1973 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 25, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.946

Теоремы об изоморфизмах для нелокальных эллиптических граничных задач и их приложения

Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

Введение

В данной работе изучается разрешимость в обобщенных функциях одного класса нелокальных задач для эллиптических уравнений произвольного порядка. Подобные задачи в классах гладких функций изучались различными методами в [1—4]. В работе [5] введено понятие нормальных нелокальных граничных условий, выведена формула Грина и исследована разрешимость в классах гладких функций как заданной, так и формально сопряженной задач. В данной работе эти результаты используются* для установления теорем о полном наборе изоморфизмов. Эти теоремы утверждают, что оператор, порожденный эллиптическим уравнением порядка $2m$ и нормальными нелокальными граничными условиями, при любом действительном s осуществляет изоморфизм, грубо говоря, между пространствами обобщенных функций, «имеющих s и $s-2m$ производных». Из этих теорем следуют, в частности, известные теоремы об изоморфизмах для локальных задач [6—16]. Доказанные в данной работе теоремы об изоморфизмах применяются затем к локальному повышению гладкости обобщенных решений вплоть до границы и до поверхности разрыва коэффициентов, к построению и изучению свойств регулярности функции Грина и к исследованию задач со степенными особенностями в правых частях. Для получения теорем об изоморфизмах применяется методика транспонирования М. И. Вишика — С. Л. Соболева [17] и интерполяционные теоремы.

Основные результаты данной работы анонсированы в [18].

Приведем основные обозначения. Для любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ обозначим через $H^{s,p}(\Omega)$ ($s \geqslant 0$ — целое, $1 < p < \infty$) пространство С. Л. Соболева. В случае нецелых $s > 0$ пространства $H^{s,p}(\Omega)$ определяются с помощью комплексной интерполяции между $H^{[s],p}(\Omega)$ и $H^{[s]+1,p}(\Omega)$ (см. [8, 19—21]); $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в $H^{s,p}(\Omega)$. Если $s < 0$, то $H^{s,p}(\Omega)$ — пополнение $L_p(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{s,p} = \sup_{v \in H^{-s,p'}(\Omega)} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-s,p'}} \left((u, v) = (u, v)_\Omega = \int_\Omega u\bar{v}dx; \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

С помощью предельного перехода определяется «скалярное произведение» (u, v) ($u \in H^{s,p}(\Omega)$, $v \in H^{-s,p'}(\Omega)$), при этом справедливо неравенство $|(u, v)| \leqslant \|u\|_{s,p} \|v\|_{-s,p'}$. Для произвольного действительного s пространства $H^{s,p}(\Omega)$

* Данная работа тесно примыкает к работе [5], основные обозначения и результаты которой будут здесь широко использоваться.

и $H^{-s,p'}(\Omega)$ взаимно сопряжены относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$: для любого линейного ограниченного функционала $l(u)$ над $H^{s,p}(\Omega)$ существует единственный элемент $v \in H^{-s,p'}(\Omega)$ такой, что $l(u) = (u, v)$, при этом $\| l \| = \| v \|_{-s,p'}$ [20] (ср. [13, гл. I]). Для семейства банаховых пространств $H^{s,p}(\Omega)$ $(-\infty < s < \infty)$ справедлива интерполяционная теорема: *Если оператор A непрерывно действует из всего $H^{s_1,p}(\Omega)$ в $H^{s_1',p}(\Omega)$ и из всего $H^{s_2,p}(\Omega)$ в $H^{s_2',p}(\Omega)$, то этот оператор непрерывно действует и из $H^{s,p}(\Omega)$ в $H^{s',p}(\Omega)$* $(s = s_1 + t\,(s_2 - s_1),\ s' = s_1' + t(s_2' - s_1');\ 0 \leqslant t \leqslant 1;\ s_r s_r' \geqslant 0\ (r = 1, 2))$ (см., например, [8, 20, 21]).

Для натурального s через $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ обозначим пространство О. В. Бесова — пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $H^{s,p}(\Omega)$ с нормой $\langle\langle \varphi \rangle\rangle_{s-\frac{1}{p},p} = \inf \| u \|_{s,p}$, где inf берется по всем $u \in H^{s,p}(\Omega)$, равным φ на $\partial\Omega$; $B_{p'}^{-\left(s-\frac{1}{p}\right)}(\partial\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ — пространство, сопряженное к $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot,\cdot \rangle$ в $L_2(\partial\Omega)$. Таким образом, пространства $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ определены для любых целых s. С помощью комплексной интерполяции эти пространства определяются и для нецелых s. Пространства $B_p^t(\partial\Omega)$ и $B_{p'}^{-t}(\partial\Omega)$ $\left(t \text{ — любое действительное}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ по-прежнему взаимно сопряжены относительно $\langle \cdot,\cdot \rangle$; $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{t,p}$ — норма в $B_p^t(\partial\Omega)$; для семейства $\{B_p^t(\partial\Omega)\}$ $(-\infty < t < \infty)$ также справедлива интерполяционная теорема (см. [8]).

