УДК 517.946+519.3

Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

Про оптимальне керування системами, що описуються загальними еліптичними граничними задачами

У цій роботі теорема про повний набір ізоморфізмів для загальних еліптичних задач застосовується до дослідження оптимального керування системами, що описуються еліптичними рівняннями і системами довільного порядку. Таким задачам керування присвячені роботи багатьох авторів (див. монографію Ліонса [1], де є докладна бібліографія, а також [2]). В [1] досліджено цілий ряд таких задач, в основному для рівнянь 2-го порядку. Випадок рівняння високого порядку розглянуто в [3]; при цьому зроблено припущення, що граничні вирази є нормальними, а їх порядки задовольняють певну додаткову умову. В даній роботі показано, що застосування теореми про повний набір ізоморфізмів [4—8] дає змогу одержати ці і більш загальні результати для еліптичних рівнянь і систем довільного порядку без припущення про нормальність граничних умов. Ці результати вдалось встановити завдяки зручному вибору просторів узагальнених функцій у [4—8], а також завдяки знайденим в роботі явним виразам для операторів A_s^*, спряжених до операторів сім'ї $\{A_s\}_{s\in\mathbf{R}}$, що здійснює повний набір ізоморфізмів. Розгляд конкретних задач зводиться тепер до безпосереднього застосування загальної теореми з [1] (див. нижче твердження 1), що є аналогом принципу максимуму Л. С. Понтрягіна (в [1] при застосуванні загальної теорії до конкретних прикладів доводилось в ряді випадків зустрічатись з додатковими труднощами).

1. Всі простори, що нижче зустрічаються — дійсні гільбертові; $(u, v)_X$ і $\| u\|_X$ — скалярний добуток і норма в X; (u, v)— двоїстість між X і X^*; Λ_X — канонічний ізоморфізм X на X^*, тобто оператор, визначений для будь-якого $u \in X$ співвідношенням $(u, v)_X = (\Lambda_X u, v)$ $(\forall_v \in X)$; $L(X, Y)$ — множина лінійних обмежених операторів з X в Y; для $M \in L(X, Y)$ через $M^* \in L(Y^*, X^*)$ позначається оператор, спряжений до M.

Нехай V — гільбертів простір (простір станів), $A \in L(V, V_1)$ здійснює ізоморфізм V на V_1; U — гільбертів простір (простір керувань), $Q \in L(U, V_1)$; $N \in L(U, U)$ — додатно визначений оператор. Задані також простір $\mathcal{H}$ (простір спостережень) і $C \in L(V, \mathcal{H})$. Позначимо через $y(v) \in V$ єдиний розв'язок рівняння $Ay = F + Qv$ $(F \in V_1,\ v \in U)$ і нехай $J(v) = \| Cy(v) - \hat{z}\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_U$ — функція вартості ($\hat{z} \in \mathcal{H}$ — заданий елемент); $U_\partial \subset U$ — множина допустимих керувань. Шукаємо елемент $u \in U_\partial$ (оптимальне керування), для якого $J(u) = \inf\{J(v) : v \in U_\partial\}$.

Твердження 1 (Ліонс [1]). *Нехай U_∂ — опукла і замкнена множина. Тоді існує одне і тільки одне оптимальне керування $u \in U_\partial$, що є розв'язком (єдиним) системи*

$$Ay(u) = F + Qu, \quad A^*p(u) = C^*\Lambda_{\mathcal{H}}(Cy(u) - \hat{z});$$

$$(\Lambda_U^{-1}Q^*p(u) + Nu,\ v - u)_U \geqslant 0 \quad (\forall v \in U_\partial).$$

2. Нехай $G \subset \mathbf{R}^n$ — обмежена область з нескінченно гладкою межею Γ; $H^t(G)$ $(t \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0)$ — простір Соболєва—Слободецького, $H^{-t}(G)$ — простір, спряжений до $H^t(G)$ відносно розширення $(\cdot,\cdot)$ скалярного добутку в $L_2(G)$. $H^{-t}(G)$ $(t \geqslant 0)$ ізометрично еквівалентно підпростору $H^{-t}(\mathbf{R}^n)$, що складається з елементів з носіями в $\overline{G}$; елементи $y \in H^{-t}(G)$ $(t \geqslant 0)$, що розглядаються як елементи з $H^{-t}(\mathbf{R}^n)$, позначаються через y_+; аналогічно, якщо $y \in H^t(G)$ $(t \geqslant 0)$, то $y_+ \in L_2(\mathbf{R}^n)$ — продовження функції y нулем в $\mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$;

$H^t(\Gamma)$ $(t \in \mathbf{R})$ — простір Соболєва — Слободецького на Γ; $\|\cdot\|_t$, $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_t$ — норми відповідно в $H^t(G)$ і $H^t(\Gamma)$.

