ГЛОБАЛЬНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РАЗВЯЗКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. О ГЛАДКОСТИ СЛАБЫХ РАЗВЯЗОК ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

тема автореферата и диссертации по математике, 01.01.02 ВАК РФ

Ройтберг, Инна Яковлевна
АВТОР

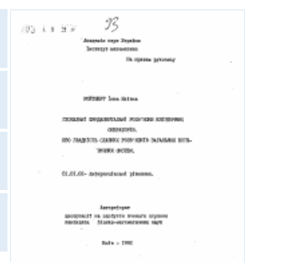
кандидата физико-математических наук
УЧЕНАЯ СТЕПЕНЬ

Киев
МЕСТО ЗАЩИТЫ

1992
ГОД ЗАЩИТЫ

01.01.02
КОД ВАК РФ

ЧИТАТЬ АВТОРЕФЕРАТ



АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ

на тему "Глобальные фундаментальные развязки эллиптических операторов. О гладкости слабых развязок общих эллиптических систем"

%

о .1 і а •'/

Академія наук України Інститут математики

На правах рукопису

РОйТЕЕРГ Інна Яківна

ГЛОБАЛЬНІ ФУЩДОЕНТАЛЬНІ Р03В"ЯЕШ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ.

ПРО ГЛАДКІСТЬ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ ЕЛІПТИЧНИХ .СИСТЕМ.

01.01.02- диференціальні рівняння.

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Роботу виконано у відділі функціонального аналізу Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук

НИЖНИК Л.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук

ШХАЙЛЕЦЬ В.А.,

Ведуча організація: Інститут прикладної математики і

механіки АН України

на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою:

252601, Київ 4,.ГСП, вул. Рєпіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту.

доктор фізико-математичних наук Ейдаїшш С.Д.

Автореферат розіслано

Вчений-секретар спеціалізованої ради доктор фізико-математичних

наур

ЛУЧКА А.Ю.

РОССИЙСКАЯ j : "

ГОСУА;-': '......

БИБЛИОіЕКА ЗАГЙПЫІЙ характеристика роботи

Актуальність теми. Починаючи з 00-х років в теорії еліптичних граничних задач било досягнуто значного прогресу. Я.Б. Лопа--тинський і З.Я. Вапіро ввели поняття еліптичної граничної задачі. Потім в роботах Агмона, Дугліса, Ніренберга, Н.С. Аграновича. Л.Р. Волевича, О.С. Диніна, Браудера. B.ft. Солоннікова, Іех-тера, Пітре було на-ведено різні еквівалентні означення еліптичності задачі як для одного рівняння,так і для загальних еліптичних систем (тобто систем, еліптичних за Дуглісом-Ніренбергом). Було також встановлено нетеровість еліптичних операторів в класах достатньо гладких функцій. Потім в роботах Ліонса, Наджене-са, 10.М. Березапського, С.Г. Крейна. 9.А. Ройтберга та ін. було •доведено теореми про повний набір ізонорфізмів, які знайшли чисельні застосувшт-з Зокрема, в роботах 5.Н. Березанського, 9.А. Ройтберга та інших тьореми про повний нчоїр ізоиорфізмів застосовуються для побудови та вивчення матриць Гріна еліптичних гра-щічних задач. Іншим методом матриці Гріиа було досліджено в роботах В.Л.Красовського, В.А.Солоннікова.

Глобальні фундаментальні розв'язки еліптичних операторів вироко застосовуються в математичній фізиці. Вони відіграють ваяливу роль і в сучасній теорії диференціальних рівнянь. Для еліптичних операторів другого порядку існування глобального Фундаментального розв'язку (гфр) Ф(х,у) доведено Ю.І.Любичен.

Для рівнянь порядку 2в Існування гфр і нормального гфр дослідяе-по Браудером і З.Й.Ройтбергон. Виявилось, для існування гфр оператора L(x.D) необхідна і достатня единість задачі Коші для формально спряженого рівняння L^Cx.Dlv^O, а для існування нормального гфр необхідна і достатня единість задачі Кові як для рівняння L4‘(x,D)v=0, так і для рівняння Kx.DJu^O.

Відкритими задивилися питання про існування і властивості гфр і нормального гфр для загальних еліптичних систем, питання введення і вивчення узагальнених гфр і нормальних гфр у випадку, коли немає вдиності відповідних задач Кояі. Актуальною е та-задача про вивчення відобраїення

ff-—» u =JiJ(x,y)f(y)dy C.