Для произвольного натурального k и целого q обозначим через $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ (ср. [10 — 13, 22]) пополнение $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$|||u|||_{q,k,p} = \left(\| u \|_{q,p}^p + \sum_{j=1}^{k} \langle\langle D_\nu^{j-1} u \rangle\rangle_{q-j+1-\frac{1}{p},p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.1}$$

$\left(\text{здесь } D_\nu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu} \text{ — производная по внутренней нормали к } \partial\Omega\right)$. Ясно, что если $q \geqslant k$, то нормы $|||u|||_{q,k,p}$ и $\| u \|_{q,p}$ эквивалентны; если $q < k$, то они не эквивалентны [12, 22]. Норма (0.1) совпадает с нормой элемента $Su = \left(u|_\Omega, u|_{\partial\Omega}, \ldots, D_\nu^{k-1} u|_{\partial\Omega}\right.$ в прямом произведении $H^{q,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} B_p^{q-j+1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \overset{\mathrm{df}}{=} K^{q,k,p}(\Omega, \partial\Omega)$. Поэтому замыкание S отображения $u \to Su$ $(u \in C^\infty(\overline{\Omega}))$ изометрически отображает $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ на подпространство пространства $K^{q,k,p}(\Omega, \partial\Omega)$. Множество $S\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ подробно описано в [22]. Для любого $u \in \widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ будем компоненты вектора Su называть также компонентами элемента u; условимся также по-прежнему писать $Su = (u|_\Omega, u|_{\partial\Omega}, \ldots, D_\nu^{k-1} u|_{\partial\Omega})$, хотя в действительности при $q < k$ не все компоненты Su являются значениями нормальных производных $u|_\Omega$ на границе.

Если q — нецелое, то определим $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ с помощью комплексной интерполяции между $\widetilde{H}^{[q],k,p}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{[q]+1,k,p}(\Omega)$; норму в $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ с нецелым q также будем обозначать $|||\cdot|||_{q,k,p}$. Целесообразность введения нормы $|||\cdot|||_{q,k,p}$ объясняется следующей леммой (см. [10 — 13, 22]).

Лемма 1. *Пусть $A = A(x, D)$ $(x \in \Omega)$ — произвольное линейное дифференциальное выражение порядка $l \leqslant k$ с достаточно гладкими коэффициентами. Тогда*

$$\| Au \|_{q-l,p} \leqslant c_q |||u|||_{q,k,p} \, (u \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ q \in (-\infty, \infty)). \tag{0.2}$$

Аналогично, для произвольного граничного линейного дифференциального выражения $N = N(x, D)$ $(x \in \partial\Omega)$ порядка $t \leqslant k-1$ с достаточно гладкими коэффициентами

$$\langle\langle Nu \rangle\rangle_{q-t-\frac{1}{p},p} \leqslant c_q |||u|||_{q,k,p} \, (u \in C^\infty(\overline{\Omega}), q \in (-\infty, \infty)). \tag{0.3}$$

Из этой леммы следует, что замыкание оператора $u \to Au$ $(u \in C^\infty(\overline{\Omega}))$ непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ в $H^{q-l,p}(\Omega)$, а замыкание оператора $u \to Nu|_{\partial\Omega}$ $(u \in C^\infty(\overline{\Omega}))$ непрерывно действует из всего пространства $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ в $B_p^{q-t-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$. Эти замыкания также будем обозначать через A, N. В этом (сильном) смысле ко всем элементам из $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ применимы дифференциальные выражения порядков не выше k, $k-1$ соответственно в Ω и на $\partial\Omega$. Заметим, что применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{H}^{q,k,p}(\Omega)$ можно интерпретировать и в слабом смысле (см. [15, 22]).

§ 1. Теоремы о полном наборе изоморфизмов

1. Пусть G — ограниченная область пространства R^n, Γ — ее граница, G_1 — подобласть G с границей γ, не имеющей с Γ общих точек, $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$. В $\overline{G}_r$ заданы линейные дифференциальные выражения $L_r(x, D)$ порядков $2m_r$ $(r = 1, 2)$ с комплексными коэффициентами; на γ задано $2l$ $(l = m_1 + 2m_2)$ линейных дифференциальных выражений $B_{jr}(x, D)$ $(j = 1, \ldots, l;\ r = 1, 2)$, а на Γ — l выражений $B_{j3}(x, D)$ $(\operatorname{ord} B_{jr} = m_{jr};\ r = 1, 2, 3)$.

Будем исследовать разрешимость в обобщенных функциях нелокальной эллиптической задачи, изучавшейся в [5]:

$$L_r u_r(x) = f_r(x) \ (x \in G_r;\ r = 1, 2), \tag{1.1}$$

$$B_j u \overset{\mathrm{df}}{=} J_\alpha (B_{j1}u_1(y) + B_{j2}u_2(y))(x) + B_{j3}u_2(x) = \varphi_j(x) \ (x \in \Gamma;\ y = \alpha x \in \gamma;$$
$$j = 1, \ldots, l;\ l = m_1 + 2m_2) \tag{1.2}$$

или, короче,

$$Lu = f,\ Bu|_\Gamma = \varphi, \tag{1.3}$$

а также сопряженной к ней задачи; здесь α — диффеоморфизм некоторой окрестности $U(\Gamma)$ в R^n поверхности Γ на окрестность $V(\gamma)$ в R^n поверхности γ. $(J_\alpha u)(x) = u(\alpha x)$ $(x \in U(\Gamma))$ (см. [5]).

