уравнения в средней школе"
142	І.І. Чир'єв	"Изложение теории квадратного уравнения в средней школе"
1914 р.		
143	А.Д. Білімович	"Международная конференция о математическом образовании"
1915–1916 рр.		
144	М.В. Оглоблін	"Об изложении теории непрерывных дробей"
145	К.М. Щербина	"Критический обзор программ по математике, выработанных комисией 1915 г. при Министерстве Народного Просвещения"
146	В.П. Добровольський	"О распознавании корней уравнения"
1917 р.		
147	П.О. Долгушин	"Графическое исследование делимости на произведение взаимнопростых чисел"
148	М.В. Оглоблин	"О статье Н.М. Михальского: "Возвышение полинома в целую положительную степень"

Джерела: [189–213, 219].

Дедекінда", який позначається символом $\left(a_n, a_n'\right)$. Переріз визначає раціональне число, якщо між числами першого класу раціональних чисел a_n є найбільше, або між числами другого класу раціональних чисел a_n' є найменше, у протилежному випадку перерізом визначається ірраціональне число [84, с. 49].

У главі XXXV "Розвиток поняття про число. Простіші функції" автор систематизує і узагальнює відомості про числові множини (області чисел у автора) від множини натуральних чисел до комплексних. П. Долгушин наводить мотивацію розширення відомої області чисел у зв'язку з необхідністю зробити можливим виконання тієї чи іншої оберненої арифметичної дії, розкриває відношення та зв'язки між числовими множинами.

Виклад змістової лінії розширення поняття про число у підручнику Д. О. Граве "Начала алгебры" характеризується простотою, доступністю та стислістю, хоча і побудований на строго логічній основі. Вчений у передмові зауважує, що книга не є підручником для самонавчання, а призначена як посібник для вчителя, тому обсяг матеріалу кожної теми, послідовність вивчення тем, а також метод викладання має обиратись, насамперед, вчителем.

Розглянемо методичні підходи автора на прикладі вивчення від'ємних та ірраціональних чисел. Д. Граве ознайомлює з мотивацією введення чисел нової природи: "зробити дію віднімання завжди можливою, навіть у тому випадку, коли від меншого числа віднімається більше" [63, с. 14]. Формування уявлення про від'ємне число вчений пов'язує з арифметичним відношенням: "$a - b$, коли $a < b$, то це число представляє число нової природи" [там само]. Д. Граве властивості арифметичного відношення та арифметичної пропорції для випадку можливого віднімання у множині невід'ємних чисел (цілих і дробових) поширює і на випадок, коли попередній член відношення менше наступного. Так, властивість віднімання від попереднього і наступного членів відношення одне і теж число, що не змінює значення арифметичного відношення, дає можливість спрощувати вигляд від’ємного числа: $5 - 9 = 4 - 8 = 3 - 7 = 2 - 6 = 1 - 5 = 0 - 4$. Останній вигляд "–4", у якому попередній член відношення дорівнює нулю й опускається, є простішим видом від’ємного числа, причому число 4 є абсолютною величиною числа – 4 і позначається $\left|-4\right|$. Правила порівняння від’ємних чисел, а також правила виконання арифметичних дій над ними випливають відповідно із означень рівності (нерівності), суми, різниці, добутку і частки двох арифметичних відношень.

Після вивчення законів арифметичних дій над від’ємними числами, дається уявлення про поле раціональних чисел, як "сукупності чисел, над якими можна виконати усі чотири дії: додавання, віднімання, множення, ділення та для яких виконується шість законів": переставний закон додавання, множення; сполучний закон додавання, множення; розподільний закон; добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли один із множників дорівнює нулю; дія віднімання завжди можлива; дія ділення завжди можлива [63, с. 24]. Автор також наводить геометричну інтерпретацію раціональних чисел як точок координатної прямої.

Означення ірраціонального числа (додатного і від’ємного) дається як нескінченного неперіодичного дробу (за теорією Вейєрштрасса). Означення рівності, нерівності ірраціональних чисел не відрізняється від відповідних означень для раціональних чисел, записаних у вигляді десяткових періодичних дробів. Правила додавання, віднімання дається автором для раціональних та ірраціональних чисел одночасно, вони полягають у виконанні дій над відповідними розрядними одиницями в оберненому порядку. Оскільки дроби нескінченні, обчислення проводяться до деякого k-го розряду, а раціональне число A_k – називається наближеним значенням числа А за недостачею з точністю $\frac{1}{10^k}$. Означення дії множення над ірраціональними числами базується на властивості добутку

№ з/п	**Доповідач**	**Назва доповіді**
1908 р.		
109	П.О. Долгушин	"О линейном интерполировании в средней школе"
110		"О вычислении числа π"
111		"О геометрографии"
112		"О рациональном интерполировании"
113	М.В. Оглоблін	"Об определении объемов и поверхностей тел вращения"
1909 р.		
114-115	М.М. Володкевич	"Обоснование пропедевтического курса геометрии"
116	М.В. Оглоблін	"Об учебниках анализа бесконечно-малых дополнительного класса реальных училищ"
117		"Об определении степени точности в логарифмических вычислениях"
118-120	Д.О. Граве	"Методы изложения теории иррациональных чисел: 1) метод Дедекинда; 2) метод Кантора: рассмотрение учебника Билибина и Киселева; 3) метод Вейерштрасса: рассмотрение книги Пирожкова"
1910 р.		
121	М.Б. Делоне	"О роли интуиции в математике"
122	П.О. Долгушин	"Теория вичислений по таблицам"
1911 р.		
123	П.О. Долгушин	"Курс арифметики второго класса"
124		"О таблицах"
125		"Теория отрицательных величин в средней школе"
126	Т.О. Олишкевич	"К теории соединений"
127	К.М. Щербина	"О преподавании систематического курса обыкновенных дробей"
1912 р.		
128	З.О. Архімович	"Графики в алгебре в связи с первым съездом преподавателей математики"
129	Д.О. Граве	"Заметка по поводу немецкой математической энциклопедии"
130		"Об основах преподавания элементарной алгебры"
131	П.О. Долгушин	"Неэвклидова геометрия в средней школе"
132		"Об умножении"
133		"Об эквивалентности уравнений"

№ з/п	Доповідач	Назва доповіді
86	Г.К. Суслов	"По поводу новых программ по тригонометрии в кадетских корпусах"
87		"По поводу новых программ по математике во французских лицеях"
88	Г.І. Флоринський	"О суммах одинаковых степенем членов арифметической прогрессии"
1905–1906 рр.		
89	З.А. Архімович	"К вопросу о постановке математики в средней школе"
90	А.Д. Білімович	"Ф. Клейн о реформе преподавания математики"
91	П.О. Долгушин	"Об учебниках по арифметике Таннери"
92	В.П. Єрмаков	"О разложении многочлена на множители"
93	М.В. Оглоблин	"Об учебниках Бореля"
94		"О французских учебниках алгебры"
95	М.О. Столяров	"Взаимная зависимость теорем стереометри"
96	Г.К. Суслов	"О реформе преподавания математики во Франции по декрету 1902 года"
97		"Учебный план по математике во французских лицеях"
98	О.М. Яницький	"Постановка преподавания математики и физики во Франции и Швейцарии (по личным наблюдениям"
1907 р.		
99	І.І. Бєлянкін	"Замечания по поводу сообщения В.П. Ермакова – "Теорема Пифагора""
100	П.О. Долгушин	"Приближенные вычисления"
101		"Относительное положение окружностей в учебнике геометри А. Давыдова"
102		"Методика приближеного вычисления"
103		"О стереметрических чертежах"
104	В.П. Єрмаков	"Теорема Пифагора""
105	М.В. Оглоблін	"Учебник геометрии Бореля"
106	К.М.Щербина	"Обзор главнейших трудов и мнений по вопросу об улучшении программ математики в русской средней школе за последние девять лет"
107	А.Д. Білімович	"К вопросу о разложении *e* в непрерывную дробь"
108		"Реформа преподавания математики в Германии"

наближень $A_k B_k$ ірраціональних чисел *A і B*, за якою число загальних цифр у всіх наступних добутках $A_{k+1}B_{k+1}, A_{k+2}B_{k+2},...$ зростає із зростанням *k*. Автор показує як можна підібрати індекс k таким чином, щоб у результаті добутку мати *m* вірних цифр (таких, що будуть зберігатись в усіх наступних добутках наближень) після коми.

Ірраціональне число Д. Граве означає і за допомогою поняття границі. Так, "ірраціональне число А є границя свого наближення за недостачею A_k при збільшенні числа *k*: $A = \lim_{k \to \infty} A_k$ " [63, с. 115]. Застосовуючи теореми про границі суми та добутку до тотожностей, що виражають переставний, сполучний та розподільний закони додавання і множення для раціональних чисел, якими є наближення A_k, B_k, C_k відповідно ірраціональних чисел *A, B, C*, отримують справедливість цих законів і для чисел ірраціональних. Таким чином доводиться, що сукупність усіх дійсних чисел (раціональних та ірраціональних) утворює поле. Автор логічно обґрунтовує та геометрично ілюструє властивість неперервності поля дійсних чисел, звертає увагу на взаємно однозначну відповідність між точками координатної прямої та полем дійсних чисел [63, с. 123].

Реалізація ідеї функціональної залежності у названих підручниках включає ознайомлення учнів з поняттям функції та формування умінь побудови графіка та дослідження властивостей основних елементарних функцій: лінійної, квадратичної, дробової, показникової, логарифмічної та ін.

Д. Граве увесь теоретичний матеріал, що стосується функцій, подає як додаток до основної частини підручника, характерною особливістю викладу при цьому є ознайомлюючий характер (все це є недоліками стосовно набуття ґрунтовних знань та вмінь даної змістової лінії). Вчений дає означення поняття функції (тлумачиться як відповідність між значеннями змінних величин), залежної та незалежної змінних, ознайомлює з позначенням та з графічним зображенням функції, демонструє у загальному випадку спосіб побудови зображення функції у координатній площині (по точках), дає поняття неперервності функції. На конкретних прикладах автор демонструє побудову лінійної, квадратичної, дробової, показникової ("логарифміки" у автора) функцій, а також еліпса, ознайомлює з деякими основними властивостями (нулі функцій, проміжки зростання, спадання, асимптоти, максимум і мінімум функції). Демонструє застосування властивостей функцій до дослідження реальних процесів. Так, приріст капіталу, що нараховується за формулою простих та складних відсотків описується відповідно функціями виду: $y = 1 + \frac{px}{100}$ і $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$, де p – річний відсоток, x – термін зберігання внеску. На основі графіків функцій, побудованих в одній системі координат, робиться висновок, що на проміжку від 0 до 1 графік показникової функції лежить нижче прямої, тому для часу, менше одного року складні відсотки дають менший приріст, ніж прості [63, с. 305].

У підручнику П. Долгушина послідовність вивчення тем змістової лінії функції не утворює чіткої системи. Так, поняття функція педагог використовує при вивченні теми "Узагальнення поняття про показник" (глава XV), де доводить властивість показникової функції (не вводячи означення функції): "при необмеженому неперервному зростанні x, починаючи з 0, функція a^{-x} при $a > 1$ неперервно спадає від 1 до 0, а функція a^x неперервно зростає від 1 до $+\infty$" [84, с. 60], ілюструючи графічне зображення показникової функції.

У темі "Теорія границь" (глава XVI) П. Долгушин дає наступне означення функції: "Результат послідовності дій над змінними числами називається функцією від цих чисел" [84, с. 62]. У цьому ж параграфі розглядається поняття похідної функції та виводяться формули похідних деяких елементарних функцій.

У главі XXXV педагог дає уявлення про дослідження функції, що полягає у визначенні додатних, від'ємних, нульових, найбільших і найменших значень, нескінченно-малих при необмеженому зростанні абсолютної величини x і нескінченно-великих значень функції. П. Долгушин робить огляд лінійної, квадратичної, дробової функцій, їх властивостей, при побудові графіків функцій використовує спосіб геометричних перетворень.

№ з/п	**Доповідач**	**Назва доповіді**
1898–1899 рр.		
57	М.П. Покровський	"Понятие о дифференциале"
58	П.О. Долгушин	"О рациональности биссектрис в треугольнике с рациональными сторонами"
59	П.М. Покровський	"Педагогическая заметка о кривизне кривих в пространстве"
60	В.П. Єрмаков	"О розвертках"
1900 р.		
61	І.І. Белянкін	"Об одной теореме геометри"
		"Вероятность повторных событий"
62	Г.А. Дивильковський	"Устные вычисления"
63	Г.В. Пфейффер	"Один из приемов решения неопределенных уравнений"
1901 р.		
64-69	В.П. Єрмаков	"Решение уравнений в радикалах"
1902 р.		
70	А.Д. Білімович	"Решение одной геометрической задачи"
71	М.М. Володкевич	"Постановка преподавания в американських школах"
72.	В.П. Єрмаков	"Некоторые замечания об основних формулах тригонометрии"
73	К.Ф. Лебединцев	"По поводу постановки преподавания арифметики и алгебры в среднеучебных заведениях"
74	М.О. Столяров	"О порядке изложения признаков делимости"
75		"Основные геометрические определения"
76	Г.І. Флоринський	"К вопросу об изложении тригонометрии"
77	Л.Д. Ханокадопуло	"По поводу доказательства одной геометнрической теоремы"
1903 р.		
78	Г.О. Дивільковський	"Приближенные вычисления"
79	І.І. Зєхов	"По поводу новых программ по арифметике в кадетских корнпусах"
80-81	О.П. Зонненштраль	"По поводу новых программ по аглебре в кадетських корпусах"
82	М.О. Столяров	"Порядок теорем о параллельных"
83	Л.Д. Ханокадопуло	"О десятичных дробах"
1904 р.		
84	І.І. Бєлянкін	"Взаимные теоремы в геометрии"
85	М.О. Столяров	"Зависимость теорем стереометри от аксиом о параллельных"

№ з/п	Доповідач	Назва доповіді
25	Г.І. Флоринський	"Расширение действий, как результат введения новых чисел"
26	М.П. Соколов	"Симетрические многогранники"
1892 р.		
27	Є.Г. Гурін	"Начальное совместное обучение алгебры арифметики в эволюционной системе"
28.	М.П. Покровський	"К элементарной теории уравнений третьей и четвертой степени"
29	Б.Я. Букрєєв	"О тренсцендентности чисел e и π"
30	В.П. Єрмаков	"Два правила приближенного вычисления"
31		"Несколько заметаний о преподавании алгебры"
32	М.О. Сорокін	"О системах счисления"
1893 р.		
33	П.О. Долгушин	"Об уравнениях, содержащих радикалы"
34	Г.К. Суслов	"О графическом приеме решения уравнений"
35	В.П. Єрмаков	"Иррациональности в элементарной алгебре"
36		"Об определении одночлена"
37	М.П. Соколов	"О подстановках"
38		"Об извлечении корней и сложных процентах"
1894 р.		
39	В.П. Єрмаков	"О роли памяти в математике"
40		"О преобразованиях в алгебре"
41		"Различные способы решения некоторых геометрических задач"
42	М.П. Соколов	"О действиях над непрерывными дробами"
43		"Схоластика в учениках арифметики"
1895 р.		
44	В.П. Єрмаков	"Педагогический парадокс"
45		"О преподавании геометрии"
46		"О сущности алгебры"
47	П. М. Покровський	"Значение способа пределов"
48	М.П. Соколов	"Об одной теореме арифметики"
1896 р.		
49-50	М.О. Сорокін	"Сравнение комплексных чисел по постоянному модулю".
51	В.П. Єрмаков	"Решение уравнения $x^{11}-1=0$"
52	М.П. Соколов	"О некоторых теоремах арифметики"
53	І.М. Жук	"Педагогический отдел нижегородской выставки"
1897 р.		
54-55	М.П. Соколов	"Очерк истории преподавания математики в России"
		"Об арифметическом дополнении"
56	Є.І. Ігнатьєв	"О X книге Эвклида"

К. Лебединцев ставив завдання пов’язати вчення про простіші алгебраїчні функції з традиційним на той час курсом алгебри. Ознайомлення з лінійною функцією відбувається після вивчення рівнянь і нерівностей першого степеня (відділ IV першої частини підручника). Вивчення функції другого порядку та дослідження дробової функції від однієї змінної педагог пропонує вивчати разом з рівняннями і нерівностями вищих степенів (відділ VII – другої частини підручника), вчення про границі (відділ VIII другої частини підручника) пов’язує з похідною та її властивостями, у відділі IX – "Прогресії і логарифми" досліджуються властивості показникової та логарифмічної функцій [135, 135].

Свої методичні підходи щодо вивчення елементарних функцій автор викладає і у підручнику "Учение о простейших функциях и их графиках" (1916). Педагог конкретно-індуктивним методом, на основі системи доцільно підібраних задач виділяє істотні ознаки понять: постійні кількості, змінні кількості, незалежна змінна, функція, функціональна залежність, а потім узагальнює їх у вигляді означень, що даються описово. Так, постійною кількістю вчений називає таку кількість, що "в умовах даного питання має лише одне значення"; змінною кількістю – таку, "яка в умовах даного питання може мати більше одного значення (зазвичай – скільки завгодно значень)". Якщо значення змінної кількості можуть бути змінені довільно, то "будемо називати його незалежною змінною. Якщо ж значення якої-небудь змінної змінюється відповідно тому, які ми вибрали значення для іншої або декількох інших змінних, то перша кількість називається функцією другої і всіх інших змінних" [253, с. 3]. Функціональною залежністю К. Лебединцев називає "той закон, за яким визначається значення функції, якщо відомі значення її незалежних змінних (і який зазвичай виражається формулою, що містить всі ці кількості)" [там само].

Сучасне тлумачення поняття функції, як відомо, ґрунтується на теоретико-множинній основі – в означеннях використовуються поняття "множина" та "відповідність" [254, с. 237].

Можна виділити методичну схему, якою К. Лебединцев користується при вивченні окремих функцій.

1. Розглядається задача прикладного змісту, записується формула, за якою знаходиться шукана величина *y*, або ж розглядається конкретна функція.

2. Досліджується значення *y* зі зміною значення незалежної змінної *x*. Робиться узагальнення про ті значення *x*, при яких функція не має значень, поводження функції (зростання, спадання) відповідно до поводження незалежної змінної, про рівномірність зміни значень змінних (залежної і незалежної), інші властивості.

3. Будується графік функції по точках. Обґрунтовується вид лінії, утвореної точками графіка.

4. За графіком визначаються властивості функції та доводяться аналітично для загального виду (при цьому розглядаються часткові випадки).

5. Застосування властивостей функції до розв'язування рівнянь та практичних задач.

Усі кроки запропонованої методичної схеми реалізовуються і у чинних підручниках з алгебри (починаючи з 8 класу) та алгебри і початків аналізу (10 клас). Проте сучасний методичний підхід до вивчення функцій передбачає й підведення учнів до самостійного виокремлення ознак і формулювання означення функції певного виду, а також реалізацію пунктів 4-5 даного підходу у два етапи: аналітичне доведення властивостей функції, як відомо, здійснюється під час систематизації відомостей про функції у 10 класі.

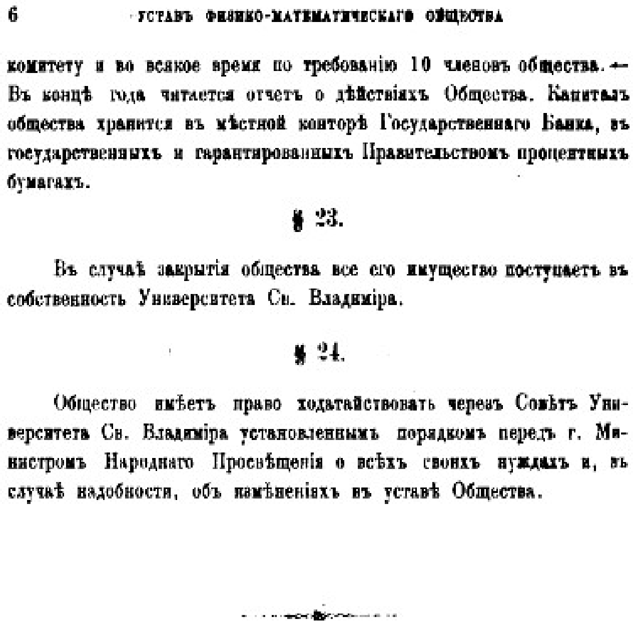
Таким чином, учасники Київського фізико-математичного товариства не лише заклали ідеї: розвиток поняття про число та функціональної залежності у проекті плану для чоловічих гімназій – "Київському проекті" (1907), а й реалізували їх у підручниках з алгебри, які стали основою і орієнтиром щодо перебудови шкільної математики та методики її навчання на початку XX ст.

Стосовно інших ідей, проголошених "Київським проектом", то певний інтерес становить для сучасності повторювальний курс

Додаток В

Доповіді, що були виголошені на засіданнях Київського фізико-математичного Товариства з проблем викладання математики в середніх навчальних закладах та її популяризації в елементарному вигляді (1890–1917)

№ з/п	Доповідач	Назва доповіді
1890 р.		
1	В.П. Єрмаков	"Общий взгяд на современное состояние и значение математики"
2		"О преподавании арифметики"
3		"О приближенных вычислениях"
4		"Определение и цели алгебры"
5		"О начальном преподавании алгебры"
6	О.П. Зонненштраль	"Об иррациональных числах в элементарном изложении"
7	Ф.Ю. Мацон	"Об именованных числах"
8	П.І. Матковський	"Выделение некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе"
9	Я.П. Мішин	"О наглядном объяснении арифметических действий по способу Массе"
10	Б.Я. Букреєв	"О несоизмеримых числах"
11-12	Д.Д. Єфрємов	"Общее решение в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени"
13	М.О. Сорокін	"О сумме цифр при различных системах счисления"
14		"О числах, подобных числам совершенным"
15.	І. І. Чир'єв	"Соотношения между сторонами и углами тетраедра"
16		О постулате Эвклида
17		О целых, дробных и несоизмеримых числах
1891		
18	І. І. Александров	"Розыскание условий равенства и подобия фигур с помощью задач на построение"
19	Е.К. Шпачинський	"О синтезе и анализе в математике"
20	О.Е. Лобанський	"Об умножении на дробь"
21	В.П. Єрмаков	"Методы решения геометрических задач при помощи мнимых чисел"
22		"О методах доказательства в математике"
23	П.І. Матковський	"Геометрическое изображение чисел"
24		"Из элементарной теории уравнений"



6 УСТАВЪ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

комитету и во всякое время по требованію 10 членовъ общества. — Въ концѣ года читается отчетъ о дѣйствіяхъ Общества. Капиталъ общества хранится въ мѣстной конторѣ Государственнаго Банка, въ государственныхъ и гарантированныхъ Правительствомъ процентныхъ бумагахъ.

§ 23.

Въ случаѣ закрытія общества все его имущество поступаетъ въ собственность Университета Св. Владиміра.

§ 24.

Общество имѣетъ право ходатайствовать черезъ Совѣтъ Университета Св. Владиміра установленнымъ порядкомъ передъ г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія о всѣхъ своихъ нуждахъ и, въ случаѣ надобности, объ измѣненіяхъ въ уставѣ Общества.

Джерело: [281]

математики, який за словами К. Щербини є "однією із найважливих робіт, де криється дах над тією будовою, що зводилась протягом декількох років" [306, с.57].

Думка про доцільність такого курсу підтверджується й тим, що з'являються посібники з відповідною назвою, наприклад Ушаков Р. П. "Повторювальний курс математики" [283]. Звісно, посібник не призначений для програмного навчання а, в першу чергу, для вступників у вищі навчальні заклади та для самоосвіти, але в ньому певною мірою реалізовані деякі особливості повторювального курсу, запропоновані Київським товариством – це повторення, систематизація та узагальнення знань шкільного курсу математики, причому виклад матеріалу відповідає більш високому рівню строгості, ніж в курсі математики загальньоосвітньої школи.

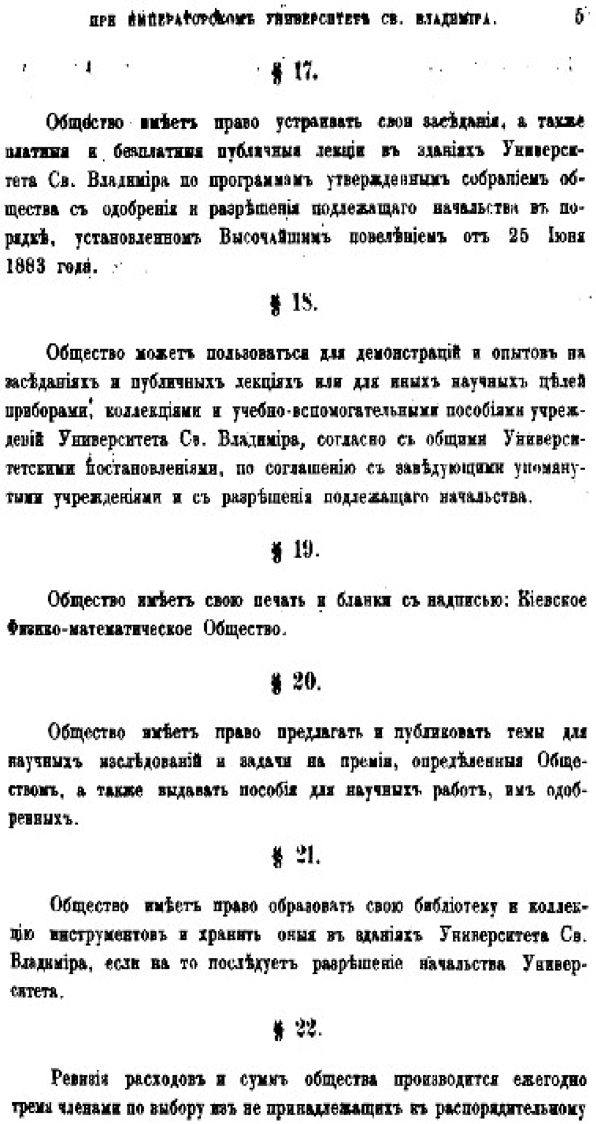
Ідея побудови пропедевтичного курсу геометрії на основі фузіонізму, розвинена Київським фізико-математичним товариством у проекті плану, є актуальною для сучасності. Чинні програми з математики для основної школи та профільної старшої школи побудовані з урахуванням вимог Державного стандарту базової і повної середньої школи, яким передбачено вивчення математики за принципом фузіонізму. Зокрема, курс геометрії основної школи пропонується будувати так, щоб елементи стереометрії мали тісний зв'язок з відповідним планіметричним матеріалом. Методичну систему вивчення елементів стереометрії у курсі математики основної школи на основі фузіонізму пропонують автори Л. Філон та В. Швець [86]. Одним із основних принципів структурування навчального матеріалу в основній школі автори висувають його практичний характер, що базується переважно на дослідах, інтуїції та експерименті [86, с.33]. Пропедевтичні курси геометрії на основі принципу фузіонізму пропагуються і російськими дослідниками: Г. Левітасом [136], Г. Марюковою [146], В. Панчишиною [222], В. Гусєвим [63] й ін. В підручниках [222], [68] плоскі фігури вводяться як елементи фігур просторових (грані, ребра, вершини). Так, прямокутник з'являється в процесі вивчення прямокутного паралелепіпеда, як його грань, відрізок – як ребро… Властивості плоских і просторових фігур вивчаються взаємопов'язано. За новою концепцією вивчення геометрії в школі "входження в простір", на відміну від традиційного підходу має бути довгим, поступовим, продуманим і починатись дуже рано [166, с. 285].

Отже, сучасна школа продовжує розвивати та втілювати в життя передові реформістські ідеї початку ХХ століття, в тому числі й ті, що їх відстоювали учасники Київського фізико-математичного товариства.

2.2. Проблема мети та завдань шкільної математичної освіти у працях членів Київського фізико-математичного товариства

У кінці ХІХ – на початку ХХ ст. всеросійський рух за реформу шкільної освіти і, зокрема, математичної активізував обговорення та обмін думками між педагогами-математиками з питань мети, методів, форм навчання шкільної математики, що відбувались на сторінках педагогічних видань, Всеросійських з'їздах викладачів математики (1912-1913 та 1913-1914 рр.), педагогічних з'їздах та засіданнях наукових товариств.

Так, у 1899 році на з'їзді викладачів фізико-хімічних наук середніх навчальних закладів Московського навчального округу П. О. Некрасов – куратор цього ж округу виступив з доповіддю "О цели и значении преподавания математики в гимназиях". На думку педагога, мета викладання математики – "засвоєння її як науки та наукового методу пізнання дійсності…". Реалізація мети полягала у необхідному зближенні математики (особливо у задачах) з такими галузями науки як фізика, географія, статистика, механіка, астрономія тощо [306, с. 31].



ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ СВ. ВЛАДИМІРА. 5

§ 17.

Общество имѣетъ право устраивать свои засѣданія, а также платныя и безплатныя публичныя лекціи въ зданіяхъ Университета Св. Владиміра по программамъ утвержденнымъ собраніемъ общества съ одобренія и разрѣшенія подлежащаго начальства въ порядкѣ, установленномъ Высочайшимъ повелѣніемъ отъ 25 Іюня 1883 года.