Нехай $L = L(x, D)$ $(x \in \overline{G})$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз порядку $2m$ з дійсними коефіцієнтами; $B_j = B_j(x, D)$ $(x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m)$ — граничні вирази порядків $m_j \leq 2m - 1$; коефіцієнти всіх розглядуваних в роботі виразів для простоти вважаються нескінченно гладкими. Припустимо, що гранична задача

$$Ay = F \ \ (Ay = (Ly, B_1 y|_\Gamma, \ldots, B_m y|_\Gamma);\ \ F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)) \tag{1}$$

є еліптичною (тобто вираз L є правильно еліптичним і вирази B_j є для нього доповняльними) і що дефект дорівнює нулю, тобто задача (1) є однозначно розв'язною в класі достатньо гладких функцій для будь-яких достатньо гладких F. Нас буде цікавити розв'язність задачі (1) і в тих випадках, коли F — узагальнена функція. Визначимо відповідні функціональні простори [4, 9].

Для довільного натурального r і $s \in \sigma_r = \left\{t \in \mathbf{R} : t \leq r,\ t \neq k - \frac{1}{2}\ (k = 1, \ldots, r)\right\}$ позначимо через $\widetilde{H}^s_r(G)$ поповнення $C^\infty(\overline{G})$ за нормою

$$|||y|||_{s,r} = \left(\|y\|_s^2 = \sum_{k \in \varkappa_r} \langle\langle D_\nu^{k-1} y \rangle\rangle^2_{s-k+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\varkappa_r = \left\{k \in \mathbf{N} : s + \frac{1}{2} < k \leq r\right\}$, $D_\nu = \dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — похідна по внутрішній нормалі до Γ; покладемо $\widetilde{H}^s_{2m}(G) = \widetilde{H}^s(G)$, $\sigma_{2m} = \sigma$, $\varkappa_{2m} = \varkappa$. Замикання S відображення $y \to (y|_G,\ \{D_\nu^{k-1} y|_\Gamma\}_{k\in\varkappa})$ $(y \in C^\infty(\overline{G}))$ встановлює ізометрію $\widetilde{H}^{2m+s}(G) \to H^{2m+s}(G) \times \prod\limits_{k\in\varkappa} H^{2m+s-k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Оскільки S — лінійна ізометрія, то будемо ототожнювати $y \in \widetilde{H}^{2m+s}(G)$ з елементом $Sy = (y_0, \{y_k\}_{k\in\varkappa})$. Тому $(\widetilde{H}^{2m+s}(G))^* = H^{-2m-s}(G) \times \prod\limits_{k\in\varkappa} H^{-\left(2m+s-k+\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$. Для $s = k + \frac{1}{2}$ $(k = -1, \ldots, -2m)$ простір $\widetilde{H}^{2m+s}(G)$ визначається за допомогою інтерполяції; для $s \geq 0$ покладаємо $\widetilde{H}^{2m+s}(G) = H^{2m+s}(G)$. Для кожного $s \in \mathbf{R}$ замикання A_s відображення $y \to Ay$ $(y \in C^\infty(\overline{G}))$ неперервно діє в парі просторів

$$A_s : \widetilde{H}^{2m+s}(G) \to H^s(G) \times \prod_{j=1}^{m} H^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} H^s(G, \Gamma). \tag{2}$$

Твердження 2 (теорема про повний набір ізоморфізмів [4]). *Для кожного $s \in \mathbf{R}$ оператор A_s здійснює ізоморфізм* (2).