Для произвольного действительного s введем пространство

$$\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \widetilde{H}^{2m_1+s,2m_1,p}(G_1) \times \widetilde{H}^{2m_2+s,2m_2,p}(G_2); \tag{1.4}$$

норму в нем обозначим $|||\cdot|||_{2\mu+s,p}$. Из леммы 1 следует, что оператор

$$\widetilde{\Lambda}_{s,p}: u \to (Lu, Bu|_\Gamma) \; (u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)) \tag{1.5}$$

непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1,G_2)$ (s — любое действительное) в

$$H^{s,p}(G,\Gamma) \overset{\mathrm{df}}{=} H^{s,p}(G_1) \times H^{s,p}(G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B^{s-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$$

(см. [5, формула (2.6)]). Оказывается, что сужение $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}$ оператора $\widetilde{\Lambda}_{s,p}$ на подпространство $\widetilde{P}\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) = \{u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) : (u|_G, \mathfrak{N}) = 0\}$ ($u|_G = (u_1|_{G_1}, u_2|_{G_2})$, $u_r|_{G_r}$ — первая компонента элемента $u_r \in \widetilde{H}^{2m_r+s,2m_r,p}(G_r)$ ($r = 1, 2$)) пространства $\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ осуществляет изоморфизм

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) \to Q^+H^{s,p}(G,\Gamma), \tag{1.6}$$

где $Q^+H^{s,p}(G,\Gamma)$ — подпространство элементов $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in H^{s,p}(G,\Gamma)$, удовлетворяющих соотношению (2.19) работы [5]. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задача* (1.3) *эллиптична, а матрица* $B(x, D)$ *граничных условий* 2μ-*нормальна; кроме того, при* $p \neq 2$ *и* $-2M < s < 0$* *будем дополнительно предполагать, что* $m_1 = m_2$. *Тогда для любого действительного* s *оператор* $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}$ *осуществляет изоморфизм* (1.6).

Доказательство для простоты проведем лишь для того случая, когда $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^+ = 0$. В общем случае рассуждения лишь несколько более громоздки (ср. [10—13]).

Если $s \geqslant 0$ — целое, то оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}$ совпадает с оператором $\mathfrak{L}_{s,p}$, введенным в теореме 3 работы [5], а изоморфизм (1.6) — с установленным там изоморфизмом (2.20). Если $s \geqslant 0$ — нецелое, то требуемый изоморфизм следует из интерполяционной теоремы.

Пусть $s < 0$. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно установить двустороннюю оценку

$$c^{-1}|||u|||_{2\mu+s,p} \leqslant \|Lu\|_{s,p} + \sum_{j=1}^{l} \langle\langle B_j u\rangle\rangle_{s-\sigma_j-\frac{1}{p},p} \leqslant$$

$$\leqslant c\,|||u|||_{2\mu+s,p} \; (u \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2)). \tag{1.7}$$

Но правое неравенство сразу следует из леммы 1. Докажем левое.

Пусть вначале $s \leqslant -2M = -\max\{2m_1, 2m_2\}$ — целое, $t = -s - 2M \geqslant 0$. В этом случае левое неравенство (1.7) устанавливается с помощью метода Вишика—Соболева [17]. Введем операторы $N_{t,p}$ и $N^+_{t,p'}$ $\left(t \geqslant 0 \text{ — целое}, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$: $\mathfrak{D}(N_{t,p}) = H^{t,p}(G,\Gamma)$; $N_{t,p}\mathfrak{F} = (u, Cu) \in H^{2\mu+t,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{t-\sigma'_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, где $u = \Lambda^{-1}_{t,p}\mathfrak{F}$; $\mathfrak{D}(N^+_{t,p'}) = H^{t,p'}_+(G,\Gamma)$; $N^+_{t,p'}\mathfrak{G} = (v, C'v) \in H^{2M+t,p'}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_{p'}^{2M+t+\sigma_j+1-\frac{1}{p'}}(\Gamma)$, где $v = (\Lambda^+_{t,p'})^{-1}\mathfrak{G}$.

---

* Здесь, как и в [5], $M = \max\{m_1, m_2\}$.

Формулу Грина (1.27) из [5] можно теперь переписать так:

$$[\mathfrak{F}, N^{+}_{t,p'}\mathfrak{G}] = [N_{t,p}\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]\,(\mathfrak{F} \in H^{t,p}(G,\Gamma), \mathfrak{G} \in H^{t,p'}_{+}(G,\Gamma); \tag{1.8}$$

здесь и ниже $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в $L_2(G_1) \times L_2(G_2) \times L_2^l(\Gamma)$. Сопряженный к $N^{+}_{t,p'}$ оператор $\widetilde{N}_{-2M-t,p}$ непрерывно действует из всего $H^{-2M-t,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-2M-t-\sigma_j-1+\frac{1}{p'}}(\Gamma)$ в

$$(H^{t,p'}_{+}(G,\Gamma))^{*} = H^{-(2M+t-2\mu),p}(G_1,G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-\left(2M+t+\sigma'_j+1-\frac{1}{p'}\right)}(\Gamma) \tag{1.9}$$

(см. [5, (2.9)]), при этом

$$[\Phi, N^{+}_{t,p'}\mathfrak{G}] = \widetilde{N}_{-2M-t,p}\Phi, \mathfrak{G}]\left(\mathfrak{G} \in H^{t,p}_{+}(G,\Gamma);\right.$$

$$\left.\Phi \in H^{-2M-t,p}(G_1,G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-2M-t-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)\right). \tag{1.10}$$

Из (1.8) и (1.10) непосредственно следует, что оператор $\widetilde{N}_{-2M-t,p}$ является расширением $N_{t,p}$, поэтому благодаря непрерывности оператора $\widetilde{N}_{-2M-t,p}$

$$\| N_{t,p}\mathfrak{F} \|_{(H^{t,p'}_{+}(G,\Gamma))^{*}} \leqslant c \| \mathfrak{F} \|_{H^{-2M-t,p}(G_1,G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-2M-t-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \quad (\mathfrak{F} \in H^{t,p}(G,\Gamma)). \tag{1.11}$$

