Я. А. Ройтберг, О граничных значениях решений эллиптических уравнений, *Докл. АН СССР*, 1969, том 188, номер 1, 41–44

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 188, № 1

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

Я. А. РОЙТБЕРГ

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 I 1969)

Известно, что если аналитическая в круге функция имеет при подходе к границе степенной рост, то для нее существуют обобщенные граничные значения, по которым можно с помощью ядер Пуассона восстановить функцию. В данной работе показано, что аналогичные свойства имеют также обобщенные решения эллиптических уравнений. Полученные результаты усиливают также теоремы о следах Лионса — Мадженеса ([1–3]). Работа состоит из двух параграфов; первый носит вспомогательный характер, основные утверждения работы содержатся в § 2.

§ 1. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства, Γ — ее граница. В $\bar{G} = G \cup \Gamma$ задано правильно эллиптическое дифференциальное выражение $L = L(x, D)$ порядка $2m$ с комплексными коэффициентами. Для простоты будем коэффициенты выражения L и поверхность Γ предполагать бесконечно гладкими. Для произвольного действительного s рассматриваем пространства $W_p{}^s(G)$, $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$; $\|u\|_{s,p}$, $\langle\!\langle u \rangle\!\rangle_{s-1/p,p}$ — нормы в этих пространствах (если $s \geqslant 0$ целое, то $W_p{}^s(G)$ — пространство С. Л. Соболева, а пространства $W_p{}^s(G)$ и $W_{p'}{}^{-s}(G)$ $(1/p + 1/p' = 1)$ двойственны относительно $(\cdot, \cdot,) = (\cdot, \cdot)_{L_2(G)}$; пространства $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$ и $W_{p'}^{-(s-1/p)}(\Gamma)$ также двойственны относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Gamma)}$ (см. ([4], [5]); если s нецелое, то эти пространства определяем с помощью комплексной интерполяции ([4], [6–9]).

Пусть l — произвольное целое. Как и в ([5], [10–13]), обозначим через $\widetilde{W}^l_{p,\,2m}(G) = \widetilde{W}^l_p(G)$ пополнение $C^\infty(\bar{G})$ по норме

$$\|u\|_{\widetilde{W}^l_p(G)} = \Big(\|u\|^p_{l,p} + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle D_\nu^{j-1} u \rangle\!\rangle^p_{l-j+1-1/p,\,p}\Big)^{1/p} \tag{1}$$

$\left(D_\nu = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial \nu},\ \nu \text{ — орт внутренней нормали к } \Gamma \text{ в точке } x\right)$.

Замыкание S отображения $u \to (u|_G, u\|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{2m-1} u|_\Gamma)$ $(u \in C^\infty(\bar{G}))$ устанавливает изометрическое соответствие между $\widetilde{W}^s_p(G)$ и подпространством прямой суммы $K^{(2m+1)}_{l,p} = W^l_p(G) \dotplus \sum\limits_{i=1}^{2m} W_p^{l-j+1-1/p}(\Gamma)$. При этом $S\widetilde{W}^l_p(G) = \{(u_0, u_1, \ldots, u_{2m})\colon u_0 \in W^l_p(G), u_j \in W_p^{l-j+1-1/p}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, 2m)$; при $l - j + 1 - \dfrac{1}{p} > 0$ $\quad u_j = D_\nu^{j-1} u_0|_\Gamma\}$. Для нецелого s определяем $\widetilde{W}^s_p(G)$ с помощью комплексной интерполяции между $\widetilde{W}^{[s]}_p(G)$ и $\widetilde{W}^{[s]+1}_p(G)$.

