Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, О плотности решений эллиптических задач с локализованными правыми частями в функциональных пространствах на многообразии, *Докл. АН СССР*, 1989, том 305, номер 6, 1317–1320

В случае евклидова пространства (4) означает, что все производные распределения, задаваемого функцией K, равны нулю. В [10, с. 77] доказывается, что в этом случае распределение является постоянным. Аналогичное утверждение для случая риманова многообразия можно получить из результатов [8, § 29].

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
24 XI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 244 с. 2. *Александров А.Д., Берестовский В.Н., Николаев И.Г.* – УМН, 1986, т. 41, вып. 3, с. 3–44. 3. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: ИИЛ, 1948. 232 с. 4. *Wald A.* Ergeb. eines math. Koll., 1935, H. 7, S. 24–46. 5. *Kirk W.A.* – Pacific J. Math., 1964, vol. 14, № 1, p. 195–198. 6. *Николаев И.Г.* – Сиб. матем. журн., 1983, т. 24, № 2, с. 114–132. 7. *Николаев И.Г.* Всес. конф. по геометрии "в целом". Новосибирск, сентябрь 1987 г. Тез. докл. Новосибирск, 1987, с. 90. 8. *Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956. 250 с. 9. *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 386 с. 10. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

Я.А. РОЙТБЕРГ, З.Г. ШЕФТЕЛЬ

О ПЛОТНОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком С.М. Никольским 18 XI 1987)

1. В ограниченной области $G \subset \mathbf{R}^n$ с бесконечно гладкой границей ∂G рассматривается граничная задача

$$(1) \qquad Lu=f, \quad B_j u|_{\partial G}=\varphi_j, \quad j=1,\dots,m.$$

Здесь $L = L(x, D)$ – правильно эллиптическое линейное дифференциальное выражение порядка $2m$, $B_j = B_j(x, D)$ – граничные линейные дифференциальные выражения порядков $m_j < 2m$, удовлетворяющие условию Лопатинского. Коэффициенты выражений L, B_j – бесконечно гладкие комплекснозначные функции.

Пусть $\Gamma_1 \subset G$ – гладкое $(n-1)$-мерное многообразие без края; Γ – открытое подмножество Γ_1. Для любого гладкого решения u задачи (1) положим $\nu_r u = (u|_\Gamma, \dots, D_\nu^{r-1} u|_\Gamma)$, $D_\nu = i\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu$ – производная по нормали к Γ. Будем произвольно изменять функцию f в сколь угодно малой фиксированной подобласти $G_0 \subset G$ (либо произвольно изменять $\{\varphi_j\}$ на сколь угодно малом куске $\gamma \subset \partial G$). Исследуется возможность приближения полученными при таком изменении векторами $\nu_r u$ любой заданной на Γ функции $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$. Подобные задачи изучались, начиная с 1960 г., в работах Беккерта, Вильденхайна, Шульце, Хаманна и др. (см. [1] и приведенную там библиографию). Во всех этих работах граничные выражения предполагались нормальными в смысле Аронштайна–Мильграма–Шехтера.

Поскольку требование нормальности весьма ограничительно, естественно возникает задача об освобождении от этого требования. Эта задача решена в данной работе.

2. Всюду в дальнейшем предполагается, что для формально сопряженного к L выражения L^+ имеет место свойство единственности для задачи Коши: если $L^+v = 0$ в области $G_1 \subset G$ и $v \equiv 0$ в области $G_2 \subset G_1$, то $v \equiv 0$ в G_1.

Для $p, t \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $t \geqslant 0$, через $H^{t,p}(G)$ обозначим пространство бесселевых потенциалов, $H^{-t,p}(G)$ – пространство, сопряженное к $H^{t,p'}(G)$, $1/p + 1/p' = 1$, относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(G)$; $\|\cdot\|_{t,p}$ – норма в $H^{t,p}(G)$, $t \in \mathbf{R}$. Через $B^{t,p}(\Gamma)$, $t \in \mathbf{R}$, обозначается пространство Бесова; $B^{t,p}(\Gamma)$ и $B^{-t,p'}(\Gamma)$ взаимно сопряжены относительно расширения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$; $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{t,p}$ – норма в $B^{t,p}(\Gamma)$.