(i)

- г -

у випадку, коли Г - узагальнена функція; питання про можливість наближення розв'язків еліптичних рівнянь і систем лінійними комбінаціями фундаментальних розв'язків та іх похідних. Остання задача була поставлена Хаманном і розв'язана ним у випадку сталих коефіцієнтів виразу Ь, причому застосована ним методика істотно спирається на сталість коефіцієнтів. Детальне вивчення властивостей фундаментальних розв'язків дозволило розв'язати в даній роботі це задачу у випадку змінних коефіцієнтів. Всі ці питання розглянуто в першому розділі дисертації.

В сучасній спектральній теорії виникає такої необхідність вивчення функцій з області визначення оператора сС - ^-реалізації оператора 1, породженого еліптичноп граничної) задачею для системи структури Дугліса - Ніренберга з однорідними граничними умовами. Цю задачу поставив И.С.Огранович; і і розв'язано в другому розділі дисертації.

Кета роботи, а) побудувати і дослідити гфр, нормальний гфр, узагальнений гфр, нормальний узагальнений гфр як для одного рівняння, так і для загальних еліптичних систем; вивчити відображення (і) для випадку, коли Г - узагальнені функції, і питання про можливість наближення розв'язків еліптичних граничних задач лінійними комбінаціями фундаментальних розв'язків та іх похідних; б) вивчити властивості регулярності функцій із області визначення оператора «£• .

Загальний метод дослідження грунтується на теоремах про повний набір ізоморфізків для загальних еліптичних граничних задач та на властивостях матриці Гріна таких задач.

Наукова новизна. Всі основні результати роботи є новими. Розвинена методика дозволила з єдиної точки зору побудувати і дослідити гфр, нормальні гфр, узагальнені та нормальні узагальнені гфр як для випадку одного, рівняннз, так і для випадку загальних еліптичних систем. Вивчено також відображення (і) у випадку, коли Г - узагальнена функція. Доведено, мо лінійними комбінаціями гфр-та їх похідних можна наблизити розв'язки відповідної еліптично'і гранично'і задачі.

Досліджено властивості регулярності функцій з області визна-

чбння оператора

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на семінарі з диференціальних рівнянь у частинних похідних при Інституті математики ЙН Ннраіни, у Воронезьких зимових математичних вколах (1989, 1990, 1991 рр). я Кримських осінніх математичних вколах-симпозіумах (1990, 1992 рр). '

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в б роботах, список яких наведено наприкінці автореферату.

Об'єм чоботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів, списку цитованої літератури, який складається з 47 назв. Робота викладена на 113 сторінках машинописного тексту.

ЗНІСТ РОБОТИ

і ■

В першому розділі систематично вивчаються гфр, нормальні гфр, узагальнені і нормальні узагальнені гфр для еліптичних рівнянь і систем. Він складається з семи параграфів.

В §1.1 сформульовано означена гфр,нормальних гфр та задача про іх вивчення.

Нехай ЄС R^"- обмежена область з межею 7>Є; L=I.(x,D) (x£G)-правильно еліптичний в Б вираз порядку 2т. його коефіцієнти,а також границя UG вважавть'са для простоти нескінченно гладкими.

Функцій Ф(х,у) (х.уЄБ, х£у) називають гфр оператора L. якщо для кожного f £ Ip(Є) (1<p<oo) оператор (1) неперервно діє з Lp(G) в соболевський простір H т^(E),і справедлива рівність Lu= =f в С.

Гфр Ф(х,у) називають нормальним гфр, якщо Ф*(х,у)-Ф(у.х) (риска означає комплексне спряження) е гфр формально с пряженого оператора L*" = L^(x.D). .

В $1.2 наведено основні факти еліптичної теорії для одного рівняння і деякі властивості функції Гріна R(x,y). Тут же доведено, чо R*(x,y):=k<y,x) е функція Гріна формально спряженоі задачі.

В §1.3 побудовано і вивчено гфр. узагальнені гфр, нормальні

гфр,узагальнені нормальні гфр.

Нехай ЄісІ}а- деякий окія Є з нескінченно гладкою иевеві>91., ЦСх.О) - гладке продовження Кх,П) на Нехай Гі:= {у&С"ї61) : зиррусЄ. = 0),

¡ГС0= {и € С~(£хї : йиррисЕІ, І^и = 0).

Зрозуміло, що умова -ЗГ&„= (0) (11,= (О)) еквівалентна єди-

ності задачі Коші в С для рівняння І.+ «=0 (1и=0).

Теорема і.3.1. Для існування гфр Ф(х,у) (х.у £ С. х^у) оператора ІСх.П) необхідної достатньо, цоб Л>о = При цьому гфр Ф(х,у) е нескінченно гладким при х£у. При х-у особливість ф(х,у) така в, як і у функціі Гріна И(х,у) задачі

1.А(х,В)и=Г, Б/ и(^ =0 (і=1,...,в), (2)

Теорема 1.3.3. Для існування нормального гфр в(х,у) С х.у €: Є. х£у) оператора ІЛх.В) необхідно і достатньо,щоб ї[0= Й0=$)}.

