УДК 517.946

Я. А. Ройтберг, В. А. Сердюк

Теорема о полном наборе изоморфизмов для общих эллиптических задач с параметром

Эллиптические задачи с параметром изучались в классах достаточно гладких функций в [1, 2]. В [3] подобные задачи для одного уравнения исследовались в классах обобщенных функций. В данной работе изучаются эллиптические задачи с параметром для общих систем уравнений в классах обобщенных функций, для них доказана теорема о полном наборе изоморфизмов.

В ограниченной области $G \subseteq R^n$ рассмотрим задачу

$$l(x, D, q)\, u = f \ (\text{в } G), \quad b(x, D, q)\, u|_{\partial G} = g. \tag{1}$$

Здесь

$$l(x, D, q) = (l_{rj}(x, D, q))_{r,j=1}^{N}; \quad l_{rj}(x, D, q) = \sum_{|\alpha|+k \leqslant s_r+t_j} a_{\alpha k}^{rj}(x)\,(qe^{i\theta})^k D^{\alpha};$$

t_j, s_r — целые числа; $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_N \geqslant 0 = s_1 \ldots \geqslant s_N$; $a_{\alpha k}^{rj} \equiv 0$, если $s_r + t_j < 0$; $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ (не исключается случай $\theta_0 = \theta = \theta_1$); q — вещественный параметр; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,

$$D^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} (i\partial/\partial x_j)^{\alpha_j}; \; b(x, D, q) = (b_{hj}(x, D, g))_{\substack{h=1,\ldots,m;\\ j=1,\ldots,N}}$$

$$b_{hj}(x, D, q) = \sum_{|\alpha|+k \leqslant \sigma_h+t_j} b_{\alpha k}^{hj}(x)\,(qe^{i\theta})^k D^{\alpha};$$

σ_h — целые числа; $t_1 + \ldots + t_N + s_1 + \ldots + s_N = 2m$.

Всюду предполагаем, что задача (1) — эллиптическая с параметром [2]. Это означает, что в цилиндре $G \times R = \{(x, t) : x \in G, \ -\infty < t < +\infty\}$ задача

$$l(x, D, D_t)\, U(x, t) = F(x, t) \; ((x, t) \in G \times R), \quad b(x, D, D_t)\, U|_{\partial G \times R} = F_1$$

эллиптическая для каждого $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Предполагается также (для простоты), что граница области и коэффициенты всех дифференциальных выражений бесконечно гладкие.

Функциональные пространства. Пусть $\Omega \subset R^n$ — область. Рассмотрим два случая: 1) $\Omega = G$ — ограниченная область; 2) $\Omega = R_+^n = \{x = (x_1 \ldots, x_n) = (x', x_n) : x_n > 0\}$, $\partial\Omega = R_{n-1}' = \{x : x_n = 0\}$. $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ — множество сужений на $\overline{\Omega}$ функций из $C_0^{\infty}(R^n)$. Ясно, что если Ω — ограниченная область, то $C_0^{\infty}(\overline{\Omega}) = C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Для любого действительного $s \geqslant 0$ обозначим через $H^s(\Omega)$ пространство Соболева, через $H^{-s}(\Omega) = (H^s(\Omega))^*$ — негативное пространство [4], построенное по позитивному $H^s(\Omega)$ и нулевому $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\|\cdot, \Omega\|_s$ норма в $H^s(\Omega)$, $s \in R$. Через $H^s(\partial\Omega)$, $s \in R$, обозначим пространство Соболева на $\partial\Omega$, $\ll \cdot, \partial\Omega \gg_s$ — норма в $H^s(\partial\Omega)$.

Зафиксируем натуральное число r, и пусть $s \in R$; $s \not\equiv 1/2 \pmod 1$, если $s \in]0, r[$. Через $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ обозначим пополнение $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ по норме

$$|||w|||_{s,(r)} = \left(\|w, \Omega\|_s^2 + \sum_{j=1}^{r} \ll D_{\nu}^{j-1} w, \ \partial\Omega \gg_{s-j+1/2}^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

($D_{\nu} = i\partial/\partial\nu$, ν — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$). Если $s \equiv 1/2 \pmod 1$ и $s \in]0, r[$, то определим пространство $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ и норму $|||\cdot|||_{s,(r)}$ с помощью интерполяции между $\widetilde{H}^{s-1/2,(r)}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{s+1/2,(r)}(\Omega)$. Наконец, если $r=0$, то положим по определению $\widetilde{H}^{s,(0)}(\Omega)=H^s(\Omega)$, $|||\cdot|||_{s,(0)}=\|\cdot,\Omega\|_s$.