Знайдемо вигляд оператора A_s^*, спряженого до оператора A_s (не роблячи при цьому припущення про еліптичність задачі (1)). Нехай в деякому околі $U(\Gamma)$ в $\overline{G}$ межі Γ

$$L(x, D) = \sum_{k=0}^{2m} L_k(x, D') D_\nu^k, \quad B_j(x, D) = \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(x, D') D_\nu^k \ (j = 1, \ldots, m),$$

де $L_k(x, D')$, $B_{jk}(x, D')$ — тангенціальні вирази. Нехай $\chi_1, \chi_2 \in C^\infty(\overline{G})$, $\operatorname{supp}\chi_2 \subset U(\Gamma)$, $\chi_2 \equiv 1$ в деякому околі в $\overline{G}$ межі Γ, $\operatorname{supp}\chi_1 \subset G$, $\chi_1 + \chi_2 \equiv 1$. Через M^+ будемо позначати вираз, формально спряжений до диференціального виразу M. Для будь-якого $s \in \mathbf{R}$ позначимо через $\widehat{s} = \left[s + \frac{1}{2}\right]$ найближче до s ціле число. Через $\delta(\Gamma)$ позначимо δ-функцію, зосереджену на Γ.

Теорема 1. *Оператор* $A_s^*: (H^s(G, \Gamma))^* \to (\widetilde{H}^{2m+s}(G))^*$, *спряжений до оператора* A_s, *має такий вигляд*:

$$A_s^* p = A_s^*(p_0, p_1, \ldots, p_m) = ((A_s^* p)_0, \{(A_s^* p)_k\}_{k \in \varkappa}); \tag{3}$$

$$(A_s^* p)_0 = \chi_1 L^+(p_0)_+) + \chi_2 \left(\sum_{k=0}^{2m+\widehat{s}} (-1)^k D_\nu^k L_k^+ (p_0)_+ + D_\nu^{2m+\widehat{s}} \sum_{k \in \varkappa} (-1)^k (D_\nu^{k-2m-\widehat{s}} L_k^+ p_0)_+ \right) + \sum_{j: m_j < 2m+\widehat{s}} B_j^+ (p_j \times \delta(\Gamma)) + \sum_{j: m_j \geqslant 2m+\widehat{s}} \sum_{k=0}^{2m+\widehat{s}-1} (-1)^k D_\nu^k B_{jk}^+ (p_j \times \delta(\Gamma)); \tag{4}$$

$$(A_s^* p)_k = \sum_{t=k}^{2m} (-1)^{t-k} D_\nu^{t-k} L_t^+ p_0 |_\Gamma + \sum_{j: m_j \geqslant k-1} B_{j,k-1}^+ p_j \quad (k \in \varkappa). \tag{5}$$

3. Розглянемо задачу про оптимальне керування (див. п. 1) у випадку загального еліптичного диференціального оператора A (див. (1)) з нульовим дефектом. Нехай $s \in \sigma$, $V = \widetilde{H}^{2m+s}(G)$, $V_1 = H^s(G, \Gamma)$; U — гільбертів простір, $Q \in L(U, V_1)$, $Qu = (Q_0 u, \ldots, Q_m u)$; тоді стан $y(u)$ — розв'язок задачі

$$Ly(u) = f + Q_0 u, \ B_j y(u)|_\Gamma = \varphi_j + Q_j u \quad (j = 1, \ldots, m); \tag{6}$$

де $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in H^s(G, \Gamma)$. Нехай $\gamma_0 = \gamma_0(x, D)$ $(x \in \overline{G})$ — диференціальний вираз порядку $r_0 \leqslant 2m$, $\gamma_j = \gamma_j(x, D)$ $(x \in \Gamma,\ j = 1, \ldots, l)$ — диференціальні вирази порядків $r_j \leqslant 2m - 1$, $\mathscr{H} = H^{q_0}(G) \times \prod_{j=1}^{l} H^{q_j}(\Gamma) \Big(q_0 \leqslant 2m + s - r_0$; $q_j \leqslant 2m + s - r_j - \frac{1}{2} \Big)$; оператор спостереження $C: y \to (\gamma_0 y, \gamma_1 y|_\Gamma, \ldots, \gamma_l y|_\Gamma)$ неперервно діє з $\widetilde{H}^{2m+s}(G)$ в $\mathscr{H}$. Спряжений оператор C^* визначаємо формулами, аналогічними (3) — (5). При зроблених припущеннях з твердження 1 випливає така теорема.

