Я. А. Ройтберг, Граничные и смешанные задачи для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских, *Докл. АН СССР*, 1991, том 318, номер 4, 820–824

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allegretto W., Huang Y.X.* – Can. J. Math. 1988, vol. 40, № 5, p. 1222–1242. 2. *Berestycki H., Lions P.L., Peletier L.A.* – Indiana Univ. Math. J., 1981, vol. 30, № 1, p. 141–157. 3. *Furusho Y., Kusano T.* – Can. J. Math., 1988, vol. 40, № 5, p. 1156–1173. 4. *Furusho Y.* – Japan. J. Math., 1988, vol. 14, № 1, p. 97–118. 5. *Gidas B., Spuck J.* – Comm. Pure Appl. Math., 1981, vol. 34, p. 525–598. 6. *Kusano T., Naito M.* – Hiroshima Math. J., 1986, vol. 16, p. 361–366. 7. *Noussair E.S., Swanson C.A.* – Indiana Univ. Math. J., 1987, vol. 36, p. 651–657. 8. *Похожаев С.И.* – ДАН, 1965, т. 165, № 1, с. 36–39. 9. *Похожаев С.И.* – ДАН, 1990, т. 313, № 6, с. 1356–1360.

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

© Я.А. РОЙТБЕРГ

ГРАНИЧНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВСКИХ

(Представлено академиком С.М. Никольским 28 I 1991)

1. Граничные и смешанные задачи для гиперболических уравнений изучались в классах достаточно гладких функций в работах [1–5] (см. также обзор [6]). В данной работе граничные и смешанные задачи для общих гиперболических по Лере–Волевичу систем изучаются в полной шкале пространств типа соболевских, зависящих от параметров $s, \tau \in \mathbf{R}$; s характеризует гладкость решения по всем переменным, τ – дополнительную гладкость по тангенциальным переменным. Ранее в работах Лионса, Мадженеса, Ю.М. Березанского, С.Г. Крейна, автора и др. (см. [7–11] и приведенную там библиографию) эллиптические задачи изучались в шкалах пространств типа соболевских, зависящих от параметра $s \in \mathbf{R}$. Для параболических задач подобные теоремы получены Н.В. Житарашу [12], для задачи Коши для гиперболических уравнений, а также для граничных и смешанных задач для однородных гиперболических уравнений – автором [13, 14].

2. Пусть $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $(\sigma, \xi) = (\sigma, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ – двойственные переменные:

$$(1) \qquad l = l(D_t, D_x) = (l_{kj}(D_t, D_x)\colon\ k, j = 1, \ldots, N)$$

матричное дифференциальное выражение, $l_{kj}(D_t, D_x)$ – линейные однородные дифференциальные выражения порядков $s_k + t_j$ с постоянными комплексными коэффициентами, $l_{kj} = 0$, если $s_k + t_j < 0$. Здесь $D_t = i\partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = i\partial/\partial x_j, s_1, \ldots, s_N, t_1, \ldots, t_N$ – целые числа, $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_N \geqslant 0 = s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_N$. Пусть $s_1 + \ldots + s_N + t_1 + \ldots + t_N = r$, а

$$(2) \qquad L(\sigma, \xi) = \det l(\sigma, \xi) = \sum_{j + |\alpha| = r} a_{j\alpha}\, \sigma^j \xi^\alpha .$$

Выражение (1) называют *строго гиперболическим* (*по Лере–Волевичу*), если коэффициент $a_{r, 0, \ldots, 0}$ при σ^r в (2) отличен от нуля и для каждого $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ корни полинома (2) относительно σ вещественны и различны.

Всюду в работе предполагается, что выражение (1) строго гиперболическое и что коэффициент $a_{0,\ldots,0,r}$ при ξ_n^r в (2) отличен от нуля.