Пространство $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ изучено в [5] (см. также [4], гл. 3, § 6). Если $M(x,D)$ — дифференциальное выражение порядка $t\leqslant r$, то замыкание M отображения $w\to M(x,D)w$, $w\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ в $H^{s-t}(\Omega)$, а если $t\leqslant r-1$, то замыкание отображения $u\to Mu|_{\partial\Omega}$, $u\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ в $H^{s-t-1/2}(\partial\Omega)$. Поэтому замыкание отображения $w\to Mw$ $(w\in C_0^\infty(\overline{\Omega}))$ непрерывно действует также из $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ в $\widetilde{H}^{s-t,(r-t)}(\Omega)$.

Введем в рассматриваемые пространства нормы, зависящие от действительного параметра q; для каждого фиксированного q новые нормы эквивалентны обычным. Положим $\|f,R^n,q\|_s=\left(\int(1+|\xi|^2+q^2)^s|(Ff)(\xi)|^2\times\right.$ $\left.\times d\xi\right)^{1/2}$, $s\in R$, где $(Ff)(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f\in H^s(R^n)\subset$ $\subset S'(R^n)$. Если $\Omega\subset R^n$ — область, то при $s\geqslant 0$ $\|w,\Omega,q\|_s=\inf\|v,R^n,q\|_s$, где inf берется по всем $v\in H^s(R^n)$, равным w в Ω, а $\|w,\Omega,q\|_{-s}$ — норма функционала над пространством $H^s(\Omega)$ с нормой $\|\cdot,\Omega,q\|_s$. Нормы $\|w$, $R^{n-1},q\|_s$ $(s\in R)$ с помощью разложения единицы и локального распрямления границы индуцируют нормы $\langle\!\langle w,\partial G,q\rangle\!\rangle_s$. Наконец, если в правой части (2) заменить все нормы на зависящие от q, то определим норму $|||w,\Omega,q|||_{s,(r)}$ для $s\in R$, $s\not\equiv 1/2 \pmod 1$, если $s\in]0,r[$. Для $s\equiv 1/2 \pmod 1$, $s\in]0,r[$ определим $|||w,\Omega,q|||_{s,(r)}$ с помощью интерполяции.

Основная теорема. Пусть $\tau_j=\max\{t_j,t_j+\delta_1+1,\dots,t_j+\delta_m+1\}$, $j=1,\dots,N$, $\tau_j-t_j=\max\{0,\sigma_1+1,\dots,\sigma_m+1\}=\varkappa$. Из сказанного выше следует, что для любых s, $q\in R$ замыкание $A_s(q)$ отображения $u\to(l(x,D,q)u,\ b(x,D,q)u|_{\partial G})$, $u\in(C^\infty(\overline{G}))^N$, непрерывно действует в паре пространств

$$A_s(q):\prod_{j=1}^N\widetilde{H}^{t_j+s,(\tau_j)}(G)\to\prod_{r=1}^N\widetilde{H}^{s-s_r,(\varkappa-s_r)}(G)\times\prod_{h=1}^m H^{s-\sigma_h-1/2}(\partial G). \qquad (3)$$

Теорема. *Существует число $q_0>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_0$ и $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$ оператор $A_s(q)$ для каждого $s\in R$ осуществляет изоморфизм между пространствами (3). Если в пространствах прообразов и образов (3) ввести нормы, зависящие от q, то нормы операторов $A_s(q)$ и $(A_s(q))^{-1}$ при $|q|\geqslant q_0$ относительно введенных норм оцениваются постоянной $c_s>0$, не зависящей от q. Функция $s\to c_s$, $s\in R$, ограничена на каждом компакте R.*

Приведем идею доказательства теоремы, ограничившись для простоты рассмотрением случая, когда $\sigma_h<0$, $h=1,\dots,m$. Тогда $\tau_j=t_j$, $\varkappa=0$.