Учитывая определение оператора $N_{t,p}$, формулу (1.9) и соотношение $t = -s-2M$, перепишем (1.11) так:

$$\| u \|_{2\mu+s,p} + \sum_{j=1}^{l} \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{s-\sigma'_j-\frac{1}{p},p} \leqslant c \| (Lu, Bu) \|_{H^{s,p}(G,\Gamma)} \quad (u \in H^{2\mu,p}(G_1,G_2)). \tag{1.12}$$

Прибавив к обеим частям (1.12) сумму $\sum_{j=1}^{l} \langle\langle B_j u \rangle\rangle_{s-\sigma_j-\frac{1}{p},p}$, получим

$$\{u\}_{2\mu+s,p} \overset{\mathrm{df}}{=} \| u \|_{2\mu+s,p} + \sum_{j=1}^{l} (\langle\langle B_j u \rangle\rangle_{s-\sigma_j-\frac{1}{p},p} + \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{s-\sigma'_j-\frac{1}{p},p}) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \| (Lu, Bu) \|_{H^{s,p}(G,\Gamma)} \quad (u \in H^{2\mu,p}(G_1,G_2)). \tag{1.13}$$

Так как матрица $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ является матрицей Дирихле порядка 2μ, то для любого целого s норма $\{\cdot\}_{2\mu+s,p}$ эквивалентна норме $|||\cdot|||_{2\mu+s,p}$ пространства (1.4). Действительно, оценка $\{u\}_{2\mu+s,p} \leqslant c|||u|||_{2\mu+s,p}$ непосредственно следует из леммы 1; противоположная оценка следует из формул (1.12) работы [5] и определения нормы $|||\cdot|||_{2\mu+s,p}$ (см. (0.1)). Итак, из (1.13) получаем

$$|||u|||_{2\mu+s,p} \leqslant c_s \| (Lu, Bu) \|_{H^{s,p}(G,\Gamma)} \quad (s \leqslant -2M \text{ — целое}), \tag{1.14}$$

т. е. левое неравенство (1.7), а вместе с ним и теорема 1 доказаны для целых $s \leqslant -2M$.

Если s — целое, $-2M < s < 0$, то левое неравенство (1.7) *следует из* интерполяционной теоремы: оператор $N_{0,p}$ и его расширение $\widetilde{N}_{-2M,p}$ непрерывно действуют соответственно в парах пространств $H^{0,p}(G, \Gamma) \to H^{2\mu,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-\sigma'_j - \frac{1}{p}}(\Gamma)$ и $H^{-2M,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-2M-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma) \to H^{2\mu-2M,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-2M-\sigma'_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, поэтому в силу интерполяционной теоремы (см. введение) справедливо неравенство (1.12), а значит, и (1.13), (1.14) для рассматриваемых s. Итак, для всех целых s теорема доказана. Для нецелых s она теперь легко следует с помощью интерполяционной теоремы. ■

2. Изучим теперь отображения, связанные с формально сопряженной задачей (2.2) из [5]. Для любого действительного s положим

$$\widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2) = \widetilde{H}^{2M+s,2m_1,p}(G_1) \times \widetilde{H}^{2M+s,2m_2,p}(G_2), \tag{1.15}$$

$|||\cdot|||_{2M+s,p}$ — норма в этом пространстве. Из леммы 1 следует, что оператор

$$\widetilde{\Lambda}^+_{s,p} : v \to (L^+ v, B' v|_\Gamma) \qquad (v \in \widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2)) \tag{1.16}$$

непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2)$ в $H^{s,p}_+(G, \Gamma)$ (см. [5, (2.9)]). Оказывается, что его сужение $\widetilde{\mathfrak{L}}^+_{s,p}$ на подпространство $\widetilde{P}^+\widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2) = \{v \in \widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2) : (v|_G, \mathfrak{N}^+) = 0$ пространства $\widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2)$ осуществляет изоморфизм

$$\widetilde{P}^+\widetilde{H}^{2M+s,p}(G_1, G_2) \to QH^{s,p}_+(G, \Gamma); \tag{1.17}$$

здесь $QH^{s,p}_+(G, \Gamma)$ — подпространство элементов $\mathfrak{G} = (g, \psi) \in H^{s,p}_+(G, \Gamma)$, удовлетворяющих соотношению (2.21) из [5].

Т е о р е м а 2. *Пусть задача* (1.3) *эллиптична, а матрица* $B(x, D)$ *граничных условий* 2μ*-нормальна. Тогда для любого действительного* s *оператор* $\widetilde{\mathfrak{L}}^+_{s,p}$ *осуществляет изоморфизм между пространствами* (1.17).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 1. Мы его также для простоты изложения проведем в случае $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^+ = 0$. Ясно, что достаточно рассмотреть лишь случай $s < 0$ и установить в этом случае неравенство

$$c^{-1} |||v|||_{2M+s,p} \leqslant \|(L^+ v, B' v)\|_{H^{s,p}_+(G,\Gamma)} \leqslant c\, |||v|||_{2M+s,p} \, (v \in H^{2M,p}(G_1, G_2), s < 0). \tag{1.18}$$

Но правая оценка (1.18) сразу следует из леммы 1, поэтому остается установить левое неравенство (1.18).