Из строгой гиперболичности $l(D_t, D_x)$ следует, что для каждого $\gamma > 0$ уравнение

(3) $\quad L(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = 0$

не имеет относительно ξ_n вещественных корней. Пусть

(4) $\quad \zeta_1(\sigma + i\gamma, \xi'), \ldots, \zeta_r(\sigma + i\gamma, \xi')$

$((\sigma + i\gamma, \xi') \neq (0, 0), \gamma \geqslant 0)$ – ξ_n-корни уравнения (3). Предположим для определенности, что при $\gamma > 0$ первые m корней (4) имеют отрицательные мнимые части, а остальные – положительные. Положим

$$L(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = L_-(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) L_+(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n),$$
$$L_-(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (\xi_n - \zeta_j(\sigma + i\gamma, \xi')). \tag{5}$$

В работе исследуется разрешимость в $\mathbf{R}^{n+1}$ задачи

(6) $\quad l(D_t, D_x) u = f, \quad u = (u_1, \ldots, u_N), \quad f = (f_1, \ldots, f_N),$

а также задачи

(7) $\quad (l(D_t, D_x) + l'(t, x, D_t, D_x)) u = f,$

полученной возмущением системы (6) младшими членами с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены.

В полупространстве $G = \{(t, x) = (t, x', x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_n > 0\}$ изучается граничная задача

(8) $\quad l(D_t, D_x) u = f \quad (\text{в } G), \quad b(D_t, D_x) u = \varphi \quad (\text{на } \partial G);$

здесь $b(x, D) = (b_{hj}(x, D) : h = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N)$ – матрица линейных однородных дифференциальных выражений с постоянными комплексными коэффициентами порядков соответственно $\sigma_h + t_j$ ($b_{hj} = 0$, если $\sigma_h + t_j < 0$), $\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_m$ – заданные целые числа. Всюду в работе предполагается, что задача (8) гиперболическая. Это означает, что система (1) строго гиперболическая, $a_{r,0,\ldots,0} \neq$ $\neq 0$, число граничных условий равно числу m корней (4) с отрицательными мнимыми частями и выполнено условие Лопатинского: для каждого $(\sigma + i\gamma, \xi') \neq (0, 0)$, $\gamma \geqslant 0$ строки матрицы

$$L(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) b(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n) l^{-1}(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n),$$

элементы которой рассматриваются как полиномы от ξ_n, линейно-независимы по модулю $L_-(\xi_n) = L_-(\sigma + i\gamma, \xi', \xi_n)$.

В работе исследуется также задача

$$(l(D_t, D_x) + l'(t, x, D_t, D_x)) u = f \quad (\text{в } G),$$
$$(b(D_t, D_x) + b'(t, x, D_t, D_x)) u = \varphi \quad (\text{на } \partial G), \tag{9}$$

полученная возмущением задачи (8) младшими членами с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены.

Отметим здесь также, что будет показано, что если правые части задач (8), (9) аннулируются при $t \leqslant 0$, то равны нулю при $t \leqslant 0$ и решения этих задач. Поэтому из теорем о разрешимости задач (8), (9) будут следовать теоремы о разрешимости соответствующих смешанных в $G_+ = \{(t, x) \in G : t > 0\}$ с однородными (нулевыми) начальными данными при $t = 0$.

3. Пусть $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$. Через $H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ обозначим пространство распределений f с нормой

(10) $\|f, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau} = (\int (1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi|^2)^s (1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi'|^2)^\tau |\tilde f(\sigma,\xi)|^2 d\sigma d\xi)^{1/2}$;

здесь $\tilde f$ – преобразование Фурье элемента f.

Через $H^{s,\tau}(G, \gamma)$, $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $s \geqslant 0$, обозначим множество сужений на G функций из $H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ с нормой фактор-пространства; через $H^{-s,-\tau}(G, \gamma)$, $s > 0$, обозначим пространство, сопряженное $H^{s,\tau}(G, \gamma)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(G)$; $\|u, G, \gamma\|_{s,\tau}$ – норма в $H^{s,\tau}(G, \gamma)$, $s, \tau \in \mathbf{R}$. Пространство $H^s(\partial G, \gamma)$, $s, \gamma \in \mathbf{R}$, – это пространство распределений g с нормой

$$\|g, \partial G, \gamma\|_s = \left(\int_{\partial G} |\hat g(\sigma, \xi')|^2 (1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi'|^2)^s \, d\sigma d\xi'\right)^{1/2};$$

здесь $\hat g(\sigma, \xi')$ – преобразование Фурье элемента g.