При цьому нормальне гфр ССх.у) е нескінченно гладким при х[у.

При х=у особливість й(х,у) така а,як і у функціі Гріна задачі (2).

Якщо ЇЬе і (0), то для існування розв'язку рівняння Ьи=Г необхідно, щоб Г-І.її>0 (тобто, <Г.Vї& =0 (УчбІГІв)). Тому природно функцію ФСх.у) (х.у £ Є. х£у) називати узагальненим гфр оператора Ь(х,0), якщо для конного Ї&1Р(Є) оператор (і) неперервно діє з 1.р(С) в Н1,п'Р(С)(і, якщо ГХЯ0 , то 1д)=Г в С.

Узагальнений гфр будемо називати нормальним узагальненим гфр, якщо Ф^(х,у):=Ф(у,х) е узагальненим гфр оператора ^(х.С). *

Теорема 1.3.2. Для оператора Кх.О) існує узагальнений гфр Ф(х,у) (х.убБ, х/=у>. Функція Ф(х.у) е нескінченно гладкою при х{у. при х=у вона має таку к особливість, як і функція Гріна . Я(х,у) задачі (2).

Теорема 1.3.4. В області £ існує узагальнений нормальний гфр 0(х,у) (х.у £ 6, х^у) оператора Кх.ї). При хну функція Й(х.у) е нескінченно гладкою. Особливості О(х.у) при х=у такі в, як і у функції Гріна Мх.у). '

Летальне вивчення фундаментальних розв'язків дозволило вивчити відображення (1) у випадку, коли Г - узагальнена функція.

Це відображення істотно використовується для апроксимації розв'язків еліптичних граничних задач лінійними комбінаціями Фундаментальних розв'язків та іх похідних.

ний ІГ т* ,р (Є>; иЄ- Н~ігл~4> (Л: зирриСб) відносно розяи-реиия (.,. скаяяриого добутку в І.д<£). Ці простори детально вивчено в п. 1.3,5 дисертації.

Теорема 1.3.1* дає иоаяивість розширити відображена (3) по неперервності. Позначимо це розаиренна такої через

При цьому Ьи=Г всередині Є (тобто сУчеС"(Є)).

Вірними е такої подібні доповнення до теорем 1.3,2,1.3.3,1.3.4.

В ^1.4 наведено основні факти про'загальні еліптичні системи 1 про еліптичні граничні задачі для них, про матриці Гріна таких задач.Доведено, що К Сх,у 1:-И (у,х) е матрицею Гріна формально спряженої задачі. .

В §1.5 вивчаються фундаментальні розв'язки еліптичних операторів для систем рівнянь. - •

Теореми 1.5.1 і 1.5.2 - це узагальнення для систем, еліптичних за Петровськии теорем 1.3.2 і 1.3.1 про гфр І узагальнений гфр. Потім побудовано і вивчено нормальний і узагальнений нормальний гфр для еліптичної за Петровським системи (теореми 1.5.4

1 1.5.5). Відзначимо тут, по якщо 1(х,0) - еліптична за Петровським система, то формально спряаена система 1+(х,В) в еліптичної) за Дуглісом - НІренбергом. Це викликає певні додаткові труднощі .

Вивчається таков відобраіення (І), коли Г=(4..........Г^) е уза-

гальненою вектор-функціеп, {■з - елемент негативного соболевського простору. Теореми 1.5.1*. 1.5.2*. 1.5.4' доповнюють в цьому сенсі теореми 1.5.1.1.5.2 і 1.5.4 іе аналогами для систем теореми

(4)

Тоді відображення (4) неперервно діє в парі просторів

(5)

1.3.1*.

В $1.6. побудовано і вивчено гфр для еліптичних за Дуглісом-Шренбергом систем.

И-? присвячено вивченна цільності лінійних комбінацй фундаментальних розв'язків та іх похідних в многині розв'язків еліптичних граничних задач.

Нехай ЄСНа- обмежена обдасть з межев ^6. Нехай задано правильно еліптичний вираз Кх.О) порядку 2а з нескінченно гладкими коефіцієнтами. Нехай для Ь в Є існує нормальний гфр Ф(х,у). Нехай Л.С.ХІС С- - обмежена область з нескінченно гладкой мекеи Г, при цьому Є/-Д. е зв'язною.