Если $N(x, D)$ $(x \in \bar{G})$ — произвольное дифференциальное выражение порядка $r \leqslant 2m$ с достаточно гладкими коэффициентами, а $B(x, D)$ $(x \in \Gamma)$ — произвольное граничное дифференциальное выражение порядка $t \leqslant 2m - 1$ с достаточно гладкими коэффициентами, то

$$\|Nu\|_{s-r,p} \leqslant C_s \|u\|_{\widetilde{W}^s_p(G)}, \quad \langle\!\langle Bu \rangle\!\rangle_{s-t-1/p,\,p} \leqslant C_s \|u\|_{\widetilde{W}^s_p(G)} \quad (u \in C^\infty(\bar{G})). \tag{2}$$

Поэтому замыкания N, B отображений $u \to Nu$, $u \to Bu|_\Gamma$ $(u \in C^\infty(\overline{G}))$ непрерывно действуют из всего $\widetilde{W}_p{}^s(G)$ соответственно в $W_p^{s-r}(G)$, $W_p{}^{s-t-1/p}(\Gamma)$. В этом (сильном) смысле для произвольного $u \in \widetilde{W}_p{}^s(G)$ определены $Nu \in W_p^{s-r}(G)$, $Bu|_\Gamma \in W_p^{s-t-1/p}(\Gamma)$ ([5], [10-13]). Применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{W}_p{}^s(G)$ можно понимать и в другом (слабом) смысле. С помощью интегрирования по частям найдем

$$
\begin{aligned}
(Nu, v) &= (u, N^+v) + \sum_{j=1}^{r} \langle D_\nu^{j-1}u,\ R_j v\rangle \quad (u, v \in C^\infty(\overline{G})),\\
\langle Bu, v\rangle &= \sum_{j=1}^{t+1} \langle D_\nu^{j-1}u,\ B^{(j)}v\rangle \quad (u, v \in C^\infty(\Gamma));
\end{aligned}
\tag{3}
$$

здесь N^+ — выражение, формально сопряженное N; $B^{(j)}$ — дифференциальные выражения на Γ, содержащие лишь тангенциальные дифференцирования. Если теперь $u \in \widetilde{W}_p{}^s(G)$, $Su = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m})$, то $Nu = f \in W_p^{s-r}(G)$ в том и только том случае, когда

$$(u_0, N^+v) + \sum_{j=1}^{r} \langle u_j, R_j v\rangle = (f, v) \quad (v \in C^\infty(\overline{G})); \tag{4}$$

аналогично $Bu|_\Gamma = \varphi \in W_p^{s-t-1/p}(\Gamma)$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{j=1}^{t+1} \langle u_j, B^{(j)}v\rangle = \langle \varphi, v\rangle \quad (v \in C^\infty(\Gamma)). \tag{5}$$

Ниже $u|_G$ — первая компонента вектора Su $(u \in \widetilde{W}_p{}^s(G))$.

§ 2. Приведем теперь основные утверждения данной работы.

Теорема 1. *Для каждого действительного s нормы $\|u\|_{\widetilde{W}_p^s(G)}$ и*

$$\|u\|_{W_L^{s,p}(G)} = \|u\|_{s,p} + \|Lu\|_{s-2m,p} \tag{6}$$

эквивалентны. Поэтому $\widetilde{W}_p^s(G)$ совпадает с пополнением $W_L^{s,p}(G)$ множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме (6). *При этом $W_L^{s,p}(G)$ совпадает с множеством всех пар (u_0, f), где $u_0 \in W_p^s(G)$, $f \in W_p^{s-2m}(G)$ и в смысле теории распределений $Lu_0 = f$, т. е.*

$$(u_0, L^+v) = (f, v) \quad (v \in W_{p'}^{2m-s}(G) \cap \mathring{W}_{p'}^{2m}(G),\ 1/p + 1/p' = 1), \tag{7}$$

где L^+ — выражение, формально сопряженное L, $\mathring{W}_{p'}{}^{2m}(G)$ — замыкание в $W_{p'}{}^{2m}(G)$ множества достаточно гладких финитных в G функций.

Итак, каждый элемент $(u_0, f) \in W_L^{s,p}(G)$ можно естественным образом отождествить с соответствующим элементом $u \in \widetilde{W}_p^s(G)$, поэтому (см. § 1) *для $u = (u_0, f)$ существуют $Nu \in W_p^{s-r}(G)$, $Bu|_\Gamma \in W_p^{s-t-1/p}(\Gamma)$*. В частности, *существуют* $D_\nu^{j-1}u|_\Gamma = u_j \in W_p^{s-j+1-1/p}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, 2m)$, где $(u_0, u_1, \ldots, u_{2m}) = Su$; элемент u является решением задачи

$$Lu = f, \quad D_\nu^{j-1}u|_\Gamma = u_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Отметим также, что из неравенств (2) и теоремы 1 следуют теоремы о следах Лионса — Мадженеса ([1-3]).

