Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными, *Докл. АН СССР*, 1970, том 191, номер 6, 1228–1231

Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Я. А. РОЙТБЕРГ

ТЕОРЕМА О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИМИСЯ НОРМАЛЬНЫМИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 IX 1969)

Теоремы о гомеоморфизмах для эллиптических граничных задач устанавливались в работах [1–11]. Во всех этих работах предполагается, что граничные условия нормальны. Между тем хорошо известно, что нётеровость эллиптических задач имеет место без предположения о нормальности граничных выражений. Поэтому естественно возникает задача об установлении теорем о гомеоморфизмах без предположения о нормальности граничных условий. Эту задачу формулировали в беседах с автором Ю. М. Березанский и М. И. Вишик, она поставлена также Мадженесом в [5]. Решению указанной задачи и посвящена данная работа, являющаяся продолжением работы [12], основные обозначения и результаты которой здесь используются. Отметим также работу [13], в которой теорема о гомеоморфизмах установлена (без предположения о нормальности граничных выражений) в пространствах, сопряженных к гёльдеровским.

1. В ограниченной области G с границей Γ рассматривается правильно эллиптическое дифференциальное выражение $L = L(x, D)$ порядка $2m$ с комплексными коэффициентами, а на Γ — система m вообще псевдодифференциальных по тангенциальным и дифференциальных по нормальным к Γ направлениям выражений $B_j(x, D)$ порядков $m_j \leqslant 2m-1$, накрывающая L. Для простоты предполагается, что как поверхность Γ, так и все выражения бесконечно гладкие. Хорошо известно, что для каждого действительного $s \geqslant 0$ оператор

$$A_s: u \to (Lu, B_1u|_\Gamma, \ldots, B_mu|_\Gamma) \quad (u \in W_2^{2m+s}(G)) \tag{1}$$

является нётеровским

$$\text{из } W_2^{2m+s}(G) \text{ в } W_2^s(G) \dotplus \sum_{j=1}^m W_2^{2m+s-m_j-1/2}(\Gamma) \equiv K_s(G), \tag{2}$$

т. е. $\mathfrak{N} = \{u \in W_2^{2m+s}(G): A_s u = 0\}$ конечномерно (и не зависит от s), область значения $\mathfrak{R}(A_s)$ оператора A_s замкнута в $K_s(G)$ и имеет конечную коразмерность. Более того, существует не зависящее от $s \geqslant 0$ конечномерное пространство $\mathfrak{M}^+ \subset C^\infty(\bar{G}) \dotplus C^{\infty, m}(\Gamma)$ $(C^{\infty, r}(\Gamma) = C^\infty(\Gamma) \dotplus \ldots \dotplus C^\infty(\Gamma))$ такое, что $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_s(G)$ входит в $\mathfrak{R}(A_s)$ в том и только том случае, когда

$$[F, V] \equiv (f, v) + \sum_{j=1}^m \langle \varphi_j, v_j \rangle = 0 \ (V = (v, v_1, \ldots, v_m) \in \mathfrak{M}^+) \tag{3}$$

($(\cdot, \cdot)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение соответственно в $L_2(G)$ и $L_2(\Gamma)$).

Как и в ([6–10], [12], [14]), обозначим через $\widetilde{W}_2^l(G) = \widetilde{W}\,^l_{2,2m}(G)$ (l — произвольное целое) пополнение множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$|||u|||_l = \left(\|u\|^2_{W_2^l(G)} + \sum_{j=1}^{2m} \|D_\nu^{j-1} u\|^2_{W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

$\left(D_\nu = \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}, \nu = \nu(x)\right.$ — орт внутренней нормали к Γ в точке x; пространства $W_2^l(G)$ и $W_2^{-l}(G)$ ($W_2^{l-1/2}(\Gamma)$ и $W_2^{-(l-1/2)}(\Gamma)$) взаимно сопряжены относительно $(\cdot,\cdot)$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$)). Если $l \geqslant 2m$, то нормы $|||u|||_l$ и $\|u\|_{W_2^l(G)}$ эквивалентны и $\widetilde{W}_2^l(G) = W_2^l(G)$; при $l < 2m$ эти нормы не эквивалентны. Так как норма (4) — это норма прямой суммы $W_2^l(G) \dotplus \sum_{j=1}^{2m} W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)$, то по существу $\widetilde{W}_2^l(G)$ состоит из элементов вида $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m})$, где $u_0 \in W_2^l(G)$, $u_j = D_\nu^{j-1} u_0|_\Gamma$, если $l - j \geqslant 0$; при $l - j < 0$ u_j — произвольный элемент пространства $W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)$. Если t — нецелое, $l < t < l + 1$, то определим $W_2^l(G)$ с помощью комплексной интерполяции между пространствами $\widetilde{W}_2^l(G)$ и $\widetilde{W}_2^{l+1}(G)$. Для произвольного действительного t норма $\|u\|_{\widetilde{W}_2^t(G)}$ эквивалентна норме $\|u\|_{W_2^t(G)} + \|Lu\|_{W_2^{t-2m}(G)}$ ([14]). Ниже $u|_G$ — первая компонента элемента $u \in \widetilde{W}_2^t(G)$.