Пусть вначале $s \leqslant -2M$ — целое, $t = -2M - s \geqslant 0$. Сопряженный к $N_{t,p'}$ оператор $\widetilde{N}^+_{-2\mu-t,p}$ непрерывно действует из всего $H^{-(2\mu+t),p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-\left(t-\sigma'_j-\frac{1}{p'}\right)}(\Gamma)$ в $(H^{t,p'}(G, \Gamma))^* = H^{-t,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{-\left(t-\sigma'_j-\frac{1}{p'}\right)}(\Gamma)$ и является расширением $N^+_{t,p}$, поэтому

$$\|v\|_{-t,p} + \sum_{j=1}^{l} \langle\langle C'_j v \rangle\rangle_{-t+\sigma_j+1-\frac{1}{p},p} \leqslant c\,(\|L^+ v\|_{-2\mu-t,p} + \\ + \sum_{j=1}^{l} \langle\langle B'_j v \rangle\rangle_{-t-\sigma'_j+1-\frac{1}{p},p})\, (v \in H^{2M,p}(G_1, G_2)). \tag{1.19}$$

Прибавив к обеим частям (1.19) второе слагаемое правой части этого неравенства и учитывая, что $t = -2M - s$, получим

$$\{v\}_{2\mu+s,p} \overset{\mathrm{df}}{=} \| v \|_{2M+s,p} + \sum_{j=1}^{l} (\langle\langle B'_j v\rangle\rangle_{2M+s+\sigma'_j+1-\frac{1}{p},p} +$$

$$+ \langle\langle C'_j v\rangle\rangle_{2M+s+\sigma_j+1-\frac{1}{p},p}) \leqslant C_s \| (L^+ v, B' v) \|_{H^{s,p}(G,\Gamma)}.$$

Но для целых s норма $\{\ \}_{2M+s,p}$ эквивалентна норме $|||\cdot|||_{2M+s,p}$ пространства (1.15), и доказательство завершается с помощью тех же рассуждений, что и в теореме 1. ■

§ 2. Задачи типа А. В. Бицадзе — А. А. Самарского

1 Пусть $L(x, D)$ — линейное дифференциальное выражение порядка $2m$ с бесконечно гладкими коэффициентами, определенными в $\bar{G}$, $B_{jr}(x, D)$ ($j = 1, \ldots, m$; $r = 1, 3$) — выражения типа рассмотренных в § 1. Рассмотрим задачу (ср. [1—3])

$$Lu(x) = f(x) \quad (x \in G), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}_j u \overset{\mathrm{df}}{=} -J_\alpha (B_{j1} u(y))(x) + B_{j3} u(x) = \varphi_j(x) \ (x \in \Gamma,\ y = \alpha x \in \gamma; \tag{2.2}$$

$$\operatorname{ord} B_{j1} \leqslant \operatorname{ord} B_{j3} = m_j;\ j = 1, \ldots, m)$$

или, короче,

$$Lu = f, \quad \mathbf{B}u = \varphi. \tag{2.3}$$

Добавив на γ $2m$ условий непрерывности

$$D_\nu^{j-1} u_1(y) = D_\nu^{j-1} u_2(y) \quad (y \in \gamma;\ j = 1, \ldots, 2m), \tag{2.4}$$

сведем эту задачу к задаче типа (1.3); если последняя эллиптична, то и задачу (2.3) будем называть эллиптической. Оказывается (см. [3]), что эллиптичность задачи (2.3) эквивалентна эллиптичности обычной граничной задачи с гладкими коэффициентами

$$Lu(x) = f(x)\ (x \in G); \quad B_{j3} u(x)|_\Gamma = \varphi_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2.5}$$

Граничные условия (2.2) будем называть нормальными, если матрица граничных условий (2.2), (2.4) является 2μ-нормальной с $\mu = (m, m)$. Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Условия* (2.2) *являются нормальными тогда и только тогда, когда выполнены следующие требования*: а) $m_j \leqslant 2m - 1$ $(j = 1, \ldots, m)$; б) *в каждой точке* $x \in \Gamma$ $B_{j3,0}(x, \nu_\Gamma) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, *где* $B_{j3,0}(x, \xi)$ — *характеристический полином выражения* $B_{j3}(x, D)$; в) *для каждого целого* $k \in [0, 2m-1]$ *имеется не более двух выражений* $B_{j3}(x, D)$, *порядок которых равен* k, *причем если* $m_{j1} = m_{j2}$, *то в каждой точке* $x \in \Gamma$ *строки* $(B_{j_r1,0}(\alpha x, \nu_\gamma),\ B_{j_r3,0}(x, \nu_\Gamma))$ $(r = 1, 2)$ *линейно независимы.*

2. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{H}}^{2m+s,p}(G_1, G_2)$ (s — любое действительное) подпространство элементов $u \in \widetilde{H}^{2m+s,p}(G_1, G_2)$, удовлетворяющих условиям (2.4) (напомним, что здесь, как и выше, применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{H}^{2m+s,p}$ (в частности, при $s < 0$) понимается в смысле, указанном после леммы 1). Введем оператор

$$\widetilde{\Lambda}_{s,p} : u \to (Lu, \mathbf{B}u),\ \mathfrak{D}(\widetilde{\Lambda}_{s,p}) = \widetilde{\mathbf{H}}^{2m+s,p}(G_1, G_2); \tag{2.6}$$

здесь $Lu=(L_1u_1, L_2u_2)$, L_r — сужение выражения L на G_r $(r=1,2)$. *Из* непрерывности оператора (1.5), построенного для задачи (2.3), (2.4), следует, что $\widetilde{\Lambda}_{s,p}$ непрерывно действует из всего $\widetilde{\mathbf{H}}^{2m+s,p}(G_1, G_2)$ в $\mathbf{H}^{s,p}(G,\Gamma) \overset{\mathrm{df}}{=} H^{s,p}(G_1, G_2)\times\prod_{j=1}^{m} B_p^{s-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Ясно, что $\mathbf{H}^{s,p}(G,\Gamma)$ можно рассматривать как подпространство пространства $H^{s,p}(G,\Gamma)$, состоящее из элементов, последние $l-m$ компонент которых—нули.

