Локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений

Я. А. Ройтберг

В этой статье доказывается теорема о локальном повышении гладкости вплоть до границы обобщенных решений эллиптических уравнений при общих граничных условиях. В частном случае первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения подобная теорема доказана в [1]. Заметим, что некоторые вопросы о повышении гладкости рассматриваются в статье Петре [7].

1°. Пусть в ограниченной области G с границей Γ задано правильно эллиптическое [2] дифференциальное выражение порядка $l = 2m$ с комплексными коэффициентами:

$$Lu = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu u \quad \Bigl(\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \ |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n, \tag{1}$$

$$D^\mu = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mu_n}\Bigr);$$

L^+ — формально сопряженное выражение. На Γ задано m дифференциальных выражений

$$B_k = \sum_{|\mu| \leqslant m_k} b_{k\mu}(x) D^\mu \quad (k = 1, \ldots, m;\ m_k \leqslant 2m - 1). \tag{2}$$

Предположим, что выражения B_k нормальны и накрывают L в смысле [2, 3]. Обозначим через W_2^{2m} (гр) подпространство функций $u \in W_2^{2m}(G)$, для которых $B_k u = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. $W_2^{2m}(\text{гр})^+$ — подпространство таких $v \in W_2^{2m}(G)$, что равенство $(Lu, v)_0 = (u, L^+v)_0$ имеет место для всех $u \in W_2^{2m}(\text{гр})$. Как показано в [2], $W_2^{2m}(\text{гр})^+$ определяется операторами вида (2), которые также нормальны и накрывают L^+. Пусть N (N^+) — подпространство решений из $W_2^{2m}(G)$ задачи $Lu = 0$, $u \in W_2^{2m}(\text{гр})$ (соответственно задачи $L^+v = 0$, $v \in W_2^{2m}(\text{гр})^+$), N и N^+ — конечномерные подпространства $L_2 = W_2^0(G)$ [3]. Обозначим через H_0, H_0^+ ортогональные дополнения в L_2 соответственно к N, $N^+ : H_0 = L_2 \ominus N$, $H_0^+ = L_2 \ominus N^+$. Пусть $W_2^{l+k}(\text{гр}) = W_2^l(\text{гр}) \cap W_2^{l+k}(G)$ $(k \geqslant 0)$; $W_2^{l-k}(\text{гр})$ $(0 \leqslant k \leqslant l)$ — замыкание $W_2^l(\text{гр})$ в метрике $W_2^{l-k}(G)$. Аналогично определяется $W_2^t(\text{гр})^+$ $(t \geqslant 0)$. Нам понадобятся еще следующие пространства: $H_k(\text{гр}) = W_2^k(\text{гр}) \cap H_0$, $H_k(\text{гр})^+ = W_2^k(\text{гр})^+ \cap H_0^+$ $(0 \leqslant k)$; по положительным пространствам $W_2^k(G)$, $W_2^k(\text{гр})$, $W_2^k(\text{гр})^+$ $(k > 0)$ и нулевому L_2 построим пространства с отрицательной нормой $W_2^{-k}(G)$, $W_2^{-k}(\text{гр})$, $W_2^{-k}(\text{гр})^+$. Обозначим, наконец, через M_{-k} $(M_{-k}(\text{гр}),\ M_{-k}(\text{гр})^+)$ $(k \geqslant 0)$ множество тех элементов $\alpha \in W_2^{-k}(G)$ (соответственно $\alpha \in W_2^{-k}(\text{гр})$ и $\alpha \in W_2^{-k}(\text{гр})^+$), для которых $(\alpha, N)_0 = 0$ $((\alpha, N)_0 = 0,\ (\alpha, N^+)_0 = 0)$.

В основе рассмотрений данной статьи лежит теорема о гомеоморфизмах [1]. Легко показать, что ее можно сформулировать в следующей удобной для нас форме.

Рассмотрим оператор $A_0 : A_0 u = Lu$ $(u \in H_{2m}(\text{гр})$. *1) Если граница* Γ *класса* C^{4m+s} *коэффициенты* $a_\mu(x) \in C^{2m+\max(|\mu|,\, s)}(G \cup \Gamma)$, $b_{k\mu}(x)$, $b_{k\mu}^+(x) \in C^{\max(2m+s-1,\, 2m+s-m_k)}(\Gamma)$, *то при целом* $s \geqslant 0$ *сужение* A_s *оператора* A_0 *на* $H_{2m+s}(\text{гр})$ *устанавливает гомеоморфизм* $H_{2m+s}(\text{гр}) \to H_s^+ = W_2^s(G) \cap H_0^+$; *2) если предыдущие условия гладкости выполнены при* $s = 0$, *то оператор* A_0 *допускает расширение (по непрерывности)* A_{-s} *на* $H_{2m-s}(\text{гр})$, *осуществляющее гомеоморфизм:* $H_{2m-s}(\text{гр}) \to M_{-s}(\text{гр})^+$, $0 \leqslant s \leqslant 2m$, *3) пусть условия гладкости такие же, как в 1), тогда оператор* A_0 *допускает расширение по непрерывности на* M_{-s}, *гомеоморфно отражающее* M_{-s} *на* $M_{-2m-s}(\text{гр})^+$.