Для каждого действительного t замыкание по непрерывности A_t отображения $u \to (Lu, B_1u|_\Gamma, \ldots, B_mu|_\Gamma)$ $(u \in C^\infty(\overline{G}))$ непрерывно действует из всего $\widetilde{W}_2^{2m+t}(G)$ в $K_t(G) = W_2^t(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m+t-m_j-1/2}(\Gamma)$.

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 1. *Для того чтобы задача $A_tu = F \in K_t(G)$ имела решение $u \in W_2^{2m+t}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ удовлетворял соотношениям* (3). *Сужение A_t оператора A_t на подпространство $\widetilde{P}\,\widetilde{W}_2^{2m+t}(G) = \{u \in \widetilde{W}_2^{2m+t}(G) : (u|_G, \mathfrak{N}) = 0\}$ пространства $\widetilde{W}_2^{2m+t}(G)$ осуществляет гомеоморфизм $\widetilde{P}\,\widetilde{W}_2^{2m+t}(G) \to \widetilde{Q}^+K_t(G)$, где $\widetilde{Q}^+K_t(G) = \{F \in K_t(G) \colon [F, \mathfrak{M}^+] = 0\}$ — подпространство $K_t(G)$.*

2. Для доказательства теоремы 1 мы прежде всего с помощью выведенной в ([12]) формулы Грина более конкретно описываем множество $\mathfrak{M}^+$. Обозначив через $Bu = (B_1u, \ldots, B_mu)$, $Cu = (C_1u, \ldots, C_mu)$, $B'v = (B_1'v, \ldots, B_m'v)$, $C'v = (C_1'v, \ldots, C_m'v)$, $\zeta'' = (u''|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{2m-1}u''|_\Gamma)$, мы запишем формулу Грина (23) из ([12]) в виде

$$(Lu, v) + \langle Bu, C'v\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = (u, L^+v) + \langle Cu, B'v\rangle_{L_2^m(\Gamma)} + \langle\zeta'', Tv\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} \qquad (5)$$
$$(u, v \in W_2^{2m}(G)).$$

Пусть $\hat{r}$ и $\check{r}$ — операторы, ставящие в соответствие каждому $2m$-мерному вектору $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2m})$ соответственно векторы $\hat{r}\eta\,(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ и $\check{r}\eta = (\eta_{m+1}, \ldots, \eta_{2m})$. Представим пространство $\mathfrak{N}_\Gamma^+$ в виде $\mathfrak{N}_\Gamma^+ = \mathfrak{N}_\Gamma^{+1} \oplus \mathfrak{N}_\Gamma^{+2} \oplus \mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$, где $\mathfrak{N}_\Gamma^{+1} = \{\eta \in \mathfrak{N}_\Gamma^+ : \check{r}\eta = 0\}$, $\mathfrak{N}_\Gamma^{+2} = \{\eta \in \mathfrak{N}_\Gamma^+ : \hat{r}\eta = 0\}$; если $\eta \neq 0$

входит в $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$, то как $\hat{r}\eta \neq 0$, так и $\check{r}\eta \neq 0$. Пусть $W_2^{2m+s}(\text{гр}) = \{u \in W_2^{2m+s}(G) : Bu|_\Gamma = 0\}$ $(s \geqslant 0)$, $W_2^{2m}(\text{гр})^+ = \{v \in W_2^{2m}(G) : (Lu, v) = (u, L^+v)\ (u \in W_2^{2m}(\text{гр}))\}$.

Из формулы Грина следует, что

$$W_2^{2m}(\text{гр})^+ = \{v \in W_2^{2m}(G) : \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0, \quad B'v|_\Gamma \in \check{r}\,\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}\}. \tag{6}$$

Положим также $W_2^{2m+s}(\text{гр})^+ = W_2^{2m}(\text{гр})^+ \cap W_2^{2m+s}(G)$ $(s \geqslant 0)$.