Пусть G_0 – открытое подмножество G такое, что $\overline{G}_0 \subset G \setminus \overline{\Gamma}$. Диаметр G_0 произволен, он может быть сколь угодно малым. Положим: $M(G_0) = \{u \in C^\infty(\overline{G}): \operatorname{supp} Lu \subset G_0,\ B_j u|_{\partial G} = 0,\ j = 1, \ldots, m$, и

$$\nu_r M(G_0) = \{(u|_\Gamma, D_\nu u|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_\Gamma):\ u \in M(G_0)\}.$$

Теорема 1. *Если множество $G \setminus \overline{\Gamma}$ связно, то $\nu_{2m} M(G_0)$ плотно в прямом произведении $\prod_{1 \leqslant j \leqslant 2m} B^{s_j,p}(\Gamma)$ для любых $s_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 2m$, и $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $s \geqslant 0$ и $1 < p < \infty$ множество $\nu_{2m} M(G_0)$ плотно в $\prod_{1 \leqslant r \leqslant 2m} B^{2m+s-r+1-1/p,p}(\Gamma)$. Для этого надо проверить, что если $t_r \in B^{-(2m+s-r+1-1/p),p'}(\Gamma)$, $r = 1, \ldots, 2m$, и

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant 2m} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u \rangle = 0 \quad \forall u \in M(G_0), \tag{2}$$

то $t_r = 0$, $r = 1, \ldots, 2m$. Равенство (2) перепишем в виде

$$\left(\sum_{1 \leqslant r \leqslant 2m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma), u\right) = 0, \quad \forall u \in M(G_0), \tag{3}$$

где δ_Γ – мера Дирака, сосредоточенная на Γ. Но поскольку

$$|(D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma), u)| = |\langle t_r, D_\nu^{r-1} u \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \langle\langle t_r \rangle\rangle_{-(2m+s-r+1-1/p),p'} \langle\langle D_\nu^{r-1} u \rangle\rangle_{2m+s-r+1-1/p,p} \leqslant$$
$$\leqslant \langle\langle t_r \rangle\rangle_{-(2m+s-r+1-1/p),p'} \| u \|_{2m+s,p},$$

то

$$w = \sum_{1 \leqslant r \leqslant 2m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma) \in H^{-2m-s,p'}(G).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ ядро задачи (1). Поскольку $\mathfrak{N} \subset C^\infty(\overline{G})$, то из (3) сразу следует, что $(w, u) = 0$ $(\forall u \in \mathfrak{N})$. Поэтому согласно теореме 7 из [2] существует элемент $v \in H^{-s,p'}(G)$, являющийся решением задачи

$$L^+ v = w, \quad \check{q}^+ B_j' v|_{\partial G} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

формально сопряженной относительно формулы Грина (1.39) (см. [2]) к задаче (1). Здесь $\check{q}^+ B_j'$ – граничное выражение порядка $m_j' < 2m$, дифференциальное в нормальном и псевдодифференциальное в касательных к ∂G направлениях. По теореме о локальном повышении гладкости $v \in C^\infty(\overline{G} \setminus \overline{\Gamma})$ и удовлетворяет граничным условиям (4) в обычном смысле. Из (3) и (4) с помощью упомянутой формулы Грина получаем

$$0 = (w, u) = (L^+ v, u) = (v, Lu) \quad \forall u \in M(G_0)$$

или

(5) $\quad (v, Lu) = 0 \qquad \forall u \in M(G_0)$.

Из эллиптичности задачи (1) следует существование такого конечномерного пространства $\mathfrak{N}_0^+ \subset C^\infty(\overline{G})$, что задача (1) с $\varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0$ разрешима тогда и только тогда, когда $(f, \mathfrak{N}_0^+) = 0$. При этом элементы $\mathfrak{N}_0^+$ являются решениями задачи (4) с $w = 0$. Покажем, что решение v задачи (4) можно заменить таким решением $v_1 = v + v_0$, что $v_0 \in \mathfrak{N}_0^+$ и $v_1 \equiv 0$ в G_0.

Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $\mathfrak{N}_0^+$ и пусть $h_1, \ldots, h_k \in C_0^\infty(G_0)$ таковы, что $(e_i, h_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k$. Для любой функции $g \in C_0^\infty(G_0)$ положим

(6) $$g_1 = g - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (g, e_j) h_j.$$

Ясно, что $\operatorname{supp} g_1 \subset G_0$ и $(g_1, e_i) = 0, i = 1, \ldots, k$, т.е. $(g_1, \mathfrak{N}_0^+) = 0$. Но тогда существует $u \in C^\infty(\overline{G})$ такой, что $Lu = g_1$, $B_j u|_{\partial G} = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Это означает, что $u \in$ $\in M(G_0)$. Но тогда из (5) и (6) получаем

(7) $$0 = \Bigl(v, g - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (g, e_j)\Bigr) h_j = \Bigl(v - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (v, h_j) e_j, g\Bigr) \qquad \forall g \in C_0^\infty(G_0).$$

Поскольку $e_j \in \mathfrak{N}_0^+$, то элемент

$$v_1 = v - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} (v, h_j) e_j$$

является, как и v, решением задачи (4). Вместе с тем из (7) следует, что $v_1 \equiv 0$ в G_0; но тогда в силу условия единственности задачи Коши для L^+ и связности $\overline{G} \setminus \overline{\Gamma}$ получаем, что $v \equiv 0$ в $\overline{G} \setminus \overline{\Gamma}$, т.е. $\operatorname{supp} v_1 \subset \overline{\Gamma} \subset \Gamma_1$. Отсюда, учитывая, что $v_1 \in$ $\in H^{-s,p'}(G_0)$, нетрудно получить (ср. [3, лемма 4.1]), что

$$v_1 = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \kappa} D_\nu^j (\tau_j \times \delta_\Gamma),$$