§ 18.

Общество можетъ пользоваться для демонстрацій и опытовъ на засѣданіяхъ и публичныхъ лекціяхъ или для иныхъ научныхъ цѣлей приборами, коллекціями и учебно-вспомогательными пособіями учрежденій Университета Св. Владиміра, согласно съ общими Университетскими постановленіями, по соглашенію съ завѣдующими упомянутыми учрежденіями и съ разрѣшенія подлежащаго начальства.

§ 19.

Общество имѣетъ свою печать и бланки съ надписью: Кіевское Физико-математическое Общество.

§ 20.

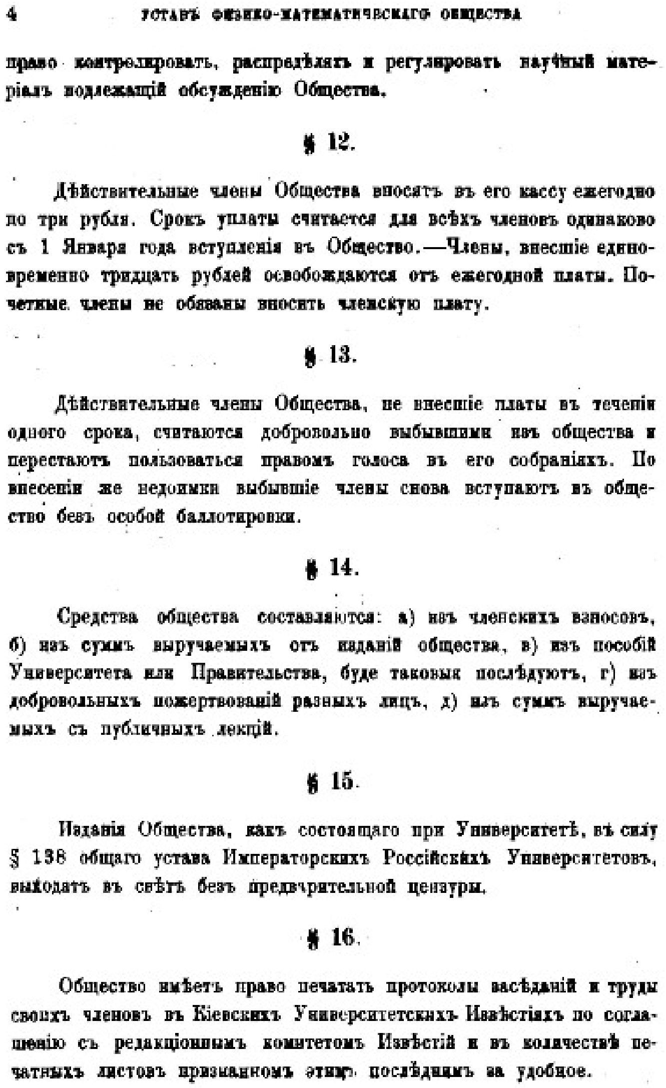
Общество имѣетъ право предлагать и публиковать темы для научныхъ изслѣдованій и задачи на премія, опредѣленныя Обществомъ, а также выдавать пособія для научныхъ работъ, имъ одобренныхъ.

§ 21.

Общество имѣетъ право образовать свою библіотеку и коллекцію инструментовъ и хранить оныя въ зданіяхъ Университета Св. Владиміра, если на то послѣдуетъ разрѣшеніе начальства Университета.

§ 22.

Ревизія расходовъ и суммъ общества производится ежегодно тремя членами по выбору изъ не принадлежащихъ къ распорядительному



4 УСТАВЪ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

право контролировать, распредѣлять и регулировать научный матеріалъ подлежащій обсужденію Общества.

§ 12.

Дѣйствительные члены Общества вносятъ въ его кассу ежегодно по три рубля. Срокъ уплаты считается для всѣхъ членовъ одинаково съ 1 Января года вступленія въ Общество.—Члены, внесшіе единовременно тридцать рублей освобождаются отъ ежегодной платы. Почетные члены не обязаны вносить членскую плату.

§ 13.

Дѣйствительные члены Общества, не внесшіе платы въ теченіи одного срока, считаются добровольно выбывшими изъ общества и перестаютъ пользоваться правомъ голоса въ его собраніяхъ. По внесеніи же недоимки выбывшіе члены снова вступаютъ въ общество безъ особой баллотировки.

§ 14.

Средства общества составляются: а) изъ членскихъ взносовъ, б) изъ суммъ выручаемыхъ отъ изданій общества, в) изъ пособій Университета или Правительства, буде таковыя послѣдуютъ, г) изъ добровольныхъ пожертвованій разныхъ лицъ, д) изъ суммъ выручаемыхъ съ публичныхъ лекцій.

§ 15.

Изданія Общества, какъ состоящаго при Университетѣ, въ силу § 138 общаго устава Императорскихъ Россійскихъ Университетовъ, выходятъ въ свѣтъ безъ предварительной цензуры.

§ 16.

Общество имѣетъ право печатать протоколы засѣданій и труды своихъ членовъ въ Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ по соглашенію съ редакціоннымъ комитетомъ Извѣстій и въ количествѣ печатныхъ листовъ признанномъ этимъ послѣднимъ за удобное.

Аналогічні думки висловлювали педагоги М. Парфентьєв на сторінках журналу "Русская школа" (1902, №2), С. Поляков у "Педагогическом сборнике" (1907, №2) та ін.

На І Всеросійському з’їзді викладачів математики (1912-1913 рр.) питання постановки мети навчання математики у загальноосвітній школі було висвітлене у доповіді Н. А. Тамамшевої "О реформе преподавания математики", яка, виходячи із загальної мети навчання – "всебічного розвитку всіх здібностей та творчих сил людини" вбачала, що "кожна галузь науки повинна розвивати ті здібності та сторони душі людини, які ближче методам і цілям науки" [175, с.163].

Своєрідний підхід до даного питання на цьому ж з’їзді запропонував О. Васильєв (доповідь "Математическое и философское преподавание математики в средней школе"). Автор доповіді вважав "однією із цілей навчання математики в останньому класі гімназії розвиток філософського мислення, завданням якої є: 1) з’ясування значення математики для точного знання і математичного вираження законів природи; та 2) дати учням науковий ретроспективний погляд на систему елементарної математики [175, с. 162].

На ІІ Всеросійському з’їзді викладачів математики О. Власов у доповіді "Какие стороны элементарной математики имеют ценность для общего образования" зауважує, що мета викладання математики полягає в тому "щоб формувати в учнів математичне мислення відповідно до основ цього мислення: як аналітичне, так і геометричне, як те, що відноситься до просторової уяви і побудови, так і мислення, що могло б служити для пізнання світу як з боку множини і величини, так і з боку форм, побудови складного, просторових відношень…" [175, с. 161].

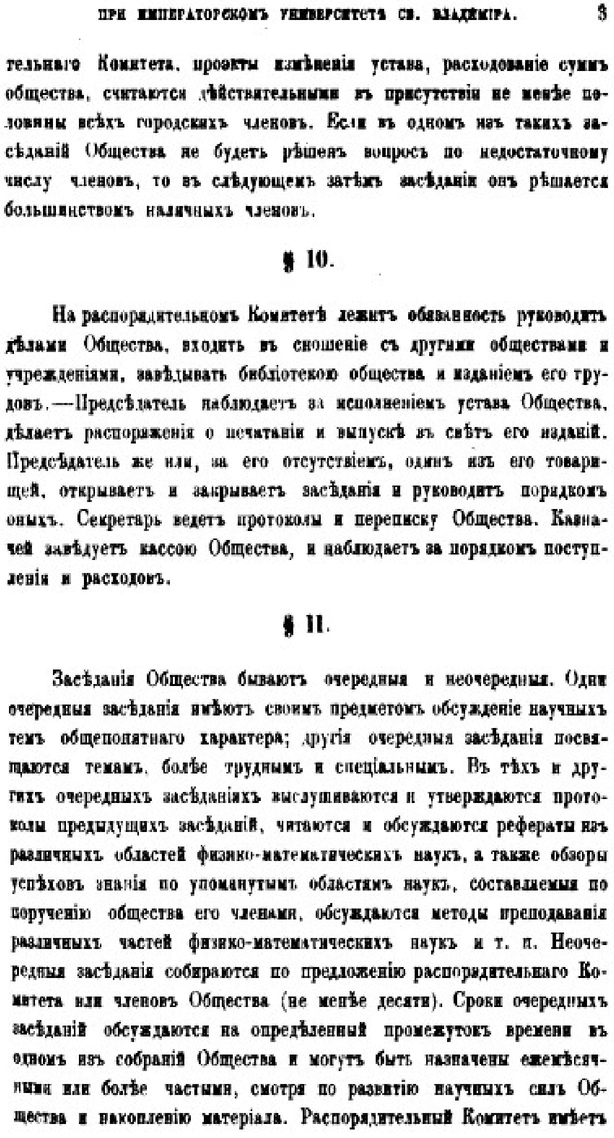
На нашу думку, запропоновані підходи до формулювання мети навчання математики розкривають лише один певний, проте необхідний, напрям формування та розвитку дитини. Доцільним є більш повне визначення мети навчання математики у загальноосвітній школі, яке б узагальнювало вищевикладені погляди та відображало навчальні, виховні та розвивальні цілі.

Розв’язання цього завдання запропонував ще у 1907 році К. М. Щербина, який єдиноправильною вбачав мету навчання математики таку, що поєднувала б цілі навчання математики, відомі у реальній та класичній системах освіти: "Викладаючи в середній загальноосвітній школі математику, необхідно поставити за мету ознайомлення з нею: а) як з наукою, як з науковою системою, що вносить стрункість і порядок в наше світобачення; б) як з могутнім методом, що дає можливість вивчати явища навколишньої дійсності, як з цінним засобом всебічного розвитку і, особливо, розумових здібностей учня" [306, с. 124].

Як бачимо, формулювання мети навчання математики, запропоноване К. Щербиною, близьке до його сучасного варіанту (див. [230, с. 3]). В останньому здійснена конкретизація основних завдань навчання математики в загальноосвітній школі, які випливають із мети загальної середньої освіти, зазначеними у законі України "Про освіту" (2002), Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) (2001) та реалізують культуротворчу парадигму сучасної шкільної освіти.

Розкрити зв'язок навчання математики, як і будь-якого загальноосвітнього предмету, з психологією учасник Товариства М. М. Володкевич пропонував у своїх працях "Задачи педагогической деятельности" та "О принципах, которые должны быть положены в основу преподавания естествознания в средней школе" (1906 р.). Його теоретична концепція навчання – це узагальнення та розвиток ідей прагматичної та експериментальної педагогіки, педагогіки педоцентризму, теорії нових шкіл, представниками яких були відомі зарубіжні вчені Г. Спенсер, Е. Мейман, Д. Дьюї, Г. Кершенштейнер, Е. Демолен та ін.

Для визначення мети виховання в широкому сенсі вчений бере за основу означення виховання за Г. Спенсером – "виховання є підготовка особистості до найбільш повноцінного життя" [57, с. 11] та розкриває зміст поняття "повноцінність життя" через поняття "щастя" – як емоції, що супроводжує всяку не надмірну діяльність. Емоція тим інтенсивніша, чим ця діяльність складніша й ширша. Отже, мета загальноосвітньої школи – всебічний і найбільш повний розвиток усіх сил і здібностей учня: "…педагог повинен викликати до життя всі дрімаючі здібності і довести їх до найбільш інтенсивної діяльності" [57, с. 39]. Якщо ж деякі із здібностей (якостей) не



тельнаго Комитета, проэкты измѣненія устава, расходованіе суммъ общества, считаются дѣйствительными въ присутствіи не менѣе половины всѣхъ городскихъ членовъ. Если въ одномъ изъ такихъ засѣданій Общества не будетъ рѣшенъ вопросъ по недостаточному числу членовъ, то въ слѣдующемъ затѣмъ засѣданіи онъ рѣшается большинствомъ наличныхъ членовъ.

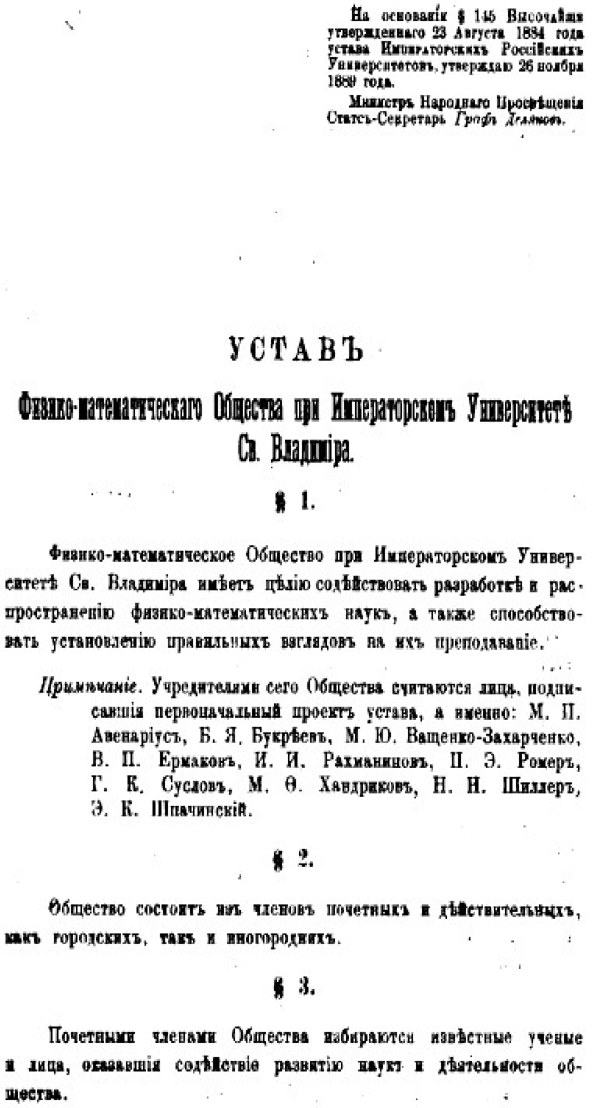
§ 10.

На распорядительномъ Комитетѣ лежитъ обязанность руководить дѣлами Общества, входить въ сношеніе съ другими обществами и учрежденіями, завѣдывать библіотекою общества и изданіемъ его трудовъ.—Предсѣдатель наблюдаетъ за исполненіемъ устава Общества, дѣлаетъ распоряженія о печатаніи и выпускѣ въ свѣтъ его изданій. Предсѣдатель же или, за его отсутствіемъ, одинъ изъ его товарищей, открываетъ и закрываетъ засѣданія и руководитъ порядкомъ оныхъ. Секретарь ведетъ протоколы и переписку Общества. Казначей завѣдуетъ кассою Общества, и наблюдаетъ за порядкомъ поступленія и расходовъ.

§ 11.

Засѣданія Общества бываютъ очередныя и неочередныя. Одни очередныя засѣданія имѣютъ своимъ предметомъ обсужденіе научныхъ темъ общепонятнаго характера; другія очередныя засѣданія посвящаются темамъ, болѣе труднымъ и спеціальнымъ. Въ тѣхъ и другихъ очередныхъ засѣданіяхъ выслушиваются и утверждаются протоколы предыдущихъ засѣданій, читаются и обсуждаются рефераты изъ различныхъ областей физико-математическихъ наукъ, а также обзоры успѣховъ знанія по упомянутымъ областямъ наукъ, составляемые по порученію общества его членами, обсуждаются методы преподаванія различныхъ частей физико-математическихъ наукъ и т. п. Неочередныя засѣданія собираются по предложенію распорядительнаго Комитета или членовъ Общества (не менѣе десяти). Сроки очередныхъ засѣданій обсуждаются на опредѣленный промежутокъ времени въ одномъ изъ собраній Общества и могутъ быть назначены ежемѣсячными или болѣе частыми, смотря по развитію научныхъ силъ Общества и накопленію матеріала. Распорядительный Комитетъ имѣетъ

Додаток Б



На основаніи § 145 Высочайше утвержденнаго 23 Августа 1884 года устава Императорскихъ Россійскихъ Университетовъ, утверждаю 26 ноября 1889 года.

Министръ Народнаго Просвѣщенія
Статсъ-Секретарь *Графъ Деляновъ.*

УСТАВЪ

Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра.

§ 1.

Физико-математическое Общество при Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра имѣетъ цѣлію содѣйствовать разработкѣ и распространенію физико-математическихъ наукъ, а также способствовать установленію правильныхъ взглядовъ на ихъ преподаваніе.

Примѣчаніе. Учредителями сего Общества считаются лица, подписавшія первоначальный проектъ устава, а именно: М. П. Авенаріусъ, Б. Я. Букрѣевъ, М. Ю. Ващенко-Захарченко, В. П. Ермаковъ, И. И. Рахманиновъ, П. Э. Ромеръ, Г. К. Сусловъ, М. Ѳ. Хандриковъ, Н. Н. Шиллеръ, Э. К. Шпачинскій.

§ 2.

Общество состоитъ изъ членовъ почетныхъ и дѣйствительныхъ, какъ городскихъ, такъ и иногороднихъ.

§ 3.

Почетными членами Общества избираются извѣстные ученые и лица, оказавшія содѣйствіе развитію наукъ и дѣятельности общества.

задіяні, скорочуватиметься коло вражень і повнота життя звужуватиметься (а тому з емоційного боку задоволення буде менш інтенсивним).

Співвідношення між різними сторонами розвитку особистості за М. Володкевичем має наступний характер: "фізична діяльність складає лише фон, необхідний для повноти щастя"; психофізична організація, що приводиться в дію розумовою роботою, здатна збудити емоцію щастя; більший ступінь складності нервової організації мають почуття, тому "чим більше в процесі почуттів мислительних елементів, тим вище і благородніше емоція і тим інтенсивніше усвідомлене почуття щастя" [57, с. 17].

Проілюструємо вищесказане за допомогою діаграми (рис. 2.1), де області 1 – 5 психологічні стани людини за ступенем інтенсивності емоції щастя (повноти життя) у напрямі зменшення інтенсивності.

Рис. 2.1

Учений вважав, що загального суспільного щастя не може бути, окрім щастя особистостей, що його утворюють, і якщо всі особистості будуть щасливі, то цим буде досягнуто і щастя всього суспільства [57, с. 20].

Отже, загальне щастя є ідеал, часткове здійснення якого буде досягнуто попутно, як додатковий результат правильного виховання. Саме тому у загальноосвітній школі будь-який найменший прийом навчання, будь-яке повідомлення чи вплив на вихованця у відношенні дисципліни повинні оцінюватись з точки зору досягнення головної мети, і все те, що не відповідає їй, має бути вилучено. Фізичний, розумовий та моральний розвиток особистості повинен здійснюватись за допомогою тренувань і вправ, які вимагають застосувань і прояву відповідних здібностей не надміру. За теорією М. Володкевича, чим більш загальний характер має мета, тим вона віддаленіша і шлях до неї лежить через низку проміжних цілей, які у той же час є засобами для її досягнення. Тогочасна загальноосвітня школа, беручи до уваги одночасно дві різні мети: привілеї та надання прав випускникам і гармонійний розвиток здібностей учнів, що не мали внутрішніх зв'язків, задовольнялась найближчою з них – тією, що вимагала найменше зусиль з боку вчителя. Тому віддаленіша мета (а також ідеал) упускалась. Проілюструємо вищевикладене за допомогою схеми (рис. 2.2).

Аналіз діяльності Київського фізико-математичного товариства показав, що розв'язання певних аспектів проблеми завдань розвитку й виховання учнів під час навчання математики було невід'ємною частиною педагогічних праць В. Єрмакова, К. Лебединцева, М. Володкевича, М. Соколова, К. Щербини й ін.

Члени Київського фізико-математичного товариства обґрунтовували, що реалізація у навчально-виховному процесі принципу формальності навчання, як провідного освітнього принципу тогочасної школи, не зможе привести до досягнення головної мети останньої – загального розвитку особистості.

Уявлення про формальний розвиток у ті часи ототожнювали з "розумовою силою". Характеризуючи навчання у середніх загальноосвітніх закладах, М. Володкевич зауважував: "Вважалося, що так само як мускули розвиваються тренуванням, так і розумова робота розвиває без обмежень запас розумової сили (під нею розуміли легкість, чіткість та швидкість виконання розумових операцій).

площинами в просторі, основними властивостями двогранних і багатогранних кутів.

У шостому класі (2 години на тиждень) вивчались правильні багатогранники, об'єми та площі поверхонь багатогранників та круглих тіл.

Тригонометрія починала вивчатись у 7 класі (2 години у першому півріччі і 1 година у другому). Метою її вивчення було розв'язування трикутників. З властивостями тригонометричних функцій ознайомлювали дуже поверхово, – термін "тригонометричні функції" зовсім не вживався а замінювався терміном "величини". Учні мали опанувати основні тригонометричні тотожності та застосування тригонометричних таблиць. Після цього вивчались співвідношення між сторонами і кутами прямокутного та косокутного трикутників та розв'язування даних типів трикутників. Програма пропонувала й застосування тригонометрії до обчислення площ, вимірювання ліній та кутів на земній поверхні, ознайомлювати з простими кутормірними інструментами та виконанням різних вимірювань на місцевості.

Курси геометрії та тригонометрії для реальних училищ, на відміну від відповідних курсів гімназій, ускладнювались такими темами:

– Чотири чудові точки у трикутнику (центри описаного і вписаного кіл, центр мас і точка перетину висот трикутника). Симетричні многогранники і відношення їх поверхонь і об'ємів. Подібні циліндри і конуси, відношення їх поверхонь і об'ємів (6 клас).

– Тригонометричні рівняння (6 клас). Повторення тригонометрії з розв'язуванням більшої кількості задач (7 клас).

– Ґрунтовно вивчались методи розв'язування задач на побудову у курсі геометричного креслення (такої дисципліни у гімназіях не було).

Джерела: [229, 282].

оволодіння способом границь необхідно було з'ясувати поняття ірраціональності геометричних величин за допомогою теореми про несумірність діагоналі квадрата з його стороною, відношення двох несумірних величин. Поняття про геометричну змінну та її границю мало бути з'ясоване за допомогою знаходження довжини відрізка, несумірного з одиницею її міри. Учні також ознайомлювались з головними теоремами про границі, необхідними для визначення довжини кола та ін. За допомогою задач на обчислення, що розв'язувались у кінці кожного розділу, встановлювались зв'язки з алгеброю (складання рівнянь, тотожні перетворення виразів). Програма наголошувала на важливість розв'язування і практичних питань засобами геометрії.

Із задач на побудову пропонувалось розв'язувати лише основні, тобто задачі, подібні до наступних: "побудувати кут, що рівний даному; поділити навпіл даний відрізок і кут; розділити пряму на *n* рівних частин, або у відношенні *n* до *m*; через дану точку провести пряму паралельну або перпендикулярну до даної прямої; побудувати трикутник за трьома сторонами, за двома сторонами і кутом між ними, за стороною і двома кутами; на даній прямій побудувати трикутник і багатокутник, подібні до даних; знайти центр дуги і кола; вписати і описати коло навколо трикутника і правильного багатокутника; із точки провести дотичну до кола; побудувати вирази: $a \pm b$, $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 \pm b^2}$; перетворити одні фігури в інші, рівновеликі до даних й ін.".

У четвертому класі гімназій діти вивчали геометрію (2 години на тиждень) в наступному обсязі: пряма лінія і коло; вимірювання прямої лінії (відрізка). Кути. Прямі перпендикулярні і похилі; їх властивості. Трикутники; рівність трикутників та їх властивості. Чотирикутники і взагалі багатокутники. Коло; властивості хорд, січних та дотичних. Кожний розділ супроводжувався розв'язуванням основних задач на побудову та задач на обчислення.

У п'ятому класі (2 години на тиждень) ознайомлювались з подібністю трикутників і багатокутників, вписаних та описаних навколо кола багатокутників, поняттям про границю, довжиною кола, площею круга, площами прямолінійних фігур, прямими та

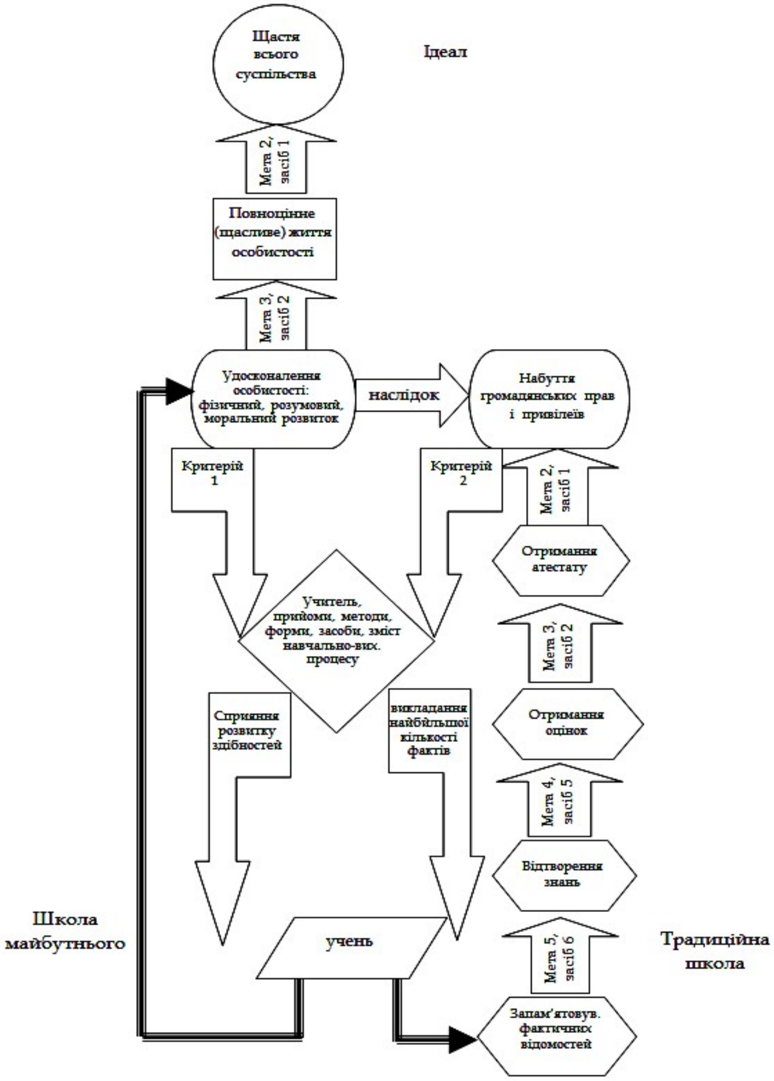


Рис. 2.2

Остання може бути використана у будь-якій галузі діяльності в тому випадку, якщо у навчанні реалізувати три характерні особливості: 1) відірваність від життя; 2) переважання вербалізму; 3) переважання теорії над практикою" [56, с. 23]. Педагог обґрунтовує необхідність зміни тлумачення поняття формального розвитку. Формальний розвиток він розуміє як оволодіння учнями навичками координувати й управляти пізнавальними процесами: запам'ятовуванням, пригадуванням, увагою, мисленням, уявою, сприйманням. Наприклад, якщо полегшити утворення асоціативних зв'язків в одному напрямі і послабити їх в іншому – залишивши без вправ, можна досягнути точної і швидкої реакції на певні подразники. Таким способом можна навчити учнів впізнавати поняття, через виділення його суттєвих ознак, відрізняти одне поняття від іншого, підводити під більш загальне поняття, установлювати зв'язки між поняттями [56, с. 33]. На основі життєвих спостережень, фактів з історії наук, досліджень психологів Г. Спенсера, Т. Рібо, Трояновського, власних міркувань, М. Володкевич стверджує, що мислительні навички невід'ємні від того ґрунту, на якому вони формувались. "Не можна тренувати розум "взагалі", а лише на певному матеріалі, з яким його розвиток буде назавжди пов'язаний. Тому навички і уміння будуть мати певний напрям, або спеціальний характер роблячи розум одностороннім і нездатним орієнтуватись в іншій області знань" [56, с. 34]. За провідний освітній принцип, на думку педагога, доцільно взяти більш широкий *принцип загального розвитку* особистості.

Загальний розвиток залежить від уміння вільно переносити учнями результати вивчення однієї галузі знань (знання, методи, уміння, навички) в іншу. Таке використання буде тим повніше, чим більше одна галузь знань проникає в іншу. Загальний розвиток, таким чином, складається із сукупності формального розвитку, набутого при вивченні різних предметів, і, подібно до нього, передбачає набуття учнями умінь і навичок координувати і упорядковувати різнорідні психічні процеси (пов'язані з різними галузями знань) через систему асоціативних зв'язків. Досягнення загального розвитку при навчанні математики буде можливим, якщо теоретичний матеріал та практичні завдання матимуть життєву цінність – учні набудуть умінь та навичок

першого степеня з одним невідомим, невизначені рівняння 1-го степеня з двома невідомими в цілих і натуральних числах, неперервні дроби, теорію сполук та біном Ньютона.

