7. А. В. Ефимов, Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, № 2, 1960.
8. А. В. Ефимов, О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, № 1, 1958.
9. С. М. Никольский, Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т 10, № 3, 1946.
10. С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский, О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 88, 1967.
11. В. И. Бердышев, Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, № 3, 1965.
12. Н. П. Корнейчук, О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна — Рогозинского, ДАН СССР, т. 125, № 2, 1959.
13. Н. П. Корнейчук, Об оценке приближений класса H^α тригонометрическими многочленами, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, М., 1964.
14. А. В. Ефимов, Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, Матем. сб., т. 54, № 1, 1961.

Поступила 17.VI 1971 г.
Черкасский педагогический институт

УДК 517.946

Теоремы об изоморфизмах для эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными

Ю. В. Костарчук, Я. А. Ройтберг

Теоремы об изоморфизмах для эллиптических граничных задач с нормальными граничными условиями устанавливались в работах ряда математиков и нашли многочисленные приложения (см. [1—10]). В [11] была установлена теорема об изоморфизмах без предположениия о нормальности граничных выражений. В данной работе устанавливаем ряд других теорем об изоморфизмах; показываем, что известные теоремы об изоморфизмах, установленные ранее для случая нормальных граничных условий, справедливы также без предположения о нормальности граничных выражений. Эти теоремы, развивая методику работы [6], выводим из теоремы работы [11]. Данную работу можно считать продолжением работы [11], обозначения которой здесь используются.

Работа состоит из семи пунктов. Первый носит вспомогательный характер. Основные результаты содержатся в пп. 2—7.

1. Введем прежде всего нужные функциональные пространства. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства, γ — ее граница; $H^{s,p}(G)$ $(1 < p < \infty)$ для целого $s \geqslant 0$ — пространство Соболева; для целого $s < 0$ — это пространство, сопряженное $H^{-s,p'}(G)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(G)$; для действительного s определяем $H^{s,p}(G)$ с помощью комплексной интерполяции, $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в $H^{s,p}(G)$. $B^{s-\frac{1}{p},p}(\gamma)$ для целого $s \geqslant 1$ — пространство следов на γ функций из $H^{s,p}(G)$. $B^{-\left(s-\frac{1}{p}\right),p}(\gamma)$ — пространство, сопряженное $B^{s-\frac{1}{p},p'}(\gamma)$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\gamma)$; для любого действительного s определяем $B^{s-\frac{1}{p},p}(\gamma)$ с помощью комплексной интерполяции, $\langle\langle\cdot\rangle\rangle_{s,p}$ — норма в $B^{s,p}(\gamma)$ (подробнее об этих пространствах см., например, [8, 10]).

Зафиксируем натуральное число r, действительное $p\in(1,\infty)$ и пусть l — произвольное целое. Через $\widetilde{H}^{l,p,r}(G)$ (ср. [4—7; 11; 12]) обозначим пополнение множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{l,p,r}(G)}=\left(\|u\|^p_{l,p}+\sum_{j=1}^{r}\langle\langle D_\nu^{j-1}u\rangle\rangle^p_{l-j+1-\frac{1}{p},p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

$\left(D_\nu=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right.$, ν — орт внутренней нормали к $\left.\gamma\right)$. При $l\geqslant r$ норма (1) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{l,p}$ и $\widetilde{H}^{l,p,r}(G)=H^{l,p}(G)$. Замыкание S отображения $u\to(u|_G, u|_\gamma,\ldots,D_\nu^{r-1}u|_\gamma)$ $(u\in C^\infty(\overline{G}))$ устанавливает изометрическое соответствие между $\widetilde{H}^{l,p,r}(G)$ и подпространством прямого произведения $K^{r+1}_{l,p}=H^{l,p}(G)\times\prod\limits_{j=1}^{r}B^{l-j+1-\frac{1}{p},p}(\gamma)$. Компоненты вектора Su будем называть также компонентами элемента $u\in\widetilde{H}^{l,p,r}(G)$. В частности, $u|_G$ — первая компонента элемента u. Для любого действительного s определим $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ с помощью комплексной интерполяции между $\widetilde{H}^{[s],p,r}(G)$ и $\widetilde{H}^{[s]+1,p,r}(G)$; $|||\cdot|||_{s,p,r}$ — норма в $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$. Положим: $\widetilde{H}^{s,p}(G)=\widetilde{H}^{s,p,2m}(G)$, $|||\cdot|||_{s,p}=|||\cdot|||_{s,p,2m}$. Пространство $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ подробно изучено в [12]. Для каждого дифференциального выражения* $N(x,D)$ порядка $q\leqslant r$ и каждого граничного выражения $M(x,D)$ $(x\in\gamma)$ порядка t, порядок которого относительно производных D_ν по нормали к γ не превосходит $r-1$, замыкания N, M отображений $u\to Nu|_G$, $u\to Mu|_\gamma$ $(u\in C^\infty(\overline{G}))$ непрерывно действуют из всего $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ соответственно в $H^{s-q,p}(G)$ и $B^{s-t-\frac{1}{p},p}(\gamma)$. В этом (сильном) смысле для любого $u\in\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ определены $Nu|_G\in H^{s-q,p}(G)$, $Mu|_\gamma\in B^{s-t-\frac{1}{p},p}(\gamma)$. Отметим также, что при $r>q$ замыкание отображения $u\to Nu$ $(u\in C^\infty(\overline{G}))$ непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ в $\widetilde{H}^{s-q,p,r-q}(G)$. Применение выражений N, M к элементам из $\widetilde{H}^{s,p,r}(G)$ можно понимать и в другом (слабом) смысле (см. [11, 12, 14]).