где $\tau_j \in B^{-(s-j-1/p),p'}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \kappa$; κ — наибольшее целое число, меньшее $s - 1/p$ (если $s \leqslant 1/p$, то $v_1 \equiv 0$). Теперь из (4) получаем

(8) $$L^+\Bigl(\sum_{1 \leqslant j \leqslant \kappa} D_\nu^j (\tau_j \times \delta_\Gamma)\Bigr) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant 2m} D_\nu^{r-1} (t_r \times \delta_\Gamma).$$

Из равенства (8), учитывая линейную независимость мер Дирака и их производных и эллиптичность выражения L^+, последовательно находим $\tau_\kappa = \ldots = \tau_1 = 0$. Но тогда из (8) следует, что и $t_r = 0, r = 1, \ldots, 2m$.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma = \Gamma_1$ ограничивает подобласть G_1 области G (т.е. $G \setminus \Gamma$ несвязно) и пусть в области G_1 задача Дирихле для уравнения $L^+ v = 0$ имеет не более одного решения. Тогда множество $\nu_r M(G_0)$ плотно в прямом произведении* $\prod_{1 \leqslant r \leqslant m} B^{m-r+1-1/p,p}(\Gamma)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что если $t_r \in B^{-(m-r+1-1/p),p'}(\Gamma)$, $r = 1, \ldots, m$, таковы, что

(9) $$\sum_{1 \leqslant r \leqslant m} \langle t_r, D_\nu^{r-1} u \rangle = 0 \qquad \forall u \in M(G_0),$$

то $t_1 = \ldots = t_m = 0$. Переписав (9), как и при доказательстве теоремы 1, в виде $\bigl(\sum_{1 \leqslant r \leqslant m} D_\nu^{r-1} (t_r \times \delta_\Gamma), u\bigr) = 0$ и воспользовавшись оценкой

$$|(D_\nu^{r-1} (t_r \times \delta_\Gamma), u)| \leqslant \langle\!\langle t_r \rangle\!\rangle_{-(m-r+1-1/p),p'} \| u \|_{m,p},$$

получаем, что

$$w = \sum_{1 \leqslant r \leqslant m} D_\nu^{r-1}(t_r \times \delta_\Gamma) \in H^{-m,p'}(G).$$

Но тогда задача (4) имеет решение $v \in H^{m,p'}(G)$, причем по теореме о локальном повышении гладкости $v \in C^\infty(\bar{G} \setminus \Gamma)$. Рассуждая далее, как и при доказательстве теоремы 1, и построив решение v_1 задачи (4), получим, что $v_1 \equiv 0$ в $\bar{G} \setminus \bar{G}_1$. Поскольку $v_1 \in H^{m,p'}(G)$, отсюда следует, что $D_\nu^{j-1} v_1 |_\Gamma = 0, j = 1, \ldots, m$. Таким образом, v_1 – решение задачи Дирихле $L^+ v = 0$ в $G_1, D_\nu^{j-1} v_1 |_\Gamma = 0, j = 1, \ldots, m$, поэтому $v_1 \equiv 0$ в $\bar{G}$. Но тогда из (4) следует, что $t_1 = \ldots = t_m = 0$.

3. Пусть теперь γ – открытое подмножество ∂G; положим $N(\gamma) = \{u \in C^\infty(\bar{G}) : Lu = 0, \operatorname{supp} B_j u|_{\partial G} \subset \gamma, j = 1, \ldots, m\}$ и $\nu_r N(\gamma) = \{(u|_\Gamma, D_\nu u|_\Gamma, \ldots \ldots, D_\nu^{r-1} u|_\Gamma) : u \in N(\gamma)\}$.

Теорема 3. *Если множество* $G \setminus \bar{\Gamma}$ *связно, то* $\nu_{2m} N(\gamma)$ *плотно в* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant 2m} B^{s_j,p}(\Gamma)$ *для любых* $s_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 2m$, *и* $1 < p < \infty$.

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 2, то множество* $\nu_m N(\gamma)$ *плотно в* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} B^{m-r+1-1/p,p}(\Gamma)$.

4. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 3, имеют место и в том случае, когда Γ_1 – многообразие размерности k, $1 \leqslant k < n - 1$, Γ – открытое подмножество Γ_1 (ср. [1]).

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.М. Березанскому и Л.А. Иванову за обсуждение результатов.

Черниговский государственный педагогический институт им. Т.Г. Шевченко

Поступило 23 XI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamann U.* – Math. Nachr., 1986, Bd. 128, S. 199–214. 2. *Ройтберг Я.А.* – Матем. сб., 1970, т. 83, № 2, с. 181–213. 3. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Деп. ВИНИТИ, № 1599–81, 1981, с. 1–28.