Восьмий рік навчання присвячувався повторенню та ознайомленню з матеріалом, складним для розуміння у попередніх класах. Так, вивчались: ознака подільності многочлена на двочлен ($x - a$) та наслідки, що випливають з неї; сторонні корені та втрата коренів рівнянь; розв'язування систем рівнянь 1-го степеня з багатьма невідомими способом Безу (спосіб введення довільних множників). Крім цього повідомлялось застосування алгебри до геометрії.

Курс *алгебри* у реальних училищах містив наступні додаткові теми:

– Розв'язування і складання рівнянь (систем) 2-го степеня з багатьма невідомими (простіші випадки) (4 клас);

– Застосування способу границь до знаходження об'єму піраміди, кулі та її частин. Комплексні вирази у алгебраїчному та тригонометричному вигляді. Максимум і мінімум тричлена 2-го степеня і дробу $\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$. Максимум виразу $x^n y^n$, у якому $x+y$ – величина постійна. Мінімум виразу $x+y$, якщо $xpyq$ – величина постійна. Спосіб невизначених коефіцієнтів (7 – додатковий клас).

Головною метою викладання *геометрії* у гімназії було систематичне вивчення її істин учнями, з'ясування способів їх доведень, а також повне засвоєння методів або форм міркувань, що використовуються при цих доведеннях. Програма наголошувала на формуванні в учнів навичок скороченого запису теореми або задачі – для відокремлення умови теореми від того, що потрібно довести. Останнє є важливим для формулювання оберненої теореми, протилежної та протилежної до оберненої. Пропонувалось доводити теореми дедуктивним методом (мався на увазі синтетичний метод доведення, що характеризувався напрямом міркувань від умови теореми до наслідку) та методом від супротивного.

Із геометричних способів доведення мали бути розглянуті спосіб накладання, спосіб пропорцій, спосіб границь. Для доводились твердження, які раніше пропонувалось вивчати догматично: теореми про подільність чисел; теореми, на яких ґрунтуються правила знаходження найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного; необхідні й достатні умови перетворення звичайних нескоротних дробів в десяткові скінченні і періодичні.

Курс *арифметики* реальних училищ відрізнявся від відповідного курсу гімназій наступними додатковими темами:

– Ознаки подільності на 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36. Знаходження найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного методом послідовного ділення (2 клас);

– Наближені обчислення (6 клас – повторювальний курс арифметики).

Вивчення *алгебри* починалось з III класу гімназій (по 2 години на тиждень). Програма вимагала розв'язування вправ, що призначались для "переходу від арифметики до алгебри". Далі вивчались чотири основні дії над одночленами, а також додавання, віднімання й множення багаточленів. Від'ємні числа та дії над ними розглядались як узагальнені числа, що вводяться в алгебру для можливості віднімання в усіх випадках. Вони вивчались всередині теми "Одночлени та багаточлени", проте їх введення не відповідало напряму ідеї розвитку поняття про число у сучасному розумінні.

У четвертому класі при 2 уроках на тиждень учні опановували наступні теми: ділення багаточленів; дії над алгебраїчними дробами; розв'язування рівнянь першого степеня з однією невідомою величиною; розв'язування систем рівнянь 1-го степеня з багатьма невідомими; піднесення до степеня одночленів та добування кореня з них; добування квадратних коренів з алгебраїчних багаточленів і чисел. Пропорції.

У п'ятому класі (2 уроки на тиждень) вивчались квадратні рівняння, дослідження рівнянь другого степеня, розв'язування найпростіших систем рівнянь 2-го степеня, дії над радикалами.

У шостому класі (2 години на тиждень) вивчались прогресії та логарифми.

У сьомому класі (при 1 годині в першому півріччі і 2 годинах в другому) учні вивчали дослідження систем рівнянь 1-го степеня з двома невідомими, розв'язування нерівностей

застосування отриманих знань у життєвій практиці; елементи знань між різними дисциплінами будуть приведені у всебічний взаємозв'язок [56, с. 37-38]. Як бачимо, погляди М. Володкевича співзвучні з такими актуальними на сьогодні проблемами шкільної математики як реалізація прикладної спрямованості навчання математики та реалізація міжпредметних зв'язків, що сприяють формуванню життєвої й соціальної компетентностей учнів, а також єдиної картини світу, наукового світогляду. До того ж, педагог розкрив психологічну суть даних питань.

До подібних висновків доходить в 1925 році К. Ф. Лебединцев у праці "Вступ до сучасної методики математики". Оскільки на той час ще не було спеціальних досліджень стосовно впливу математики на розумовий розвиток учнів, вчений вважає імовірним те, що "вивчення математики супроводжується розвитком не тільки "математичного" мислення, а й інших споріднених з ним видів мислення" [261, с. 48]. Узагальнюючи роботу психологів (В. Меймана та ін.), які проводили експериментальні дослідження пам'яті, К. Лебединцев зазначає, що математика буде впливати на розумовий розвиток дітей, якщо матеріал навчання пов'язувати з навколишньою дійсністю. Запас уявлень і асоціацій становитиме ту базу, на яку опиратиметься подальше мислення.

Виховання культури мислення, на думку К. М. Щербини, є найважливішим завданням загальноосвітньої школи [306]. "Здібність правильного мислення необхідна нам на кожному кроці: вона необхідна і юристу, щоб дійти до логічного висновку, й історику при установленні історичних фактів за документами, і, взагалі, в кожній діяльності" – стверджував В. П. Єрмаков [91, с. 449].

В. Єрмаков під вихованням культури мислення ("дисциплінуванням розуму") під час розв'язування задач та доведення теорем розумів, перш за все, *здатність зосереджуватись над суттєвим* у даному питанні й "відкидати другорядні, не суттєві речі" [92, с. 450]. Друга важлива характеристика культури мислення – *перевірка правильності результату* мислення (критичність). В залежності від природи об'єкту мислення (реального чи абстрактного), результат можна перевірити дослідом, оберненим методом міркувань чи за допомогою двох різних методів розв'язування – "якщо розв'язуючи одне і те ж питання двома різними методами приходимо до одного і того ж результату, то це служить кращим доведенням, що наше мислення в обох випадках правильне" [92, с. 451]. Третя характеристика – *раціональність*: "Недостатньо відкрити і довести нову теорему; необхідно бути впевненим, що дане доведення найпростіше" [92].

У доповіді дійсного члена товариства М. П. Соколова "Остатки схоластики в современных учебниках арифметики" звертається увага на розвиток *самостійності* мислення. Він обгрунтував недоцільність і дидактичну некоректність розв'язування задач за шаблоном – так званими правилами (потрійне правило, правило процентів, ланцюгове правило і т.д.). Оскільки різні за назвою правила відповідали за своєю суттю одному і тому ж способу розв'язування задач (різних за сюжетом, але однакових за математичним змістом). Педагог зауважував, що таке розв'язування привчає учня до неусвідомлення суті того чи іншого методу або способу розв'язування задачі, ставить його розум у небажану залежність від різних рецептів, схем, формул [255, с. 18].

М. М. Володкевич радив враховувати віковий розвиток дитини у навчанні й вихованні. Так, "в ранньому дитинстві доступний лише конкретний зміст, а тому лише він може дисциплінувати його розум" [56, с. 38]. Ця думка пояснює домінування конкретно-індуктивного методу навчання математики над абстрактно дедуктивним, особливо для дітей молодшого і середнього шкільного віку. Вроджена схильність дитини до пізнання навколишньої дійсності грунтується на неусвідомленому нею процесі мислення, що послідовно проходить наступні етапи: "спочатку увага спрямована на окремі факти; накопичуючись, ці факти асоціюються у групи (класифікуються); пізніше помічаються відношення, що існують між ними" [57]. Цією схемою спостереження об'єктів і явищ, на думку педагога, доцільно користуватись вчителю для навчання дитини бачити (впізнавати, відшукувати), сприймати, класифікувати за схожістю і відмінністю, класифікувати у групи, пов'язувати відомими відношеннями, особливо відношенням причинності. При цьому використовуються різні розумові

арифметики" О. Малініна і К. Буреніна та ін. Міністерство рекомендувало і для реальних училищ.

У підготовчому класі гімназії на *арифметику* відводилось 6 годин на тиждень. Учні вивчали чотири основні дії над цілими числами, оволодівали навичками в користуванні російської рахівниці для виконання дій додавання і віднімання, вчились розв'язувати арифметичні задачі.

У першому класі (4 години на тиждень) діти ознайомлювались з уявленням про десяткову систему числення, із зображенням чисел церковно-слов'янськими та римськими знаками. Вводилось поняття абстрактного й іменованого числа. У відповідності до нових понять, розглядались чотири основні дії над цілими абстрактними та іменованими числами, вивчались найпростіші дроби.

Раціоналізації усних обчислень приділялась особлива увага в курсі арифметики. Починаючи з 1-го класу учні повинні були засвоїти різні прийоми швидкого усного рахунку, наприклад: "$a \times 25 = (a:4) \times 100$ або $(a \times 100):4$; $a \times 29 = (a \times 30) - a$; $a \times 54 = (a \times 60) - (a \times 6)$; $a:25 = (a \times 4):100$; $a:27 = a:3:9$ і т.п.". Такі прийоми ґрунтувались на використанні залежності результатів арифметичної дії від зміни її компонентів, а також на використанні законів (властивостей) арифметичних дій.

У другому класі (4 години на тиждень) продовжувалось вивчення дробів та дій над ними (звичайними та десятковими). На відміну від програми 1872 року, нова містила вивчення поняття найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного. У цьому ж класі відбувалось ознайомлення із періодичними дробами.

Програма з арифметики третього класу (3 години на тиждень) одним із завдань мала з'ясування відмінності між величиною та її числовим значенням, а також розуміння суті понять "прямо пропорційні величини" і "обернено пропорційні величини". Діти вивчали відношення та пропорції. Навчались розв'язувати задачі на правила: потрійне просте і складне, процентів, обліку векселів (комерційного), ланцюгове, пропорційного ділення і змішування 1-го та 2-го роду.

У восьмому класі проходили повторювальний курс математики (2 години на тиждень). При повторенні арифметики,

Додаток А

АНАЛІЗ ПРОГРАМ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ГІМНАЗІЙ ТА РЕАЛЬНИХ УЧИЛИЩ КІНЦЯ ХІХ СТОЛІТТЯ

Навчальний план і програма з математики для чоловічих гімназій, затверджені Міністерством народної освіти в 1890 р., були діючими аж до 1917 р. Відповідно до мети загальноосвітньої школи, математика, як частина загальної освіти, мала вивчатись, у першу чергу, як "засіб правильного розвитку мислення", для цього ґрунтовне та строго-систематичне вивчення теоретичного курсу ставилось пріоритетним завданням, практичні вправи повинні були використовуватись для пояснення теорії та у набутті навичок в обчисленнях. Реальний зміст предмета та його застосування до життєвих фактів повністю ігнорувались.

Математику у реальних училищах розглядали як "засіб для вивчення важливих реальних наук – фізики, механіки, астрономії та ін.", проте сама математика вважалась наукою точною і абстрактною (позбавленою реального змісту), а отже одночасно була і засобом для "правильного розвитку мислення". У пояснювальній записці зверталась увага на необхідність ґрунтовного і строго систематичного вивчення теоретичного курсу та його практичної частини.

Характер навчання математики у реальних училищах майже не відрізнявся від навчання у гімназіях (крім перерахованих відмінностей). Так, не використовувались методи навчання реальної науки: лабораторний, конкретно-індуктивний, натомість у пояснювальній записці пропонувалось деякі твердження вивчати догматично (обгрунтування яких не доступне для учнів). Підручники, написані для гімназій такі, як "Елементарна геометрія в обсязі гімназичного курсу" А. Давидова, "Керівництво прямолінійної тригонометрії" О. Малініна, "Початкова алгебра в об'ємі гімназійного курсу" А. Давидова, "Керівництво з

операції: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення тощо. Зазначимо, що в сучасній методиці математики [254] даний прийом покладено в основу формування уявлень і понять, навчання способам розв'язуванню задач, вивчення теорем тощо. Його психологічним пігрунтям у сучасному розумінні є системний характер розумової діяльності учнів, яка відбувається у вигляді включення узагальнених асоціативних зв'язків у зв'язки вищого порядку.

В. П. Єрмаков дотримувався думки, що *розвиток і навчання взаємообумовлені.* З одного боку, однією з цілей навчання математики в гімназії є сприяння розвитку мислення, з іншого – для успішного навчання арифметики у перших класах гімназії доцільно ще при домашній підготовці[2] займатись вправами, що розвивають мислення [86, с.445]. Вчений рекомендував розв'язувати задачі двох типів. Перший тип задач – виконання чотирьох арифметичних дій над багатоцифровими числами (ці вправи не потребують особливої кмітливості) та другий тип – задачі над невеликими числами, але такі, що базуються на певній кмітливості і винахідливості. Наприклад: "десять яблук розділити між двома дівчатками так, щоб у однієї з них було на 1 яблуко більше" [92].

На задачі, які вимагають підвищеної розумової активності учнів, а отже є і засобом розвитку мислення, педагог радив звернути увагу й при початковому навчанні арифметики[3]. Їх можна пропонувати уже після проходження вивчення чисел першої сотні (що поєднується з вивченням додавання і віднімання чисел будь-якої величини в межах 100, а також з множенням та діленням на однозначні числа) [183, с. 12]. Задачі доцільно поєднувати в групи за зростанням рівня складності: щоб на основі способу розв'язування попередньої задачі намічався шлях розв'язування наступної, більш складної задачі.

---

[2] Завданням початкового домашнього навчання було отримання знань, необхідних у підготовчому класі гімназій та реальних училищ. З арифметики діти повинні були навчитись рахунку до 1000, а також додавання і віднімання у межах 1000 [289, с. 20]

[3] Мова йде про підготовчі класи гімназій та реальних училищ, а також вивчення арифметики у нижчих навчальних закладах – однокласних та двокласних початкових училищах.

Головними у способі розв'язування є не арифметичні дії, а розумові прийоми – аналіз, синтез, порівняння тощо. Розглянемо приклад такої групи задач.

Перша задача. Один хлопчик мав на 12 горіхів більше першого: він віддав другому 6 горіхів; у кого і на скільки більше тепер горіхів?

Друга задача. Один хлопчик має на 22 горіхи більше ніж інший; він дає другому 6; на скільки горіхів перший буде мати більше другого?

Третя задача. Перший хлопчик має на 10 горіхів більше другого; на скільки він буде мати більше другого, якщо отримає від нього 6 горіхів?

Четверта задача. У двох пастухів були вівці; перший з них каже іншому: "Дай мені одну вівцю і у мене буде в двічі більше, ніж у тебе"; другий говорить першому: "Дай мені одну і тоді у нас буде порівну". Скільки овець у кожного пастуха?

Автор наводить розв'язання четвертої, найбільш складної задачі: "Якщо б перший віддав другому одну вівцю, то в них було б порівну, – на основі попередніх задач випливає, що *у першого пастуха було на 2 вівці більше ніж у другого*; якщо після цього другий дасть першому одну вівцю, то тоді (на основі попередніх задач) *у першого буде на 4 вівці більше ніж у другого*, але за умовою *у нього буде в двічі більше, ніж у другого*. Звідки випливає, що у першого стало 8 овець, а в другого – 4. На початку у першого було 7, а в другого – 5" [183, с. 13-14].

Він також показав (на вище приведеному прикладі), що виходячи із будь-якої задачі, можна скласти низку підготовчих до неї задач, і навпаки – шляхом послідовних узагальнень низки задач прийти до більш складних. Даний методичний підхід автора до розв'язування нестандартних арифметичних задач подібний до методу навчання розв'язування стандартних задач, що дістав в сучасній методиці назву "метод поступового ускладнення задач".

Зазначимо, що розв'язання всіх чотирьох задач передбачає використання правил зміни різниці двох чисел від зміни на

– ідеї повторювального курсу математики, розвинутої в проекті плану з математики Київського фізико-математичного товариства.

Доцільним буде використання в сучасній школі запропоновані В. Єрмаковим методи й засоби розвитку кмітливості учнів, мислення (при вивченні звичайних дробів у курсі "Математика" 5-6 класах), прийомів запам'ятовування виведення формул (при вивченні алгебри в основній та старшій школі), використання завдань, що сприяють свідомому запам'ятовуванню теорем, суті їх доведень та зв'язків між теоремами (при вивченні геометрії в основній та старшій школі).

Книга допоможе розширити систему знань викладачів, вчителів та студентів про умови і фактори розвитку шкільної математичної освіти в кінці XIX – на початку XX ст., а також простежити генезис педагогічних та методико-математичних ідей, висвітлених у доповідях, працях членів Товариства, навчальних програмах та їх проектах з шкільної математики, підручниках та методичних посібниках видатних вчених досліджуваного періоду.

теоретичний матеріал для поглибленого вивчення математики, теоретичний виклад методології питань, що вивчаються у шкільному курсі (розширення поняття про число, теорія площ) та ін.; зроблено внесок в удосконалення організації навчально-пізнавальної діяльності учнів – обґрунтовані словесний, наочний, лабораторний, конкретно-індуктивний та абстрактно-дедуктивний методи.

Науково-педагогічний доробок Київського фізико-математичного товариства є важливим для сьогодення. Пріоритетними напрями впровадження педагогічних ідей та досвіду Товариства з розвитку шкільної математичної освіти у сучасну практику можна вважати вивчення методико-математичної спадщини Київського фізико-математичного товариства викладачами фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів, студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл; розвиток і актуалізацію педагогічних ідей учасників Товариства у сучасних методичних пошуках, зокрема:

– теорії вивчення іменованих чисел, розробленої Ф. Мацоном (1890 р.), при можливій реалізації міжпредметного зв'язку (математики і фізики) за лінією впровадження єдиного підходу до запису дій над значеннями величин;

– теорії вивчення наближених обчислень, розробленої В. Єрмаковим (1892 р.), при розробці нової концепції навчання даної теми у 9 класі загальноосвітньої школи;

– теорії розв'язування невизначених рівнянь 1-го степеня в цілих числах (на основі теорії визначників), розробленої Д. Єфремовим (1890 р.), в старшій ланці загальноосвітньої школи у класах з поглибленим вивченням математики (спецкурси за вибором);

– теорії вивчення неевклідової геометрії в середній школі, розробленої П. Долгушиним (1912 р.), в старшій ланці загальноосвітньої школи у класах з поглибленим вивченням математики (спецкурси за вибором);

кілька одиниць зменшуваного і від'ємника. Четверта задача – комбінована належить до так званих типових задач (містить підзадачу типу "знаходження чисел за їх різницею і кратним відношенням"). На необхідності навчати розв'язувати у 5-6 класах текстові задачі арифметичними способами наголошується у підручнику З.І. Слєпкань [254], оскільки такі способи "безпосередньо готують до усвідомлення методу рівнянь" [254, с. 99].

З типовими задачами без виділення їх типів учні сучасної школи починають ознайомлюватись у початкових класах (3-4 класи), зокрема, вчаться розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження середнього пропорційного, на знаходження числа за двома різницями, на рух [42, с. 279].

Учні розширюють і поглиблюють свої знання про типові задачі та їх розв'язування у 5-6 класах (починаючи з вивчення розділу "Натуральні числа"). Підручники для цих класів містять ще й такі типи задач, як задачі на заміну, знаходження чисел за їх сумою (різницею) і кратним відношенням, знаходження чисел за їх сумою і різницею[4]. У чинних підручниках з математики для 5-6 класів зустрічаються два підходи до розв'язування типових задач. Так, у підручнику Г. П. Бевза та В. Г. Бевз [23] типові задачі (нових перелічених типів), що розв'язуються арифметичним способом, включені у рубрику "Вправи для повторення" (№№ 46, 81-83, 192, 270, 304, 370). Увага авторів більше зосереджена на формування умінь учнів розв'язувати арифметичні задачі методом складання рівнянь. У § 15 "Рівняння" розглядаються зразки розв'язування арифметичних задач алгебраїчним методом та запропоновані для самостійного розв'язування: №№ 725-727, 735-742. Аналогічний підхід зустрічаємо у підручнику А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якора [162]. Типові задачі, що розв'язуються арифметичним методом (на повторення вивченого у молодших

---

[4] Надалі будемо розглядати задачі перелічених зараз типів та тип задачі на знаходження числа за двома різницями – які можуть розв'язуватись способом складання системи рівняннь з двома невідомими.

класах), пропонуються до ознайомлення із методом рівнянь під номерами: 242, 243, 456. У пункті 17 після вивчення ділення натуральних чисел, наводяться приклади розв'язування типових задач методом складання рівнянь та пропонуються розв'язати самостійно №№ 508 – 521. Аналогічні задачі зустрічаються в обох підручниках і при вивченні звичайних та десяткових дробів.

У підручнику Г. Янченко, В. Кравчука [120] арифметичному методу розв'язування типових задач приділяється більша увага, ніж у попередніх. Так, у рубриці "Вправи для повторення" запропоновані задачі №№ 102, 103, 121, 191, 268-271. У рубриці "Вправи для виконання" – №№ 385-387. Крім цього, у підручнику спеціально виділена тема "Текстові задачі" (п.19), де розглядаються зразки розв'язування вказаних типів задач із визначенням їх типів, та пропонується розв'язати №№ 461-468, 482-489. Розв'язування типових задач методом складання рівняння заплановано у 6 класі після вивчення дій над раціональними числами [121].

У згаданих шкільних підручниках пропонуються вправи на знаходження зміни результату арифметичної дії від зміни її компонентів. Запропоновані й текстові задачі, математичний зміст яких відображає дану залежність: [23] – №№ 85, 192, 262; [120] – №№ 102, 121, 355, 482, 486. Проте в цілому задачі, подібні до запропонованих В. П. Єрмаковим, розглядають дві ситуації: перекладання предметів із більшою їх кількістю до предметів з меншою кількістю для отримання рівності між сукупностями, або ж порушення рівності між сукупностями перекладанням предметів із однієї з них до іншої.

Таким чином, запропонована В. П. Єрмаковим система задач, що реалізує завдання навчання математики – розвиток мислення учнів, цілком відповідає навчальному матеріалу чинних підручників з математики 5-их класів, а методичний підхід автора щодо використання системи задач з поступовим ускладненням їх умови (або включенням більшої кількості випадків на перекладання) сприятиме кращому усвідомленню характерних ознак задач певного типу та знаходженню відповідного раціонального способу їх розв'язування.

наукових колах, обговорення на засіданнях Товариства й висвітлення у пресі аналізу вітчизняних та закордонних проектів програм, підручників з математики для різних типів середніх навчальних закладів, читання лекцій), навчально-методичну роботу з реалізації цих ідей (створення Товариством проекту програми з математики для чоловічих гімназій (1907), написання підручників та навчальних посібників з арифметики, алгебри, геометрії, впровадження передових методичних ідей у навчальний процес), а також науково-педагогічну роботу (доповіді, педагогічні праці й статті з різноманітних проблем шкільної математичної освіти). Учасниками Товариства В. Єрмаковим, М. Володкевичем, О. Астрябом, А. Білімовичем, К. Щербиною, М. Соколовим, П. Долгушиним, Е. Шпачинським, Г. Флоринським, І. Александровим, П. Матковським, М. Оглобліним, Ф. Мацоном й ін. найбільш повно для того часу розкрито мету (поєднання навчальних, виховних, розвивальних цілей, зв'язок з ідеалом навчання) та завдання навчання математики (розвиток мислення і пам'яті учнів, загальний розвиток, виховання естетичних почуттів, взаємодопомоги й товариськості, зв'язок математики з культурою українського народу); удосконалено виклад конкретного традиційного матеріалу шкільної математики на основі підвищення науковості викладу (теорія та методика навчання систематичного курсу звичайних дробів), виділення пропедевтичних курсів окремих тем або ж предмету у цілому (теорія вивчення дій над одночленами та багаточленами, наочна геометрія), нової методології ("методу пар", при введенні від'ємних чисел, "принципу граничного переходу", при визначенні довжини кола та площі круга, аналітичного й синтетичного методу при доведені теорем та розв'язувані задач), обґрунтування й застосування способів раціоналізації розв'язування задач, вилучення схоластики, реалізації принципу наочності при вивченні чисел (геометрична інтерпретація чисел); запропоновано й розроблено теорії, які доповнювали зміст традиційного курсу (неевклідова геометрія, розширення змісту дій над іменованими числами, наближені обчислення), фізико-математичних наук та шкільного викладання математики й фізики – семінарська форма роботи); просвітницький (видавництво друкованого органу та висвітлення праць на сторінках періодичних видань). II. *"Активізація культурно-просвітницької та доброчинної діяльності (1891-1901 рр.)*". Розгортається просвітницька (читання популярних лекцій) та благодійницька (взаємозв'язок з різними благодійними фондами) діяльності, розширюється проблематика та форми наукового й педагогічного напрямів (активізується участь у роботі наукових вітчизняних й закордонних з'їздів та конгресів).

III. *"Активізація досліджень, спрямованих на реформування шкільної математичної освіти (1902-1908 рр.)".* Значна кількість доповідей присвячується аналізу результатів проведених реформ з удосконалення шкільної математики в Росії, Європі, Америці, утверджується комісійна форма роботи (проводиться плідна робота педагогічної комісії з розробки проекту плану з математики для чоловічих гімназій – "Київського проекту").

IV. *"Активізація науково-дослідної діяльності на основі державної підтримки (1909-1913 рр.)". З*а рахунок субсидій Міністерства народної освіти формується науково-дослідна база, проводиться й видається низка досліджень, зокрема з фізики; обговорюються питання шкільного викладання математики, що реалізують ідеї "Київського проекту".

V. *"Активізація громадянської діяльності членів Товариства (1914-1916 рр.)".* Надається допомога військовим та населенню в оборонній й медично-технічній галузях; низька активність щодо обговорення наукових та освітніх проблем.

VI. *"Період занепаду діяльності Товариства (1917-1919 рр.)".* Наукова й педагогічна діяльність зі значними перервами проводиться у формі семінарів; припинення роботи.

Товариство проводило значну культурно-просвітницьку роботу з втілення прогресивних методичних ідей (функціональної залежності та розвитку поняття про число, елементів вищої математики, пропедевтичного курсу геометрії, наближених обчислень тощо) в середню школу (дискусії у

При вивченні звичайних дробів вчений радить включити до задачників групу задач на розкладання дробів на дроби, що мають знаменник менший за даний, та розглядати кілька способів розв'язання. Наприклад, розглянемо задачу: "11 яблук поділили порівну на 12 хлопчиків, не розрізаючи кожного яблука на 12 частин".

1спосіб. *Беремо 8 яблук і ділимо кожне на 3 частини, отримуємо по* $\frac{2}{3}$ *на кожного хлопчика, останні 3 яблука ділимо на 4 частини, отримуємо по* $\frac{1}{4}$*, звідси слідує, що від першого ділення отримуємо 24 куски, а від другого – дванадцять, і тому кожний отримує по* $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$*, що дорівнює* $\frac{11}{12}$.

2 спосіб. *6 яблук ділимо кожне на 2 частини, отримуємо на кожного по* $\frac{1}{2}$*, 3 яблука – на 4 частини і на кожного отримуємо по* $\frac{1}{4}$ *і 2 яблука – на 6 частин, на кожного отримуємо по* $\frac{1}{6}$*, тому кожний хлопчик отримає* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$.

Вчений пропонує аналогічні вправи виконувати над невеликими числами [183]. На нашу думку, подібні задачі в певній мірі сприятимуть не тільки розвитку логічного, але і практичного мислення, а також таких якостей останнього як підприємництво[5], економність[6], розрахунковість[7]. Ці якості є

За визначанням Р.С.Немова [172, с. 370],[5] Підприємництво виявляється в тому, що в складній життєвій ситуації людина в змозі знаходити декілька розв'язань поставленої проблеми.

[6] Економність – якість практичного розуму, що полягає в тому, що людина, яка володіє даною якістю, в змозі знайти такий спосіб дії, який з найменшими затратами й витратами приведе до потрібного результату.

[7] Розрахунковість – виявляється в умінні заглядати далеко вперед, передбачаючи наслідки тих або інших розв'язань і дій, точно визначати результат і оцінювати чого він може коштувати.

особливо цінними на сьогодні. Легко помітити, що навчальною функцією задач наведеного типу є сприяння усвідомленню учнями цілісності поняття звичайного дробу (під ним будемо розуміти уявлення про дріб одночасно як частини цілого і частки від ділення двох натуральних чисел). Автори чинних підручників з математики 5-6 – их класів використовують певний підхід щодо розв'язування цього завдання. Так, у підручнику Г. Янченко, В. Кравчука [120] формується уявлення про дріб одночасно як кілька частин цілого та частку від ділення двох чисел, спираючись на інтуїцію та практичний досвід учнів (п.27). Автори розглядають задачі про поділ предметів на рівні частини (коли ділене не ділиться націло на дільник): задача (с.158-159), №№ 703, 704. За підручником А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якора [162] представлення дробу у вигляді частки двох чисел розглядається після вивчення додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками (п. 25). У рубриці "Задача від мудрої сови" (сюди входять задачі на кмітливість і винахідливість) запропоновано задачу № 791, математичною суттю якої є розкладання дробу на дроби, що мають знаменники менші за даний. Проте дані в умовах розглянутих задач підібрані таким чином, що зумовлюють один спосіб розв'язування. У підручнику Г. П. Бевза та В. Г. Бевз [148] цілісність поняття дробу формується поступово. При введенні поняття звичайного дробу як частки від ділення двох чисел (§8), використовується формальний підхід – частку двох чисел (з дільником рівним 10) учні уже вміють записувати у вигляді десяткового дробу, а десятковий дріб, у свою чергу, представляти звичайним дробом. Робиться узагальнення, що усі звичайні дроби є часткою від ділення двох чисел, де ділене є чисельником дробу, а дільник – знаменником. У підручнику проводиться також аналогія між основною властивістю частки та основною властивістю дробу. Розглянуті підручники містять практичні вправи на запис дробу у вигляді частки та знаходження частки у вигляді дробу, а також розв'язування рівнянь, спрощення виразів, де є необхідність представлення частки у вигляді дробу, або навпаки.