Зафиксируем натуральное число r и пусть $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $s \neq k + ½$, $k = 0, \ldots, r-1$. Через $\tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$ (ср. [9, 10]; [8, гл. 3, § 6, п. 8]) обозначим пополнение множества $C_0^\infty(\bar G)$ бесконечно гладких в $\bar G$ и аннулирующихся на ∞ функций по норме

(11) $$|||u, G, \gamma|||_{s,\tau,(r)} = \left(\|u, G, \gamma\|^2_{s,\tau} + \sum_{j=1}^{r} \|D_n^{j-1} u, \partial G, \gamma\|^2_{s+\tau-j+½}\right)^{1/2}.$$

Для $s = k + ½$, $k = 0, \ldots, r-1$, пространства $\tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$ и нормы $|||\cdot, G, \gamma|||_{s,\tau,(r)}$ определяются с помощью интерполяции. Из (11) следует, что замыкание S отображения $u \mapsto (u|_{\bar G}, u|_{\partial G}, \ldots, D_n^{r-1} u|_{\partial G})$, $u \in C_0^\infty(\bar G)$, устанавливает изометрию между $\tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$ и подпространством прямого произведения $H^{s,\tau}(G) \times \times \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} H^{s+\tau-j+1/2}(\partial G, \gamma)$. Поэтому можно отождествить $u \in \tilde H^{s,\tau,(r)}(G)$ с элементом $Su = (u_0, \ldots, u_r)$. Будем писать $u = (u_0, \ldots, u_r) \in \tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$ для каждого $u \in \tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$. Наконец если $r = 0$, то положим $\tilde H^{s,\tau,(r)}(G, \gamma) = H^{s,\tau}(G, \gamma)$, $|||u, G, \gamma|||_{s,\tau,(r)} = \|u, G, \gamma\|_{s,\tau}$.

Введем еще пространства $\mathcal{H}^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$, $\mathcal{H}^{s,\tau}(G, \gamma)$, $\mathcal{H}^s(\partial G, \gamma)$, $\tilde{\mathcal{H}}^{s,\tau,(r)}(G, \gamma)$; нормы в них обозначим соответственно $|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, G, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, \partial G, \gamma|_s$, $|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)}$: $\mathcal{H}^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma) = \{u : e^{-\gamma t} u \in H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)\}$; $|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau} = \|e^{-\gamma t} u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau}$; остальные пространства и нормы вводятся аналогично.

Лемма 1. *Пусть $M = M(t, x, D_t, D_x)$ – линейное дифференциальное выражение порядка m с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены. Тогда для любых $s, \tau \in \mathbf{R}$ существует постоянная $c > 0$, не зависящая от u и γ, такая, что*

(12) $|Mu, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s-m,\tau} \leqslant c|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau}$, $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$;

если $m \leqslant r$, то

(13) $|Mu, G, \gamma|_{s-m,\tau} \leqslant c|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)}$, $u \in C_0^\infty(\bar G)$;

если $m \leqslant r - 1$, то

(14) $|Mu, \partial G, \gamma|_{s+\tau-m-½} \leqslant c|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)}$, $u \in C_0^\infty(\bar G)$;

если $m \leqslant r$, *то*

(15) $\quad |Mu, G, \gamma|_{s-m,\tau,(r-m)} \leqslant c\,|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)}, \quad u \in C_0^\infty(G)$.

Доказательство. Поскольку

$$M(t, x, D_t, D_x)u = e^{\gamma t} M(t, x, D_t + i\gamma, D_x)(e^{-\gamma t}u),$$

то

$$|Mu, G, \gamma|_{s-m,\tau} = \|e^{-\gamma t}Mu, G, \gamma|_{s-m,\tau} = \|M(t, x, D_t + i\gamma, D_x)(e^{-\gamma t}u),$$

$$G, \gamma\|_{s-m,\tau} \leqslant c\,|||e^{-\gamma t}u, G, \gamma|||_{s,\tau,(r)} = c\,|u, G, \gamma|_{s,\tau,(r)}$$

и неравенство (13) установлено. Остальные неравенства доказываются аналогично (ср. [8–10, 15]).