Пусть теперь задача (2.3) эллиптична и граничные условия (2.2) нормальны. Тогда ядро $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}\ (\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{s,p})$ конечномерно и не зависит от s и p. Отсюда благодаря условиям (2.4) легко следует, что в действительности $\mathfrak{N}$ состоит из бесконечно гладких во всей замкнутой области $\bar{G}$ функций. Действительно, поскольку $\mathfrak{N}\subset C^\infty(\bar{G}_1)\times C^\infty(\bar{G}_2)$, то надо лишь доказать, что для любой $u=(u_1, u_2)\in\mathfrak{N}$ функция $u(x)=u_r(x)$, $x\in G_r$ $(r=1, 2)$ имеет на γ непрерывные производные любого порядка. Непрерывность производных до порядка $2m-1$ следует из условий (2.4); непрерывность производных порядка $2m$ и выше следует из того, что $Lu_r=0$ в $\bar{G}_r$, а коэффициенты эллиптического выражения L бесконечно гладки.

Из теоремы 1 теперь непосредственно вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Пусть задача* (2.3) *эллиптична и граничные условия* (2.2) *нормальны. Тогда для любого действительного* s *сужение оператора* $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{s,p}$ *осуществляет изоморфизм*

$$\widetilde{P}\widetilde{\mathbf{H}}^{2m+s,p}(G_1, G_2)\to Q^+\mathbf{H}^{s,p}(G,\Gamma).$$

§ 3. Приложения

1. Л о к а л ь н о е п о в ы ш е н и е **г л а д к о с т и** о б о б щ е н н ы х р е ш е н и й. В этом пункте вновь будет рассматриваться эллиптическая задача (1.3) с 2μ-нормальной матрицей граничных выражений $B(x, D)$. Для любого $u\in\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ (s — произвольное действительное) в сильном смысле определены $Lu\in H^{s,p}(G_1, G_2)$, $Bu|_\Gamma\in\prod_{j=1}^{l} B_p^{s-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ (см. конец введения). Элемент $u\in\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$, для которого в этом смысле

$$Lu=f,\quad Bu|_\Gamma=\varphi, \tag{3.1}$$

назовем обобщенным (сильным) решением задачи (3.1). Тот факт, что u — обобщенное решение задачи (3.1), можно истолковать и в слабом смысле — в смысле удовлетворения элементом u некоторым интегральным равенствам, которые естественно получаются с помощью интегрирования по частям (см. [15, 22]). При достаточно больших s обобщенное решение является, конечно, обычным классическим решением рассматриваемой задачи.

Из теоремы 1 и формулы Грина [5, (1.27)] следует, что для существования обобщенного решения $u\in\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ задачи (3.1) необходимо и достаточно, чтобы элемент $\mathfrak{F}=(f,\varphi)\in H^{s,p}(G,\Gamma)$ удовлетворял условиям (2.21) из [5]. При этом любое обобщенное решение задачи (3.1) задается формулой

$$u=\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}^{-1}\mathfrak{F}+\omega\ (\omega\in\mathfrak{N}). \tag{3.2}$$

Так как при $s\leqslant s_1$, $p\leqslant p_1$ оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}$ является расширением по непрерывности оператора $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s_1,p_1}$, то из формулы (3.2) следует, что если в действительности $\mathfrak{F}\in H^{s_1,p_1}(G,\Gamma)$, то и решение u более гладко: $u\in\widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}(G_1,G_2)$.

Справедливо также утверждение о локальном повышении гладкости обобщенных решений вплоть до Γ и γ. Заметим сначала, что для любой фиксированной $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in C^\infty(\bar{G}_1) \times C^\infty(\bar{G}_2)$ и любого действительного s отображение $u \to \zeta u \overset{\mathrm{df}}{=} (\zeta_1 u_1, \zeta_2 u_2)\,(u = (u_1, u_2),\, u_r \in C^\infty(\bar{G}_r))$ непрерывно в $\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ (см. [13, гл. III, лемма 6.15], где подобное утверждение доказано для целых s и $p = 2$; если $p \neq 2$, доказательство совершенно аналогично; для нецелых же s оно отсюда следует с помощью интерполяционной теоремы). Поэтому замыкание ζ этого отображения в $\widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ определено и непрерывно во всем пространстве. Аналогично определяется оператор умножения на $\zeta(x)$ в $H^{s,p}(G, \Gamma)$.