ПІСЛЯМОВА

Вагомий внесок у розвиток шкільної математичної освіти в Україні періоду кінця XIX – початку XX століття зробило Київське фізико-математичне товариство (1890-1919 рр.). Його заснування (1889) та діяльність зумовлені низкою соціально-економічних (розвиток капіталізму в Російській імперії в кінці XIX ст., становлення університетів як осередків науково-дослідної діяльності, національно обмежувальна, русифікаторська політика самодержавства), організаційно-наукових (можливості створення наукових товариств за статутами російських імператорських університетів (1863, 1884 рр.), потреба науковців у співпраці, спілкуванні зі спеціалістами інших галузей науки, координації досліджень, недостатнє державне фінансування розвитку науки в Київському університеті), освітніх (релігійно-монархічний, станово-класовий характер загальноосвітньої школи, формально-логічне навчання шкільної математики) чинників.

Аналіз діяльності Київського фізико-математичного товариства (1889-1919) дозволив виділити шість періодів.

I. *"Початок діяльності (1889-1890 рр.)".* Визначаються напрями й форми роботи; активізуються науковий та педагогічний напрями (розробка й обговорення проблем з побудови курсів арифметики і алгебри середньої школи на основі ідеї розширення поняття про число; запропонувало теми для поглибленого вивчення курсу шкільної алгебри.

Для розвитку змісту шкільної геометрії передбачались новації: заміна використання теорії границь при вивченні деяких тем курсу (визначення довжини кола, площі круга) на "принцип граничного переходу"; з'ясування ролі й місця інтуїції й логіки у викладанні геометрії; ознайомлення учнів з аналітичним і синтетичним методами доведення теорем та розв'язування задач; використання геометричних задач на побудову для знаходження умов рівності та подібності плоских фігур; зближення курсу шкільної геометрії з наукою геометрією шляхом доповнення курсу елементами неевклідової геометрії; обґрунтування теорії площ плоских фігур та ін.

Члени Товариства розв'язали проблему розкриття ролі й місця конкретно-індуктивного, абстрактно-дедуктивного, словесного, наочного, лабораторного методів навчання математики, особливостей викладання наочної геометрії у комерційному жіночому училищі.

У розділі дається порівняльний аналіз теоретичних положень та методичних підходів щодо вирішення окремих питань мети, завдань, змісту, методів здійснення математичної освіти у працях учасників Товариства та в сучасній педагогічній і навчально-методичній літературі.

Вважаємо, що задачі, запропоновані В. П. Єрмаковим, розширюватимуть і урізноманітнюватимуть систему вправ даного типу використану у сучасних підручниках. Враховуючи їх дидактичну цінність та узгодженість з навчальними завданнями теми "Звичайні дроби" курсу "Математика" (5-6 кл.), можна стверджувати про можливість їхнього використання сучасним вчителем.

Формування навичок запам'ятовування навчального матеріалу через ознайомлення учнів із прийомами запам'ятовування – одне із найважливіших завдань вчителя, вважав В. П. Єрмаков. Все це сприятиме розумовому розвитку та *розвитку пам'яті.*

Ще французький математик П. Ферма (1601-1665) висловив думку про необхідність раціонального запам'ятовування доведення математичних тверджень. Замість доведень формул і теорем, – стверджував вчений, – доцільно запам'ятовувати ідеї, що приводять до отримання необхідних формул. При відтворенні матеріалу наш мозок пригадує саме ці ідеї.

Аналогічну позицію відстоював і радянський математик Д. Мордухай-Болтовський (1876-1952): "Математику нема потреби утримувати в пам'яті все доведення теореми. Необхідно лише пам'ятати вихідний і кінцевий пункт і ідею доведення" [184, с. 10]. В. П. Єрмаков, на основі власного досвіду (навчання та викладацької діяльності), доходить подібних висновків – поверхове заучування формул веде до перевантаження пам'яті й не сприяє її розвитку, оскільки формули врешті-решт забуваються і, найчастіше, неможливо їх пригадати у найнеобхідніший момент. Він запропонував формувати уміння учнів свідомого запам'ятовування і пригадування формул (точніше процесу їх виведення).

Для цього варто складати і запам'ятовувати такі собі опорні схеми (у автора низку суджень, що використовується при виведенні формули), "намічаючи етапні пункти, за якими повинна слідувати думка" [95, с. 461]. Далі, при необхідності використання формули, пригадувати за даною схемою всі міркування для кожного конкретного прикладу. Наприклад, для розв'язування квадратного рівняння опорна схема може бути такою: "*якщо ми зуміємо перетворити квадратне рівняння таким чином, щоб в обох частинах стояли повні квадрати, помножені на постійні множники, то, добуваючи із обох частин корені квадратні, отримаємо рівняння першого степеня*" [95, с. 263].

Якщо ж заохочувати учнів до механічного заучування формул і правил, то це призведе до певних невиправних і негативних наслідків, оскільки звичка предметного заучування мимоволі переноситиметься і на запам'ятовування інших об'єктів при вивченні математики. Наприклад, при доведенні геометричних істин, створенні рисунка до задачі чи теореми. "Із зміною розміщення рисунка, позначень його елементів, учні можуть заплутатися у доведеннях, а найбільш спритний буде стверджувати, що доведення невірне і у підручнику воно не таке" [97].

Для відучування учнів від несвідомого запам'ятовування вчений радить:

– надавати кресленням різні положення і по різному позначати їх елементи;

привчати викладати лише "головні судження" доведення без креслення (стиснені і скорочені доведення, що при потребі можуть розгортатись);

– після проходження певного розділу з'ясувати порядок вивчених теорем з пригадуванням скорочених доведень;

– з'ясувати існування іншої послідовності теорем та як впливатиме новий порядок на самі доведення.

На переконання В.П. Єрмакова, математика, яка буде викладатись в указаному напрямку, служитиме могутнім засобом інтелектуального розвитку. Запропонований прийом запам'ятовування та відтворення матеріалу є раціональним і з точки зору сучасної психології, оскільки логічне запам'ятовування "спирається на розумінні матеріалу у процесі дії з ним" і "тільки діючи з матеріалом, ми запам'ятовуємо його", а пригадування – складна розумова діяльність, "яка передбачає поетапне

прогресивних ідей (введення до шкільного курсу математики елементів диференціального й інтегрального числення, аналітичної геометрії, поняття функції, наближених обчислень тощо) у справі удосконалення програм з математики, а також до реалізації цих ідей у тогочасних підручниках як у Російській імперії, так і за кордоном. Товариством був створений проект плану з математики для чоловічих гімназій ("Київський проект"), методичні ідеї якого знайшли подальше відображення у підручниках з математики Д. Граве, К. Лебединцева, О. Астряба, П. Долгушина та ін.

У працях діячів Київського фізико-математичного товариства запропоновано два підходи до визначення мети навчання математики: як поєднання навчальних, виховних й розвивальних цілей та через здійснення зв'язку з ідеалом виховання – розвитком та найбільш повною реалізацією усіх здібностей дитини; приділено увагу питанням завдань шкільної математики: розвитку мислення і пам'яті учнів, загальному розвитку, вихованню естетичних почуттів, взаємодопомоги й товариськості, зв'язку математики з культурою українського народу.

З проблем навчання арифметики була обґрунтована необхідність змін у викладанні іменованих чисел; зроблений критичний аналіз тогочасної методики розв'язування арифметичних задач за типами; удосконалена логічна будова окремих відділів курсу арифметики; розроблена методика викладання систематичного курсу дробів та ін.

Для удосконалення змісту шкільної алгебри члени Товариства пропонували вироблення в учнів навичок користування прийомами раціоналізації розв'язування задач на обчислення, перетворення найпростіших алгебраїчних виразів та знаходження їх значення при додатних та від'ємних значеннях змінних, впровадження пропедевтики з виконання дій над одночленами й багаточленами та ін. Київське фізико-математичне товариство раціонально для того часу розв'язало питання впровадження наближених обчислень у шкільну практику; удосконалило таблиці логарифмів; розкрило питання них істин, або ж оцінити істини на основі фактів, що виводяться із досліду та спостереження); лекційний метод (розповідь) із прийомами евристичного характеру [137, с 212-218].

Широко впроваджувались нові методи і у початкову школу. Так, у часописі "Черниговская земская неделя" у статті за підписом Сем. Семенов "Народная школа и сельское хозяйство" [249] ставиться питання: "Чи можливо в народній школі засобами математики готувати вихованців до свідомого життя не порушуючи загальноосвітнього характеру предмету?".

На думку автора, вирішення полягає в тому, що арифметичні задачі мають відображати те оточуюче середовище в якому живе учень і з яким буде пов'язана його подальша післяшкільна діяльність. Такий підхід при вивченні арифметики сприятиме збудженню інтересу до предмета, а отже і підвищенню активності учнів.

Наведемо для прикладу сюжети декількох задач, запропонованих автором: "За скільки годин буде виорана десятина ниви, якщо орач буде брати шари в 4 вершка, в 6 вершків?", "Зважте фунт зерен, дайте всьому класу підрахувати кількість їх в фунті, потім вкажіть яка площа необхідна рослині для свого росту і обчисліть скільки зерна потрібно висіяти на десятину і від кількості перейдіть до маси", "…дайте учням проростити ці зерна і зробіть поправку до попереднього обчислення на схожість зерен" і т.д. [249].

Самодіяльність учнів, яку автор рекомендує запроваджувати при "визначенні кількості зерен в фунті, визначенні схожості, зважуванні денної видачі соломи, сіна, надою молока і т.д." – приклади використання індуктивно-лабораторного методу в навчанні арифметики, що вважався серйозним досягнення нового століття.

Висновки до другого розділу

Учасники Товариства уважно ставились до нових

відтворення всіх обставин та умов, за яких відбувається процес запам'ятовування" [143, с. 189-190].

Аналогічні міркування щодо формування в учнів зручного і економного способу запам'ятовування доведень теорем, ідею якого розвинув В. Єрмаков, детально викладені в посібнику В. М. Осинської [184]. Даний спосіб грунтується на формуванні умінь виділяти опорні пункти у доведенні теореми, запам'ятовувати саму суть доведення, і від згорнутих думок – опорних пунктів переходити до розгорнутого доведення.

Як доводить педагог Я. І. Груденов [66], прийоми активної розумової діяльності над матеріалом є одночасно і прийомами розуміння і запам'ятовування. Рекомендації, запропоновані В. Єрмаковим за своєю суттю відповідають і розробленим та науково обгрунтованим сучасними психологами прийомам розумової діяльності: *прийому реконструкції*, *прийому мисленого складання плану*, *прийому відповідності*, *прийому прогнозування*.

Зазначимо, що сучасний вчитель математики має використовувати на своїх уроках прийоми запам'ятовування двох основних напрямів: мнемотехніку (методи, в основі яких лежить вербально-логічне мислення) та ейдетику (методи, що базуються на конкретно-образному мисленні). Ці методи активно пропагуються у наш час на сторінках журналу "Математика в школі" [221].

М.М. Володкевич у праці [56] радив педагогам враховувати і розвивати закладене в учнів *відчуття любові і симпатії до природи*, бо через нього зміцнюється інтерес до науки. Ця любов переноситься і на людину, як на складову її частину. Відчуття задоволення охоплюють учня, коли при вивченні предмета "відкриваються до цього невідомі співвідношення, стрункість і співрозмірність частин природи – той порядок, завдяки якому стародавні греки називали весь світ χοσμὸζ – краса" [56, с. 52,53]. Для цього, на думку М. М Володкевича, традиційні уроки з геометрії необхідно урізноманітнювати такою формою роботи, як практичні заняття, які б проводились і на місцевості.

Належну увагу В.П. Єрмаков приділяв *розвитку* в учнів *почуття товариськості та взаємодопомоги*: "в наших школах намагаються, навпаки, розвивати дух суперництва, щоб одні учні відрізнялись від інших" [183, с. 10]. Вчений рекомендував для підвищення рівня знань малоуспішного учня (якщо вчитель не може приділяти йому достатньо уваги) доручити його для допомоги іншому учню, найбільш успішному.

Ознайомлення учнів з елементами народної математики в процесі навчання предмета сприятиме, на думку К. М. Щербини, привчанню дітей уважно, з інтересом ставитись до оточення, розвитку їх пізнавальної активності, усвідомленню ними глибокого зв’язку математичних знань з культурою українського народу. В 1893 році автор видає працю "Опыт программы для сбора ведомостей по народной математике", в якій підкреслюється, що народна математика дає незамінний матеріал для історії математики в індуктивний період її розвитку. За словами Л. Н. Граціанської, програма К.М. Щербини є систематизацією і деталізацією раніше відомої програми із збирання народних математичних відомостей російського вченого В. В. Бобиніна (1883). Крім того, Костянтин Мойсейович надав їй українського колориту [64, с. 87]. Питання використання народних математичних знань на уроках математики на сьогоднішній день актуальні і цікаві, про це свідчить дослідження педагогів сучасності [85].

Одними із важливих виховних та розвивальних завдань сучасної шкільної математичної освіти є виховання в учнів культури мислення, винахідливості, естетичних почуттів, почуття патріотизму, наукового світогляду, інтелектуальний розвиток особистості [230]. Цим питанням присвячені роботи методистів і педагогів: О. Я. Хінчина, А. Г. Конфоровича, Л. М. Лоповок, І. Ф. Тесленка, Г. П. Бевза, З. І. Слєпкань, В. М. Осинської, Т. М. Хмари, Я. І. Груденова, Л. Ф. Пічуріна та ін. У їхніх працях прослідковуються ідеї учасників Київського фізико-математичного товариства щодо розвитку і виховання особистості під час навчання математики.

	систематичний курс арифметики.
II ступінь 4-7 класи гімназії	Робота логічного характетру з переважанням дедуктивних міркувань. Вивчаються систематичні курси: алгебра, геометрія, тригонометрія.
III ступінь 8 випускний клас гімназії (повторювальний курс)	Робота "філософського" характеру. Приведення до системи предмета, що викладався упродовж декількох років, з необхідним повторенням, доповненням і узагальненням, звернення уваги на обґрунтування і розвиток математичних понять та на методологію.

Прогресивні погляди діячів Київського фізико-математичного товариства стосовно проблем методів навчання математики, як і інших передових вчених та педагогів Російської імперії: С. І. Шохор-Троцького (запропонував метод доцільних задач), В. Мрочека та Ф. Філіпповича (дали обгрунтування лабораторного методу навчання з погляду психофізичної теорії ручної праці), вплинули на характер навчання математики у загальноосвітніх закладах країни. Помітною стала тенденція відходу від формально-лекційного викладання і, натомість, створення умов для самостійних пошуків учнями знань, самостійної мислительної роботи при належній допомозі вчителя, застосування нових методів та форм навчання, доцільність яких обґрунтовувалась експериментальною педагогікою та психологією. Так, викладач математики Імператорської Александрівської київської гімназії В. М. Іванов у статті "Математика і середня школа" (1913 р.) характеризує методи, які застосовували у практиці вчителі гімназії: евристичний (учням даються питання, що наводять на відповідь, висновок, відкриття); генетичний (розглядається автором як колективна форма роботи, де кожен учень самостійно виконував навідні вказівки вчителя, одночасно обмінюючись судженнями і висновками з даного питання з іншими учнями)[10]; дослідний (лабораторний) (дозволяє з’ясувати прикладний бік математич-

---

[10] У “Педагогіці математики” В.Мрочека і Ф.Філліпповича (1910 р.) генетичний метод розглядається як. особливий вид синтезу, дає картину розвитку даної галузі знань (корисний на початковому ступені навчання)

лабораторних прийомів. Другий концентр (13-16 років) мав охоплювати основний курс алгебри, систематичний курс геометрії з початками тригонометрії. На цьому етапі пропонувалось поступово привчати школярів до дедуктивного методу мислення. Проте означення і правила повинні продовжуватись розроблятись конкретно-індуктивним методом. Третій концентр (16-18 років) мав присвячуватись елементам аналітичної геометрії, диференціального числення та систематичному повторенню усього пройденого курсу математики. В процесі засвоєння нових понять, означень і правил, варто, на думку вченого, застосовувати конкретно-індуктивний метод, проте деякі відомі істини, що раніше набувались індуктивним шляхом (наприклад, основні властивості дій над числами) доводяться дедуктивно. Пізніше, у праці "Вступ до сучасної методики математики" (1925), вчений відніс до конкретно-індуктивного методу як його часткових випадків: лабораторний та трудовий [261, с. 54-55]. У сучасній методиці математики конкретно-індуктивний та абстрактно дедуктивний методи навчання визначаються за К. Лебединцевим, реалізовується й вказаний педагогом принцип застосування цих методів на певному ступені навчання математики.

Доцільність використання конкретно-індуктивного та абстрактно-дедуктивного методів у залежності від рівня розумового розвитку (обгрунтована К.Лебединцевим) відповідає і характеру навчальної роботи у певному концентрі, що відображено у "Проекте программы по математике для мужских гимназий" (1907 р.), розробленого Київським фізико-математичним товариством (див. таблицю 2.2).

Таблиця 2.2

Ступені складності навчання математики в загальноосвітній школі за концентрами, відображені у "Київському проекті"

Класи	**Особливості навчальної роботи**
I ступінь Підготовчий – III класи гімназії	Переважає робота інтуїтивного характеру (безпосереднє бачення). Вивчаються пропедевтичні курси арифметики, алгебри, геометрії, а також

2.3. Проблема змісту навчання шкільних математичних дисциплін у працях членів Київського фізико-математичного товариства

2.3.1. Спадщина Київського фізико-математичного товариства з удосконалення змісту арифметики

Проблеми змісту навчання арифметики посідали одне з найважливіших місць в діяльності Київського фізико-математичного товариства. Переважну більшість доповідей і повідомлень виголосили викладачі київських середніх навчальних закладів з таких тем курсу:

– Викладання теорії іменованих величин (Ф. Ю. Мацон);

– Типізація задач в курсі арифметики (М. П. Соколов);

– Числа та дії над ними (П. О. Долгушин, Л. Д. Ханокадопуло, К. М. Щербина);

– Загальнометодичні питання вивчення арифметики (В. П. Єрмаков);

– Теорія неперервних (ланцюгових) дробів (П. О. Долгушин, М. П. Соколов, Н. В. Оглоблін).

Учасниками Товариства з'ясовані недоліки викладання того чи іншого відділу (теми) курсу та запропоновані нові підходи в напрямку підвищення науковості викладу матеріалу, його педагогічної та практичної доцільності, відповідності психологічним особливостям певної вікової групи учнів.

Проаналізуємо найгрунтовніше розроблені питання змісту курсу арифметики, що розглядались на засіданнях Товариства.

Із доповіддю "Об именованных числах" виступив на засіданні Товариства 17 травня 1890 р. викладач фізики та керівник Київського технічного залізничного училища Ф. Ю. Мацон.

Дещо раніше, в журналі "Вестник опытной физики и элементарной математики" за 1888-1889 рр. була надрукована його стаття "Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов" [153 – 160], на яку робить посилання редактор журналу Е. К. Шпачинський при огляді звітів засідань Київського фізико-математичного товариства і, зокрема, доповіді Ф. Мацона [298]. Ця праця автора з невеликими змінами видається й окремим примірником "Именованные величины в школьном преподавании и историческое развитие учения о них" (К., 1890).

Проблема, яку розглядає автор, полягала в суперечності між науковими положеннями "Теорії розмірів" у фізиці з одного боку, за якою "іменовані величини (іменовані числа) підлягають будь-якого роду діям і вільно перемножаються й діляться, при чому отримуються величини нових найменувань" [153, с. 146] та загального твердження, що давалось в систематичному курсі іменованих чисел в арифметиці загальноосвітньої школи, про неможливість множення та ділення різнорідних іменованих чисел – з іншого.

Зміст дій над іменованими числами в шкільному курсі арифметики був такий, як і над числами абстрактними, саме тому й існували згадані обмеження. Ф. Мацон пропонує розширити поняття "дії над іменованими числами" і розуміти під деякими випадками запису множення й ділення іменованих чисел тотожні перетворення виразів, що відображають відомі геометричні або фізичні закони.

Автор доповіді обґрунтовує доцільність такого підходу досить різнобічно: розглядає аналогію між діями над іменованими числами і алгебраїчними перетвореннями виразів (що є підтвердженням його доступності для розуміння учнями); показує несуперечливість науковій теорії, що існувала в фізиці (представники – проф. Ж. Фур'є, Г. Гемгольц та ін.) [160, с. 223]; проводить історичний аналіз розвитку наукових основ вчення

допомогою лабораторного методу. Так, для знаходження формул площ плоских фігур (паралелограма, трикутника, трапеції) проводилось дослідження, в ході якого необхідно було зробити малюнок даної фігури, позначити на ньому відомі елементи та записати відповідні їм дані величини, вирізати дану фігуру із паперу, розрізати її на частини (або вирізати рівні їй фігури) так, щоб, переставляючи їх, можна було скласти іншу фігуру – рівновелику з даною (або таку, що складається з кількох однакових даних фігур), формула площі якої уже відома. Виражаючи величини – компоненти відомої формули площі через величини даної фігури, учениці робили висновок – формулювали "правило" обчислення площі даної фігури та записували знайдену формулу площі. Усі кроки дослідження детально описувались, ілюструвався результат перетворення даної фігури у рівноскладену їй (чи доповнення фігури рівними їй частинами до фігури, площа якої відома) за допомогою аплікації.

До практичних робіт з наочної геометрії відносились також роботи на знаходження об'ємів многогранників та тіл обертання, роботи на місцевості (вимірювання недоступної відстані, вимірювання висоти дерева, вимірювання висоти пагорба тощо) (див. Додаток И).

Необхідність використання у методиці математики нового методу, що ґрунтується не на "пасивному сприйманні тверджень зі слів викладача, а на самостійній роботі учнів і самостійних висновках під керівництвом вчителя" [134, с. 15] доводив і дійсний учасник Київського фізико-математичного товариства К. Ф. Лебединцев у праці "Метод обучения математики в старой и новой школе" (1914). Метод, який за К. Лебединцевим дістав назву конкретно-індуктивний, передбачав як самостійне спостереження та аналіз властивостей математичних об'єктів, так і вивчення предметів та явищ дійсності, за допомогою яких пізнаються математичні істини. К. Ф. Лебединцев пропонував поділити весь курс середньої школи на концентри, в кожному з яких метод викладання відповідав би розумовому розвитку учнів. Так, перший концентр (10-13 років) мав включати арифметику, початкові курси геометрії та алгебри. Нові поняття вивчаються конкретно-індуктивним шляхом з широким використанням понять. Найбільш раціональним методом за М. Володкевичем є метод "в міру користуватись і словесним описом, і наочними посібниками, і безпосереднім виченням природи" [57, с. 57].

Щоб наблизитись до більш високої мети, вчений пропонує покласти в основу навчання і виховання *самодіяльність* учнів, "оскільки лише самодіяльність гарантує розвиток всіх духовних сил, міцне і зрозуміле засвоєння знань і вміння ними користуватись" [57, с. 57]. В розумовій області самодіяльність сприятиме розвитку здібностей правильно міркувати, тобто умінні бачити факти і правильно встановлювати зв'язки між ними. В практичній області – в умінні виконувати "мускульну" роботу. Мускульне відчуття (кінестетичне) і відчуття осязання (тактильне) такі ж необхідні і навіть найбільш важливі засоби пізнання світу, ніж відчуття зору і слуху. Лише досліджуючи предмет руками, можна скласти про нього чітке уявлення, і тільки склавши собі запас чуттєвих образів та привчившись до конкретного мислення, можна перейти до мислення абстрактного. Така самостійна діяльність дитини – суть *лабораторного методу* навчання [57, с. 64]. У доповіді "Обґрунтування пропедевтичного курсу геометрії" (1909) на засіданні Товариства М. Володкевич розвиває свої теоретичні принципи по відношенню до навчання геометрії, реалізацію яких, як було висвітлено вище, здійснив учасник Товариства О. М. Астряб у праці "Наглядная геометрия" (1909).

Зазначимо, що курс "Наочна геометрія" О. М. Астряб почав викладати ще з 1906 року, працюючи у приватному жіночому комерційному училищі М. М. Володкевича. Училище, директором якого був відомий педагог Микола Миколайович Володкевич, славилось на той час своїми прогресивними педагогічними поглядами. Так, наприклад, значне місце у системі уроків відводилось практичним заняттям учениць, зокрема, і з пропедевтичного курсу геометрії (I-III класи) – "Наочної геометрії".

До нашого часу збереглась підшивка практичних робіт з наочної геометрії (1909-1910 рр.) учениць О. Астряба [321], за якими можна простежити як відбувалось відкриття ученицями нових геометричних істин, а також самостійне їх застосування за

про іменовані числа, починаючи від античних часів і закінчуючи початком XVIII ст.

У дослідженні розвитку вчення про іменовані величини Ф. Ю. Мацоном з'ясовано, що Ф. Вієт (1540-1603) узагальнив існуюче до нього вчення про величини (починаючи від стародавніх греків). У працях вченого дія множення іменованих чисел та ділення різнорідних іменованих чисел мали дещо інший зміст від звичайних арифметичних операцій множення та ділення. Добуток двох іменованих величин він називає ductio (дукція – вести) на відміну від multiplicatio (множення звичайних чисел), а ділення двох різнорідних іменованих величин – applicatio (аплікація – прикласти), на відміну від звичайного ділення divisio [157, с. 83]. Кожна дія над іменованими числами таким чином підлягала геометричному трактуванню з використанням ідеї руху. У формулах (рівняннях) під символами величин він розумів самі величини, а не їх числові значення ("довжина помножена на ширину дає площу"), оскільки супроводжував останні вказівкою про їх рід, що втрачає сенс в протилежному випадку. Д. Валіс (1616-1703) у науковій праці "Загальна математика" (1657) заперечив Вієтівську теорію, при розв'язуванні рівнянь, знаходженні суми рядів він вказав на зручність використання абстрактних чисел.

Як намагався показати автор доповіді, цей прийом логічно випливає з теорії Вієта – якщо величини замінити відношенням цих величин до однорідної з ними одиниці.

Таким чином, обгрунтуванням правильності запису дій над значеннями величин, де поряд з числами записані і найменування, за теорією Ф. Ю. Мацона, є з'ясування змісту цих дій (арифметичного, геометричного, фізичного), що повинно відбуватись в порядку ознайомлення учнів з величинами (довжиною, площею, об'ємом, швидкістю та ін.).

Ознайомитись з теорією вивчення іменованих чисел за Ф. Ю. Мацоном пропонується у Додатку Ґ.

Теорія Ф. Ю. Мацона не набула поширення як в дореволюційний, так і в радянський часи. Відмінності радянської шкільної методики та теорії вивчення іменованих чисел полягали в запровадженні метричної системи мір, що значно спрощувало обчислення [297, с. 53]. З метою наближення шкільної арифметики до науки, було прийнято арифметичні операції виконувати лише над числами абстрактними. Така домовленість давала можливість ототожнити поняття "частки" і "відношення" (як це існує в науці арифметиці, на противагу попередньому трактуванню поняття "відношення" для абстрактних й іменованих чисел – як ділення на "вміщення") [286]. Ця традиція існує й донині, хоча були спроби її змінити. Так, наприклад, М. Б. Волович и Г. В. Шахбазян у статті "Учитывать потребности курса физики при изучении темы "Измерение геометрических величин"" [58], зокрема, пропонували прийняти в математиці умову можливості добутку числа й найменування для того, щоб тренувати учнів в операціях над найменуваннями. Це, на їх думку, дасть можливість не завчати співвідношення між різними одиницями вимірювання, а свідомо їх визначати, спираючись на логічні зв'язки між ними, а також обгрунтувати деякі геометричні твердження.

У сучасній школі учні мають справу з величинами найчастіше в курсах математики і фізики. Це одна із тем, на основі якої реалізуються міжпредметні зв'язки. Необхідною умовою "формування уявлень про різні скалярні і векторні величини" є дотримання "єдиного підходу до термінології та символіки, що стосується величин та їх вимірювань" [253, с. 321].

Як відомо, міжпредметні зв'язки пов'язані з інтеграцією і координацією знань, які взаємно доповнюються і сприяють формуванню в учнів єдиної картини світу, наукового світогляду.

У сучасних шкільних курсах математики, фізики, хімії прийнято єдиний підхід до запису величини – значення будь-якої величини складається з двох компонентів: числового значення і одиниці величини, сполучених дією множення. Проте, щодо запису дій над значеннями величин маємо два різні підходи.