В^І розглядається еліптична гранична задача з нормальними граничними умовами:.-

• В(х.П)и|г -Ч1

- СВ=(В1........В„,), ...Ч'т,,)-. ог«1 В^-Щ^<2в).

Нехай КСЄ\.Й.- кусок'гладко"і Сп-П-мірноІ поверхні, і нехай (ук)"Ас6\Д. -послідовність, чільна в К (тобто (ук)РК).Нехай , , ,

У^ПВ 1_т" 'Р(Г) :=& іг&К, 1<p<», і^І..........в), (В)

де В^'Р(Г) - простір Бєсова. Вивчається питання: чи існує послі

И. В*'

довність

V» ">>'««> ">

(сй - комплексні числа, 1-1,2,...). така, що .т ,

lia (2Î«t- B,u,.T>v „ „)-© t8)

Наступні теореми сформуявемо тут алз випадку, коли дефект відсутній (в роботі розглянуто загальний випадок).

Теорема і.7.1. Нехай s£R, 1<p<«e,^= ......^ задоволь-

няє (В). Тоді існуеіпослідовність (7), яка задовольняє (8)Г

Теорема 1.7.2. Нехай в умовах теореми 1,7Д К -гладка мека ■-бласті U (UCЇЇCC\-&) і нехай задача

0; 0*4^ о

(M^ и-1)

має в С (ІП диве тривіальний розв'язок. Тоді виконується твердження теореми 1.7.1 з заиіноп у (8) №І.$2о-1 на иЦв-І.

Теорема 1.7.3. Нехай в умовах теореми 1.7.1 послідовність (у^) щільна у відкритій множині 0 (исис.Є\2л. Тоді виконується твердження теореми 1.7.1'з заміноо в (7) МІ <2в-1 на М =0.

Другий розділ присвячено вивчення гладкості слабких розв'язків еліптичних за Дуглісом-Ніренбергом систем.

Розглянемо у Є сі?п еліптичну граничну задачу для системи структури Дугліса-Ніренберга

1и(х) = (1: (х.О)) . .

<ІК

Ьи(х) - (ЬцЛх.П)). .

К=^...,л

= Пх) (хЄЄ5.

(9) =^(х) . .

Тут огсі Ілс ^ * Ц, огіі Ь(іКі:6'(1 + Ц-: 5^ ^ С і = 1..Ю.С^......(Г^-

цілі числа,5^ +...^+^+...+1^=28, . .>„ 1^» 0 =

6*к< 0 (Ь = 1......і). Нехай С**(гр) = {и6(С"(Б))"; Ьи=0), -

замикання в (Ьд(6)/= відображення и^іи (иі С°Чгр)).

В розділі досліджено властивості регулярності функцій з області визначення &(»£) оператора о£ .

Теорема 2.2 - основний результат другого розділу. Вона стверджує, цо якщо и = (и^,....и#)бй[^), то и^Н^^СЄ), і підвищення гладкості має місце, якщо ^ +■ 5^ > 0 (1=1.Н). В цьому

випадку, зокрема, власні функції оператора И е нескінченно гладкими. .

На. гікінменлі автор виражає виру подяку доктору фізико-матє-матичних наук професору Л.П. Нижнику за керівництво роботов.

• Основні положення дисертації опубліковано в наступних

роботах: ' ‘

1. Ро?тберг И.Я. О существовании фундаментальных решений

■ эллиптических операторов во все« области^Операторное методы и их применения/Воронеж, ун-т.-1989.-С.59-60.-Деп. ВИНИТИ, 'Ш.-№ 6385-В89. ■

2. Мех (Ройтберг) И.Я.^О фундаментальных решениях эллиптических операторов Докл.АН УССР.-1991.-й5.- С.І4-І8.

3. Мех (Ройтберг) І.Я. Про гладкість слабких розв'язків загальних еліптичних систем^Спектральні і еволюційні задачі: Тези доповідей КРОМШ-І.-Київ: НМК В0.І99І.-С.79.

4. Мех (Ройтберг) И.Я. О гладкости слабых решений эллиптических по Дуглису - Ниренбергу систем Укр.мат.журн.-1991,-43, №10.-С.1379-1383.

5. Ройтберг И.Я., Ройтберг Я.А. Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями Фундаментальных решений/^Докл.АН Украины.-1992. -f' 12. -С.

6. Ройтберг И.Я., Ройтберг Я.А. Об аппроксимации решений граничных эллиптических задач линеРнкми комбинапиямй Фундаментальных решений/УТези доповідей конференції, присвяченої пам"яті академіка М.П.Кравчука, Київ, Луиьк, 22-28 верес, 1992р.- Київ: Ін-т математики АН України, 1992.- С.І78.

\