Пусть G_0' — подобласть G, пересекающая γ по куску γ_0 и входящая в окрестность $V(\gamma)$, введенную в п. 1, § 1; $G_0'' = \alpha^{-1}(G_0' \cap G_1)$; $\Gamma_0 = \alpha^{-1}(\gamma_0)$; область $G_0 = G_0' \cup G_0''$ содержит кусок γ_0 поверхности γ и примыкает к куску Γ_0 поверхности Γ. Рассмотрим произвольную функцию $\eta \in C^\infty(\bar{G}_0')$ с компактным носителем в G_0' и пусть $\eta_1(x) = \eta(\alpha x)$, $x \in G_0'' \cup \Gamma_0$ (α — преобразование, введенное в п. 1, § 1). Функцию $\zeta(x) \in C^\infty(\bar{G})$, равную $\eta(x)$ в G_0', $\eta_1(x)$ в $G_0'' \cup \Gamma$ и аннулирующуюся в остальных точках $\bar{G}$, будем называть срезающей для $G_0 \cup \Gamma_0$.

Определение. Если для элемента $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ и любой срезающей для $G_0 \cup \Gamma_0$ функции $\zeta(x)$ имеет место включение $\zeta u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}(G_1, G_2)$ с $s_1 \geqslant s$, $p_1 \geqslant p$, то будем говорить, что u локально в G_0 вплоть до γ_0 и Γ_0 входит в $\widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}$ и записывать это так: $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma_0, \Gamma_0)$. Аналогично, если $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in H^{s,p}(G, \Gamma)$, а $\zeta\mathfrak{F} \in H^{s_1,p_1}(G, \Gamma)$, то будем писать $\mathfrak{F} \in H^{s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \Gamma_0)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и пусть* $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ *— обобщенное решение этой задачи с* $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in H^{s,p}(G, \Gamma)$. *Если в действительности* $\mathfrak{F} \in H^{s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \Gamma_0)$ $(s_1 \geqslant s,\ p_1 \geqslant p)$, *то* $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma_0, \Gamma_0)$.

Доказательство. Пусть $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$, $\widetilde{\Lambda}_{s,p}u = \mathfrak{F} \in H^{s,p}(G, \Gamma)$ и пусть ζ_1 — срезающая функция. Тогда $\zeta_1 u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ и можно вычислить $\widetilde{\Lambda}_{s,p}(\zeta_1 u) = \zeta_1 \widetilde{\Lambda}_{s,p} u + Mu = \zeta_1 \mathfrak{F} + Mu = \mathfrak{F}_1$, где M — линейный дифференциальный оператор, полученный в результате пронесения ζ_1, поэтому $Mu \in H^{s+1,p}(G, \Gamma)$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_1 \in H^{t,p}(G, \Gamma)$ $(t = \min\{s_1, s+1\})$; в силу сказанного после формулы (3.2) $\zeta_1 u \in \widetilde{H}^{2\mu+t,p}(G_1, G_2)$. Если $t < s_1$, то аналогично показываем, что $\mathfrak{F}_2 = \widetilde{\Lambda}_{s+1,p}(\zeta_2\zeta_1 u) \in H^{t_1,p}(G, \Gamma)$ $(t_1 = \min\{s_1, s+2\})$ и поэтому $\zeta_2\zeta_1 u \in \widetilde{H}^{2\mu+t_1,p}(G_1, G_2)$. Продолжая эти рассуждения, после конечного числа шагов получим, что $\zeta u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p}(G_1, G_2)$, где $\zeta = \zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_k$ — любая срезающая функция, т. е. что $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma_0, \Gamma_0)$. Проводя аналогичные рассуждения и используя на каждом шаге теоремы вложения, убедимся, что $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma_0, \Gamma_0)$. ■

Ясно, что доказанную теорему можно применить и к задаче типа А. В. Бицадзе — А. А. Самарского (2.3). Если, в частности, $u \in \widetilde{\mathbf{H}}^{2m+s,p}(G_1, G_2)$, $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in \mathbf{H}^{s,p}(G, \Gamma)$ и дополнительно $\zeta f \in H^{s_1,p_1}(G)$, $\zeta\varphi \in \prod_{j=1}^{m} B_{p_1}^{s_1-\sigma_j-\frac{1}{p_1}}(\Gamma)$ $(s_1 \geqslant s,\ p_1 \geqslant p,\ s_1 \geqslant 0)$ для каждой срезающей функции $\zeta(x)$, то локально в G_0 вплоть до Γ_0 $u \in H^{2m+s_1,p_1}(G_0)$, т. е. в этом случае u и ее производные не терпят разрыва вдоль γ_0. Это следует из теоремы 4 и равенств (2.4) с помощью рассуждений, подобных приведенным перед теоремой 3.

2. Существование и гладкость функции Грина задачи (1.3). Теорема 2 позволяет использовать методику работы [12] для доказательства существования и изучения свойств гладкости функции Грина задачи (1.3). Для простоты рассмотрим вначале случай отсутствия дефекта: $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^+ = 0$. Обозначим через $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$ ($R_x = (R_{1x}, R_{2x})$) решение задачи

$$\begin{gathered} L_1^+(y, D_y) R_{1x} = \begin{cases} \delta_x, x \in G_1 \\ 0, x \in G_2 \end{cases} \quad (y \in G_1), \\ L_2^+(y, D_y) R_{2x} = \begin{cases} 0, x \in G_1 \\ \delta_x, x \in G_2 \end{cases} \quad (y \in G_2), \\ B'(y, D_y) R_x|_\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Так как $\delta_x \in H^{-q,p'}(G_r) \left(q > \dfrac{n}{p}\right)$, то из теоремы 2 легко следует, что задача (3.3) имеет обобщенное решение

$$R_x \in \widetilde{H}^{2m_r - q, p'}(G_1, G_2) \quad (x \in G_r;\ r = 1,2). \tag{3.4}$$