Так, в шкільному курсі математики 1-4 класів, розв'язуючи арифметичні задачі, учні виконують дії лише над числовими значеннями величин, приписуючи найменування, взяте в дужки до результату дії. У 5-6 і в наступних класах при обчисленні значення величини за відомими формулами замість символів

знання (методи аналітичний, синтетичний, індуктивний, дедуктивний) і форми, в яких викладається навчальний матеріал (катехизисна (діалогічна) та акроматична (догматична)) і способи, які вчитель використовує при повідомленні знань (демонстрацій, наочний, абстрактний). При цьому вказувались особливості кожного методу, до уваги бралась їх виховна функція як сприяння розвитку пізнавального інтересу, спостережливості, навчальна – формуванню чітких і правильних уявлень і понять, контрольно-корегуюча функція – з'ясування ступеню розуміння матеріалу, розвиваюча – розвитку мислення дитини.

Певний внесок у з'ясування особливостей методів навчання, їх обгрунтування та зв'язку з віковим розвитком дитини зробили учасники Київського фізико-математичного товариства. Так, М. М. Володкевич проаналізував методи на відповідність їх найвищій меті – розвитку найбільшої кількості здібностей дитини (класифікація методів здійснюється за джерелом знань).

Словесний метод навчання, стверджував педагог, сприяє тренуванню пам'яті, інші ж здібності активізуються у незначній мірі. "Знання, що набуваються словесним методом, не мають зовсім, або мають дуже малу внутрішню цінність, не пов'язані з життєвими фактами і зовсім не сприяють удосконаленню людини" [57, с. 56].

Наочний метод полягає у показі натурального предмета або ж моделі чи рисунка. Але рисунок або модель – "сурогат" об'єкта – тренуються головним чином функції дитини, що пов'язані зі сприйманням. М. Володкевич зазначав, що ці два методи сприяють лише накопиченню відомостей незалежно від їх користі і застосування, не привчають учня до користування своїми знаннями.

Третій метод – натуральний (вивчення природи в натуральному вигляді), *формою навчальної діяльності*, де застосовується цей метод, є *екскурсії*. Недоліком при цьому є те, що природа являє нескінченну різноманітність фактів і їх комбінацій, але не надає нам окремих фактів в певній системі, між тим, порядок і система – необхідні умови чітких і зрозумілих випадку – існування площі прямокутника s, що є функцією величин, які повністю визначають прямокутник – довжини a і ширини b, виводить формулу (спосіб) знаходження площі прямокутника. Виведення формули зводиться до розв’язування диференціального рівняння у частинних похідних:

$$\frac{\partial^2\psi(s,b)}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial s_1}\frac{\partial s}{\partial s_2}+\frac{\partial\psi(s,b)}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial s_1\partial s_2}=0 \quad (1),$$

де $\psi(s,b)=a,$ при цьому попередньо робиться припущення, що прямокутник з площею $s=\varphi(a,b)$ розбито прямою, паралельною стороні b на два прямокутники, які мають площі $s_1=\varphi(a_1,b)$ та $s_2=\varphi(a_2,b)$ і $a=a_1+a_2$ (Додаток 3).

У сучасних підручниках з елементарної математики для педвузів (наприклад, Атанасян Л. С. та ін. "Курс елементарної геометрії"[17], В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. "Курс математики" [46]) розв’язання питання знаходження формули площі прямокутника базується на застосуванні методу підрахунку одиничних квадратів (у різних модифікаціях), коли сторони прямокутника (квадрата) послідовно виражені натуральними, раціональними (принаймні одна із сторін) та ірраціональними (принаймні одна із сторін) числами. Такий метод є зручним, оскільки спирається на наочність та інтуїцію.

Виклад теорії площ, запропонований М. В. Оглобліним (аналітичної її частини) може бути цікавим для учителя математики сучасної школи з точки зору розширення знань з методології даного питання.

2.4. Методи організації та здійснення навчально-пізнавальної діяльності у доробку Київського фізико-математичного товариства

У педагогічній літературі того часу поняття "дидактичний метод" залишалось невизначеним [7, с. 77]. До нього відносили і внутрішній логічний порядок, в якому вчитель повідомляє учням

величин підставляють числові значення величин, над якими і виконуються дії [50, с. 25-27].

У курсі ж фізики "числові значення величин доцільно підставляти у формули з найменуваннями" [107, с. 10]. Доцільність такого прийому обгрунтовується практичною зручністю, бо "це зобов’язує слідкувати, щоб всі одиниці були записані в одній системі". Якщо на першому ступені навчання (7-8 клас) задачі розв’язуються за діями, чітко визначаючи за допомогою запитань зміст кожної дії, то згодом учнів привчають користуватись загальним правилом, коли найменування величин підставляють у кінцеву (виведену) формулу і виконують над ними алгебраїчні перетворення. Результат дій над позначенням одиниць має служити також необхідним (хоча і недостатнім) критерієм правильності розв’язання задачі.

Так, приймаючи значення величини за добуток числового значення і одиниці величини, остання розглядається як буквенний множник, що при необхідності може бути замінений на тотожньо рівний йому вираз – добуток числа і одиниці однорідної величини, кратної попередній у відповідному до числа відношенні, або ж на добуток (або частку) одиниць різнорідних до даної (на основі їх взаємозалежності). Вираз, що складається з іменованих чисел і арифметичних дій над ними, підлягає алгебраїчним перетворенням на основі відомих тотожностей: переставного, сполучного, розподільного законів арифметики, основної властивості дробу, властивостей степеня з натуральним показником, властивостей кореня квадратного та ін. з метою приведення до виразу $a\cdot e$, де a – числовий множник, e – найменування – що відповідає значенню шуканої величини.

Таким чином, актуалізацією ідеї Ф. Ю. Мацона на сучасному етапі модернізації шкільної математики є можливість при вивченні певних алгебраїчних законів показувати їх застосування і до виразів з іменованими числами у зв’язку із відомими геометичними або фізичними залежностями величин. Розширення області застосувань алгебраїчних законів підвищить інтерес учнів до відповідної теми, а це в свою чергу сприятиме кращому засвоєнню теоретичного матеріалу, зміценню міжпредметних зв'язків.

На засіданні Київського фізико-математичного товариства 17 березня 1890 р. з доповіддю "О преподавании элементарной математики" виступив один із найбільш активних учасників Товариства, професор математики Київського університету Василь Петрович Єрмаков (1845-1922). Доповідь стосувалася питань викладання арифметики в середніх навчальних закладах [189, с. 12-14]. Згодом її матеріали доповнили збірку "Публічних лекцій" В. Єрмакова "О преподавании арифметики и алгебры" (1900 р.). Для кращого розуміння методичних ідей, запропонованих вченим на засіданні Товариства, проаналізуємо одночасно зі стислим викладом основних положень доповіді, лекцію В.Єрмакова під назвою "О преподавани арифметики" із збірника [183].

Вчений з'ясовує, які засоби і прийоми в тогочасному традиційному викладанні арифметики використовувались для розумового розвитку учнів, а також як відповідає поставленій меті послідовність вивчення основних розділів початкового курсу арифметики.

Програми, підручники та методичні посібники з початкової арифметики того часу, наприклад [140, 236], характеризувались концентричним розподілом матеріалу. Спочатку учні ознайомлювались з числами до 10, потім – від 10 до 20, за наступним концентром – від 20 до 100. Вивчення кожного із наведених розділів супроводжувалось розв'язуванням задач на всі 4 дії, після чого рекомендувалось вивчати нумерацію і дії над багатоцифровими числами. Така концентрація матеріалу, з сучасної точки зору, не є раціональною, оскільки суперечить дидактичному принципу переходу від простого до більш складного – додавання і віднімання чисел будь-якої величини є простішим для засвоєння, ніж, наприклад, виконання всіх 4 дій над двоцифровими числами. Основна риса методик арифметики 80-90-тих років XIX ст. – протест проти методу Грубе (метод Грубе ще називався методом монографічного вивчення чисел.

процесі навчання геометрії старшої ланки загальноосвітньої школи у класах з поглибленим вивченням математики.

У кінці XIX – на початку XX століття теорія площ, що вивчалась у курсі математики середніх навчальних закладів, протиставлялась відповідній їй науковій теорії площ, запропонованої С. Шатуновським і Д. Гільбертом.

Остання була побудована на доведенні можливості приписати кожній фігурі невід'ємне число, яке б задовольняло наступним умовам:

1) рівним фігурам відповідають рівні числа;

2) кожній фігурі відповідає число, що дорівнює сумі чисел, які відповідають усім її частинам.

У теорії площ, що викладалась у шкільних підручниках з геометрії таких авторів як, наприклад П. Долгушин [81], А. Кисельов [114] та ін. ці умови розглядались як істотні ознаки існування площі фігури – числа, яке приписується фігурі лише одним способом, якщо припустити, що існує число, фіксоване для однієї якої-небудь фігури (наприклад, квадрату зі стороною 1 приписано число 1).

М. В. Оглоблін, виступаючи на засіданні Київського фізико-математичного товариства з доповіддю "К теории площадей и центров тяжести плоских фигур" (1912) [180], називає шкільну теорію площ аналітичною, оскільки вона обгрунтовує необхідність вибору запропонованого способу приписувати числа фігурам, при виконанні відомих умов. Наукова теорія – синтетична, доводить достатність цього способу для задоволення тим же умовам. Педагог розвиває погляд В. Ф. Кагана, викладений в "Енциклопедії математики" Г. Вебера та І. Вельштейна про те, що обидві теорії доповнюють одна одну.

На його думку, одна наукова теорія має незручності у тому, що фігурі допускається приписування довільного числа та залишається нез'ясованим питання про єдиність такого способу приписування. Шкільна ж теорія позбавлена наукової строгості.

М. Оглоблін об'єднує обидві теорії, даючи наукове обгрунтування аналітичної (шкільної) її частини.

Педагог наводить дещо інше формулювання даних умов у зв'язку із поняттям функції. Застосувавши їх до конкретного

– не вимагає попередньої психологічної підготовки учнів до сприймань фактів нової геометрії;

– забезпечує доступність матеріалу за допомогою широкого використання наочності, інтуїції учнів;

– розкриває найсуттєвіші властивості трьох геометричних систем;

– не потребує великої кількості урочних годин (бо має лише ознайомлюючий характер);

– характеризується мобільністю в досягненні поставлених завдань даної теми;

Разом з цим, тема в запропонованому вигляді може залишитись особистісно малозначимою через відсутність мотиваційного та прикладного факторів. Мало уваги приділяється також формуванню цілісного уявлення про геометрію М. Лобачевського і геометрію Б. Рімана.

Теорія та методика ознайомлення учнів середніх навчальних закладів з основами неевклідової геометрії мало розроблена на сьогодні. Згаданому питанню присвячена порівняно невелика кількість ґрунтовних робіт, запропонованих для гурткових та факультативних занять (див. [239, 240, 275, 294, 295]), хоча елементарний виклад елементів геометрії М. Лобачевського широко розповсюджений в науково-популярній літературі, на сторінках періодичних педагогічних виданнь тощо (наприклад, [2, 3, 302, 130, 252], та ін.). Часу для вивчення основних відомостей геометрії М. Лобачевського у чинних програмах для класів з поглибленим вивченням математики не відводиться [228]. Проте, з метою врахування нахилів, потреб, здібностей і можливостей учнів, передбачається введення спеціальних курсів за вибором, що поглиблюють і розширюють основний курс математики. Причому вчитель, ознайомлюючи учнів із сутністю проблеми побудови неевклідової геометрії, сприятиме формуванню уявлення учнів про формально-логічну будову математичних знань, що є одним із важливих завдань навчання математики на поглибленому рівні.

Таким чином, розроблений П. Долгушиним елементарний виклад основ неевклідової геометрії є актуальним у сучасному

Він полягав у повному і ґрунтовному вивченні чисел за їх складом).

У початковому курсі арифметики вчений рекомендує вивчення чисел і дій вести паралельно. Методику навчання за методом Грубе автор, перш за все, характеризує за її відповідністю основним педагогічним принципам і визнає, що вона суперечить принципові активності і самодіяльності, бо детальне вивчення складу чисел несе в собі одноманітність роботи. Разом з тим В. Єрмаков визнавав корисним вивчати за складом ті числа, які "входять в таблицю множення і ще деякі" [183, с. 11-12].

З метою запобігання перевтомлюваності учнів В.Єрмаков пропонує найбільш ефективно збалансувати час для різних видів занять на уроці: півгодини відводити для вичення чисел та дій над ними, після чого чверть години займатись розв’язуванням задач.

Вивчати таблицю множення і ділення на однозначне число автор вважав доцільним в концентрі від 30 до 100. Тут учні ознайомлюються з нумерацією, додаванням і відніманням чисел у визначених межах та із множенням і діленням на однозначне число.

Сучасною програмою з математики для початкової школи передбачена система поступового розширення області вивчення чисел: перший десяток, другий десяток, сотня, тисяча, багатоцифрові числа (в межах мільйона). У межах першого і другого десятків розглядаються лише дії додавання і віднімання (табличні випадки та випадки пов’язані з нумерацією чисел), а в межах решти концентрів – усі арифметичні дії [42, с.20]. Таким чином, послідовність вивчення арифметичного матеріалу в сучасній початковій школі майже не відрізняється від наміченого В. Єрмаковим плану.

При відніманні чисел Василь Петрович пропонує ознайомити учнів із способом віднімання, який практикувався на той час у Франції. Нехай, потрібно із 3843 відняти 1574 (віднімання із двома переходами через розряд). Число одиниць різниці отримується наступним чином: "рекомендується віднімати… 4 із 10 (але не із 13) = 6 + 3 = 9, 7 із 10 = 3 + 3 = 6, 5 із 7 = 2, 1 із 3 = 2" [183, с. 12].

У доповіді, а пізніше у своїй лекції "О преподавании арифметики" він відзначає ті розділи, які мають бути виключені з курсу арифметики, як застарілі. До таких відносяться теми про зміну суми, різниці, добутку і частки, роздроблення і перетворення іменованих чисел (як самостійної теми), і особливо всі так звані "правила": правило трьох, процентів, змішування, ланцюгове, та ін, "що являють собою ніщо інше, як вправи в розв'язуванні задач" [189, с. 13]. Автор висловлювався і проти введення формул (виразів з дужками) в арифметику, а також взагалі виступав проти підручника з арифметики. В своїй лекції, вчений пропонує змінити курс арифметики ще й наступним чином: тему перетворення періодичних дробів у звичайні віднести до курсу алгебри до теми вивчення геометричної прогресії; введення наближених обчислень; з усіх задач залишити лише ті, які сприяють розумовому розвитку учнів, або мають прикладне життєве значення; ознайомити учнів з розв'язуванням арифметичних задач на складання рівняння, до яких можна віднести і задачі на змішування; вилучити арифметичну пропорцію, оскільки через неї встановлюється нечітке розуміння пропорційності величин; при вивченні основної властивості пропорцій вводити букви, що служитиме пропедевтикою вивчення буквених виразів [183, с. 12-21].

Із деякими поглядами автора, звісно, погодитись не можна. Це стосується вилучення теми про зміну суми, різниці, добутку і частки, використання дужок в арифметиці, вивчення курсу арифметики без підручника. Час уже обґрунтував помилковість суджень вченого. Але, переважна більшість його методичних рекомендацій отримали практичну реалізацію в радянській школі і залишаються цінними для сучасного вчителя.

Елементарний курс арифметики середніх навчальних закладів кінця XIX – початку XX ст. відповідно до чинної на той час програми включав три змістові лінії, що тісно перепліталися між собою: числа та дії над ними, вчення про найпростіші властивості чисел і задачі на так звані правила. Так, вивчались

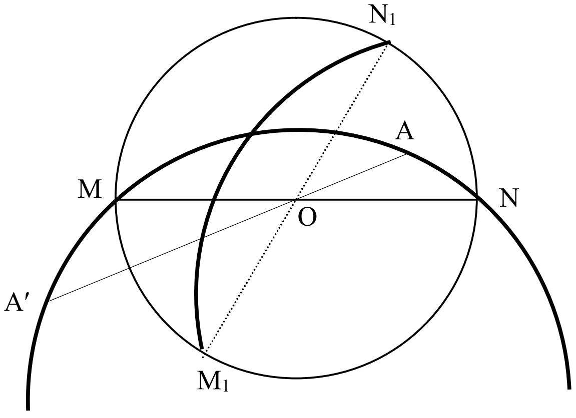


Рис. 2.10

Усі три розглянуті системи об'єднуються загальною властивістю: "будь-який можливий рух фігури відбувається без зміни її елементів" [82, с. 155]. Детальніше з теорією П. Долгушина можна ознайомитись у Додатку Ж.

Аналіз теорії вивчення неевклідової геометрії в середній школі, запропонованої П. О. Долгушиним, дає підстави для наступних висновків.

Виклад основ неевклідової геометрії за П. О. Долгушиним узгоджується з віковими особливостями учнів старших класів, оскільки для даного шкільного віку характерними є довільність і тривалість уваги, логічний характер запам'ятовування, більш високий рівень узагальнення і абстрагування, теоретична і критична спрямованість мислення. З іншого боку, відповідно до правил доступності сучасного навчання, початковий етап навчання повинен включати не весь обсяг знань, а лише основне, щоб учні ґрунтовно засвоїли головне, що було передбачено автором. Розроблена теорія, на нашу думку, має ще й такі позитивні особливості:

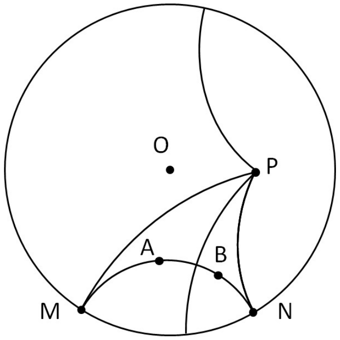


Рис. 2.9

Уявлення про геометрію Б. Рімана за інтерпретацією А. Пуанкаре дається аналогічно до попередньої геометричної системи: зображення площини є внутрішня область базового круга, точки – внутрішня точка круга, прямої – дуга кола внутрішньої частини круга, що перетинає останній по діаметру (див. рис. 2.10). За моделлю відмічається основна особливість геометрії Б. Рімана – відсутність аксіоми про паралельні. Вводиться поняття взаємних точок відносно базового кола (що відповідають аналогічному поняттю в геометрії М. Лобачевського) та вказівка визначення однієї з них, якщо відоме положення іншої. Звертається увага, що аксіоматичні властивості прямої такі ж як і в геометрії М. Лобачевського. Розглядається та доводиться ілюстративно теорема про суму кутів трикутника в геометрії Б. Рімана: "сума внутрішніх кутів трикутника, утвореного прямими Рімана, більше розгорнутого" [82, с. 155].

"правило трьох", "правило процентів", "правило товаришів", "правило змішування", "ланцюгове правило".

На початку ХХ ст. передові методисти того часу (Д. Галанін, О. Гольденберг, В. Мрочек і Ф. Філіппович, В. Белюстін й ін.) категорично засуджували вивчення та застосування різних правил розв'язування арифметичних задач. Так, В. Мрочек і Ф. Філіппович вважали, що "користування правилом трьох є шкідливою рутиною, яка не дозволяє через дерева побачити ліс…і вдобавок ускладнює обчислення". Всі правила вони називають "архаїзмом" [164, с. 255, 259].

Дещо раніше обгрунтувати хибність, недосконалість і шкідливість питань класифікації арифметичних задач за "правилами" намагався і активний член Київського фізико-математичного товариства М. П. Соколов. 8 жовтня 1894 року на засіданні товариства він виступив з доповіддю "Остатки схоластики в современных учебниках арифметики". Доповідь була надрукована в додатках до протоколів за 1894 рік, в "Университетских известиях" (№№7,8, 1895) та "Вестнике опытной физики и элементарной математики" (№№ 219-220, 1895).

Шляхом порівняльного аналізу однієї з програмних тем "Розв'язування задач на так звані правила" у найпоширеніших підручниках з арифметики за останні 20 років, автор з'ясовує спосіб введення поняття "правила трьох" та "правила змішування".

У тогочасних підручниках теорія так званих правил, які автор, в першу чергу, відносить до залишків схоластики, була надмірно деталізована. Наприклад, "правилу трьох" відводилось в різних підручниках від 12 до 30 сторінок тексту [255].

У посібниках з арифметики таких авторів як М. Андрієвський (1872), А. Давидов (1872) та ін. правило трьох ототожнювалось із розв'язуванням пропорцій. В посібнику М. Бугайова (1874) – означалось як спосіб застосування пропорцій. Такі підходи, на думку М. Соколова, створюють логічне коло, бо "навіщо…вивчати властивості пропорцій, якщо є правило трьох і навпаки – навіщо правило трьох якщо є окреме правило розв'язування пропорцій" [255, с. 9]. Означення в посібниках з арифметики С. Назарова (1875), А. Малініна і К. Буреніна (1877), М. Шапошнікова (1890), Д. Тихомирова (1891) мали той недолік, що містили досі невідоме поняття: "пропорційна величина" або "четверте пропорційне" чи "число, пропорційне трьом даним" тощо. Наприклад, в посібнику "Арифметики" А. Малініна і К. Буреніна давалось наступне означення: "Просте правило трьох є спосіб знаходити до трьох даних чисел четверте пропорційне" [13, с. 7]. У решті підручників: Леве "Курс арифметики" (1876), Вінклера "Руководство по арифметике" (1884), С. Шохор-Троцького "Учебник арифметики с дополнительными статьями" (1888) та ін. означення правила трьох не давалось, проте пояснювалось за якими ознаками відносити задачу до цього правила. Наприклад: "Задачі, в яких зустрічаються дві пари пропорційних величин, називаються задачами простого правила трьох". У деяких з названих підручників в подібному означенні розкривався ще й зміст пропорційності двох величин. В усіх підручниках вказувалось, що задачі на правило трьох могли бути розв'язані і способом зведення до одиниці.

Автор доповіді робить висновки про неможливість за даними означеннями з'ясування суті "правила трьох", а тому і класифікації задач за такою ознакою. Це пов'язане також і з існуванням задач на інші правила, які в дійсності мають розв'язуватись за допомогою "правила трьох": правило процентів, правило обліку векселів, правила термінових виплат. М. Соколов зазначає, що всі ці правила не задовольняють основним цілям навчання математики: вони сприяють розумовому розвитку учнів не краще за "правила басейнів", "правила собаки і зайця" і т.д., не реалізують і прикладний напрямок застосування арифметики (наприклад комерційний), бо не мають на меті формування в учнів уявлень, наприклад, про процентні папери (державні і власні), виграшні білети, серії, акції, облігації, паї, вексельний курс, біржову гру та ін. [255, с. 10].

Аналогічним чином вводилось і поняття про правило змішування. В більшості підручників воно трактувалось як спосіб розв'язування задач на складання сумішей і сплавів.

тверджень. "Площина Лобачевського" розглядається як внутрішня частина деякого круга (базового круга) евклідової площини. "Точки" зображуються внутрішніми евклідовими точками базового круга. "Прямі" зображуються дугами евклідових кіл, перпендикулярних до базового кола. Вироблення навичок будувати кола, що перпендикулярні до базового, ґрунтується на властивості радіусів перпендикулярних кіл: "Якщо коло з центром в точці O′ перпендикулярне до основного кола з центром в точці O, то радіуси O′N і ON, проведені в точку перетину N кіл, взаємно перпендикулярні, оскільки перпендикулярні до відповідних дотичних" та ознаки кола перпендикулярного до данного: "… будь-яке коло, центр якого O′ лежить на дотичній до базового кола, а радіус дорівнює O′N, перетинає останнє під прямим кутом" [82, с. 152]. Для набуття навичок будувати кола, що перпендикулярні до базового й такі, що проходять через певну точку внутрішньої області базового кола, вводяться поняття взаємних точок як таких, що утворюються в результаті перетину півпрямої, початок якої є центром базового кола, з колом, перпендикулярним до нього. Автор також ознайомлює з властивістю взаємних точок відносно базового кола та ознакою кола, перпендикулярного до базового (що проходить через такі точки) та дає вказівку щодо побудови взаємних точок. Із аксіом, крім тих, що уже розглядались при інтерпретації геометрії Евкліда, додається аксіома про вимірювання відрізків (попередньо вводиться поняття довжини відрізка $AB = k \cdot \lg\left(\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}\right)$, (де k – деяка стала, що залежить від вибору одиниці вимірювання відрізків).

Учні мають переконатись, що "через точку, що не лежить на прямій Лобачевського можна провести дві і тільки дві півпрямі (що належать різним прямим), паралельні даній", а також, що "сума внутрішніх кутів трикутника, обмеженого відрізками прямих Лобачевського, менше розгорнутого" [82, с. 154]. (див. рис. 2.9).

Пуанкаре (1854–1912), що спирається на застосування перетворення інверсії відносно кола.

За теорією П. Долгушина можна виділити наступну систему понять, тверджень, що дають уявлення про геометрію Евкліда. Уявлення про "точку" й "площину" збігаються із традиційними уявленнями учнів про ці об'єкти, проте пряма зображується колом. Кожна пряма належить до пучка (множини) кіл, що мають спільну точку М, яка уявно вважається недоступною (нескінченно віддаленою). Тому кожне таке коло – лінія розімкнута в точці М (див. рис. 2.8). На даній моделі перевіряються такі властивості евклідової геометрії: "Через точку можна провести нескінченну кількість прямих" (кіл пучка); "Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну"; "Через точку, що не лежить на даній прямій можна провести лише одну пряму, паралельну даній", а також теорема про суму кутів трикутника (індуктивним методом). Остання потребує попереднього введення понять про "кут між двома кривими" та доведення теореми про рівність відповідних кутів, утворених при перетині двох кіл.

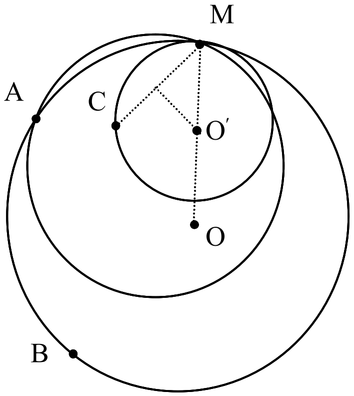


Рис. 2.8

Уявлення про геометрію М. Лобачевського дає наступна система понять (зображень об'єктів, що їм відповідають) та

Причому, задачі могли бути подвійного роду: 1) "За даними цінами, або кількостями компонентів суміші шукається ціна або кількість суміші; 2) за даною ціною і кількістю суміші і ціною компонентів суміші шукається кількість компонентів" [255, с. 11].

М. Соколов вважає, що означення правила змішування за зовнішньою ознакою давати не раціонально як через відмінність способів розв'язування задач 1-го і 2-го роду, так і через їх варіативність. В деяких посібниках, наприклад, М. Шапошнікова, способи розв'язування згаданих задач 1-го і 2-го роду називались відповідно "правилом змішування" і "правилом розподілу суміші". Недоцільність подібних означень автор пояснював ще й тим, що задачі, які розв'язуються такими ж прийомами, але "не відносяться до сумішей мають бути виключені". Наведемо приклад таких задач:

"1. *Винороб зобов'язався поставити n відер вина. Він має бочки ємністю в a і b відер. Скільки необхідно взяти бочок тієї або іншої ємності, якщо число всіх їх було m*? 2. *В хліві були фазани і кролики, число всіх голів було n, а число ніг m; скільки було тих і інших*?" [255, с. 12].

У результаті порівняльного аналізу автор робить висновки, що так звані правила не вичерпують всіх арифметичних задач і одна і та ж задача може бути віднесена до різних правил (однакових за математичною суттю). А це суперечить принципам точності, логічності і послідовності побудови теоретичних положень шкільного курсу математики.

Автор доповіді проводить й історичний аналіз розвитку вчення про так звані правила, намагаючись з'ясувати мету типізації задач на правила та показати її антипедагогічний характер.

Отже, київський педагог М. П. Соколов переконливо обгрунтував (як теоретично так і на основі історичного дослідження) необхідність зміни теорії та методики розв'язування арифметичних задач, класифікація яких має бути побудована на кардинально нових принципах, відмінних від існуючих на той час зовнішніх ознаках. Але, на жаль, він не вказав чітко визначених принципів класифікації арифметичних задач.

Розв'язати це питання вдалось лише за радянських часів. Дослідження методистів: О. Астряба, Є. Ченакала, Є. Березанської й ін. та психологів: З. І. Калмикової, Н. А. Мечинської й ін. стосувалось двох основних питань: "чи потрібна взагалі типізація арифметичних задач, чи не буде вона гальмувати думку учня, і, по-друге, якщо типізація потрібна, то який принцип треба покласти в основу добору типів" [250, с. 218-219].

Вітчизняні психологи встановили, що арифметичні задачі потрібно подавати в певній системі і типізація має бути допоміжним засобом в озброєнні учнів навичками самостійного мислення.

За основу класифікації задач було взято їх математичний зміст. Таким чином, учні мають оволодіти навичками вільно розв'язувати певну групу задач та навчитись кожну нову арифметичну задачу пов'язувати (асоціювати) з цими типовими задачами. За визначенням І. Андронова, "множина задач, в яких є однакова залежність між даними і шуканими, при існуючій різниці, як числових даних, так і описаних явищ, утворює певний тип задачі" [5, с. 319].