Пусть $L=L(x,D)$ — правильно эллиптическое в $\overline{G}$ дифференциальное выражение порядка $2m$ с комплексными коэффициентами, а $B_j=B_j(x,D)$ $(x\in\gamma;\ j=1,\ldots,m)$ — система граничных выражений порядков m_j, накрывающая L. Выражения $\{B_j\}_{j=1}^m$ не являются, вообще говоря, нормальными. В пп. 1—6 предполагаем, что порядок выражений B_j относительно производных D_ν не превосходит $2m-1$. Для каждого действительного s и $p\in(1,\infty)$ оператор $\widetilde{A}_{s,p}$: $u\to(Lu, Bu)=(Lu, B_1u,\ldots,B_mu)$, $u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$, непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$ в $K_{s,p}=H^{s,p}(G)\times\prod\limits_{j=1}^{m}B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\gamma)$, ядро $\mathfrak{N}=\{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G):\widetilde{A}_{s,p}u=0\}$ конечномерно, не зависит от s и $p\in(1,\infty)$ и $\mathfrak{N}\subset C^\infty(\overline{G})$. Существует конечномерное множество $\mathfrak{M}^+\subset C^\infty(G)\times$

* Коэффициенты всех встречающихся в работе дифференциальных выражений и границу γ предполагаем для простоты бесконечно гладкими. Граничные выражения всюду в работе предполагаем дифференциальными в нормальном к γ направлении и, вообще говоря, псевдодифференциальными в тангенциальных к γ направлениях [13].

$\times C^{\infty,m}(\gamma)$ $(C^{\infty,m}(\gamma) = C^{\infty}(\gamma)\times\underset{m}{\dots}\times C^{\infty}(\gamma))$ такое, что задача $\widetilde{A}_{s,p}\,u = F\in K_{s,p}$ разрешима в $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$ в том и только в том случае, когда $[F, \mathfrak{M}^+] = 0$ ($[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в $L_2(G)\times L_2^m(\gamma)$ $(L_2^m(\gamma) = L_2(\gamma)\times\underset{m}{\dots}\times L_2(\gamma))$.

Сужение $\widetilde{\mathbf{A}}_{s,p}$ оператора $\widetilde{A}_{s,p}$ на подпространство $\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) = \{u\in\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) : (u|_G, \mathfrak{N}) = 0\}$ пространства $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$ устанавливает изоморфизм

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)\to Q^+K_{s,p} \tag{2}$$

(здесь $Q^+K_{s,p}$ — подпространство элементов $F\in K_{s,p}$ таких, что $[F, \mathfrak{M}^+] = 0$). Если $s\geqslant 0$, описанные выше результаты хорошо известны (см., например, [9, 10]), для $s<0$ они доказаны в [11]. Отметим также, что множество $\mathfrak{M}^+$ связано с формально сопряженной задачей к задаче $\widetilde{A}_{s,p}\,u = F$ и подробно описано в [11, формулы (2.16), (2.17)]; там же введены проекционные операторы $\widetilde{P}$ и Q^+.