Теорема 2. *Для будь-якої замкненої опуклої підмножини* $U_\partial \subset U$ *існує єдине оптимальне керування* $u \in U_\partial$, *що є розв'язком (єдиним) системи, яка складається з співвідношень* (6) *і*

$$(A_s^* p(u))_k = (\gamma^* (\Lambda_0 (\gamma_0 y(u) - \widehat{z}_0), \ldots, \Lambda_l (\gamma_l y(u)|_\Gamma - \widehat{z}_l)))_k \quad (k \in \{0\} \cup \varkappa); \tag{7}$$

$$\left(\Lambda_U^{-1} \left(Q_0^* p_0(u) + \sum_{j=1}^m Q_j^* p_j(u) \right) + Nu, v - u \right)_U \geqslant 0 \quad (\forall v \in U_\partial). \tag{8}$$

Тут $\Lambda_0: H^{q_0}(G) \to H^{-q_0}(G)$, $\Lambda_j: H^{q_j}(\Gamma) \to H^{-q_j}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, l)$ — *канонічні ізоморфізми*, $\widehat{z} = (\widehat{z}_0, \ldots, \widehat{z}_l)$ — *заданий елемент* $\mathscr{H}$.

Розглянемо окремі випадки.

Випадок 1. Розподілене керування. Нехай $U=L_2(G)$, $Q_0u=u$, $Q_ju=0\,(j=1,\ldots,m)$, $s=0$, $\mathcal{H}=L_2(G)\times(L_2(\Gamma))^l$; $U_\partial=\{u\in U: u\geqslant 0$ майже скрізь в $G\}$ — конус. У цьому випадку з системи (6) — (8) можна виключити u; в результаті прийдемо до такої «односторонньої» задачі:

$$Ly-f\geqslant 0,\, p_0+N(Ly-f)\geqslant 0,\, (Ly-f)(p_0+N(Ly-f))=0$$

(майже скрізь в G); $B_jy|_\Gamma=\varphi_j\,(j=1,\ldots,m)$;

$$L^+(p_0)_+ +\sum_{j=1}^{m}B_j^+(p_j\times\delta(\Gamma))=\gamma_0^+(\gamma_0y-\widehat{z}_0)_+ +\sum_{j=1}^{l}\gamma_j^+((\gamma_jy|_\Gamma-\widehat{z}_j)\times\delta(\Gamma)),$$

яка має єдиний розв'язок $(y,p_0,\ldots,p_m)$. Оптимальне керування виражається через знайдений розв'язок за формулою $u=Ly-f$.

Випадок 2. Граничне керування. Нехай $U=(L_2(\Gamma))^m$ і для $u=(u_1,\ldots,u_m)\in U: Q_0u=0$, $Q_ju=\alpha_ju_j\,(\alpha_j\in\mathbf{R})$; $s\leqslant\min\limits_{j:\alpha_j\neq 0}\{m_j\}-2m+1/2$. Нехай, далі, $r_0\leqslant 2m+s$, $r_j<2m+s-1/2\,(j=1,\ldots,l)$, $\mathcal{H}=L_2(G)\times\times(L_2(\Gamma))^l$. Оператор N задамо так: $(Nu)_j=\lambda_ju_j\,(\lambda_j>0;\ j=1,\ldots,m)$. Нехай $U_\partial=\{u\in U: u_j\geqslant 0$ майже скрізь на $\Gamma\,(j=1,\ldots,m)\}$ — конус. Виключивши u з системи (6) — (8), прийдемо до «односторонньої» задачі, що має єдиний розв'язок. Оптимальне керування виражається через розв'язок цієї задачі за формулами $u_j=(B_jy|_\Gamma-\varphi_j)\alpha_j^{-1}\ (j:\alpha_j\neq 0)$, $u_j=0\,(j:\alpha_j=0)$.