4. Из леммы 1 следует: замыкание l отображения $u \mapsto lu$, $u \in (C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1}))^N$, непрерывно действует в паре пространств

(16) $$\prod_{j=1}^{N} \mathcal{H}^{t_j+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma) := \mathcal{H}^{T+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma) \to \prod_{j=1}^{N} \mathcal{H}^{s-s_j,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma) := \mathcal{H}^{s-S,\tau};$$

(17) $\quad |lu, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s-S,\tau} \leqslant c\,|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{T+s,\tau}$,

где $|f, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s-S,\tau}$, $|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{T+s,\tau}$ – нормы соответственно в пространстве образов и прообразов отображения (16).

Теорема 1. *Пусть* $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$. *Для каждого* $f \in \mathcal{H}^{s-S,\tau+1}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ *существует один и только один элемент* $u \in \mathcal{H}^{T+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ *такой, что* $lu = f$. *Существует постоянная* $c > 0$ *не зависящая от* $f, u, \gamma, \gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, *такая, что*

(18) $$|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{T+s,\tau} \leqslant \frac{c}{\gamma}|f, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s-S,\tau+1}.$$

Если $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega} = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} : t \geqslant 0$, *то и* $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$.

Сравнение (17) и (18) показывает, что при переходе $f \mapsto u$ "теряется единица гладкости в тангенциальном направлении".

Теорема 2. *Существует число* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для каждого* $\gamma \geqslant \gamma_0$ *система* (7) *с любым* $f \in \mathcal{H}^{s-S,\tau+1}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ *имеет одно и только одно решение* $u \in \mathcal{H}^{T+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$. *Существует постоянная* $c > 0$, *не зависящая от* $f, u, \gamma, \gamma \geqslant \gamma_0$, *такая, что имеет место оценка* (18). *Если* $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$, *то и* $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$.

5. Рассмотрим гиперболическую задачу (8). Пусть $\kappa = \max\{0, \sigma_1 + 1, \ldots, \sigma_m + 1\}$. Из леммы 1 непосредственно следует, что замыкание $A_{s,\tau} = A = (l, b)$ отображения $u \mapsto (lu, bu)$, $u \in (C_0^\infty(\overline{G}))^N$, непрерывно действует в паре пространств

$$\prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathcal{H}}^{t_j+s,\tau(t_j+\kappa)}(G, \gamma) := \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T+\kappa)}(G, \gamma) \to$$

$$\to \prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathcal{H}}^{s-s_j,\tau,(\kappa-s_j)}(G, \gamma) \times \prod_{h=1}^{m} \mathcal{H}^{s-\sigma_h+\tau-1/2}(\partial G, \gamma) :=$$

$$:= \widetilde{\mathcal{H}}^{s-S,\tau,(\kappa-S)}(G, \gamma) \times \mathcal{H}^{s-\sigma+\tau-1/2}(\partial G, \gamma) := K_{s,\tau}.$$

Теорема 3. *Пусть* $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$ *и* $F = (f, \varphi) \in K_{s,\tau+1}$. *Тогда задача* (8) *имеет одно и только одно решение* $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T+\kappa)}(G, \gamma)$, *и имеет место* *оценка*

$$(19)\qquad \|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T+\kappa)}} \leqslant \frac{c}{\gamma}\,\|F\|_{K_{s,\tau+1}},$$

где $c > 0$ не зависит от u, F, γ, $\gamma \geqslant \gamma_0$. Если $\operatorname{supp} F \subset \bar{G}_+ = \{(t, x', x_n) \in \bar{G} : t \geqslant 0\}$, *то и* $\operatorname{supp} u \subset \bar{G}_+$.

Разрешимость задачи (9) характеризует

Теорема 4. *Существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что для каждого $\gamma \geqslant \gamma_0$ задача* (9) *с $F \in K_{s,\tau+1}$ имеет одно и только одно решение $\bar{u} \in \mathcal{H}^{T+s,\tau,(T+\kappa)}(G,\gamma)$. Имеет место оценка* (19). *Если* $\operatorname{supp} F \subset \bar{G}_+$, *то и* $\operatorname{supp} u \subset \bar{G}_+$.