Зафиксируем теперь произвольное число $q > \dfrac{n}{p}$ и пусть $s \geqslant q - 2m$ ($m = \min\{m_1, m_2\}$). Для любого элемента $\mathfrak{F} \in H^{s,p}(G, \Gamma)$ существует обобщенное решение $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ задачи (1.3). Запишем формулу Грина с этим u и $v = R_x$ (на такие u, v формула Грина распространяется с помощью предельного перехода). Учитывая (3.3), получим для $x \in G_r$

$$(f_1, R_{1x}|_{G_1}) + (f_2, R_{2x}|_{G_2}) + \langle \varphi, C'R_x \rangle_{L_2^l(\Gamma)} = u_r(x) \ (x \in G_r, r = 1,2),$$

где $R_{rx}|_{G_r}$ — первая компонента R_{rx} ($r = 1,2$) (см. введение), а $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ — первая компонента обобщенного решения $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ задачи (1.3). Таким образом,

$$u(x) = (f, R_x^0) + \sum_{j=1}^{l} \langle \varphi_j, R_x^j \rangle, \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{R}(x, \cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (R_x^0, R_x^1, \ldots, R_x^l) = (R_x|_G, C_1' R_x|_\Gamma, \ldots, C_l' R_x|_\Gamma). \tag{3.6}$$

Если, в частности, $s \geqslant 0$, то формула (3.5) дает обычное решение $u \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ задачи (1.3). Поэтому $\mathbf{R}(x, y)$ естественно назвать вектор-функцией Грина этой задачи.

Если $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^+$ отличны от нуля, то надо R_x определить как то обобщенное решение из $\widetilde{H}^{2m_r - q, p'}(G_1, G_2)$ ($x \in G_r$; $r = 1,2$) задачи

$$L^+(y, D_y) R_x = \Delta_x - \mathbf{P}\Delta_x, \quad B'(y, D_y) R_x|_\Gamma = 0,$$

для которого $(R_x|_G, \mathfrak{N}^+) = 0$; здесь $\Delta_x = \begin{pmatrix} \delta_x \\ 0 \end{pmatrix}$ при $x \in G_1$ и $\Delta_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_x \end{pmatrix}$ при $x \in G_2$, а $\mathbf{P}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{N}$. По формуле (3.5) тогда получим первую компоненту того обобщенного решения $u \in \widetilde{H}^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ задачи (1.3), для которого $(u|_G, \mathfrak{N}) = 0$.

Теоремы 1 и 2 позволяют исследовать свойства регулярности построенной функции Грина по совокупности переменных в $\overline{G} \times \overline{G}$; для этого достаточно приспособить соответствующим образом методику работы [12].

3. Задачи со степенными особенностями в правых частях. Теоремы 1 и 2 дают возможность исследовать основную и сопряженную задачи в случае, когда $f(x)$, $\varphi(x)$ (соответственно $g(x)$, $\psi(x)$) имеют в точках конечного множества E сколь угодно большие степенные особенности, а в $\overline{G}\diagdown E$ достаточно гладки (ср. [23]). Для этого нужно правые части $f(x)$, $\varphi(x)$ заменить их регуляризациями f, φ, тогда $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in H^{s,p}(G, \Gamma)$ с s, зависящим от порядка особенностей; далее применяется теорема 1 для доказательства существования обобщенного решения и теорема 4 — для исследования его гладкости.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, О некоторых простейших обобщениях эллиптических краевых задач, ДАН СССР, т. 185, № 4, 1969.
2. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач, ДАН СССР, т. 192, № 3, 1970.
3. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем, Сиб. матем. ж., т. 13, № 1, 1972.
4. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений, Матем. исследования, т. 6, № 2, Кишинев, 1971.
5. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Формула Грина и условия разрешимости нелокальных эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 25, № 4, 1973.
6. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei, III, V, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser III, 15, N 1—2, 1961, 39—101; **16**, N 1, 1962, 1—44; VI, J. Analyse Math., **11**, 1963, 165—188.
7. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971.
8. Э. Мадженес, Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных, УМН, т. 21, вып. 2, 1966.
9. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
10. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
11. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений, УМЖ, т. 17, № 5, 1965.
12. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.
13. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
14. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем, УМН, т. 22, вып. 5, 1967.
15. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения, Матем. сб., т. 78, вып. 3, 1969.
16. Я. А. Ройтберг, Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, ДАН СССР, т. 180, № 3, 1968.
17. М. И. Вишик, С. Л. Соболев, Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 111, № 3, 1956.
18. Я. А Ройтберг, З. Г. Шефтель, Формула Грина и теоремы о гомеоморфизмах для нелокальных эллиптических граничных задач, ДАН СССР, т. 201, № 5, 1971.
19. А. П. Кальдерон, Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод, Математика (сб. перев.), т. 9, № 3, 1965.
20. M. Schechter, On L^p estimates and regularity, I, II, Amer. J. Math., **85**, N 1, 1963, 1—13; Math. Scand., **13**, N 1, 1963, 47—69.
21. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Шкалы банаховых пространств, УМН, т. 21, вып. 2, 1966.
22. Я. А. Ройтберг, О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений, Матем. сб., т. 86 (128), вып. 2, 1971.
23. Я. А. Ройтберг, О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях, УМЖ, т. 20, № 3, 1968.

Поступила 19.II 1971 г.
Черниговский педагогический институт