Випадок 3. Точкове керування і спостереження. Нехай $\mathfrak{A}=\{a_1,\ldots,a_M\}\subset\overline{G}$, $\delta(x-a_i)$ — дельта-функція, зосереджена в точці a_i; покладемо $U=\mathbf{R}^M$, $Q_0u=Q_0(u_1,\ldots,u_M)=\sum\limits_{i=1}^{M}u_iD^{\mu_i}\delta(x-a_i)$ $(\mu_i=(\mu_1^i,\ldots,\mu_n^i)$, $|\mu_i|=\mu_1^i+\ldots+\mu_n^i)$, $Q_ju=0\,(j=1,\ldots,m)$. Нехай $s<-\dfrac{n}{2}-\max\limits_i\{|\mu_i|\}$; тоді оператор $u\rightarrow Q_0u$ неперервно діє з $\mathbf{R}^M$ в $H^s(G)$. Єдине оптимальне керування є розв'язком системи (6) — (8); при цьому варіаційна нерівність (8) набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^{M}((D^{\mu_i}p_0(u))(a_i)+(Nu)_i)(v_i-u_i)\geqslant 0\ (\forall v\in U_\partial\subset R^M).$$

Нехай $F=(f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ достатньо гладке; тоді розв'язок $y(u)$ задачі (6) буде в $\overline{G}\diagdown\mathfrak{A}$ також достатньо гладким. Тому можна розглядати і точкове спостереження. Нехай $\mathfrak{L}=\{b_1,\ldots,b_T\}\subset\overline{G}$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{L}=\varnothing$, $\mathcal{H}=\mathbf{R}^T$, а оператор спостереження має вигляд $C: y\rightarrow((D^{\beta_1}y_0)(b_1),\ldots,(D^{\beta_T}y_0)(b_T))$. Хоч оператор C визначений не на всьому $\widetilde{H}^{2m+s}(G)$, він визначений на його щільній підмножині, яка містить всі стани $y(u)$ $(u\in U)$. Тому в розглядуваному випадку також існує єдине оптимальне керування. Воно визначається з співвідношень (6) і варіаційної нерівності

$$\sum_{i=1}^{T}((D^{\beta_i}y_0(u))(b_i)-\widehat{z}_i)(D^{\beta_i}(y_0(v)-y_0(u)))(b_i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}(Nu)_j(v_j-u_j)\geqslant 0\ \ (\forall v=(v_1,\ldots,v_M)\in U_\partial).$$

4. Вище припускалось, що порядки m_j граничних виразів менше $2m$. Розглянемо тепер випадок, коли ця умова не виконана. Якщо при цьому

трансверсальні порядки (тобто порядки відносно D_ν) виразів B_j менше $2m$, то всі попередні результати лишаються правильними без змін. Якщо ж найбільший з трансверсальних порядків B_j дорівнює $2m-1+r$ ($r \geqslant 1$), то в (2) простір прообразів $\widetilde{H}^{2m+s}(G)$ треба замінити на $\widetilde{H}^{2m+s}_{2m+r}(G)$, а в просторі образів $H^s(G)$ — на $\widetilde{H}^s_r(G)$ (пор. [4,7]). Відповідно дещо ускладняться і формули (3) — (5) для спряженого оператора; при цьому число компонент векторів p і $A^*_s p$ збільшиться на r.

Ті самі міркування дають змогу дістати формули для спряженого оператора до оператора, що визначається еліптичною у розумінні Дугліса—Ніренберга системою і загальними неоднорідними граничними умовами. Оскільки теореми про повний набір ізоморфізмів також мають місце для загальних еліптичних систем [5—7], то всі результати роботи переносяться на такі системи.

Автори висловлюють щиру подяку Ю. М. Березанському і С. Д. Ейдельману за обговорення результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972.
2. Лионс Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределенными системами.— УМН, 1973, **28**, вып. 4.
3. Lions J.-L. Sur le contrôle optimal de systemes dècrits par des èquations aux dèrivèes partielles linèaires. I, II.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1966, **263**.
4. Ройтберг Я. А. Теорема о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными.— Матем. сб., 1970, **83**, № 2.
5. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем с граничными условиями, не являющимися нормальными.— Мат. исследования, 1972, **7**, № 2 (Кишинев).
6. Коваленко И. А. Теоремы об изоморфизмах для эллиптических систем с граничными условиями, не являющимися нормальными.— УМЖ, 1973, **25**, № 3.
7. Ройтберг Я. А. Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических по Дуглису—Ниренбергу систем.— УМЖ, 1975, **27**, № 4.
8. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К, «Наук. думка», 1965.
9. Ройтберг Я. А. О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений.— Матем. сб., 1971, **86**, № 2.

Чернігівський педагогічний інститут

Надійшла до редакції — 21.IV 1975 р., після переробки — 28.XI 1975 р.