Пусть $a_\mu(x) \in C^{\max(|\mu|,\, |\mu|+t)}(\bar{G})$. Будем говорить, что $\alpha \in W_2^{-t}(G)$ есть обобщенное решение задачи $Au = f \in W_2^{-2m-t}(\text{гр})^+$, если для всех $v \in W_2^{\max(2m+t,\, 2m)}(\text{гр})^+$ выполняется равенство

$$(\alpha, L^+v)_0 = (f, v)_0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in W_2^{-s}(G)$ $(s \geqslant 0)$ *есть обобщенное решение задачи* $Au = f$. *Предположим также, что выполнены условия гладкости первой части теоремы о гомеоморфизмах.* 1) *Если* $f \in W^{-2m-s+k}(\text{гр})^+$ $(0 \leqslant k \leqslant s)$, *то существует элемент* $\alpha_1 \in W_2^{-s+k}(G)$ *такой, что* $(\alpha, w)_0 = (\alpha_1\, w)_0$ *для всех* $w \in W_2^s(G)$, *то есть как функционал* α *совпадает с* $\alpha_1 \in W_2^{-s+k}(G)$. 2) *Если* f *еще менее обобщен:* $f \in W_2^{-k}(\text{гр})^+$ $(0 \leqslant k \leqslant 2m)$, *то* α *как функционал совпадает с* $u_1 \in W_2^{2m-k}(\text{гр})$. 3) *Если, наконец,* $f \in W_2^k(G)$ $(k \geqslant 0)$, *то* α *как функционал совпадает с* $u_1 \in W_2^{2m+\min(k,\, s)}(\text{гр})$.

Наметим доказательство первой части теоремы 1. Остальные части доказываются аналогично. Из конечномерности N следует представление [4]

$$\alpha = \alpha_0 + u_0, \qquad u_0 \in N, \qquad (\alpha_0, N)_0 = 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что $(\alpha_0, L^+ v)_0 = (f, v)_0$ $(v \in W_2^{2m+s}(\text{гр})^+)$ и что $(f, N^+)_0 = 0$, т. е. $f \in M_{-2m-s+k}(\text{гр})$. С помощью теоремы о гомеоморфизмах теперь доказываем существование элемента $\alpha_0' \in W_2^{-s+k}(G)$, $(\alpha_0', N)_0 = 0$, такого что $\bar{A}\alpha_0' = f$ ($\bar{A}$ — расширение A_0 на M_{-s+k}). Так как $(\alpha_0, A_0^+ v)_0 = (\alpha_0', A_0^+ v)_0$ $(v \in W_2^{2m+s}(\text{гр})^+)$, на основании первой части теоремы о гомеоморфизмах для оператора A_0^+ заключаем, что α_0 как функционал совпадает с α_0', поэтому α совпадает с $\alpha_1 = \alpha_0' + u_0$.

2°. Приведем следующие определения (ср. [1]).

1. Пусть G — ограниченная область, на границе Γ которой расположен кусок Γ_0, G_0 — подобласть G, примыкающая к Γ_0, $\varphi \in W_2^{-s}(G)$, s произвольного знака (или $\varphi \in W_2^{-s}(\text{гр})$, $s > 0$). Будем говорить, что φ входит в $W_2^{-t}(G)$ с $t < s$ (в $W_2^{-t}(\text{гр})$ с $0 \leqslant t < s$) внутри G_0 вплоть до куска Γ_0 (это запишем так: $\varphi \in W_{2,\,\text{лок}}^{-t}(G_0, \Gamma_0)$, соответственно $\varphi \in W_{2,\,\text{лок}}^{-t}(G_0, \Gamma_0)(\text{гр})$, если для каждой подобласти $G' \subset G_0$, имеющей общую границу с G_0 лишь внутри куска Γ_0, найдется $\psi_{G'} \in W_2^{-t}(G)$ $(W_2^{-t}(G)(\text{гр}))$, такая что $(\varphi, u)_0 = (\psi_{G'}, u)_0$ для всех $u \in W_2^{\max(s,0)}(G)$ $(u \in W_2^s(G)(\text{гр}))$, аннулирующихся дополнительно в окрестностях $G \diagdown G'$.