У 1929 р., як зазначає Б. М. Білий [36, с. 116], О. М. Астряб запропонував покласти в основу типізації задач два загальні поняття: різницеве і кратне порівняння числових значень величин.

В сучасних підручниках з математики основної школи поряд з класифікацією за змістом має місце і класифікація задач за фабулою. Такими типами є "задачі на рух", "задачі на спільну роботу", "задачі на відсотки" тощо. На думку О. Астряба "в обмеженій кількості випадків" така класифікація буде педагогічно корисною з погляду з'ясування учнями математичної відмінності задач одного і того ж виду, що спонукає до застосування різних прийомів для їх розв'язування. На основі різних залежностей між даними і невідомими величинами задачі можуть поділятись і на підвиди. Набувають поширення у шкільній практиці і задачі з фінансовим змістом. Вони поділяються на види: задачі на оподаткування; задачі на

подібності й існування абсолютної одиниці довжини; загальний характер зміни кута паралельності й найважливіші відмінності обох геометричних систем [276], [165, с. 205]. На цьому ж з'їзді київський педагог П. О. Долгушин представив делегатам розроблену на основі власного досвіду теорію вивчення неевклідової геометрії в середній школі, яка через місяць була заслухана й обговорена на засіданні Київського фізико-математичного товариства. Доповідь з невеликими змінами у вигляді додатку під назвою "Об основах геометрии. Геометрия Эвклида, Лобачевского, Римана" увійшла до створеного підручника "Систематический курс геометрии для средних учебных заведений" [81].

Успішне вивчення неевклідової геометрії залежить, на думку П. Долгушина, від вибору форми викладу матеріалу. На відміну від історико-генетичного шляху (який був також розвинутий в доповіді педагога Г. А. Грузинцева на другому з'їзді викладачів математики в Москві, що проходив на зимових канікулах 1913-1914 pp.), він використовує ідею Анрі Пуанкаре (1854-1912) тлумачення евклідової та неевклідової геометрії за допомогою пучка кіл. Автор був упевнений, що в такому вигляді теорія є простішою для засвоєння, тому не потребує багато часу для вивчення, а це дасть можливість ознайомити учнів старших класів з основами нової геометрії без будь-якої перебудови програми з математики [82, с.154].

Головним завданням вивчення неевклідової геометрії в середній школі П. Долгушин ставив: а) усвідомлення учнями незалежності Евклідової геометрії, як логічної системи, від геометричних образів тих понять, на які вона спирається; б) розуміння учнями факту, що "аксіома паралельних Евкліда не залежить від інших аксіом" [82, с. 151-155] (тобто довести її неможливо), оскільки заміна цієї аксіоми їй протилежною, або ж взагалі її відміна приводить до зовсім нових логічних наслідків. Для досягнення поставленої мети автор розглядає у взаємозв'язку три логічні системи – геометрію Евкліда, Лобачевського і Рімана за вже відомою інтерпретацією Анрі побудову (коли ознаки рівності чи подібності, які необхідно довести в одній задачі є відповідно відомими елементами, за якими потрібно побудувати фігуру – в іншій) є актуальними для сучасного вчителя математики. Усвідомлення учнями таких зв'язків підвищує цінність задач на побудову, оскільки дає змогу використати певний висновок про знайдену ознаку й при розв'язуванні низки задач на доведення чи обчислення.

Дискусійним в сучасній методиці навчання шкільної математики є питання про вивчення основ геометрії М. Лобачевського. Це пов'язано, насамперед, з труднощами розуміння учнями понять і положень нової геометричної теорії.

Так, факти логічної системи М. Лобачевського відразу здаються несподіваними через невідповідність до тих геометричних образів і уявлень, які утворюються за допомогою абстрагувань від предметів реальної дійсності та традиційно закріплюються в свідомості в результаті вивчення шкільної (евклідової) геометрії (наприклад, сума кутів трикутника Лобачевського менше 180 градусів, подібних фігур не існує, через точку, що не лежить на прямій, можна провести принаймі дві прямі, що не перетинають дану тощо).

У кінці XIX століття першою в Російській імперії спробою введення в шкільний курс найпростіших відомостей з геометрії М. Лобачевського став підручник М. Є. Ващенка-Захарченка (1825-1912) "Элементарная геометрия в объеме гимназического курса" (1883). Розвинути ідею професора Київського університету про необхідність вивчення неевклідової геометрії в середній школі намагались на початку XX століття передові російські та українські педагоги-математики. Так, російський педагог С. О. Богомолов на I Всеросійському з'їзді викладачів математики в Петербурзі (що проходив на зимових канікулах 1911-1912 рр.) запропонував включити до програми останнього класу гімназій наступні питання з неевклідової геометрії: постулат Лобачевського (аксіома паралельних Лобачевського), теорема Лежандра про суму кутів трикутника, теорема про повне задання трикутника на основі трьох його кутів (4 ознака рівності трикутника за трьома кутами) і як наслідок – відсутність

банківську діяльність; задачі на страхування; задачі на сімейний бюджет; задачі на цінні папери тощо [161, с. 7].

26 вересня 1911 року К. М. Щербина виступив на засіданні Київського фізико-математичного товариства із ґрунтовною доповіддю "О преподавании систематического курса обыкновенных дробей" [209, с. 12]. Він проаналізував недоліки логічного та методичного характеру традиційного викладання теорії дробів в загальноосвітній школі а також запропонував один із способів поліпшення стану викладання цього питання.

Свої методичні зауваження стосовно удосконалення систематичного курсу дробів автор висловлює, аналізуючи один із найбільш поширених на той час "і взагалі один із кращих підручників арифметики А. Кисельова" (Систематический курс арифметики. – М.,1911).

К. Щербина звертає увагу на те, що в більшості випадків при виведенні окремих правил теорії дробів, доводиться по суті користуватись такими арифметичними діями як додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками, множення або ділення дробу на ціле число, ділення дробів з однаковими знаменниками "на вміщення". Але, оскільки вивчення останніх передбачалось значно пізніше ніж їх необхідне використання, автори підручників, зокрема А. Кисельов, намагались використовувати деякі штучні прийоми. Зазначимо, що у підручнику А. Кисельова "Систематический курс арифметики" (1918) правило перетворення мішаного числа (числа, що має цілу і дробову частину) в неправильний дріб виводиться наступним чином: "Нехай потрібно перетворити мішане число $8\frac{3}{5}$ в неправильний дріб. Це значить, дізнатись, скільки п'ятих долей міститься в 8 цілих одиницях разом із $\frac{3}{5}$ долями тієї ж одиниці. В 8 одиницях п'ятих долей міститься 5×8 тобто 40, значить в 8 одиницях разом з 3-ма п'ятими їх буде 40+3, тобто 43. Отже, $8\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$". Аналогічно виконуються перетворення і над іншими числами з цілою і дробовою частиною: $3\frac{7}{8}=\frac{8\cdot 3+7}{8}=\frac{31}{8}$; $10\frac{1}{4}=\frac{10\cdot 4+1}{4}=\frac{41}{4}$ і т.д. В наведеному прикладі А. Кисельов, як вважає К. Щербина, неявно використовує дію множення числа на дріб та додавання дробів з однаковими знаменниками, підміняючи останні діями над цілими числами (очевидно, що автор підручника, спираючись на зміст поняття звичайного дробу та інтуїцію учнів, зводить задачу до підрахунку кількості однакових частин цілого). К. Щербина висловлює думку про те, що оскільки поняття дробу вводиться як число нової природи (по відношенню до цілих чисел), в підручнику при викладенні згаданого питання повинні мати місце відповідні зауваження чому "виконуються дії над цілими числами, а в результаті отримуються звідкись дроби" [308, с. 4]. Цей висновок стосується і виведення правила виділення цілої частини з неправильного дробу [112, с. 118].

У сучасних підручниках з математики для 5 класу зустрічаються два підходи пояснення правил перетворень мішаного числа у неправильний дріб і навпаки. Так, у підручнику Возняк Г. М., та ін. "Математика 5" [54] названі правила виводяться на основі поняття дробу як частки від ділення двох натуральних чисел. Такий підхід має вищий рівень логічної строгості, ніж в підручнику А. Кисельова [112], а у підручнику Г. П. Бевза та В. Г. Бевз [23] певною мірою прослідковується позиція К. Щербини – виведення правила перетворення мішаного числа у неправильний дріб базується на умінні учнів виконувати додавання дробів з однаковими знаменниками та представляти ціле число у вигляді дробу.

Педагог пропонував перейти на вищий рівень логічної строгості та замінити обґрунтування, що базувалось на основі змісту поняття звичайного дробу при поясненні й інших правил, зокрема правила збільшення (зменшення) дробу у кілька разів.

Одним із способів усунення вищезгаданих недоліків при проходженні систематичного курсу дробів, К. Щербина вважає створення нормального розподілу навчального матеріалу, в

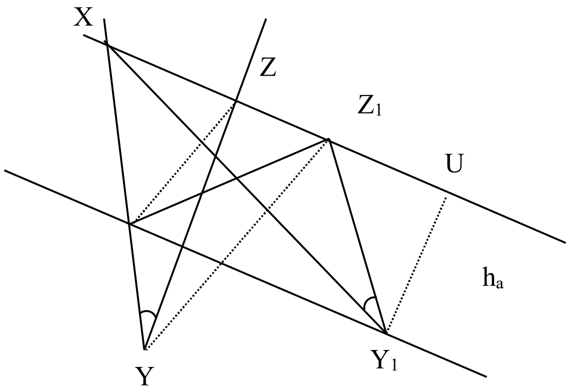


Рис. 2.7

Залишається на прямій AA_1 описати дугу, що вміщує кут $\angle B-\angle C$ (див. рис. 2.7). Зазначимо, що при розв’язуванні задачі використані метод симетрії відносно прямої (неявно), метод ГМТ та алгебраїчний метод.

Із зміною відношення подібності добуток bc буде змінюватись пропорційно квадрату відношення подібності. Тому автор вважає справедливою наступну теорему: "якщо два трикутники мають однакову різницю двох кутів і добутки сторін, протилежних цим кутам відносяться як квадрати висот, опущених на треті сторони, то ці трикутники подібні" [5, с. 206].

Далі педагог розглядає застосування ідеї визначення умов рівності і подібності фігур за допомогою задач на побудову до знаходження умов подібності чотирикутників, а також поширює застосування цієї ідеї для випадків, коли побудова фігури за деякими даними дає два або більше неспівпадаючих розв’язків. В останньому випадку для визначення умов рівності і подібності фігур необхідні додаткові умови, які певним чином можна знайти із самої побудови [5].

Методичні поради І. Александрова щодо розкриття зв’язків між задачами на доведення рівності (подібності) геометричних фігур (зокрема трикутників) та відповідними їм задачами на

Автор пропонує аналогічно до розв’язання першої задачі, повернути трикутник ABC в положення A_1BC, тоді ΔABA_1 визначається даними умови задачі, тобто висотою і площею (рис. 2.6)

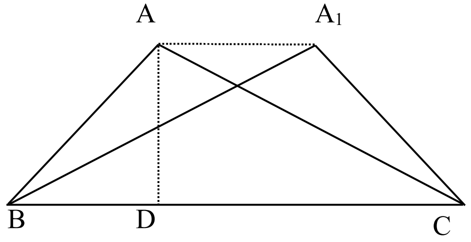


Рис. 2.6

Побудувати трикутник із такими даними І. Александров пропонує визначати окремо наступним чином: на сторонах деякого $\angle XYZ = \angle B - \angle C$ (див. рис. 2.7) відкласти відрізки $XY=YZ=\sqrt{bc}$; оскільки площі трикутників з спільним кутом пропорційні добуткам сторін, між якими є даний кут, $\Delta XYZ = \Delta ABA_1$. Потім ΔXYZ перетворимо в ΔXY_1Z_1 так, щоб висота його Y_1U дорівнювала б h_a і $\angle XY_1Z_1 = \angle XYZ$. Тоді $XZ_1 = AA_1$.

якому множення і ділення дробів є центральними питаннями курсу. За планом, складеним К. Щербиною, вивчення арифметичних дій над дробами передбачалось в 3 етапи.

На першому етапі учні ознайомлюються з додаванням і відніманням дробів з однаковими знаменниками; множенням дробу на ціле число; діленням дробу на ціле число, діленням дробів з однаковими знаменниками "на вміщення" одразу після основних означень дробу і рівності та нерівності дробів. Це, на думку автора, дасть змогу використати вміння виконувати зазначені арифметичні дії для перетворення неправильного дробу в число, що містить цілу і дробову частину, та для оберненого перетворення. Після цього дріб розглядається і як частка від ділення двох цілих (додатних) чисел.

На другому етапі відбувається розширення правил множення і ділення дробів на ціле число у зв’язку із попереднім вивченням зміни величини дробу із зміною чисельника і знаменника дробу. Після цього вивчається основна властивість дробу.

На третьому етапі даються узагальнені поняття про арифметичні дії. Вивчаються додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, властивості додавання і віднімання. Відбувається розширення понять про дію множення і дію ділення. На основі доцільно підібраних задач формуються уявлення про дію множення на дріб (ділення на дріб) як дії складної. Виводяться правила множення (ділення) на дріб. Розглядаються властивості дій множення та ділення.

Вивчення дій над дробовими іменованими числами є продовженням систематичного курсу дробів.

Складений К. Щербиною план систематичного курсу дробів хоч і усував логічні недоліки тогочасного традиційного розподілу матеріалу теорії дробів, все ж мав певні незручності. Вони полягали в тому, що при вивченні арифметичних дій на першому етапі не можна було розглянути випадки, коли, наприклад, результати дій додавання дробів з однаковими знаменниками та множення дробу на ціле число вимагали б виділення цілої і дробової частини. А це дещо порушувало стрункість вивчення арифметичних дій додавання та множення дробів.

Свої методичні погляди стосовно викладання теорії дробів в загальноосвітній школі К. Щербина подає у вигляді методичних зауважень до таких тем курсу: "Означення дробу. Рівність і нерівність дробів", "Основна властивість дробу", "Скорочення дробів і зведення дробів до спільного знаменника", "Узагальнення понять про арифметичні дії", "Додавання і віднімання дробів", "Множення дробів", "Ділення дробів", "Зміна результатів в залежності із зміною компонентів дій при множенні і діленні дробів", "Про дії над дробовими іменованими числами" та ін.

Головною особливістю запропонованого курсу дробів є реалізація ідеї розвитку поняття про число (в даному випадку від цілого додатнього до дробового) в залежності від послідовно введених нових операцій. Тому до найбільш важливих питань курсу К. Щербина відносить введення понять: доля, дріб, рівності і нерівності дробів, а також розширення, узагальнення і подальше формування понять про арифметичні дії та їх властивості.

Наприклад, вироблення поняття множення (ділення) цілого числа на дріб пропонується на основі доцільно підібраних задач. Умова цих задач відрізняється тим, що одна із даних величин в кожній наступній задачі набуває значень, що зображаються відповідно цілим числом, долею та сукупністю долей (звичайним дробом). Проаналізувавши розв'язання задачі, приймається домовленість, що для більшої стрункості одній і тій же вимозі в умовах задач має відповідати одна й таж дія множення (ділення). Після цього дається означення дії множення (ділення).

Виклад теорії дробів в сучасних підручниках з математики 5-6 класів, наприклад, в [54, 53, 23, 148] характеризується меншою ступінню строгості щодо логіки міркувань та висновків, в порівнянні зі специфікою систематичного курсу дробів визначеною К. М. Щербиною у праці [308]. Належне місце тут відводиться роботі психологічного характеру (складність якої вища, ніж в пропедевтичному курсі дробів). Арифметичні дії над

ти висновок, що трикутники, в яких різниця двох кутів однакова, а висоти і медіани, проведені до сторони, протилежній третьому куту, рівні (або пропорційні), будуть рівні (або подібні).

У деяких випадках визначення рівності і подібності фігур може бути полегшене тим, що достатньо помітити рівність не шуканих фігур, а тих, до яких зводиться побудова. Проаналізуємо розв'язання наступної задачі: *Побудувати трикутник за даними* $2p$, h_a, $\angle A$.

Розв'язання.

"Випрямимо ламану ВАС в пряму EBCF (див. рис. 2.5). Тоді $\angle EAF = \angle A + 90° - \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}$. Описуючи на $EF = 2p$ дугу, що вміщує даний кут і, проводячи пряму, паралельну EF на відстані h_a, отримаємо точку А". Основний метод побудови, що використовується у задачі – метод ГМТ.

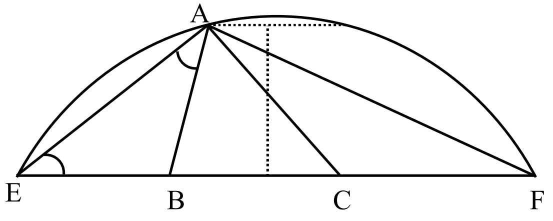


Рис.2.5

Отже, побудова трикутника приводить до побудови іншого трикутника за a, h_a, $\angle A$. Остання має 4 співпадаючі розв'язки, яким відповідає певний трикутник за умовою задачі. Тому "трикутники, що мають рівні (або пропорційні) периметри і висоти, опущені з рівних кутів – рівні (або подібні)" [5, с. 206].

Наприклад, задача "*Побудувати трикутник за даними* h_a, bc, $\angle B - \angle C$" дасть два (або 4) однакові розв'язки.

фігур можна визначити умови їх подібності. Для цього необхідно надати деякого значення відношенню подібності (замість одиниці), тобто, зберігаючи рівність відповідних кутів, якщо це дано в умові задачі, замінити рівність відповідних лінійних частин їх пропорційністю [5, с. 205].

Розглянемо запропоновані автором задачі.

Побудувати трикутник за даними a, b, $\angle A - \angle B$.

Для визначення плану розв'язування, повернемо ΔACB в положення AC_1B (див. рис. 2.4); (автор неявно використовує метод симетрії відносно прямої, що проходить через середину основи AB, перпендикулярно до неї).

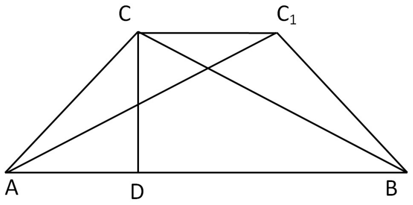


Рис. 2.4

Тоді ΔCAC_1 можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними ($AC_1 = a, AC = b, \angle CAC_1 = \angle A - \angle B$).

Точка B визначається як третя вершина ΔCC_1B $\left(AC_1 = BC = a,\ AC = BC_1 = b\right)$.

Матимемо два однакові розв'язки $\left(\Delta ACB = \Delta BC_1A\right)$.

Із розв'язання цієї задачі випливає, що "1) якщо дві сторони і різниця протилежних до них кутів одного трикутника дорівнює відповідно двом сторонам і різниці протилежних до них кутів другого трикутника, то такі трикутники рівні; 2) якщо різниця двох кутів одного трикутника дорівнює різниці двох кутів другого трикутника і протилежні до цих кутів сторони пропорційні, то такі трикутники подібні" [5, с. 205].

Аналогічно, побудова трикутника за даними $\angle A - \angle B,\ h_c,\ m_c$ дає 4 однакові розв'язки. А тому можна зроби-

дробовими числами не означаються, бо вважається, що "так абстрактно пояснювати не можна" [21, с. 156]. Розкриття змісту понять, а також виведення правил про арифметичні дії над дробами відбувається на інтуїтивній основі. Важливу роль при цьому відіграє використання геометричної (вивчення додавання, віднімання, множення дробів) та алгебраїчної (вивчення ділення дробів) моделей.

Робота Костянтина Мойсейовича "О преподавании систематического курса обыкновенных дробей" відіграла належну роль у створенні програм, підручників та удосконаленні методики викладання даного питання в радянський період. Так, в перші роки будівництва радянської школи 1917-1920 рр. прогресивними педагогами-математиками (Д. О. Граве, М. П. Кравчуком, К. М. Щербиною, К. Ф. Лебединцевим, Я. Ф. Чепігою, О. М. Астрябом та ін.) були розроблені проекти програм з математики, які втілили передові ідеї методико-математичної думки дореволюційної школи. Зокрема, проект програми систематичного курсу арифметики [232] містив порядок вивчення звичайних дробів відповідно до плану, розробленого К. Щербиною в роботі [308]. За цією програмою був побудований підручник В. Шарка "Арифметика" (1919) [290] та задачник Н. Шульгіної – Іщук "Задачник до систематичного курсу арифметики" (1918) [305].

У традиційному шкільному курсі арифметики радянської школи були реалізовані методичні ідеї Костянтина Мойсейовича Щербини щодо введення дії множення та дії ділення на дріб. Досить чітко ці ідеї розвинуті в праці Д. М. Маєргойза "Звичайні дроби" [141, с. 89-137].

2.3.2. Внесок Київського фізико-математичного товариства у розвиток змісту алгебри

У тогочасних підручниках та методичних посібниках з алгебри не було єдиного підходу до означення та завдань алгебри. Кожен автор розумів ці питання по своєму досить однобічно. Наприклад, в підручнику О. Малініна і К. Бureніна "Руководство алгебры" (1875), шкільна алгебра означалась як "наука, що займається складанням загальних розв'язків різних задач і взагалі розв’язанням питань, що стосуються чисел в загальному вигляді" [132, с. 109]. В "Начальной алгебре" А. Давидова (1866) давалось наступне означення: "алгебра навчає міркувати про величини, при цьому вона зображає їх буквами і позначає особливими знаками залежності між ними"[132, с. 109]. В "Элементарной алгебре" А. Кисельова (1909) зверталась увага, що "алгебра насамперед вказує способи, за допомогою яких один алгебраїчний вираз може бути перетворений в інший, тотожний йому" [113, с. 2].

На засіданнях Київського фізико-математичного товариства питанням визначення алгебри як шкільного предмету та її завдань були присвячені доповіді В. П. Єрмакова: "Определение и цель алгебры" (1890), "О начальном преподавании алгебры" (1890), "О сущности алгебры" (1895) та ін.

В них вчений дещо конкретизує визначення алгебри, дане А. Кисельовим. Він вважає, що під алгеброю необхідно розуміти частину математики, яка займається перетворенням одних дій в інші: "алгебра дає правила для заміни одних дій послідовністю інших дій над тими самими числами" [85, с.102]. Правила ж, необхідні для заміни одних дій іншими, і складають предмет алгебри [183, с. 23].

Із цієї точки зору, розв’язування рівнянь розглядалось як застосування алгебри до розв’язування задач. Завдання алгебри, на думку В. Єрмакова, полягає в тому, щоб "для будь-якої задачі дати можливий простий спосіб її розв’язання". Автор вважає, що уже на початку викладання курсу потрібно з’ясувати для учнів що є предметом і завданням алгебри. Для цього він пропонує декілька перших уроків присвятити розв’язуванню арифметичних задач, насамперед таких, які б розв’язувались різними способами. Наприклад: *Купили 15 люстерок по 40 крб кожне; при перевезенні 3 люстерка розбились;за якою ціною потрібно продавати решту люстерок, щоб отримати суму грошей, затрачену на купівлю всіх люстерок?*

Спосіб 1. Ціну всіх люстерок розділити на число залишених зеркал, тобто:

1) $40\cdot 15=600$(крб.);

Геометричні задачі на побудову в підручниках того часу, наприклад в [69], пропонувались в порядку відповідності певної теми курсу: пряма лінія, коло, подібні фігури, площі й ін. Така система відповідала програмам класичних гімназій і була панівною. Її особливістю було те, що кожна задача мала ізольоване розв’язання, оскільки недостатньо підкреслювалось чому використовується той чи інший спосіб її розв’язування. Вчитель математики Тамбовської гімназії І. І. Александров (1856-1919 рр.) у своїй праці "Методы решения геометрических задач на построение и сборник геометрических задач с полным и коротким решением" (1899 р. 6-те видання) розвиває інший принцип побудови курсу розв’язування геометричних задач на побудову, за яким задачі розміщуються за методами. Тобто спочатку встановлюється теорія кожного методу, а потім вказується застосування принципів, на яких він ґрунтується, до розв’язування задач, що відносяться до різних відділів геометрії. Книга І. Александрова мала великий успіх не лише в Російській імперії (так, п’яте її видання було удостоєне премії імператора Петра Великого), але й за кордоном. В рецензії французького журналу "L’Enseignement mathématique" зазначалось, що праця автора "за чіткістю викладу, великої кількості задач та запропонованих до них розв’язань сприятиме удосконаленню викладання елементарної геометрії" [35, с. 212].

І. Александров був іногороднім членом Київського фізико-математичного товариства. 29 квітня 1891 року на засіданні Товариства прочитана його доповідь "Определение условий равенства и подобия с помощью геометрических задач на построение" (І. І. Чир’євим), згодом опублікована в "Вестнике опытной физики и элементарной математики" (1892 р., № 154).

В ній автор радить звернути увагу на одну із функцій задач на побудову, а саме: виявлення умов рівності і подібності геометричних фігур, а також вказівок на їх доведення. Так, якщо побудова фігури за даними в умові задачі дає один або декілька однакових розв’язків, то ці дані визначають фігуру повністю. Звідси слідує, що із рівності відповідних частин в декількох фігурах випливає рівність цих фігур. Із будь-якої умови рівності однаковий ступінь загальності, необерненими, коли одне з них – наслідок є частковим випадком більш загального твердження – причини.

Автор узагальнює своє дослідження щодо достовірності розв'язку задачі. У випадку застосування синтетичного методу необхідно, щоб вихідне положення (те, що дано) було істинне – очевидне або раніше доведене твердження (М). Будуючи ряд послідовних тверджень: $M \rightarrow N \rightarrow ... \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X$ (І), необхідно, щоб всі додаткові твердження (за посередництва яких від причини переходять до наслідку , наприклад, від М до N) були істинні. При дотриманні цього правила, застосування синтезу не потребує перевірки.

Щоб довести аналітично істинність деякого твердження (Х), треба побудувати регресивний ряд, що починається цим твердженням і закінчується деяким істинним твердженням М: $X \leftarrow Y \leftarrow Z \leftarrow ...N \leftarrow M$ (II), при чому додаткові твердження, що викоритовуються для переходу від наслідку до причини в суміжних твердженнях, наприклад, від Х до Y, повинні бути істинними. Цей спосіб не потребує перевірки, але допускає її можливість шляхом оберненого методу – синтезу (від М до Х).

При умові взаємної оберненості всіх пар суміжних тверджень ряду (II), і весь ряд (II) перетворюється в ряд (II′): $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow ...N \leftrightarrow M$ (II′). В даному випадку Y буде наслідком (X), а (Z) – наслідком (Y) і т.д. Перехід від наслідку – твердження (Х) до причини – твердженя (М), при якому користуються синтетичним методом тобто $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow ... \rightarrow N \rightarrow M$ автор називає низхідним аналізом, важливою особливістю якого є те, що для істинності наслідку (Х) всі суміжні твердження послідовного ряду умовиводів мають бути взаємно оберненими [274, с. 89].

У сучасних підручниках з геометрії, наприклад [61, 40], учнів ознайомлюють із суттю методів розв'язування планіметричних задач на обчислення, побудову, доведення, дослідження. У цьому контексті теорія, розроблена Е. Шпачинським є актуальною, такою що відповідає завданням озброєння учнів методами доведення геометричних задач та теорем.

2) $15 - 3 = 12$ (шт.);

3) $600 : 12 = 50$ (крб.)

Спосіб 2. Вартість 3 люстерок розділити на число останніх; до отриманого результату додати вартість кожного люстерка при покупці, тобто:

1) $40 \cdot 3 = 120$ (крб.);

2) $15 - 3 = 12$ (шт.);

3) $120 : 12 = 10$ (крб.);

4) $10 + 40 = 50$ (крб.)

Розв'язавши задачу різними способами, пропонується замінити числа в умові задачі літерами. На подібних прикладах учнів підводять до розуміння того, що послідовність одних дій може бути замінена послідовністю інших над тими самими числами, що алгебра вчить знаходити найбільш прості способи розв'язування задач. Надалі, при розв'язуванні задач, вчений радить ознайомити учнів із таким орієнтиром: "перш за все потрібно скласти загальні формули для шуканих величин у літерах, спростити ці формули і лише тоді підставляти замість літер дані числа" [87].

Учений наводить приклад задачі з геометрії, запропонованої на випускному екзамені в одному реальному училищі. *Куля розділена січною площиною на два сегменти; повна поверхня кулі дорівнює 36, площа круга дорівнює 8. Визначити поверхню кожного із сегментів.*

Учні послідовно знаходили:

Радіус кулі за формулою $R = \sqrt{\frac{36}{4\pi}} = 1,69$. При обчисленні приймали $\pi = 3\frac{1}{7}$ і обмежувались сотими долями.

1. Радіус круга перерізу за формулою $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = 1,59$.

2. Відстань між центром кулі та центром перерізу $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 0,57$.