2. Из изоморфизмов (2) будем «склеивать» новые изоморфизмы (ср. [6]). Пусть $E_{1,s} = \{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) : u|_G = 0\}$ — подпространство $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$, $E_{2,s} = \widetilde{\mathbf{A}}_{s,p}E_{1,s}$. Легко видеть, что $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s} = H^{2m+s,p}(G)$. Поэтому $\widetilde{A}_{s,p}$ естественным образом порождает оператор $A_{s,p}$, непрерывно действующий из $H^{2m+s,p}(G)$ в $K_{s,p}/E_{2,s}$. Справедлива такая теорема.

Теорема 1. *Для любого действительного s и $p\in(1,\infty)$ сужение $\mathbf{A}_{s,p}$ оператора $A_{s,p}$ на подпространство $PH^{2m+s,p}(G) = \{u\in H^{2m+s,p}(G) : (u, \mathfrak{N}) = 0\}$ пространства $H^{2m+s,p}(G)$ устанавливает изоморфизм*

$$PH^{2m+s,p}(G)\to Q^+K_{s,p}/E_{2,s}, \tag{3}$$

где $Q^+K_{s,p}/E_{2,s} = \{\mathfrak{F} = \{F + E_{2,s}\}\in K_{s,p}/E_{2,s} : [F, \mathfrak{M}^+] = 0\}$ — подпространство $K_{s,p}/E_{2,s}$.

Формула Грина, выведенная в [11], позволяет дать другое описание пространства $K_{s,p}/E_{2,s}$. Если, например, $\mathfrak{N}^3_{\Gamma^+} = 0$ (см. [11]), то $K_{s,p}/E_{2,s}$ изометрически эквивалентно пространству, сопряженному относительно $[\cdot,\cdot]$ к замыканию в $H^{-s,p'}(G)\times\prod_{j=1}^{m} B^{-\left(2m+s-m_j-\frac{1}{p}\right),p'}(\gamma)$ множества $\{(v, C_1'v, \dots, C_m'v) : v\in C^{\infty}(\text{гр})^+\}$. Здесь $C^{\infty}(\text{гр})^+ = \{v\in C^{\infty}(\overline{G}) : (Lu, v) = (u, L^+v)\ (u\in\in C^{\infty}(\text{гр}) = \{\omega\in C^{\infty}(\overline{G}) : B\omega|_{\gamma} = 0\})\}$; выражения $\{C_j'\}_{j=1}^m$ фигурируют в формуле Грина. Подобным образом можно описать $K_{s,p}/E_{2,s}$ и в случае $\mathfrak{N}^3_{\Gamma^+} = 0$.

3. Пусть теперь $E_{1,s} = \{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) : u|_G = 0,\ Bu|_{\gamma} = 0\}$ — подпространство $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$, $E_{2,s} = \widetilde{\mathbf{A}}_{s,p}E_{1,s}\subset K_{s,p}$. Тогда оператор $\widetilde{A}_{s,p}$ естественным образом определяет оператор $\hat{A}_{s,p}$, непрерывно действующий из $\widetilde{H}^{2m+s,p}\times(G)/E_{1,s}$ в $K_{s,p}/E_{2,s}$. С помощью формулы Грина можно показать, что $K_{s,p}/E_{2,s}$ изометрически эквивалентно пространству $\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+\times\prod_{j=1}^{m} B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\gamma) = K_{s,p}(\text{гр})^+$, где $\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+$ — пространство, сопряженное относительно $(\cdot,\cdot)$ к замыканию множества $C^{\infty}(\text{гр})^+$ в метрике $H^{-s,p'}(G)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1\right)$.

Теорема 2. *Для каждого действительного* s *и* $p\in(1,\infty)$ *сужение* $\hat{\mathbf{A}}_{s,p}$ *оператора* $\hat{A}_{s,p}$ *на подпространство* $\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s}=\{(u+E_{1,s})\in \in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s}:(u|_G,\mathfrak{N})=0\}$ *пространства* $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s}$ *устанавливает изоморфизм*

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s}\to Q^+K_{s,p}(\text{гр})^+,\tag{4}$$

где $Q^+K_{s,p}(\text{гр})^+=\{F\in K_{s,p}(\text{гр})^+:[F,\mathfrak{M}^+]=0\}$.

Отметим, что каждый элемент $(u+E_{1,s})\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)/E_{1,s}$ полностью определяется вектором $(u|_G, Bu|_\gamma)=(u|_G,\varphi)\in H^{2m+s,p}(G)\times\prod_{j=1}^{m}B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\gamma)$.