2. Будем говорить, что $\varphi \in W_{2,\,\text{лок}}^k(G_0, \Gamma_0)(\text{гр})$ $(k > 0)$, если $\varphi \in W_{2\ \text{лок}}^k(G_0, \Gamma_0)$ и если для каждой указанной выше подобласти G' существует неотрицательная функция $\chi(x) \in C^\infty(\bar{G})$, тождественно равная 1 в G', аннулирующаяся в окрестности $G \diagdown G_0$ и такая, что $\chi(x)\psi_{G'} \in W_2^k(\text{гр})$.

Теперь можем сформулировать основное утверждение данной работы.

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная область, на границе Γ которой расположен кусок Γ_0, G_0 — подобласть G, примыкающая к Γ_0. Пусть Γ_0 — поверхность класса C^{4m+s}, $a_\mu(x) \in C^{2m+\max(|\mu|,s)}(G_0 \cup \Gamma_0)$, $b_{k\mu}(x)$, $b_{k\mu}^+(x) \in C^{\max(2m+s-1,\,2m-m_k+s)}(\Gamma_0)$ и $\alpha \in W_2^{-s}(G)$ $(s > 0)$ есть обобщенное решение уравнения $Au = f \in W_2^{-2m-s}(\text{гр})^+$ внутри G_0 вплоть до Γ_0, т. е. равенство*

$$(\alpha, L^+ v)_0 = (f, v)_0 \tag{5}$$

выполняется для всех $v \in W_2^{2m+s}(\text{гр})^+$, аннулирующихся дополнительно в окрестностях $G \diagdown G_0$. Предположим еще, что а) в некоторой δ-полоске $\Gamma_{0\delta} \subset \Gamma_0$ вблизи границы $\dot{\Gamma}_0$ куска поверхности Γ_0 дифференциальные выражения B_k^+, определяющие $W_2^l(\text{гр})^+$, содержат только члены с дифференцированиями по нормали к Γ_0. Тогда 1) если $f \in W_{2,\,\text{лок}}^{-2m-s+k}(G_0, \Gamma_0)(\text{гр})^+$ $(0 \leqslant k \leqslant s)$, то $\alpha \in W_{2,\,\text{лок}}^{-s+k}(G_0, \Gamma_0)$.

Предположим теперь дополнительно, что б) вблизи указанной δ-полоски $\Gamma_{0\delta}$ в G_0 выражение (1) *не содержит членов со смешанными производными по нормали и касательным направлениям. Тогда 2) если $f \in W_{2,\,\text{лок}}^{-2m+k}(G_0, \Gamma_0)(\text{гр})^+$ $(1 \leqslant k \leqslant 2m-1)$, то $\alpha \in W_{2,\,\text{лок}}^k(G_0\Gamma_0)(\text{гр})$; 3) если $f \in W_{2,\,\text{лок}}^k(G_0, \Gamma_0)$ $(k \geqslant 0)$, то $\alpha \in W_{2,\text{лок}}^{2m+\min(k,s)}(G_0, \Gamma_0)(\text{гр})$*.*

Примечание при корректуре. В последнее время автор доказал, что ограничения а) и б) излишни, если только f принадлежит к обычным отрицательным соболевским пространствам.

---

* В случае первой краевой задачи или если $\Gamma_0 = \Gamma$, теорема справедлива без ограничений *а*), *б*).

Идея использования полного набора гомеоморфизмов для локального повышения гладкости принадлежит Ю. М. Березанскому. В [1] эта методика была применена в частном случае первой краевой задачи для сильно-эллиптического уравнения.

Наметим доказательство теоремы 2. Для простоты рассмотрим случай, когда граница $\dot{G}_0$ области G_0 является поверхностью класса C^{4m+s} и $\dot{G}_0 \cap \Gamma = \Gamma_0$. Пусть G' — подобласть G_0, имеющая общую границу с G_0 лишь внутри куска Γ_0, $\dot{G}'$ — граница G', а γ $(n-2)$-мерная граница $\dot{G}' \cap \Gamma_0$. Без ограничения общности можно предположить, что γ расположена внутри δ-полоски $\Gamma_{0\delta}$ (иначе мы расширили бы G'). Построим теперь функцию $\chi(x) \in C^\infty \overline{G}$, тождественно равную 1 в G' аннулирующуюся в некоторой окрестности $G \setminus G_0$ и положительную в остальных точках. Кроме того, строим χ так, чтобы на $\Gamma_0 \dfrac{\partial \chi}{\partial n} = 0$. Пользуясь предположением *а*), доказываем, что существует множество $W_2^{'2m}(\text{гр})^+(G_0)$, определенное некоторыми дифференциальными выражениями вида (2) на $\dot{G}_0$, нормальными и накрывающими L^+, такое, что если $\omega \in W_2^{'2m+s}(\text{гр})^+(G_0)$, то $\chi\omega \in \in W_2^{2m+s}(\text{гр})^+(G)$*. Подставив теперь в (5) вместо v $\chi\omega$, получим