Сначала изучим задачу (1) в полупространстве $R_+^n=\{x:x_n>0\}$ в случае, когда коэффициенты постоянные, а выражения $l_{rj}(D,q)$, $l_{hj}(D,q)$ — однородные (соответствующие матричные дифференциальные выражения обозначим $l^0(D,q)$, $b^0(D,q)$).

Отметим, что поскольку соболевское пространство $H^s(\Omega)$, $s\geqslant 0$, — фактор-пространство $H^s(R^n)/N_s$, где $N_s=\{w\in H^s(R^n):\operatorname{supp}w\subset R^n\diagdown\Omega\}$ — подпространство $H^s(R^n)$, то $H^{-s}(\Omega)$ изометрически эквивалентно подпространству пространства $H^{-s}(R^n)$, состоящему из элементов, носители которых принадлежат $\overline{\Omega}$. Если элемент $w\in H^s(\Omega)$, $s\leqslant 0$, рассматривается как элемент из $H^s(R^n)$, то он обозначается через w^+; если $w\in H^s(\Omega)$ и $s\geqslant 0$, то $w^+\in$ $\in H^0(R^n)$ — продолжение w нулем на R^n.

Из (2) следует, что замыкание $S=S_r$ отображения $w\to(w|_{\overline{\Omega}},w|_{\partial\Omega},\dots$ $\dots,D_\nu^{r-1}w|_{\partial\Omega})$, $w\in C_0^\infty(\overline{\Omega}))$, устанавливает изометрию между $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ и подпространством пространства $H^s(\Omega)\times\prod_{j=1}^{r} H^{s-j+1/2}(\partial\Omega)=K_{s,r}(\Omega,\partial\Omega)$ (если $s<$ $<1/2$, то $S\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)=K_{s,r}(\Omega,\partial\Omega)$).

Пусть $M(x, D)$ — дифференциальное выражение в R^n порядка $t\leqslant r$, $M^+(x, D)$ — формально сопряженное выражение. Тогда с помощью интегрирования по частям находим, что $(Mw, v)_\Omega=(w, M^+v)_\Omega+\sum_{j=1}^{t}\langle D_\nu^{j-1}w$, $M_jv\rangle_{\partial\Omega}$ $(w, v\in C_0^\infty(\overline{\Omega}))$, где $\operatorname{ord} M_j\leqslant t-j+1$. Полученное равенство означает, что $(Mw)^+=Mw^++\sum_{j=1}^{t}M_j^+(D_\nu^{j-1}w|_{\partial\Omega}\,\delta(\partial\Omega))$. Здесь $w\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$; w^+ — продолжение w нулем на R^n; $(Mw)^+$ — продолжение $Mw|_\Omega$ нулем на R^n; $\delta(\partial\Omega)$ — мера Дирака, сосредоточенная на $\partial\Omega$. С помощью предельного перехода легко убедиться, что если $w\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, $Mw\in H^{s-t}(\Omega)$ и $S_rw=(w_0, w_1, \ldots, w_r)$, то

$$(Mw)^+=Mw_0^++\sum_{j=1}^{t}M_j^+(w_j\times\delta(\partial\Omega)). \tag{4}$$

В частности, если $M(x, D)$ имеет в некоторой окрестности в $\overline{\Omega}$ границы $\partial\Omega$ вид

$$M(x, D)=\sum_{j=0}^{t}N_j(x, D')\,D_\nu^j \tag{5}$$

($N_j(x, D')$ — тангенциальные выражения), то формулу (4) запишем в виде

$$(Mw)^+=Mw_0^+-i\sum_{k=1}^{t}(J^kM(x, D))(w_k\times\delta(\partial G)). \tag{6}$$

Здесь J — оператор в множестве выражений вида (5), действующий по правилу: $JM(x, D)=0$, если $t=0$, и $JM(x, D)=\sum_{j=1}^{t}N_j(x, D')D_\nu^{j-1}$, если $t>$ >0. Аналогично, если $M(x, D)$ $(x\in\partial\Omega)$ — граничное дифференциальное выражение вида (5) порядка $t\leqslant r-1$, то, как указывалось выше, $Mw|_{\partial\Omega}\in$ $\in H^{s-t-1/2}(\partial\Omega)$ для каждого $w\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$. Легко видеть, что

$$Mw|_{\partial\Omega}=\sum_{j=0}^{t}N_j(x, D')\,w_{j+1}, \tag{7}$$

где по-прежнему $S_rw=(w_0, w_1, \ldots, w_r)$.