4. Рассмотрим теперь эллиптические задачи с однородными граничными условиями. Пусть $\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})=\{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G):Bu|_\gamma=0\}$ — подпространство $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$. Тогда из (2) следует, что сужение $\widetilde{\mathbf{A}}_{s,p}(\text{гр})$ оператора $\widetilde{A}_{s,p}(\text{гр}):u\to Lu\ (u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр}))$ на подпространство $\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})= =\{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр}):(u|_G,\mathfrak{N})=0\}$ устанавливает изоморфизм

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})\to P^+H^{s,p}(G),\tag{5}$$

где $P^+H^{s,p}(G)=\{f\in H^{s,p}(G):[(f,0,\dots,0),\mathfrak{M}^+]=0\}$ — подпространство $H^{s,p}(G)$. Пусть $E_{1,s}=\{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр}):u|_G=0\}$ — подпространство $H^{2m+s,p}(\text{гр})$, $E_{2,s}= =\widetilde{A}_{s,p}(\text{гр})E_{1,s}$ — подпространство $H^{s,p}(G)$. Тогда $\widetilde{A}_{s,p}(\text{гр})$ естественным образом определяет оператор $A_{s,p}(\text{гр})$, непрерывно действующий из $\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}$ в $H^{s,p}(G)/E_{2,s}$. Снова с помощью формулы Грина можно показать, что $H^{s,p}(G)/E_{2,s}$ изометрически эквивалентно пространству $\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для каждого действительного* s *и* $p\in(1,\infty)$ *сужение* $\mathbf{A}_{s,p}(\text{гр})$ *оператора* $A_{s,p}(\text{гр})$ *на подпространство* $P\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}=\{(u+ +E_{1,s})\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}:(u|_G,\mathfrak{N})=0\}$ *пространства* $\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}$ *осуществляет изоморфизм*

$$P\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1/s}\to P^+\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+,\tag{6}$$

где $p^+\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+=\{f\in\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+,\ [(f,0,\dots,0),\mathfrak{M}^+]=0\}$ — *подпространство* $\hat{H}^{s,p}(\text{гр})^+$.

Отметим, что при $s\leqslant-2m$ $\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}$ совпадает с $H^{2m+s,p}(G)$; если $-2m<s<0$, а граничные условия нормальны, $\widetilde{H}^{2m+s,p}(\text{гр})/E_{1,s}$ совпадает с замыканием множества $C^\infty(\text{гр})$ в метрике $H^{2m+s,p}(G)$.

5. Для любого действительного s и $p\in(1,\infty)$ норма $|||u|||_{s,p}$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{H_L^{s,p}}=\|u\|_{s,p}+\|Lu\|_{s-2m,p}\tag{7}$$

(см. [12, 14]); поэтому $\widetilde{H}^{s,p}(G)$ по существу совпадает с пополнением $H_L^{s,p}(G)$ множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме (7). При этом $H_L^{s,p}(G)$ совпадает со множеством пар (u_0,f), где $u_0\in H^{s,p}(G)$, $f\in H^{s-2m,p}(G)$, и в смысле теории распределений $Lu_0=f$. Поэтому из сказанного в п. 1 следует, что замыкание $L_{s,p}$ отображения $u\to(Lu,Bu|_\gamma)$ $(u\in C^\infty(\overline{G}))$ непрерывно действует из всего $H_L^{2m+s,p}(G)$ в $K_{s,p}(G)$, а сужение $\mathbf{L}_{s,p}$ оператора $L_{s,p}$ на подпространство $PH_L^{2m+s,p}(G)=\{(u_0, f)\in H_L^{2m+s,p}(G):(u_0, \mathfrak{N})=0\}$ пространства $H_L^{2m+s,p}(G)$ устанавливает изоморфизм

$$PH_L^{2m+s,p}(G)\to Q^+K_{s,p}. \tag{8}$$

Пусть s — любое действительное, $p\in(1,\infty)$; W — любое функциональное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в $H^{s,p}(G)$, $K_{s,p,W}=W\times\prod_{j=1}^{m}B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\gamma)$, $Q^+K_{s,p,W}=\{F\in K_{s,p,W}:[F,\mathfrak{M}^+]=0\}$. Ясно, что $\mathbf{L}_{s,p}^{-1}(Q^+K_{s,p,W})=\{(u_0, f)\in PH_L^{2m+s,p}(G):f\in W\}=PH_{L,W}^{2m+s,p}(G)$ является линейным множеством, плотным в $PH_L^{2m+s,p}(G)$. Множество $\{(u_0, f)\in H_L^{2m+s,p}(G), f\in W\}$ с нормой $\|u_0\|_{2m+s,p}+\|f\|_W$ образует банахово пространство, которое обозначим через $H_{L,W}^{2m+s,p}(G)$.