3. Висоти сегментів $h = R - d = 1,12;$ $H = R + d = 2,26.$

4. Довжину кола великого круга $2\pi R = 10,62.$

5. Поверхні сегментів $2\pi Rh = 11,89;$ $2\pi RH = 24.$

Автор доповіді вважає, що при такому розв'язанні "виявляється повне нерозуміння суті алгебри". Вчений рекомендує не обчислювати одразу проміжні результати, а дані значення величин підставляти в кінцеву спрощену формулу. Так, якщо повну поверхню кулі позначити через p, а площу круга через q, то кінцеві формули поверхні сегментів мали б вигляд $\frac{p-\sqrt{p(p-4q)}}{2}$, $\frac{\mathrm{p}+\sqrt{p(p-4q)}}{2}$. Доцільність такого прийому В. Єрмаков пояснює тим, що в кінцевих формулах наведеного прикладу відсутнє значення π та добувається корінь лише один раз. Підставляючи замість p і q їх значення, знаходять значення поверхні сегментів 12 і 24. На запропонований прийом раціоналізації обчислення при розв'язуванні геометричних або ж прикладних задач необхідно постійно звертати увагу вчителям сучасної школи.

Таким чином, головна суть алгебри за В. Єрмаковим полягає в "складанні і спрощенні формул" [87, с. 461]. На жаль, зауважує вчений, "учні не вміють перетворювати буквені вирази: не мають чіткого уявлення про спрощення формул, не позбуваються ірраціональності в знаменнику, не виводять квадратних множників із-під знака кореня, не скорочують дробів і т.п" [87, с. 466].

При розв'язуванні задач алгебраїчним методом, якщо формули для шуканих величин дуже складні і незручні для обчислень, автор рекомендує вводити допоміжні величини, які окремо мають визначатись за певними формулами.

У сучасній школі запропонований В. Єрмаковим спосіб відомий як "спосіб введення невідомих при розв'язуванні геометричних задач на обчислення". Введення допоміжного

Цю рівність можна вважати наслідком такої: $JK = \frac{BJ}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}$ (Y),

де через JK позначено сторону такого квадрата, в якому BJ є діагоналлю, тобто JK є перпендикуляр, опущений з точки J на один із катетів, наприклад, на AB. Рівність (Y) є наслідком наступної: $JK \cdot AB = AB \cdot BC - JK \cdot BC$ (Z), яке в свою чергу, на основі JK=BK дістали б із рівності: $JK \cdot AB = AK \cdot BC$ (N).

Остання рівність є наслідком пропорції: $JK : AK = BC : AB$ (M).

Рівність (M) на основі паралельності JK і BC є очевидною. Отже, і (X) – істина.

Задача 2. На даній основі b побудувати трикутник, в якому б висота h була б середнім пропорційним між бічними сторонами a і c.

Умовою побудови є твердження $h = \sqrt{ac}$ (X).

Воно є наслідком такого: $\frac{a}{h} = \frac{h}{c}$ (M).

Остання рівність є хибною (на основі твердження, що в будь-якому трикутнику висота не може бути більшою жодної із бічних сторін). Отже, і вихідне твердження (X) є хибним, тобто побудова неможлива [300, с. 33 – 34].

Запропоновані задачі формують навички самостійного пошуку розв'язання та переосмислення умови задачі або її частин[8], що сприяє, як відомо, розвитку евристичного мислення[9]. Вони також виробляють уміння перевіряти правильність як усього логічного ряду, так і умовиводу. Так, у другій задачі упевненість у хибності висновку (умови задачі) можлива лише за рівносильності суміжних тверджень міркування. Все це запобігає виникненню логічних помилок у міркуваннях, пов'язаних із можливістю підміни взаємно обернених тверджень, що мають

---

[8] Під цим розуміють таку розумову дію людини, "під час якої те чи інше поняття фіксується в пам'яті не як константа, а як змінна" [20, с. 33].

[9] Евристичне мислення пов'язане із пошуком і вибором продуктивних прийомів і засобів для розв'язування невідомої раніш проблеми.

міркування привело нас до кінцевого твердження, яке само по собі хибне, то вихідне твердження нашого міркування теж є хибним" [300, с. 28].

Після цього, педагог ознайомлює із поняттям "взаємно обернені твердження" (за сучасною термінологією також використовують назву "рівносильні твердження") та доходить висновку, що якщо в ланцюжку синтетичного міркування ми вводимо лише взаємно обернені суміжні твердження, то і все міркування може бути виведене у зворотному порядку, і, виходячи з хибного, можемо прийти тільки до хибного. Якщо ж в ланцюжку міркувань ми вводимо не лише взаємно обернені, але й необернені твердження, то і все міркування буде необерненим, тому виходячи з хибного можна прийти не лише до хибного, але і до істинного [300, с. 31].

Питання "безпомилкових висновків" Е. Шпачинський з'ясовує і для випадку аналітичного міркування або висхідного аналізу: "Якщо висхідний аналіз доводить нас до заключного твердження, яке саме по собі істинне, то і істинність шуканого не може бути сумнівним. Якщо висхідний аналіз доводить нас до заключного твердження, яке само по собі хибне, то хибність висхідного заданого твердження не має сумніву лише в тому випадку, коли всі суміжні твердження взаємно обернені" [300, с. 33].

Наведемо приклад використання зроблених висновків до розв'язування геометричних задач аналітичним методом, запропонованих Е. Шпачинським.

Задача 1. Довести, що бісектриса прямокутного трикутника BJ дорівнює відношенню добутку катетів до їх суми, помножене на $\sqrt{2}$, тобто:

$$BJ = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}\sqrt{2}$$ (X). (див. рис.2.3)

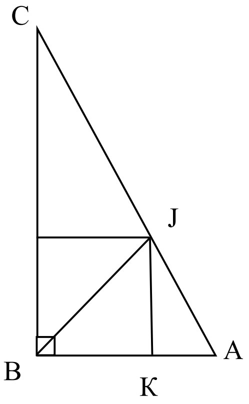


Рис. 2.3

невідомого є необхідним в тому випадку, коли в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не задано відрізків або задані відрізки і кути не об'єднуються в зручний для розв'язування трикутник [173].

Автор доповіді радить чітко розуміти і розрізняти арифметичні та алгебраїчні прийоми при розв'язуванні задач. Він пропонує обчислення за готовими формулами виділити в самостійну групу вправ і не поєднувати з тими буквенними задачами, які потребують складання і спрощення формул (а також складання і розв'язування рівняннь). Причому в курсі алгебри наближеним обчисленням має приділятись найбільше уваги.

Завдання алгебри, сформульоване В. Єрмаковим, є одним із основних завдань і сучасного шкільного курсу алгебри, провідною ідеєю якого є розвиток поняття функціональної залежності. Пріорітетним напрямом курсу є формування та розвиток умінь і навичок математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних та інших задач [230].

У курсі математики 5-9 кл. сучасної школи розглядаються два основних способи розв'язування текстових задач: арифметичний і алгебраїчний. Арифметичний спосіб полягає у знаходженні невідомої величини шляхом складання числового виразу (числової формули) і підрахунку результату. Алгебраїчний спосіб грунтується на використанні рівнянь і їх систем, що складаються при розв'язуванні задач [253, с. 137]. Прийоми раціоналізації розв'язування задач на обчислення (складання за умовою задачі формули та її спрощення, а також, у зв'язку з першим, метод введення допоміжного невідомого) та набуття учнями навичок користування такими прийомами залишаються актуальними в сучасному процесі навчання математики.

В. П. Єрмаков у доповідях "О начальном преподавании алгебры" (1890) [90], "Несколько замечаний о преподавании алгебры" (1892), пропонує новий підхід викладу перших двох розділів алгебри, що мали місце у поширених тогочасних підручниках – "Попередні поняття алгебри" та "Перші чотири алгебраїчні дії". Вчений розвиває і узагальнює викладені у доповідях думки у статті "О преподавании алгебры" (1892), надрукованої у "Педагогическом сборнике" [92].

Головна мета названих праць В. Єрмакова – показати, як можна "привести теорію алгебри до можливого мінімуму і можливої простоти, не порушуючи логічності викладу" [91, с. 103].

Приймаючи за основу побудови курсу математики теоретичні положення (теореми та аксіоми), умови ("те, що залежить від нашого вибору"), означення і задачі, В. Єрмаков визначає їх необхідний мінімум, а також послідовність викладу для "утворення чіткого уявлення про алгебру" (на прикладі вибраних розділів). Водночас автор виходить із того, що учні, приступаючи до вивчення алгебри, не знайомі із використанням дужок.

В. П. Єрмаков у "Положеннях" №№1–11 узагальнює відомі з арифметики властивості дій додавання, віднімання, множення та ділення для будь-яких цілих невід’ємних чисел за допомогою символів букв: переставний закон додавання; переставний закон, що застосовується до додавання та віднімання кількох чисел; від числа (або суми) відняти кілька чисел; переставний закон множення; переставний закон стосовно множення та ділення кількох чисел; про послідовне ділення числа (добутку) на кілька чисел; число не зміниться, якщо до нього додати і відняти одне й те ж число (два числа рівні з протилежними знаками взаємно знищуються); розподільний закон множення відносно суми (різниці) двох чисел; різниця двох чисел не зміниться, якщо від зменшуваного і від’ємника відняти одне й те ж число; якщо один із множників дорівнює нулю, то і весь добуток дорівнює нулю.

Умови №№1–3 вводяться стосовно порядку виконання дій. Означеннями №№ 1 – 2 вводяться поняття "одночлена" та "многочлена". Положення №№12–14 стосуються додавання, віднімання та множення многочленів, що є узагальненням раніше сформульованих положень та ще й наступних правил: 1) щоб додати суму, потрібно додати кожний доданок; 2) щоб додати

практичному використанню. В педагогічній пресі, наприклад у "Вестнике опытной физики и элементарной математики", "Педагогическом сборнике", "Математическом листке" й ін. цьому питанню також не приділялось належної уваги. Необхідність застосування поряд із синтетичним методом доведення теорем і задач аналітичного методу в середніх навчальних закладах пропагували в своїх працях такі вчені як О. М. Острогорський ("Материалы по методике геометрии в связи с изучением учебников", 1884 р.) [185] та Дюгамель ("Методы геометрии" 1880 р.) [274, с. 13].

Внесок у теорію навчання учнів аналітичному і синтетичному методам доведення теорем та умінь їх практичного застосування зробив учасник Київського фізико-математичного товариства, головний редактор "Вестника опытной физики и элементарной математики" (1886-1898 рр.) Е. К. Шпачинський. В доповіді "Синтез и анализ в математике" він намагався показати, що вищезгадане питання повністю доступне розумінню учнів. Доповідь була опублікована в названому журналі (№№ 109, 110, 113).

Попереднє ознайомлення з методами та з’ясування їх відмінності і подібності, автор радить провести на наочній і доступній основі – шляхом простих прикладів. Так, довести справедливість теореми Піфагора для прямокутного трикутника АВС, де $\angle B = 90°$, тобто справедливість рівності $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (1) він пропонує двома методами: аналітичним і синтетичним. Автор перераховує переваги і недоліки кожного із методів, розкриває їх значення для наукових досліджень, наводить історичні факти щодо винайдення і застосування синтезу і аналізу в геометрії. На конкретних прикладах Е. Шпачинський з’ясовує зміст причинно-наслідкового зв’язку двох тверджень, а також описує загальну схему синтетичного міркування, звертає увагу й на те, як бути впевненим в достовірності кінцевого результату: "Якщо синтетичне міркування привело нас до заключного результату, яке саме по собі істинне, то це ще не є запорукою того, що вихідне твердження нашого міркування було теж істинне і навпаки – якщо

Виконуючи такі та інші вправи, діти відкривають зв'язки геометрії з іншими галузями знань: природознавством, географією, кресленням. А це сприяє усвідомленню важливості предмету для кращого розуміння природи, навколишньої дійсності та науки в цілому.

Геометричний матеріал пропедевтичного характеру вивчається в сучасній початковій і в 5-6 класах основної загальноосвітньої школи як складова дисципліни "Математика". І хоча мета вивчення геометричного матеріалу в молодших класах з моменту його введення залишилась незмінною – підготовка до вивчення систематичного курсу геометрії в старших класах, помітно змінились зміст, методи, завдання та специфіка викладання пропедевтики геометрії.

В умовах особистісно-орієнтованої математичної освіти, вчитель математики часто стикається з труднощами, пов'язаними зі зниженням інтересу та мотивації учнів до вивчення предмета. Це стосується і вивчення елементів геометрії в 5-6 класах основної загальноосвітньої школи [49]. Однією з причин такого стану є те, що у навчальній діяльності дітей недостатньо реалізовуються питання найближчого застосування геометрії до життя, зв'язків геометрії з іншими галузями знань, оскільки пояснення учителем застосування геометрії, обмежується наведенням прикладів або ж демонстрацією.

Це свідчить про те, що питання створення пропедевтичного курсу геометрії з широким залученням таких компонентів як пошук і відкриття дитиною геометричних істин на основі досліду, практично-діяльнісний компонент, що має реалізовувати і міжпредметні зв'язки та створювати життєво-значущі дидактичні ситуації з формуванням в учнів відповідних умінь і навичок (цим положенням надавалось велике значення при побудові пропедевтичного курсу геометрії членами Київського фізико-математичного товариства), є актуальними для сучасної школи.

У тогочасних підручниках з математики не з'ясовувалось питання про суть аналітичного і синтетичного методів доведення задач, не ставилось завдання щодо навчання учнів їх

різницю, треба додати зменшуване і від суми відняти від'ємник (результат віднімання многочленів виводився на основі означення дії віднімання цілих невід'ємних чисел). При цьому увага звертається на те, що викладені положення, умови, правила й означення справджуються за умови можливості різниці й частки двох чисел.

Введення від'ємних чисел відбувається методом, відомим з теоретичної арифметики як "метод пар", що дістав у автора дидактичну обробку, та на основі принципу "загальності" (перманентності), за яким "всі викладені твердження для додатних чисел не мають виключень" і поширюються на випадок неможливої різниці [92, с. 468]. Поняття від'ємного числа у автора пов'язане із поняттям від'ємного многочлена, зокрема від'ємного двочлена, наприклад, (3-8), на який поширюються усі положення знайдені для додатних многочленів (у яких різниця можлива). Якщо застосувати до даного двочлена Положення 10 (від зменшуваного і від'ємника відняти одне і теж число), то він матиме вигляд (0-5), відкинувши 0 – матимемо простіший вигляд двочлена –5. За означенням, "число із знаком мінус перед ним є від'ємним числом". На відміну від від'ємного, додатні числа – "звичайні числа, що використовуються в арифметиці" [92, с. 468].

На основі правил додавання одночлена і многочлена; додавання та віднімання многочленів; множення многочленів виводяться правила (Положення №№ 15-18) суми, різниці та добутку додатних та від'ємних чисел.

Доводити у шкільному курсі алгебри правила додавання, віднімання, множення многочленів, під значенням символів букв яких розуміють не лише цілі невід'ємні (у автора додатні), але й від'ємні числа, В. Єрмаков вважає недоцільним.

Таким чином, В. Єрмаков рекомендував попередньо сформувати в учнів уміння перетворювати найпростіші алгебраїчні вирази, що містять дії додавання, віднімання та множення (додавання, віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен та многочлена на многочлен, при цьому одночлен мав вигляд одного символа). Далі знаходити значення таких виразів, при підстановці замість символів букв додатних та від'ємних чисел. Лише після такої необхідної пропедевтики приступати до випадків, коли одночлен представлений у вигляді добутку степенів множників та деякого числа (коефіцієнта). Це й було новизною у теорії й методиці навчання шкільної алгебри того періоду. У традиційному курсі алгебри А. Кисельова [113] зберігався лінійний порядок вивчення даної теми – дії над одночленами та многочленами були пов'язані із усією системою понять (одночлени цілі, дробові, раціональні, ірраціональні; коефіцієнт одночлена, подібні одночлени тощо). Наводились як прості, так і складні приклади одночленів та многочленів та дій над ними.

Зазначимо також, що традиційний спосіб означення дій над від'ємними числами, реалізований у підручнику алгебри А. Кисельова, полягав у введенні певних домовленостей та наслідків з них. Їх вивчення спиралось переважно на механічне запам'ятовування учнів, оскільки виведення деяких правил дій були складні (пов'язані із знанням попередніх правил та застосування означення дії віднімання, що переносилось на випадок неможливої різниці). У методиці В. Єрмакова правила виводились на основі уже вивчених законів дій над многочленами, що сприяло кращому засвоєнню й запам'ятовуванню, а також пригадуванню. Уявлення про особливості двох різних способів введення від'ємних чисел дає Додаток Д.

Ідея пропедевтики виконання дій над одночленами та многочленами (перетворень алгебраїчних виразів) добре розвинена у сучасному курсі шкільної математики. Так, записувати закони арифметичних дій у буквеній формі та обчислювати числові значення найпростіших буквених виразів учні вчаться у початковій школі. У 5-6 класах діти виконують найпростіші перетворення числових і буквених виразів на основі законів арифметичних дій та обернені перетворення, зокрема вчаться розкривати дужки, перед якими стоїть знак "–", додатний або від'ємний числовий та буквений множники, виносити спільний множник за дужки, зводити подібні доданки. Діти вчаться знаходити значення виразів, значення букв яких набувають як цілих, так і дробових чисел [254, с. 186-187]. Від'ємні числа та дії

розвиток просторового мислення учнів (з опорою на просторові уявлення, які мають діти) та на формування вміння робити нескладні висновки. Аналогічно в першій частині підручника відбувається ознайомлення і з наступними тілами.

За концентричною системою розміщений матеріал в другій (2 рік навчання) і третій (3-4 роки навчання) частинах підручника, де учні визначають кількісні міри лінійних розмірів геометричної фігури (на основі вимірювання довжин ліній), поверхневих розмірів (на основі вимірювання або обчислення за формулою площ плоских фігур та поверхонь тіл), просторових розмірів (на основі вимірювання або обчислення за формулою об'ємів тіл), градусні міри кутів, а також вивчають основні властивості геометричних елементів на індуктивно-лабораторній основі.

Зв'язок геометричного матеріалу з життям відбувається і за допомогою практичних вправ на місцевості. Виконуючи їх, учні вчаться користуватись такими приладами як екер (побудова прямих кутів на землі), вимірювальна стрічка (вимірювання відрізків прямої на місцевості), астролябія (вимірювання кутів на місцевості), ватерпас, рівень (визначення вертикального або горизонтального положення ліній). Це завдання О. Астряб розширює й урізноманітнює у наступних виданнях "Наочної геометрії" [16] Наведемо приклад такої задачі: "*Ходімо в поле. Проведіть там мотузком обвід кола й зазначте на ньому кілками точки півночі, півдня, сходу й заходу. Обведіть очима лінію, по якій обрій начебто перерізує небо. Який вигляд має лінія? – Вона зветься лінією обрію (горизонту). – Станьте в центрі вашого обводу кола й, дивлячись вздовж кілка, що визначає північну точку обводу кола, знайдіть на лінії обрію точку півночі, півдня, сходу і заходу.*

Для позначення точок півночі, півдня, сходу й заходу на обводі кола, використовується екер із закріпленим компасом. Необхідно поставити екер в центрі кола й за допомогою компаса провести прямі, що йдуть від екера на північ, південь, схід і захід. Прямі перетнуть коло в потрібних точках" [16, с. 46].

геометричних тіл" здійснюється попереднє ознайомлення з геометричними тілами: кубом, кулею, циліндром, пірамідою, конусом. В процесі вивчення матеріалу учні виготовляють тіла за готовими розгортками, вирізають з картоплі, мила, виліплюють з глини та воску, склеюють каркас фігури із сірників та ін., далі навчаються знаходити в навколишньому оточенні предмети, що мають форми вже знайомих фігур. Таким чином в свідомості учнів попередньо закріплюються образи основних просторових тіл.

Другий етап охоплює вивчення розділів: "Вивчення куба", "Вивчення прямокутної призми", "Вивчення піраміди", "Вивчення кулі", "Вивчення циліндра", "Вивчення конуса". Діти ознайомлюються з елементами просторових фігур. Так, при вивченні куба, на інтуїтивній основі, за допомогою системи доцільно підібраних задач експериментального типу і коротких пояснень до них, автор вводить поняття: грань, ребро і вершина куба; плоска, вертикальна і горизонтальна поверхні; передня (задня), ліва (права) і верхня (нижня) грані; основа, квадрат, прямий кут, ширина, висота.

У цьому ж розділі розглядаються питання-задачі, які вимагають від учня самостійних досліджень геометричних тіл та висновків про їх властивості, відтворення геометричного образу, використовуючи різні види діяльності: рух зовнішніх органів тіла (руки, очей, пальців руки), креслення, згинання паперу, виготовлення моделі тощо. Наприклад: "Скільки протібно мати квадратів і яку властивість вони повинні мати, щоб з них можна було скласти куб ?", "Вкажіть рукою продовження кожної грані", "Намалюйте в зошитах фігуру грані куба", "Зігніть двічі лист паперу довільної форми так, щоб отрималось чотири прямих кути", "Виріжте з картоплини або мила кулю". Автор пропонує завдання, на порівняння відповідних елементів досліджуваної фігури ("Порівняйте за допомогою нитки довжину всіх ребер вашого куба", "Порівняйте одне з одним розміри всіх 6 граней куба"), на визначення геометричних образів у навколишніх предметах ("Знайдіть прямі кути на підлозі, стелі, дошці, листі паперу"). Комплекс вправ, таким чином, розрахований на

над ними у сучасному курсі шкільної математики, як відомо, вводяться на основі ідеї розширення поняття про число, що передбачає дотримання наступних вимог:

1) означення поняття рівності;
2) означення поняття "більше", "менше", тобто встановлення критерію порівнянь нових чисел між собою і з раніш відомими числами;
3) означення дії додавання і множення;
4) перевірка справедливості законів дій, встановлених для вивчених раніше чисел.

Запропонована В. Єрмаковим ідея логічного обгрунтування правил дій над додатними і від'ємними числами, що спирається на "методі пар" в наш час досить добре розвинута в навчальному посібнику О. Н. Бекаревича [27], де автор, на нашу думку, здійснив вдале її поєднання з традиційним викладом шкільної теорії цілих чисел.

Велика увага на засіданнях Київського фізико-математичного товариства приділялась питанням наближених обчислень та удосконаленню таблиць логарифмів. Ґрунтовні доповіді з цієї теми були зроблені: В. П. Єрмаковим "О приближенных вычислениях" (1890 р.), "Два правила приближенных вычислений" (1892 р.); Г. О. Дивільковським "Приближенные вычисления" (1903 р.); П. О. Долгушиним "Вычисления по приближению" (1907 р.), "О линейном интерполировании в средней школе" (1908 р.), "О вычислении числа π" (1908 р.), "О рациональном интерполировании" (1908 р.), "Теория вычисления за таблицами" (1910 р.), "О таблицах" (1913 р.), "Вычисление корней квадратных уравнений по приближению" (1913 р.), "О формуле для ошибки при определении числа за логарифмом" (1913 р.); М. В. Оглобліним "Об определении степени точности при логарифмических вычислениях" (1909 р.).

Вивчення наближених обчислень у тогочасній школі (повторювальний курс реальних училищ) мотивувалось існуванням випадків, коли точні результати виконання дій над числами могли бути не обов'язковими [112]. Це передбачало доцільність заміни даних чисел числами із меншою кількістю цифр та виконання над ними дій скороченими способами, які б давали у результаті наближені значення.

Все ж теорія наближених обчислень, що викладалась у шкільному курсі арифметики, характеризувалась певними недоліками, які були пов'язані зі складністю обґрунтувань правил наближених обчислень (зокрема, їх громіздкістю), певними розходженнями з життєвою практикою, що вимагала формування в учнів навичок виконання наближених розрахунків з більшою точністю, зокрема, оволодіння методом строгого врахування похибок, більш раннім вивченням наближених обчислень та широким застосуванням теорії у курсах математичних дисциплін (та дисциплін з ними суміжних), розробки нової символіки (оскільки знак наближеної рівності не відрізнявся від знака рівності), формування уявлення про способи утворення наближених значень величин та ін.

З доповіддю "Два правила приближенных вычислений" В. П. Єрмаков виступив на засіданні Товариства 5 березня 1892 року [191]. Відстоюючи позицію введення теорії наближених обчислень до курсу математики усіх середніх навчальних закладів, В. Єрмаков намагався викласти в короткій і доступній формі основні її положення. Метою доповіді було дати елементарне логічне обґрунтування правил виконання дій над наближеними значеннями величин, використання яких приводило б до результату дій з усіма правильними цифрами.

Не вдаючись до повної методичної обробки даної теорії, автор дає визначення таких її основних понять: абсолютної і відносної похибки наближених значень, границі абсолютної і відносної похибки, поняття значущої правильної цифри наближеного значення, розкриває поняття абсолютної і відносної точності наближення.

Індуктивним шляхом, на конкретних прикладах, з'ясовується залежність границі відносної похибки від числа значущих цифр. Вчений для прикладу бере два числа, кількість правильних значущих цифр яких однакова, але якщо перше число є одиницею деякого розряду – розпочинає розряд, то

першочергове завдання геометрії – землемірство; провішування ліній, нівелювання, вимірювання висот будинків і ширини річки та інші подібні задачі, що ускладнюються в міру набуття знань і звички до праці, зацікавлюють дітей і дають їм більш яскраве уявлення про геометричні факти…" [56, с. 48]. Ця доповідь була заслухана й обговорена на засіданнях Товариства 2 березня і 13 квітня 1909 р. та видана окремим примірником під назвою "К вопросу о реформе преподавания математики" (1910).

В 1909 році виходить перша праця О. Астряба "Наглядная геометрия" [15], в якій достатньо повно реалізовані особливості побудови пропедевтичного курсу, розвинуті М. Володкевичем. Відзначимо також певну відповідність курсу, запропонованого О. Астрябом в його "Наглядной геометрии", проекту плану, складеного комісією Київського фізико-математичного товариства: підручник розрахований на чотири роки навчання і був створений для учнів підготовчих та I-III класів середніх навчальних закладів, реалізував принцип фузіонізму (одночасного вивчення планіметрії та стереометрії), передбачав вивчення всього обсягу матеріалу, запропонованого в проекті плану (крім многогранних кутів та з невеликими відмінностями щодо послідовності вивчення тем, курс О. Астряба був більш розширеним).

Характерною особливістю курсу наочної геометрії О. Астряба [15] було концентричне розміщення матеріалу, що передбачало більш раціональний шлях, ніж вивчення елементів геометрії в лінійному порядку. За концентричною системою один і той же матеріал вивчається в кілька етапів (циклів), де кожному наступному етапу відповідає порівняно вищий ступінь складності вивчення, ніж попередньому. В результаті цього, повторення матеріалу на вищих рівнях полегшує його розуміння й запам'ятовування та оволодіння складнішими логічними операціями мислення (на основі аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення та інших прийомів розумової діяльності).

Матеріал першої частини підручника (перший рік навчання) передбачає ознайомлення дітей з основними геометричними тілами в два етапи. На першому етапі в розділі "Виготовлення геометричний матеріал, самостійно вимірювати, порівнювати, робити нескладні висновки та відкривати нові істини [56].

Основні особливості побудови пропедевтичного курсу геометрії за М.Володкевичем зводяться до наступного:

– все вивчення геометрії в цей період засноване на принципах самодіяльності, активності та творчості дитини, що сприятимуть збудженню інтересу до предмету;

– творча робота, яку виконує учень, повинна бути пов’язана з колом його інтересів; тому і зміст задач повинен добиратись із знайомого і близького йому середовища;

– матеріал для занять з геометрії можна і необхідно черпати не лише з практичного життя, а й з різних наук про природу;

– в ранньому дитинстві вивчення геометрії повинно бути тільки грою;

– одним із завдань геометрії є розвиток просторової уяви;

– перехід до строгого доведення необхідно робити поступово; в підготовчому курсі повинна мати місце і дедукція, яка неодмінно перевіряється експериментально [56].

Важливого значення М. Володкевич надавав формуванню практичних умінь учнів: "діти повинні тренувати не лише око, але й руку, вони повинні вимірювати, ліпити, відчувати на дотик, ділити, складати, склеювати, малювати, розвивати окомір", "Належну частину роботи повинні займати фактичні вимірювання довжин, поверхонь, об’ємів" [56, с. 41,48].

М. Володкевич вважав, що "тільки постійно висуваючи зв’язок математики з іншими галузями знань, забезпечуючи постійно практичне застосування набутих математичних знань, ми зробимо математику могутньою зброєю для досягнення розумового розвитку" [56, с. 38].

Автор звертав увагу й на те, що дітей необхідно навчати "дивитись на навколишній світ з кількісної і геометричної точки зору". Діти повинні "знаходити знайомі їм геометричні форми у повсякденних речах – меблях, деревах, будовах різного роду, згибах ріки або вулиці". М. Володкевич рекомендував "на всіх ступенях" вивчення предмета "займатись тим, що складало

другому числу не вистачає до закінчення деякого розряду розрядної одиниці – закінчує розряд. На цій основі встановлюється зв’язок меж границі відносної похибки числа з даною кількістю значущих цифр:

"Ось два числа з однією значущою цифрою: 0,09 0,001.
Границі їх абсолютних похибок: 0,01 0,001.
Границі їх відносних похибок: $\frac{0,01}{0,09}=\frac{1}{9}>0,1$ $\frac{0,001}{0,001}=1.$

Отже, якщо наближене значення числа має правильну значущу цифру, то границя його відносної похибки лежить між 0,1 і 1.