Пусть теперь $\Omega=R_+^n$ — полупространство, $\partial\Omega=R_{n-1}'$, $u=(u_1, \ldots, u_N)\in$ $\in\Pi\widetilde{H}^{t_j+s,(t_j)}(R_+^n)$, $S_{t_j}(u_j)=(u_{j0}, \ldots, u_{j,t_j})$, $f=(f_1, \ldots, f_N)\in\Pi\widetilde{H}^{s-s_r,(-s_r)}(R_+^n)$, $S_{-s_r}f_r=(f_{r0}, \ldots, f_{r,-s_r})$. Тогда из (6), (7) следует, что равенство $l^0u=f\in$ $\in\Pi\widetilde{H}^{s-s_r,(-s_r)}(R_+^n)$ выполняется, если

$$\sum_{j=1}^{N}l_{rj}(D, q)\,u_{j0}^+-i\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\ \sum_{\tau=1}^{t_j+s_r}(J^\tau l_{rj}(D, q))(u_{j\tau}\times\delta(x_n))=f_{r0}^+,\quad r=1, \ldots, N; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\ \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1}l_p^{rj}(D', q)\,u_{j,p-t-1}(x', 0)=f_{rt}(x'0) \tag{9}$$

$$r:-s_r\geqslant 1;\quad t=1, \ldots, -s_r.$$

Здесь

$$l_p^{rj}(D', q) = \sum_{|\alpha'|+k=s_r+t_j-p+1} a^{rj}_{(\alpha',p-1),k}(qe^{i\theta})^k D^{\alpha'}, \quad (\alpha', p-1) = \alpha,$$

так что $l_{rj}(D, q) = \Sigma_{1\leqslant p\leqslant s_r+t_j+1} l_p^{rj}(D', q) D_n^{p-1}$.

Наконец, равенство $b^0 u|_{x_n=0} = (q_1, \ldots, q_m) \in \Pi H^{s-\sigma_h-1/2}(R_{n-1})$ согласно (7) выполняется, если

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{\sigma_h+t_j+1} b_p^{hj}(D', q) u_{jp}(x', 0) = g_h(x', 0), \quad h = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Здесь

$$b_p^{hj}(D', q) = \sum_{|\alpha'|+k=\sigma_h+t_j-p+1} b_{(\alpha',p-1),k}(qe^{i\theta})^k D^{\alpha'}, \quad \alpha = (\alpha', p-1),$$

так что

$$b_{hj}(D, q) = \Sigma_{1\leqslant p\leqslant \sigma_h+t_j+1} b_p^{hj}(D', q) D_n^{p-1}.$$

Таким образом, получена задача (8) — (10) для определения u_{j0}^{+}, $j = 1, \ldots, N$, и $u_{j\tau}$, $j: t_j \geqslant 1$, $\tau = 1, \ldots, t_j$. Поскольку система (8) рассматривается во всем R^n, а системы (9), (10) — в R_{n-1}, то можно применить аппарат преобразований Фурье, решить при $q \neq 0$ задачу (8) — (10) в явном виде, получить нужные оценки. При этом существенно используется тот факт, что $(Fu_j^+)(\xi', \xi_n)$ допускают по ξ_n аналитическое продолжение в полуплоскость $\xi_n + i\eta$, $\eta > 0$. Переход к задаче (1) в ограниченной области $G \subset R^n$ проводится обычным способом [2].

1. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems.— Communs Pure and Appl. Math., 1962, 15, N 2, p. 119—147.
2. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- Успехи мат. наук, 1964, 19, № 3, с. 53—161.
3. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с параметром в классах обобщенных функций.— Сиб. мат. журн., 1981, 22, № 2, с. 214—218.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
5. *Ройтберг Я. А.* О граничных значениях обобщенных решений эллиптических уравнений.— Мат. сб., 1971, 86, № 2, с. 248—267.

Черниговский
педагогический институт

Поступила в редакцию
24.04.1981 г.