Эти теоремы можно несколько усилить. *Пусть $F = (f, \varphi) \in K_{s,\tau}$, $f = (f_1, \ldots$ $\ldots, f_N)$, $f_j = (f_{j0}, \ldots, f_{j,\kappa-s_j}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-s_j,\tau,(\kappa-s_j)}(G,\gamma)$ и дополнительно $f_{j0} \in$ $\in \mathcal{H}^{s-s_j,\tau+1}(G,\gamma)$, $j = 1, \ldots, N$, $f_{jk} \in \mathcal{H}^{s-s_j+\tau-k+1}(\partial G,\gamma)$ $(\forall j : \kappa - s_j \geqslant 1;\ k =$ $= 1, \ldots, \kappa - s_j)$; $\varphi_h \in \mathcal{H}^{s-\sigma_h+\tau}(\partial G,\gamma)$, $h = 1, \ldots, m$. Тогда задачи* (8), (9) *при $\gamma \geqslant \gamma_0$ имеют одно и только одно решение*

$$u = (u_1, \ldots, u_N) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T+\kappa)}(G,\gamma),\quad u_j = (u_{j0}, \ldots, u_{j,t_j+\kappa}),\quad j = 1, \ldots, N.$$

При этом $u_{j0} \in \mathcal{H}^{t_j+s,\tau}(G,\gamma)$, $u_{jk} \in \mathcal{H}^{t_j+s+\tau-k+1}(\partial G,\gamma)$, $j = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots$ $\ldots, t_j + \kappa$, и справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma\,|u_{j0}, G, \gamma|^2_{t_j+s,\tau} + \sum_{k=1}^{t_j+\kappa} |u_{jk}, \partial G, \gamma|^2_{t_j+s+\tau-k+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{N} |f_{j0}, G, \gamma|^2_{s-s_j,\tau+1} + \sum_{j:\,\kappa-s_j \geqslant 1}\ \sum_{k=1}^{\kappa-s_j} |f_{jk}, \partial G, \gamma|^2_{s-s_j+\tau-k+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} |\varphi_h, \partial G, \gamma|^2_{s+\tau-\sigma_h}\right)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от u, f, φ, γ, $\gamma \geqslant \gamma_0$.

6. Укажем здесь на некоторые возможные применения приведенных теорем. Рассмотрение задач (6)–(9), в которых правые части являются соответствующими мерами Дирака, позволяет с помощью теорем 1–4 построить и оценить матрицы Грина соответствующих задач. Совершенно аналогично теоремы 1–4 позволяют изучить эти задачи с произвольными степенными особенностями в правых частях, позволяет изучить класс вырождающихся гиперболических задач для систем уравнений.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т.Г. Шевченко

Поступило
12 II 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сакомото Р.* – Математика, 1972, т. 16, № 1, с. 62–99. 2. *Крайс Х.-О.* – Там же, 1970, т. 14; № 4, с. 98–111. 3. *Агранович М.С.* – Мат. сб., 1971, т. 84, № 1, с. 27–65. 4. *Шазарен Ж., Пириу А.* – Математика, 1974, т. 18, № 2, с. 79–109. 5. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* – УМН, 1980, т. 35, № 5, с. 53–120. 6. *Волевич Л.Р., Иврий В.Я.* В кн.: Петровский И.Г. Избранные труды. М.: Наука, 1986, с. 395–418. 7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с. 8. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка. 1965. 800 с. 9. *Ройтберг Я.А.* – ДАН, 1964, т. 157, № 4, с. 798–801. 10. *Ройтберг Я.А.* – Матем. сб., 1971, т. 86, №2 (10), с. 248–267. 11. *Ройтберг Я.А.* – Укр. матем. журн., 1975, т. 27, № 4, с. 544–548. 12. *Житарашу Н.В.* – Матем. сб., 1985, т. 128, № 4, с. 451–473. 13. *Ройтберг Я.А.* – ДАН, 1986, т. 196, № 6, с. 805–812. 14. *Ройтберг Я.А.* – Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 5, с. 685–690.