Візьмемо два числа з двома значущими цифрами: 9,9 0,010.
Границі їх абсолютних похибок: 0,1 0,001.
Границі їх відносних похибок: $\frac{0,1}{9,9}=\frac{1}{99}>0,01$ $\frac{0,001}{0,010}=0,1.$

Звідси робимо висновок: якщо в наближеному числі дві правильні значущі цифри, то границя відносної похибки лежить між 0,01 і 0,1.

Аналогічно для чисел з трьома правильними значущими цифрами 99,9 0,0100
границі відносних похибок дорівнюватимуть:

$$\frac{0,1}{99,9}=\frac{1}{999}>0,001 \qquad \frac{0,0001}{0,0100}=0,01$$

і так далі" [88, с. 361].

В. П. Єрмаков наводить логічне доведення двох теорем: теореми про границю абсолютної похибки суми і різниці наближених значень чисел та теореми про границю відносної похибки добутку і частки наближених значень чисел. Їх наслідками є відповідно два правила виконання дій над наближеними числами.

Перше правило. "При додаванні і відніманні декількох чисел кількість цифр, що стоять після коми в результаті, не повинна перевищувати кількості подібних цифр кожного із даних чисел зокрема" [там само].

Друге правило. "При множенні і діленні декількох наближених значень чисел, кількість всіх значущих цифр результату не повинна перевищувати кількості значущих цифр кожного числа окремо" [88, с. 362-363].

У сучасній школі, до переходу на програми з математики 12-річної школи, правила дій над наближеними значеннями величин вивчались у 9 класі під назвою "спосіб підрахунку правильних цифр". Вони мали той самий зміст, що й правила запропоновані В. Єрмаковим, але за відсутністю їх доведення. Це пояснювалось тим, що строге доведення спирається ще й на теорію імовірностей, яка за традицією не використовується в шкільній практиці при вивченні теми наближених обчислень [167, с. 82]. У деяких підручниках, наприклад [24, с. 257-260], наводилось їх ілюстративне обґрунтування. На сьогоднішній день правила наближених обчислень вилучені з програми математики [230], як такі, що втратили свою актуальність при використанні у розрахунках сучасних електронних обчислювальних засобів. Ми поділяємо думку О. Шевельової, В. Швеця, В. Кліндухової, Г. Корінь [115, 126, 293] та ін. сучасних методистів про те, що названа тема має загальноосвітню (формується складова обчислювальної й вимірювальної культури), прикладну та розвивальну цінність і має займати належне місце в шкільному курсі математики.

На нашу думку, виклад теорії наближених обчислень, запропонований В. Єрмаковим має наступні позитивні особливості.

1) Можливість пояснити ситуації при ілюстративному обґрунтуванні правил, коли відбувається втрата точності на одну цифру (наприклад, при множенні наближених значень, коли добуток перших цифр множників менше 10).

2) Усвідомлення наближеного характеру правил.

3) Логічна завершеність теорії наближених обчислень без строгого врахування похибок.

ознайомлення з найпростішими просторовими співвідношеннями у відомій системі повинні розпочатись ще до вступу в І клас (в підготовчому класі) і продовжуватись в І і в ІІ класах, а може бути і в ІІІ-му" [306, с. 10].

Ідея викладу пропедевтичного курсу геометрії індуктивно-лабораторним методом згодом була обґрунтована на засіданнях товариства М. М. Володкевичем в доповіді "Обоснование пропедевтического курса геометрии" (1909 р.) і реалізована О. М. Астрябом в підручнику "Наглядная геометрия" (1909 р.).

Проаналізувавши стан викладання геометрії в середніх загальноосвітніх навчальних закладах Росії та досвід країн Західної Європи й Америки щодо введення пропедевтичного курсу геометрії, М. М. Володкевич доводить потребу в підготовчому курсі геометрії, що ґрунтується на інтуїції, досліді та індукції. Він доходить таких висновків:

– геометрія створена на інтуїтивній основі ("…в ланцюгу доведення ми повинні нарешті дійти до таких положень, які вже ні з чого не можуть бути виведені і тому є результатом безпосереднього сприймання; як би ми не зменшували числа аксіом, вони все одно залишаться", "…будь-яке означення являє собою відомості більш складного поняття, що спирається на більш просте поняття; в цьому процесі ми неодмінно дійдемо до найпростіших понять, які вже не зводяться ні до яких інших і сприймаються як дані");

– за основним законом біології індивідум в своєму розвитку повторює історію розвитку роду. Відповідно до цього закону вивчення геометрії в школі повинно йти тим шляхом, яким здійснювалось в історичному житті людини набуття і розширення геометричних знань; тобто необхідно спочатку накопичити конкретний матеріал, а потім починати вивчати геометричні факти узагальнено;

– дитина за своєю природою є дослідником по відношенню до зовнішнього світу. Тому сприймання геометричних фактів необхідно поставити у відповідність з її природою – діяльною і творчою. Тобто, під керівництвом вчителя учень повинен самостійно досліджувати запропонований доступний для нього чином, деякі теореми, знайдені для правильних многокутників, без особливих міркувань переносяться на круг" [97, с. 332].

З меншою науковою строгістю, ніж у підручнику А. Кисельова [114], пропонується введення поняття довжини кола, а також доведення розглянутої властивості (2) у сучасних підручниках геометрії. Так, відмінність у підручнику геометрії авторів Г. П. Бевз та ін. [18, с.188-189] полягає у тому, що поняття границі діти мають зрозуміти інтуїтивно, а спосіб границь використовується неявно. У підручнику О. В. Погорєлова [223] дається наочне уявлення про довжину кола, яка дуже мало відрізняється від периметра вписаного у нього опуклого багатокутника, з "досить малими сторонами". Введення такої умови "дозволяє" замість однієї величини брати іншу, що й робить автор при виведенні властивості (2) – використовується ідея граничного переходу (яка раніше була запропонована В. П. Єрмаковим).

Як відомо, підготовчі (пропедевтичні) курси геометрії, які були розроблені вітчизняними методистами М. Косинським ("Наочна геометрія", 1871), С. Шохором-Троцьким ("Геометрия на задачах", 1908), О. Астрябом ("Наглядная геометрия", 1909) й ін. не вивчались у курсі геометрії гімназій та реальних училищ.

Питання включення початкових відомостей з геометрії у вигляді пропедевтичного (підготовчого) курсу, що мав передувати систематичному викладу геометричного матеріалу і полегшувати його сприймання учнями, до програм середніх навчальних закладів, неодноразово розглядалось на засіданнях Київського фізико-математичного товариства. Особливо помітна роль у цьому належить К. М. Щербині та М. М. Володкевичу.

У доповіді К. М. Щербини "Обзор главнейших трудов и мнений по вопросу улучшения программ математики в русской средней школе" (1907 р.) відзначається, що введення підготовчого курсу геометрії "є необхідним не лише тому, що при його вивченні набуваються основні геометричні поняття, а й тому, що без знання цього курсу не може бути свідомого вивчення в молодших класах географії та природознавства". Педагог також зазначав, що "опрацювання основних геометричних понять і

4) Рівень строгості викладу теорії відповідає віковим особливостям учнів 9 класу (вимагає опанування учнями теорії числових нерівностей).

Розроблений В. Єрмаковим виклад теорії наближених обчислень все ж не позбавлений деяких недоліків. Введення нових понять не супроводжується прикладами. Більш чіткого обґрунтування потребують наслідки із теорем у вигляді правил, оскільки границя абсолютної похибки (правило 1) буде більшою за розрядну одиницю останньої цифри числа з найбільшою абсолютною похибкою, то і кількість десяткових цифр результату має бути меншою ніж у компонента дії з найменшою кількістю десяткових знаків (а за правилом 1 вона може бути як меншою так і рівною). У сучасних навчальних посібниках, наприклад [138], [291], це пояснюється тим, що в записі числа можна залишати 1 сумнівну цифру (За принципом М. Крилова), яка відрізняється від даної не більше як на одиницю. Існує й інше пояснення, наприклад [26], за яким абсолютна похибка не досягає свого граничного значення при умові, якщо в кожному із компонентів дії всі цифри правильні.

Таким чином, виклад теорії наближених обчислень, запропонованої В. П. Єрмаковим, може бути врахованим при розробці нової методичної концепції вивчення теми "Наближені обчислення".

Результати досліджень члена Київського фізико-математичного товариства П. О. Долгушина з розробки теорії та методики наближених обчислень (все це опрацьовувалось ним у 1894-1904 рр. на заняттях в реальному училищі та в жіночій гімназії) викладені у його посібниках "Вычисления по приближению", що були надруковані у додатках до протоколів Товариства [205] та видані окремими примірниками [79, 80].

Перший випуск призначався для учнів старших класів середньої школи. Виклад матеріалу має такі дидактичні переваги: одночасно зі строго-логічним викладом (зокрема, обґрунтуванням тверджень, виведенням правил) розглядається й ілюстративне його пояснення на числовому прикладі (лівий стовпець – числовий приклад, правий – розгляд питання в загальному вигляді). У посібнику достатньо уваги приділяється й застосуванню теорії до розв’язування задач арифметичного, алгебраїчного, геометричного та фізичного змісту. У кінці кожного розділу формулюються короткі теоретичні висновки.

Виклад починається з заокруглення десяткових дробів і введення поняття нижчої і вищої *границі* (межі) наближеного числа. Далі вводиться поняття *приросту*: "Різниця між вищою і нижчою границею числа зветься приростом" [79, с. 4]. Замість того, щоб вказувати обидві межі наближеного числа, можна зазначити одну з них (звичайно нижчу) і приріст. Приріст позначався маленькою цифрою внизу: наприклад, $\pi \approx 3{,}140_2$, тобто $3{,}140 \langle \pi \langle 3{,}142$ (знак "наближено дорівнює" у автора позначався " $\supset$"). Розроблені теорія та методика вивчення наближених обчислень на основі "методу приростів" – обчислення приростів результатів арифметичних дій за приростами компонентів – були на той час новизною в теорії елементарних наближених обчислень. В доступній для учнів формі формулювались відповідні правила для обчислення приростів результатів дій [79].

1) Приріст суми дорівнює сумі приростів доданків.

2) Приріст різниці дорівнює сумі приростів зменшуваного та від’ємника.

3) Приріст добутку дорівнює сумі добутку нижчої межі одного із співмножників на приріст другого і добутку вищої межі другого співмножника на приріст першого.

4) Приріст частки дорівнює частці від ділення на нижчу межу дільника суми остачі (мається на увазі остача від ділення нижчої межі діленого на вищу межу дільника) приросту діленого і добутку приросту дільника на нижчу межу частки.

5) Приріст квадратного кореня дорівнює частці від ділення суми остачі і приросту підкореневого числа на подвоєну нижчу межу кореня.

Далі автором вводяться поняття про "точні" і "вірні" цифри: "Якщо приріст числа дорівнює нулю або одиниці, всі цифри числа точні; якщо приріст більше одиниці, цифри числа назвемо вірними" [79, с. 14]. Наступним давалось пояснення: "лічбу цифр ведемо, починаючи з першої значущої з ліва і

потребує складніших міркувань, з іншого – пов’язаний із застосуванням способу розв’язання загальної задачі на обчислення сум рядів до розв’язування певного класу задач).

2.3.3. Розвиток змісту геометрії в працях Київського фізико-математичного товариства

У тогочасних підручниках з геометрії, наприклад, підручнику А. Кисельова довжина кола означалась через поняття границі: "за довжину кола приймають границю, до якої прямує периметр, вписаного у це коло опуклого багатокутника, коли сторони його необмежено зменшуються" [114, с. 216]. А виведення формули довжини кола – ґрунтувалось на способі границь, суть якого розкривало наступне положення: "Якщо яка-небудь рівність, що містить змінні величини, що прямують до границь, залишається вірною при всіх значеннях цих змінних, то вона залишається вірною і тоді, коли на місце змінних підставимо їх границі" [114, с. 214]. Так, теорема про відношення довжин двох кіл доводилась шляхом розгляду відношення периметрів правильних многокутників (периметри вважались змінними величинами у зв’язку з необмеженим збільшенням кількості сторін), вписаних у дані кола. Оскільки змінні величини зберігали одне й те ж відношення $\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (1), то й границі їх (тобто довжини кіл) мають те ж відношення: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (2).

Свої методичні зауваження з приводу удосконалення викладання курсу геометрії в загальноосвітній школі представив в доповіді "О преподавании геометрии" (1895 р.) на засіданні Товариства В. П. Єрмаков.

Удосконаленню змісту навчального предмету, як вважає вчений, буде сприяти виключення теорії границь. Він пропонує обчислювати довжину кола і площу круга на основі такого міркування: "круг розглядати як правильний многокутник з нескінченно великим числом нескінченно-малих сторін. Таким

Для розв’язання цієї задачі береться інший ряд, члени якого виражаються наступним чином: $v_1 = a_0 a_1 a_2 a_3$, $v_2 = a_1 a_2 a_3 a_4$, … $v_{n+1} = a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}$, і нехай $v_1 + v_2 + ... + v_n + v_{n+1} = A.$

Легко бачити, що $v_2 - v_1 = u_1(a_4 - a_0) = 4du_1$, де d – різниця прогресії. Аналогічно $v_3 - v_2 = u_2\left(a_5 - a_1\right) = 4du_2$, $v_4 - v_3 = 4du_3$, …, $v_{n+1} - v_n = 4du_n$. Додавши ці рівності, отримаємо $A - v_1 - (A - v_{n+1}) = 4d(u_1 + u_2 + ... + u_n)$, звідки $S = \dfrac{v_{n+1} - v_1}{4d}$.

Наприклад, якщо $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2)$, то $v_{n+1} = n(n+1)(n+2)(n+3)$, $v_1 = 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 0$, $S = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

Аналогічним способом знайдемо, що

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ .$$

Користуючись цими виразами, можна знайти суми однакових степенів натурального ряду. Позначивши через $S_2 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, а через $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$, помітимо, що $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n(n+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + ... + n(n+1) = S_2 + S_1$, звідки $S_2 = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \dfrac{1}{2}n(n+1)$. Аналогічно для $S_3 = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, помічаємо, що $1\cdot 2\cdot 3 + ... + n(n+1)(n+2) = S_3 + 2S_2 + 2S_1$, звідки $S_3 = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n(n+1)$ [266].

У сучасних посібниках та задачниках, призначених для поглибленого вивчення шкільного курсу математики, а також для підготовки учнів до олімпіад, наприклад, [131, 246], в журналі "У світі математики" та ін. наводяться різні способи знаходження формул сум рядів різних видів, в тому числі й знаходження суми однакових степенів натурального ряду (в конкретному випадку). Проте спосіб Г. Флоринського є оригінальним (з одного боку не

закінчуючи тією, при якій стоїть приріст. Якщо в числі нараховано *k* цифр і сума останньої цифри з приростом не перевищує десяти, то в цьому числі *k-1* точна цифра…, якщо ж згадана сума більша десяти, а останній цифрі передують *i* дев’яток, то число точних цифр дорівнює *k-2-i*. Наприклад, у числі $A \approx 2{,}7996_5 \approx 2{,}799_2 \approx 2{,}79_2 \approx 2{,}7_2 \approx 2_1$ п’ять вірних і лише одна точна цифра (5 – 2 – 2 = 1); у числі $1{,}9995_8$ немає жодної точної цифри" [79, с. 14]. Автор вводить ще й таке поняття як *значність*: "Число вірних цифр в *a,* або число точних цифр при прирості, що дорівнює одиниці, називаємо значністю *a* і позначаємо символом *ц(a)*.

Так, $\text{ц}(169{,}61_6) = 5$, $\text{ц}(0{,}0071_2) = 2$, $\text{ц}(3{,}14159_1) = 6$" [там само]. У зв’язку з введеним поняттям розглядаються два види задач: 1) "Знайти результат найбільшої значності при даній значності компонентів"; 2) "Вказати значність компонентів для даної значності результату дії".

Другий випуск "Вычислений по приближению" присвячений теоретичному обґрунтуванню питання про "значність результату дії при даній значності компонентів і однозначному прирості", а також теорії скорочених обчислень. Ці питання цікаві для сучасності як спроба елементарного обґрунтування правил наближених обчислень. П. Долгушин запропонував також програму вровадження наближених обчислень в середню школу (гімназію та реальне училище), починаючи з молодших класів [79]. "Метод приростів" в дидактичній обробці П. Доглушина не набув належної популярності в радянській школі.

На сьогоднішній день розроблена концепція вивчення наближених обчислень (дослідження В. М Кліндухової), у якій надається перевага методу обчислень наближених значень зі строгим урахуванням похибок ("методу меж"), а також передбачається вивчення теми у декілька етапів, починаючи з початкової школи [116]. Таким чином, відповідні ідеї П. О. Долгушина щодо грунтовного вивчення наближених обчислень є актуальними і на сучасному етапі модернізації шкільної математичної освіти.

У середніх навчальних закладах того часу, як відомо, числові значення алгебраїчних виразів обчислювались за допомогою семизначних або п'ятизначних таблиць логарифмів. Семизначні логарифми з усіма необхідними доповненнями являли собою книгу обсягом біля 500 сторінок [63, с.224]. Щоб навчити учнів користуватись такими таблицями, необхідно було затратити чимало часу, а результи обчислень діставали з зайвою точністю, якою зазвичай нехтують в життєвій практиці. Спроба застосування чотиризначних таблиць в школі була зроблена ще в 1844 році в Німеччині. А до 1895 році в країні було розроблено близько 20 чотиризначних таблиць. Проте впроваджувались вони в школу дуже повільно (в 1890 р. чотиризначні таблиці використовувались тільки в одній гімназії Німеччини) [72, с. 119].

Київське фізико-математичне товариство поставило та вдало розв'язало проблему переходу на чотиризначні таблиці логарифмів у середніх навчальних закладах. Майже одночасно такі таблиці були складені членами товариства – В. Лорченко і М. Оглобліним (1910 р.) та П. Долгушиним (1911).

Введення чисел нової природи в курсі алгебри гімназій та реальних училищ того періоду мало метою узагальнити деякі алгебраїчні твердження й формули. Тому, наприклад, від'ємні числа у підручнику алгебри А. Кисельова [113] вводились разом з вивченням теми "Дії над багаточленами", а поняття дійсного числа вводилось раніше числа ірраціонального під час вивчення теми "Добування кореня із одночленів". Не повно розкривались і властивості нових числових систем. Все це не сприяло утворенню чіткого уявлення про числові множини та відношення між ними.

Вперше на засіданні Товариства питання про побудову курсів арифметики і алгебри середньої школи на основі головної ідеї розширення поняття про число та пов'язане з ним розширення поняття про операцію було підняте учасником Товариства П. І. Матковським. У своїй доповіді "Выделения некоторых законов алгебры и образование понятия о новом числе" (1890), автор наводить елементарний виклад методології даного питання, який, на його думку, "певним чином може бути використаний і в шкільній практиці" [151, с. 396].

викладеним способом. Таким чином, з одного боку, будуть приведені до системи знання учнів з теорії невизначених рівнянь 1-го степеня, уже здобуті, починаючи з 7-го класу, з іншого – вивчення матеріалу сприятиме більш міцному закріпленню теорії розв'язування систем лінійних рівнянь, оскільки йдеться про її застосування.

Розширенню уявлення учнів про позиційні системи числення та ознайомлення з деякими питаннями теорії чисел присвячена доповідь викладача математики Києво-Печерської гімназії М. О. Сорокіна (1861-1896) "О сумме цифр в различных системах счисления" (1890).

Зокрема, автор наводить елементарне виведення формули суми цифр натурального числа $(N)_m$ (де N є числом десяткової системи числення), записаного в системі числення m, для знаходження якої не потрібне перетворення числа з десяткової системи в систему m:

$$S(N)_m = N-(m-1)\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{N}{m^k}\right] \qquad (1).$$

М. Сорокін також показує застосування формули (1) для перевірки чотирьох арифметичних дій в десятковій системі числення [258, с. 161-169].

25 жовтня 1904 р. з доповіддю "К вопросу о нахождении сумм одинаковых степеней членов арифметической прогрессии" на засіданні товариства виступив викладач математики Київського реального училища Г. Флоринський (надрукована у "Вестнике опытной физики и элементарной математики" за 1904 р. № 371). Автор наводить спосіб виведення формули суми однакових степенів арифметичної прогресії, що грунтується на використанні формули бінома Ньютона, та один із способів знаходження суми однакових степенів натурального ряду у зв'язку з розв'язанням загальної задачі на знаходження суми рядів. Нехай дано арифметичну прогресію: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ І нехай потрібно знайти вираз для суми такого ряду $S = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_na_{n+1}a_{n+2}$, або $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, де $u_k = a_ka_{k+1}a_{k+2}$.

Де μ – довільне ціле число, $X, Y, Z, \dots T$ – один із часткових розв'язків рівняння (1), та $X_0, Y_0, Z_0, \dots T_0$ – один із часткових розв'язків рівняння для випадку $u = 0$ [92].

Детальніше ознайомитись із способом розв'язування рівнянь, запропонованого Д. Єфремовим, можна у Додатку Є.

Автор зупиняється також і на розв'язуванні системи невизначених рівнянь 1-го степеня. Він розглядає два способи розв'язування в цілих числах системи $m + 1$ лінійних рівнянь з $m + n$ невідомими: 1) шляхом виключення m невідомих; 2) шляхом поступового розв'язування одного із невизначених рівнянь системи та підстановки його розв'язків до решти рівнянь. За допомогою кожного із способів система невизначених $m + 1$ лінійних рівнянь з $m + n$ невідомими зводиться до розв'язування одного рівняння з n невідомими, розв'язки якого виражаються через $n – 1$ довільних величин [99, с. 41-47].

У сучасних програмах для факультативного курсу з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (авт. М. І. Бурда, В. Г. Бевз, Н. С. Прокопенко) передбачено вивчення в 7 класі найпростіших діофантових рівнянь, а в 9 класі – системи діофантових рівнянь [231, с 165]. У програмах факультативного курсу для учнів 9-го класу з поглибленим вивченням математики (авт. Н. О. Сербіна) до розділу "Діофантові рівняння" входять такі теми: Лінійне рівняння з цілими коефіцієнтами. Частковий розв'язок; Діофантові рівняння вищих степенів. Системи діофантових рівнянь.

Метою цього курсу є "навчити застосовувати різні методи для розв'язування діофантових рівнянь та їх систем" [231, с 223].

Запропонований Д. Єфремовим спосіб розв'язування невизначених рівнянь 1-го степеня буде зрозумілим для учнів лише після ознайомлення з деякими елементами лінійної алгебри (теорія визначників, матриці) та з розв'язуванням систем лінійних рівнянь (метод Крамера, метод Гаусса). Оскільки ці теми можуть вивчатися на спеціальних курсах за вибором у старшій школі (поглиблений курс математики) [228], на нашу думку, існує можливість розглянути після вивчення вказаних тем і розв'язування діофантових рівнянь в цілих числах вище

У пропонованій теорії П. І. Матковського використовується множинний підхід (хоча даний термін і не вживається). Головна увага при цьому приділяється операціям та їх властивостям, з якими пов'язане вироблення поняття числа розширеної числової множини. Всі операції над числами автор поділяє на прямі (тетичні) й обернені (літичні). Розглянувши спочатку властивості цих операцій та зв'язки між ними для чисел натурального ряду, П. Матковський узагальнює теорію для 4 перших арифметичних дій для довільної множини чисел ("системи" у автора) та визначає наслідки, що "випливають із даних формальних тверджень про ту чи іншу операцію" [151, с. 389]. Із законів, що виражають зв'язок між операціями тезиса $a \circ b$ і лізиса $a \cup b$, автор доповіді виділяє два важливих співвідношення, що слугують основою розширення числової множини чисел ("системи чисел"):

1) $(a \cup b) \circ (c \cup d) = (a \circ c) \cup (b \circ d)$;

> >

2) якщо $a \cup b = c \cup d$, , то $a \circ d = b \circ c$ і навпаки.

< <

Розширення попередньої числової множини мотивується необхідністю знаходження числа x, яке б задовольняло рівність $x \circ b = a$, якщо в попередній системі такого числа немає [151, с. 392].

У доповіді чітко виділяється послідовність етапів формування поняття нового числа, які є загальноприйнятими і у сучасних шкільних підручниках з математики:

1) мотивація введення нового числа;
2) означення поняття рівності;
3) означення поняття більше, менше;
4) означення прямої дії (додавання, множення);
5) доведення, що закони дій, встановлені для вивчених раніше чисел справедливі і для нових чисел;
6) означення оберненої дії (віднімання, ділення);

7) поширення справедливості законів, що виражають зв’язок прямих і обернених дій встановлених для початкового ряду чисел, на розширену множину чисел.

Розглянутий спосіб введення нових чисел реалізований автором в його підручнику "Начала алгебры" (1890 р.) [152]. Більш детально з ним можна ознайомитись у Додатку Е.

На думку П. Матковського, кращому усвідомленню ідеї розширення поняття про число має сприяти їх геометрична інтерпретація. Це питання розглянуте автором на засіданні товариства в доповіді "Геометрическое изображение чисел" (1891) та опрацьоване, як окремий параграф з відповідною назвою, в підручнику [152].

Низка доповідей членів Київського фізико-математичного товариства була присвячена питанням, що поглиблювали і розширювали курс шкільної алгебри та мали на меті, насамперед, розвиток математичних здібностей тих учнів, які виявляють інтерес до більш ґрунтовного вивчення предмета та пов’язуватимуть своє післягімназійне навчання зі спеціальністю математика.

На засіданні Київського фізико-математичного товариства 27 вересня 1890 р. В. Єрмаков від імені іногороднього члена товариства Д. Єфремова (1859-1912) – інспектора та викладача школи колористів при Іваново-Вознесенському реальному училищі – виклав доповідь "Общее решение в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени". Ця доповідь була надрукована у "Вестнике опытной физики и элементарной математики" (№№ 97, 99). Зазначимо, що у тогочасних підручниках значну увагу приділяли дослідженню і розв’язуванню найпростіших діофантових (невизначених) рівнянь та їх систем 1-го степеня з цілими або натуральними невідомими, які вивчали в 7 класі гімназій. Зокрема, в підручнику А. Кисельова [113] після введення поняття невизначених рівнянь з цілими невідомими з’ясовувалось: 1) коли невизначені рівняння виду $ax+by=c$, де *a, b, c* – додатні або від’ємні числа (взаємно прості), не мають цілих розв’язків; 2) часткові випадки, коли невизначені лінійні рівняння 1-го степеня мають розв’язки в

цілих числах (якщо *a* або *b* дорівнює 1; якщо $c=0$); 3) знаходження цілих розв’язків невизначених рівнянь в загальному випадку *методом послідовного ділення коефіцієнтів*;

Після цього давалось виведення загальних формул $x=\alpha\mp bt,\ \ y=\beta\pm at$, де α і β – будь-який частковий розв’язок рівняння $ax+by=c$, t – довільне ціле число. Для знаходження натуральних розв’язків невизначених рівнянь із множини цілих розв’язків необхідно було виділити ті, які б задовольняли системі нерівностей:

$$\begin{cases}\alpha-bt>0;\\ \beta+at>0.\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}\alpha+bt>0;\\ \beta-at>0.\end{cases}$$

Систему двох рівнянь 1-го степеня з трьома невідомими рекомендувалось розв’язувати зведенням її до лінійного рівняння з двома невідомими шляхом виключення третьої змінної [113, с. 229].

Д. Єфремов пропонує ознайомити учнів з розв’язуванням невизначених рівнянь 1-го степеня на основі теорії визначників.

Так, рівняння виду: $ax+by+cz+...+kt=u$ (1),
де *a*, *b*… *k*, *u* – цілі числа (взаємно прості). Автор доповнює системою з (*n* – 1) рівнянь з тими самими невідомими при деяких коефіцієнтах (які необхідно підібрати). Це дозволяє застосувати метод Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь *n*-го степеня. Педагог обґрунтовує спосіб підбору коефіцієнтів при невідомих таким чином, щоб визначник системи дорівнював одиниці. Тоді загальні розв’язки даної системи *n* – рівнянь з *n* – невідомими, а отже й рівняння (1) знаходяться за формулами: $\mathrm{x}=\Delta_\mathrm{x}$, $\mathrm{y}=\Delta_\mathrm{y}$, $\mathrm{z}=\Delta_\mathrm{z},\dots$, $\mathrm{t}=\Delta_\mathrm{t}$ (2), де кожен із розв’язків виражається цілими багаточленами 1-го степеня від *n* – 1 змінних (u_1, u_2, $\dots u_{n-1}$.). На конкретному прикладі автор показує знаходження загального розв’язку даного рівняння у вигляді:

$$\mathrm{x}=\mathrm{X}+\mu\mathrm{X}_0,\ \mathrm{y}=\mathrm{Y}+\mu\mathrm{Y}_0,\ \mathrm{z}=\mathrm{Z}+\mu\mathrm{Z}_0...,\ \mathrm{t}=\mathrm{T}+\mu\mathrm{T}_0,\ \ (3),$$