Рассмотрим задачи с однородными граничными условиями

$$Lu = f \in W_2^s(G), \quad u \in W_2^{2m+s}(\text{гр}) \quad (s \geqslant 0); \tag{7}$$

$$L^+v = g \in W_2^s(G), \quad v \in W_2^{2m+s}(\text{гр})^+ \quad (s \geqslant 0). \tag{8}$$

Лемма 1. *Пространство $\mathfrak{N}^+$ решений задачи* (8) *с $g = 0$ конечномерно и не зависит от $s \geqslant 0$. Для разрешимости задачи* (7) *необходимо и достаточно, чтобы $(f, \mathfrak{N}^+) = 0$, а для разрешимости задачи* (8) *необходимо и достаточно, чтобы $(g, \mathfrak{N}) = 0$.*

Рассмотрим теперь задачи с неоднородными граничными условиями:

$$Lu = f, \quad Bu|_\Gamma = \varphi \quad (\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)); \tag{9}$$

$$L^+v = g, \quad B'v|_\Gamma - \psi \in \check{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}, \quad \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0 \tag{10}$$

$$(\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)).$$

Для любого действительного t построим по каждому вектору $\varphi \in \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m+t-m_j-1/2}(\Gamma)$ вектор $\tilde{\varphi} \in \hat{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$ так, чтобы вектор $(\varphi, \tilde{\varphi})$ был ортогональным в $L_2^{2m}(\Gamma)$ к $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$. Ясно, что этими условиями $\tilde{\varphi}$ однозначно определяется по вектору φ; если $e_1, \ldots, e_q$ — базис в $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$ такой, что $\check{r}e_1, \ldots, \check{r}e_q$ образует ортонормированный относительно $L_2^m(\Gamma)$ базис в $\check{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$, то

$$\tilde{\varphi} = -\sum_{j=1}^{q} \langle \varphi, \hat{r}\, e_j\rangle_{L_2^m(\Gamma)} \check{r}e_j. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для того чтобы задача* (9) *с $F = (f, \varphi) \in K_s(G)$ $(s \geqslant 0)$ имела решение $u \in W_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle \varphi, \hat{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+1}\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0; \tag{12}$$

$$(f, v) + \langle \varphi, C'v\rangle_{L_2^m(\Gamma)} - \langle \tilde{\varphi}, B_j'v\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (v \in \mathfrak{N}^+).$$

Для того чтобы задача (10) *с $(g, \psi) \in W_2^s(G) + \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m+s-m_j'-1/2}(\Gamma) \equiv K_s'(G)$ $(s \geqslant 0)$ имела решение $v \in W_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle \psi, \check{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+2}\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0, \quad (g, u) + \langle \psi, Cu\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (u \in \mathfrak{N}). \tag{13}$$

Необходимость этой теоремы следует из формулы Грина (5) и рассмотрений п. 2 работы [12]. Достаточность доказывается с помощью сведения неоднородных задач к однородным и использования леммы 1. Отметим также, что условия (12) (с учетом (11)) конкретизируют условия (3) разрешимости задачи (9).

Рассмотрим также задачу

$$Lu(x)=f(x)\ (x\in G),\quad Bu|_\Gamma=\varphi,\ \langle Cu,\ r\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}\rangle_{\overset{\vee}{L}{}_2^m(\Gamma)}=0. \tag{14}$$

Теорема 3. *Для того чтобы задача* (14) *с* $F=(f,\varphi)\in K_s(G)$ $(s\geqslant 0)$ *имела решение* $u\in W_2^{2m+s}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle\varphi, r\mathfrak{N}_\Gamma^+\rangle_{\overset{\vee}{L}{}_2^m(\Gamma)}=0,\quad (f,v)+\langle\varphi, C'v\rangle_{\overset{\vee}{L}{}_2^m(\Gamma)}=0\quad (v\in\mathfrak{N}^+). \tag{15}$$

Из теорем 2, 3 и формулы Грина (5) с помощью метода М. И. Вишика — С. Л. Соболева ([15]) выводится, что *для того чтобы задача* (14) *с* $F\in K_s(G)$ $(s\leqslant 0)$ *имела решение* $u\in \widetilde{W}_2^{(2m+s)}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (15). Отсюда уже легко следует, что *для того чтобы задача* (9) *с* $F\in K_s(G)$ $(s\leqslant 0)$ *имела решение* $u\in\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (12), т. е. следует теорема 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
1 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Schechter, Ann. Math., 72, № 3 (1960). [2] M. Schechter, Am. J. Math., 85, № 1 (1963); Math. Scand., 13, № 1 (1963). [3] J. L. Lions, E. Magenes, Ann. de la Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 15, № 1—2 (1961); 16, № 1 (1962); J. d'Analyse Math., 11, 165 (1963). [4] Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, ДАН, 148, № 4 (1963). [5] E. Magenes, Conf. tenuta al VII Congresso dell'UMI, Genova, 30 IX — 5 X 1963; УМН, 21, № 2 (1966). [6] Я. А. Ройтберг, ДАН, 157, № 4 (1964). [7] Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 17, № 5 (1965). [8] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [9] Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 19, № 5 (1967). [10] Я. А. Ройтберг, ДАН, 180, № 3 (1968). [11] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1, Paris, 1968. [12] Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 21, № 3 (1969). [13] Ю. П. Красовский, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 1 (1969). [14] Я. А. Ройтберг, ДАН, 188, № 1 (1969). [15] М. И. Вишик, С. Л. Соболев, ДАН, 111, № 3 (1956).