$$(\alpha, \chi L^+\omega)_0 + (\alpha, M\omega)_0 = (f, \chi\omega)_0 \; (\omega \in W_2^{'2m+s}(\text{гр})^+(G_0)), \tag{6}$$

где M — дифференциальное выражение порядка $2m-1$, коэффициенты которого аннулируются там, где $\chi \equiv 0$ или $\chi \equiv 1$; кроме того, вследствие предположения *б*) и того, что на $\Gamma_0 \dfrac{\partial \chi}{\partial n} = 0$, M вблизи δ-полоски $\Gamma_{0\delta}$ содержит только дифференцирования в касательных направлениях. Введем по формуле $(\alpha, \chi u)_0 = (\chi\alpha, u)_0$ $(u \in W_2^s(G_0))$ операцию умножения функции χ на α. Оператор $\alpha \to \chi\alpha$ сопряжен к оператору $u \to \chi u$ и поэтому непрерывно действует из $W_2^{-s}(G)$ в $W_2^{-s}(G_0)$. Аналогично, оператор $f \to \chi f$ непрерывно действует из $W_2^{-2m-k}(\text{гр})^+(G)$ в $W_2^{'-2m-k}(\text{гр})^+(G_0)$. Оператор $\omega \to M\omega$ можно рассматривать как непрерывно действующий из $W_2^{2m+s-1}(G_0)$ в $W_2^s(G)$, поэтому сопряженный M^+ будет непрерывно действовать из $W_2^{-s}(G)$ в $W_2^{-2m-s+1}(G_0)$. Учитывая все это, из (6) получаем $(\chi\alpha, L^+\omega)_0 = = (\chi f - M^+\alpha, \omega)_0$ $(\omega \in W_2^{'2m+s}(\text{гр})^+(G_0))$, где $\chi f - M^+\alpha \in W_2^{'-2m-s+1}(\text{гр})^+(G_0)$. Отсюда по теореме 1 $\chi\alpha$ как функционал совпадает с элементом $\beta \in W_2^{-s+1}(G_0)$, т. е. $\alpha \in W_{2,\text{лок}}^{-s+1}(G_0, \Gamma_0)$. Последовательно повторяя эти рассуждения, получим доказательство первой части теоремы. Остальные части доказываются с помощью аналогичных рассуждений. Надо только в членах суммы $(\alpha, M\omega)_0$ $(\alpha \in W_2^k(G_0),\ k > 0)$ предварительно интегрированием по частям перебросить ряд дифференцирований на α. Вследствие наших предположений интегралы по границе не появятся (см. свойства оператора M).

Теорема 2 может быть применена в теории разложений по обобщенным собственным функциям самосопряженного оператора. Определение обобщенного решения соотношениями (3), (5) согласуется с соответствующим определением в теории таких разложений (см. [5]). С помощью теоремы 2 можно установить гладкость вплоть до границы обобщенных собственых функций, ядра резольвенты и т. п. для эллиптических операторов, если

* Если функции, заданные в G_0, рассматриваются в G, то они считаются продолженными нулем на G.

известно только, что эти функции — элементы пространств с отрицательной нормой; можно выяснить, в каком смысле эти функции удовлетворяют граничным условиям. Локальность теоремы 2 позволяет ее применять к задачам в неограниченных областях. Отметим также, что рассмотрения работы [6] дают возможность обобщить результаты данной статьи на уравнения с разрывными коэффициентами.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ю. М. Березанскому за постановку вопроса и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.

2. M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **12**, № 3, 1959 (рус. перевод: «Математика», Сб. переводов, т. 4, № 5, 1960).

3. M. Schechter, Remarks on elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., **12**, N 4, 1959. (рус. перевод: «Математика», Сб. переводов, т. 4, № 6, 1960).

4. M. Schechter, Negative norms and boundary problems, Ann. math., **72**, № 3, 1960.

5. Ю. М. Березанский, О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, т. XI, № 1, 1959.

6. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, ДАН СССР, т. 148, № 5, 1963.

7. J. Petre. Comm. Pure Appl. Math., **111**, № 4, 1961.

Поступила 30. I 1963 г.

Чернигов