Перебрасывая для u, $v \in C^\infty(\overline{G})$ интегрированием по частям все дифференцирования с u на v, мы с помощью предельного перехода легко найдем, что для любого действительного s

$$(Lu, v|_G) = (u|_G, L^+v) + \sum_{j=1}^{2m} \langle D_\nu^{j-1}u,\ T_{2m-j+1}v\rangle \quad (u \in \widetilde{W}_p^s(G), v \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-s}(G)). \tag{9}$$

Пусть* в теореме 1 $s \geqslant 1$, $s > n/p$, а $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$ — функция Грина задачи (8) (см. ([11])); тогда первая компонента $u_0(x) = u|_G$ решения $u \in \widetilde{W}_p{}^s(G)$ задачи (8) может быть найдена по формуле

$$u_0(x) = (f, \overline{R_x}) - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, T_{2m-j+1}\overline{R_x}\rangle + \widetilde{u}(x); \tag{10}$$

здесь $x \in G \cup \Gamma$, $\widetilde{u}(x) \in \mathfrak{R} = \{\omega \in C^\infty(\overline{G}):\ L\omega = 0,\ D_\nu^{j-1}\omega|_\Gamma = 0 (j = 1, \ldots, m)\}$, $(u_0 - \widetilde{u}, \mathfrak{R}) = 0$. Оказывается, что если внутри G f достаточно гладка, а x — внутренняя точка области, то формула (10) справедлива для каждого действительного s.

Теорема 2. *Пусть $u_0 \in W_p^s(G)$, $f \in W_p^{s-2m}(G)$ и в смысле теории распределений $Lu_0 = f$. Если $f \in W_p^{s+k-2m}(G_1)$ $(G_1 \subseteq G)$, где $k \geqslant 0$ и $s + k \geqslant 1$, $s + k > n/p$, то для каждой подобласти $G_0 \subset G_1$ такой, что $\overline{G}_0 \subset G_1$, $u_0 \in W_p^{s+k}(G_0)$, и формула* (10) *справедлива для $x \in G_1$.*

Пусть, например, $u_0(x) \in C^\infty(G)$ и $Lu_0(x) = 0$. Пусть при подходе к Γ $u_0(x)$ имеет степенную особенность. Тогда можно естественным образом определить регуляризацию u_0 функции $u_0(x)$, при этом $u_0 \in W_p{}^s(G)$ с некоторым $s \leqslant 0$, зависящим от порядка особенности функции $u_0(x)$ вблизи Γ, и $Lu_0 = 0$. Поэтому *для $u_0(x)$ справедлива внутри G формула* (10) *с $f = 0$.* Действительно, существует окрестность G_2 в $\overline{G}$ поверхности Γ, через каждую точку x которой проходит единственная нормаль к Γ. Пусть $x' \in \Gamma$ — основание нормали, проходящей через точку $x \in G_2$, и $\delta(x)$ — расстояние между точками x и x'. Если $u_0(x) = \omega(x) / \rho^\alpha(x)$, где $\omega(x)$ ограниченная в $\overline{G}$ функция, $\rho(x) \in C^\infty(G)$ — положительная в G функция, равная $\delta(x)$ в G_2, а $k \leqslant \alpha < k + 1$ (k — натуральное число), то регуляризацию u_0 функции $u_0(x)$ определим так:

$$(u_0, v) = \int\limits_{G \setminus G_2} u_0(x)\overline{v(x)}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{G_2} u_0(x)\overline{\left(v(x) - v(x') - \ldots - \frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}v(x')}{\partial\nu^{k-1}}(\delta(x))^{k-1}\right)}\,dx.$$

Ясно, что $|(u_0, v)| \leqslant C\|v\|_{C^{k-1+\varepsilon}(G)} \leqslant C_1\|v\|_{t, p'}$, где $\alpha - k < \varepsilon < 1$, а $t - n/p' > k - 1 + \varepsilon$, поэтому $u_0 \in W_p{}^{-t}(G)$ $(t > n - 1 + \alpha - n/p)$.