Теорема 4. *Сужение оператора $L_{s,p}$ на подпространство $PH_{L,W}^{2m+s,p}(G)$ пространства $H_{L,W}^{2m+s,p}(G)$ осуществляет изоморфизм*

$$PH_{L,W}^{2m+s,p}(G)\to Q^+K_{s,p,W}. \tag{9}$$

6. Для случая нормальных граничных выражений утверждения теоремы 2 были установлены в [6], теоремы 3 (с $p=2$) — в [3] (см. также [9, стр. 262]), теоремы 4 — в [1, V, теорема 5.4]. Если в рассуждениях пп. 2—4 положить $E_{1,s}=\{u\in\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)\colon\ u|_G=0,\ C_ju|_\gamma=0,\quad j=1,\ldots$ $\ldots,m\}$, $E_{2,s}=\widetilde{\mathbf{A}}_{s,p}E_{1,s}$ (выражения $\{C_j\}_{j=1}^m$ фигурируют в формуле Грина [11]), то получим для случая рассматриваемых граничных выражений теорему об изоморфизмах из [7].

С каждой теоремой об изоморфизмах можно естественным образом связать понятие сильного и слабого обобщенного решения эллиптической задачи, причем множества сильных и слабых обобщенных решений совпадают. Для этих решений справедливо утверждение о локальном повышении гладкости обобщенных решений вплоть до границы области. Например, в случае теоремы 1, $u\in H^{2m+s,p}(G)$ — сильное обобщенное решение задачи $A_{s,p}u=\mathfrak{F}$, если для каждой последовательности $u_n\in C^\infty(\overline{G})$, сходящейся к u в $H^{2m+s,p}(G)$, последовательность $(Lu_n, Bu_n|_\gamma)\to\mathfrak{F}$ в $K_{s,p}/E_{2,s}$; u — слабое обобщенное решение, если выполняется некоторое интегральное равенство, естественно получаемое с помощью формулы Грина. В частности, если $\mathfrak{N}^3_{\Gamma^+}=0$, то $u\in H^{2m+s,p}(G)$ — слабое обобщенное решение, если

$$(u, L^+v)=[\mathfrak{F}, V]\quad (V=(v, Cv),\ v\in C^\infty\ (\text{гр})^+). \tag{10}$$

Обобщенное решение этой задачи существует в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}\in\widehat{Q}^+K_{s,p}/E_{2,s}$. При этом формула $u=\mathbf{A}^{-1}\mathfrak{F}+\omega\,(\omega\in\mathfrak{N})$ дает общий вид решения рассматриваемой задачи.

7. В пп. 1—6 предполагалось, что порядок n_j выражений B_j относительно производных D_ν не превосходит $2m-1$. Пусть теперь $N=\max\{n_j\}\geqslant$ $\geqslant 2m$. Тогда, если $r_j=n_j-2m+1>0$, с помощью выражения $L(x,D)$ исключим из B_j производные $D_\nu^s\,(s\geqslant 2m)$. Получим

$$B_j(x,D)=\widetilde{B}_j(x,D)-\sum_{k=1}^{r_j}B_{jk}(x,D)\,D_\nu^{k-1}L(x,D), \tag{11}$$

где $\widetilde{B}_j$ — выражение, порядок которого относительно производных D_ν не превосходит $2m-1$, $B_{jk}(x, D)$ — тангенциальные выражения порядков, не превышающих $m_j - k + 1 - 2m$. Для удобства положим, что при $r_j \leqslant 0$ $\widetilde{B}_j \equiv B_j$, $B_{jk} \equiv 0$. Тогда представление (11) справедливо для $j = 1, \ldots, m$. Поэтому в классе решений $u \in H^{2m+s,p}(G)$ с $s \geqslant l_0 - 2m$ ($l_0 = \max(2m, m_1 + 1, \ldots, m_m + 1)$) задача

$$Lu|_G = f|_G, \quad B_j u|_\gamma = \varphi \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

эквивалентна задаче

$$Lu|_G = f|_G, \quad \widetilde{B}_j u = \widetilde{\varphi}_j \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

$$(\widetilde{\varphi}_j = \varphi + \sum_{k=1}^{r_j} B_{jk}(x, D)(D_\nu^{k-1} f)|_\gamma) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Так как порядок выражений $\widetilde{B}_j$ относительно производных D_ν не превосходит $2m-1$, то существует конечномерное множество $\widetilde{\mathfrak{M}}^+ \subset C^\infty(\overline{G}) \times C^{\infty,m}(\gamma)$ такое, что задача (13) с $\widetilde{F} = (f, \widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m) \in K_{s,p}$ разрешима в $H^{2m+s,p}(G)$ ($s \geqslant l_0 - 2m$) в том и только в том случае, когда $[\widetilde{F}, \widetilde{\mathfrak{M}}^+] = 0$. Поэтому, учитывая (14), получаем следующие условия разрешимости в $H^{2m+s,p}(G)$ ($s \geqslant l_0 - 2m$) задачи (12):

$$(f, v_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, v_j \rangle + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_j} \langle D_\nu^{k-1} f|_\gamma, B_{jk}^+ v_j \rangle = 0 \quad ((v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{\mathfrak{M}}^+). \tag{15}$$

Здесь B_{jk}^+ — выражения, формально сопряженные выражениям B_{jk}.

В классе $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) = \widetilde{H}^{2m+s,p,2m}(G)$ с $s < l_0 - 2m$, $\max\{n_j\} = N \geqslant 2m$, задачи (12) и (13) уже не будут эквивалентными. Например, для элемента $u \in \widetilde{H}^{2m,p}(G)$ не имеет смысла $D_\nu^{2m} u|_\gamma$, для элемента $f \in L_p(G)$ не имеет смысла $D_\nu f|_\gamma$. Поэтому естественно при $N \geqslant 2m$ и $s < l_0 - 2m$ искать решение задачи (12) в классе $\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$. Как отмечалось в п. 1, замыкание L отображения $u \to Lu$, $u \in C^\infty(\overline{G})$, непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$ в $\widetilde{H}^{s,p,N+1-2m}(G)$; поэтому $Lu = f \in \widetilde{H}^{s,p,N+1-2m}(G)$ для элемента $u \in \widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$ и имеют смысл $D_\nu^{k-1} f|_\gamma \in B^{s-k+1-\frac{1}{p},p}(\gamma)$ ($k = 1, \ldots, N + 1 - 2m$), и поэтому имеют смысл выражения (14). Итак, для любого действительного s в классе $\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$ задача (12) с $(f, \widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m) \in \widetilde{H}^{s,p,N+1-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{m} B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\gamma)$ эквивалентна задаче (13). Справедлива такая теорема.

Теорема 5. *Пусть $N = \max n_j \geqslant 2m$. Тогда для каждого действительного s и $p \in (1, \infty)$ замыкание $\widetilde{A}_{s,p,N}$ отображения $u \to (Lu, Bu|_\gamma)$ ($u \in C^\infty(\overline{G})$) непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$ в $K_{s,p}$. Сужение $\widetilde{\mathbf{A}}_{s,p,N}$ оператора $\widetilde{A}_{s,p,N}$* на подпространство $\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G) = \{u \in \widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G):$

$(u|_G, \mathfrak{N}) = 0\}$ *пространства* $\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G)$ *устанавливает изоморфизм*

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{2m+s,p,N+1}(G) \to \widetilde{Q}^{+}\widetilde{K}_{s,p}, \tag{16}$$

где $\widetilde{Q}^{+}\widetilde{K}_{s,p}$ — *подпространство элементов* $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \widetilde{K}_{s,p}$, *удовлетворяющих* (15).

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei. III, Ann. Sci. Scuola Norm. Super Pisa, ser. III, **15**, N 1—2, 1961, 39—101; V, **16**, N 1, 1962, 1—44; VI, J. Analyse Math., **11**, 1963, 165—188.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971.
3. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
4. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
5. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений, УМЖ, т. 17, № 5, 1965.
6. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоформизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, ДАН СССР, т. 180, № 3, 1968.
7. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.
8. Э. Мадженес, Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных, УМН, т. 21, вып. 2 (128), 1966.
9. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
10. M. Schechter, On L^p estimates and regulanity. I, Amer. J. Math., **85**, N 1, 1963, 1—13; II, Math. Scand., **13**, N 1, 1963, 47—69.
11. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными, Матем. сб., т. 83 (125), № 2 (10), 1970.
12. Я. А. Ройтберг, О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений, Матем. сб., т. 86(128), № 2 (10), 1971.
13. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, т. 20, вып. 5, 1965.
14. Я. А. Ройтберг, О граничных значениях обобщенных решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 188, № 1, 1969.
15. Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.

Поступила 7.IX 1971 г.

Киевский педагогический институт,
Черниговский педагогический институт