Наметим в заключение доказательство первого утверждения теоремы 1. Из неравенств (2) непосредственно следует, что достаточно установить оценку

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^s(G)} \leqslant C\,\|u\|_{WL^{s,p}(G)} \quad (u \in C^\infty(\overline{G})). \tag{11}$$

Отметим, что так как выражения $\{T_j(x, D)\}_{j=1}^{2m}$ образуют систему Дирихле порядка $2m$, то можно показать, что для каждого вектора $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2m}) \in \sum_{j=1}^{2m} W_{p'}^{2m-s-j+1-1/p'}(\Gamma)$ существует элемент $v \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-s}(G)$ такой, что $T_jv|_\Gamma = \psi_j$ $(j = 1, \ldots, 2m)$, а оператор $\psi \to v$ непрерывен из $\sum_{j=1}^{2m} W_{p'}^{2m-s-j+1-1/p'}(\Gamma)$ в $\widetilde{W}_{p'}^{2m-s}(G)$.

Зафиксируем $u \in C^\infty(\overline{G})$ и рассмотрим функционал** $l(v) = (Lu, v) - (u, L^+v)$ $(v \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-s}(G))$. Из (9) легко следует, что $l(v)$ зависит лишь от вектора $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2m})$, $\psi_j = T_jv|_\Gamma$; при этом $|l(v)| = |l_1(\psi)| \leqslant$

* Ниже в этом параграфе изучается задача, сформулированная в беседе с автором С. Д. Эйдельманом.

** Ср. с доказательством в ([1]) теорем о следах.

$$\leqslant C_1 \| u \|_{W^{s,p}_L(G)} \| v \|_{\widetilde{W}^{2m-s}_{p'}(G)} \leqslant C_2 \| u \|_{W^{s,p}_L(G)} \| \psi \|_{\sum\limits_{j=1}^{m} W^{2m-s-j+1-1/p'}_{p'}(\Gamma)}.$$ Поэтому существуют элементы $\tau_j u \in W^{s-j+1-1/p}_p(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, 2m)$ такие, что

$$(Lu, v) - (u, L^+v) = \sum_{j=1}^{2m} \langle \tau_j u, T_{2m-j+1} v \rangle \quad (v \in \widetilde{W}^{2m-s}_{p'}(G)), \tag{12}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{2m} \langle\!\langle \tau_j u \rangle\!\rangle^p_{s-j+1-1/p,\, p} \right)^{1/p} \leqslant C_2 \| u \|_{W^{s,p}_L(G)} \quad (u \in C^\infty(\overline{G})). \tag{13}$$

Но из (9) и (12) непосредственно следует, что $\tau_j u = D^{j-1}_\nu u|_\Gamma$, поэтому, если s — целое, то из (13) и (1) следует оценка (11). Если s — нецелое, то из теоремы о гомеоморфизмах ([5]) следует, что

$$\| u \|_{\widetilde{W}^s_p(G)} \leqslant C \left(\| Lu \|_{s-2m,\, p} + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle D^{j-1}_\nu u \rangle\!\rangle_{s-j+1-1/p,\, p} + \| u \|_{s,\, p} \right) \quad (u \in C^\infty(\overline{G})), \tag{14}$$

и из (14) и (13) снова следует оценка (11).

Автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому и С. Д. Эйдельману за беседы, обсуждение результатов и ценные замечания.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
18 I 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Lions, E. Magenes, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 15, 41 (1961); 16, 1 (1962); J. Anal. Math., 11, 165 (1963). [2] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Paris, 1968. [3] Э. Мадженес, УМН, 21, № 2 (1966). [4] M. Schechter, Am. J. Math., 85, № 1 (1963); Math. Scand., 13, № 1 (1963). [5] Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 17, № 5 (1965). [6] J. L. Lions, C. R., 250, 1853 (1960). [7] A. P. Calderon, Studia Math., Special ser., № 1, Conf. on Functional Analysis, Warsawa, 1960. [8] А. П. Кальдерон. Сборн. пер. Математика, 9, № 3 (1965). [9] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, 21, № 2 (1966). [10] Я. А. Ройтберг, ДАН, 157, № 4 (1964). [11] Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 19, № 5 (1967). [12] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [13] Я. А. Ройтберг, ДАН, 180, № 3 (1968).