

О ВЛИЯНИИ АТМОСФЕРНОГО ДРОЖАНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯРКОСТИ ПО ДИСКУ ПЛАНЕТЫ

И. К. Коваль, А. А. Рубашевский, Э. Г. Яновицкий

Для получения надежных значений физических параметров атмосферы и поверхности планеты из наблюдаемого распределения яркости по ее диску необходимо прежде всего освободиться от искажающего влияния земной атмосферы.

Основным фактором, вызывающим искажение истинного распределения яркости по диску планеты, является атмосферное дрожание, которое приводит к тому, что 1) наблюдаемое распределение яркости оказывается как бы «размазанным» по сравнению с истинным из-за «перекачки» энергии за пределы диска планеты, вследствие чего яркость планеты непосредственно за краем эфемеридного диска не равна нулю, 2) если интенсивность света, отраженного планетой, уменьшается от центра к краю, то атмосферное дрожание приведет к уменьшению наблюдаемой интенсивности в центральной части диска. Если же происходит увеличение яркости к краю, то в центральных областях диска будет наблюдаться увеличение яркости. Это искажение, вообще говоря, следует принимать во внимание при проведении наблюдений методами абсолютной фотометрии.

До самого последнего времени при наблюдениях планет не проводились параллельные исследования, позволяющие хоть в какой-то мере исправить наблюдаемое распределение яркости за атмосферное дрожание. Впервые такая работа была проведена в ГАО АН УССР при наблюдениях Марса в 1965 г. [1]. Основываясь на этих наблюдениях, И. К. Коваль [2] сделал попытку грубо исправить наблюдаемое распределение яркости по диску Марса.

В настоящей работе приводятся основные уравнения для определения истинного распределения яркости по диску планеты по наблюдаемому распределению. Оценивается влияние ширины щели, используемой при получении фотометрического разреза турбулентного диска звезды, на функцию атмосферного искажения (аппаратная функция), если последняя представляет собой гауссиану; приводится обзор методов точного решения основного уравнения, даются подробные таблицы наблюдаемого распределения яркости при заданном истинном распределении.

Пусть истинное распределение яркости по диску планеты определяется функцией $F(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки диска планеты, имеющей координаты x, y . Тогда видимое распределение яркости $f(\mathbf{r})$ будет определяться соотношением [1]

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dx' dy', \quad (1)$$

где

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \quad (2)$$

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Ядро этого уравнения $K(\mathbf{r})$ есть аппаратная функция. Она включает в себя как атмосферное искажение, так и искажения, вносимые инструментом.

В одномерном случае вместо уравнения (1), очевидно, имеем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) K(x-y) dy. \quad (3)$$

Обычно в таком виде это уравнение используется при исправлении наблюдаемой спектральной линии Солнца за инструментальный контур [3]. В таком случае в качестве $K(x)$ должен быть взят контур бесконечно узкой спектральной линии, т. е. инструментальный контур. Однако при наблюдениях планет вид функции $K(\mathbf{r})$ в первую очередь будет определяться атмосферным дрожанием [1]. Поэтому для дальнейшего исследования уравнения (1) нам необходимо установить вид функции $K(\mathbf{r})$.

АППАРАТНАЯ ФУНКЦИЯ И ТОЧНОСТЬ ЕЕ НАХОЖДЕНИЯ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА

Искажающее влияние атмосферы обусловлено, прежде всего, отклонениями луча света, носящими случайный характер. Поэтому естественно предположить, что аппаратная функция имеет (в одномерном случае) вид

$$K(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

Действительно, как отмечает Мейнел [4], профиль диска дрожания звезды при хорошей прозрачности земной атмосферы неплохо аппроксимируется гауссианой. В ГАО АН УССР И. Г. Колчинский [5] в результате многолетних исследований нашел, что распределение амплитуд дрожания звезды является гауссовым, а в работе [6] доказано, что если считать турбулентцию в атмосфере однородной, то амплитуды дрожания точечного источника, находящегося за пределами атмосферы, распределяются по закону (4).

Обратимся теперь к той методике, которая была использована в ГАО АН УССР [1] для нахождения аппаратной функции. Для определения последней проводилось фотоэлектрическое сканирование изображения звезды щелью, высота которой значительно превышает эффективный диаметр турбулентного диска звезды. Предположим, что истинное распределение яркости по турбулентному диску подчиняется закону Гаусса. Имеется в виду следующее. Пусть изображение звезды сканируется круглой диафрагмой ¹ радиуса d (столь малой, что $d \ll \sqrt{2} \sigma$). Пусть в результате окажется, что вдоль радиуса r изображения ² измеряемая энергия будет меняться по закону

$$E(r) = I_0 e^{-a^2 r^2}, \quad (5)$$

где I_0 — количество энергии, приходящееся на площадь πd^2 , когда центр диафрагмы совпадает с центром изображения;

$$a^2 = \frac{1}{2\sigma^2}. \quad (6)$$

Возникает вопрос, будет ли распределение яркости по турбулентному диску изображения этой же звезды меняться по закону (5) с тем же параметром a , если распределение яркости измерять посредством щели бесконечной длины, т. е. в какой степени распределение яркости зависит от формы диафрагмы. Явлением дифракции на щели будем пренебрегать.

¹ Конкретная форма диафрагмы в данном случае не имеет значения. Важно только, чтобы диафрагма была столь малой, чтобы в ее пределах яркость турбулентного диска можно было считать постоянной в любой его части.

² Предполагается, что распределение энергии по диску не зависит от азимута.

Количество энергии, попадающее на элемент площади в точке с координатами (z, y) (рис. 1),

$$dE(z, y) = \frac{I_0}{\pi d^2} e^{-a^2 r^2} dx dy, \quad (7)$$

тогда полное количество энергии, регистрируемое от всей щели шириной $2d$, запишется так:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{2I_0}{\pi d^2} \int_0^\infty dy \int_{z-d}^{z+d} e^{-a^2(x^2+y^2)} dx = \frac{I_0}{\sqrt{\pi} ad^2} \int_{z-d}^{z+d} e^{-a^2 x^2} dx = \\ &= \frac{2I_0}{\sqrt{\pi} ad^2} e^{-a^2 z^2} \int_0^d e^{-a^2 x^2} \operatorname{ch}(2a^2 xz) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда окончательно находим

$$E(z) = \frac{2I_0 e^{-a^2 z^2}}{\sqrt{\pi} a^2 d^2} \int_0^{ad} e^{-x^2} \operatorname{ch}(2axz) dx. \quad (9)$$

Можно выбрать полуширину щели столь малой, чтобы безразмерная величина ad удовлетворяла условию

$$ad \ll 1. \quad (10)$$

Представим интеграл в формуле (9) следующим образом:

$$\int_0^{ad} e^{-x^2} \operatorname{ch}(2axz) dx = ad [1 + \alpha(z)]. \quad (11)$$

Однако

$$\int_0^{ad} e^{-x^2} \operatorname{ch}(2axz) dx \leq \int_0^{ad} \operatorname{ch}(2axz) dx = \frac{\operatorname{sh}(2a^2 dz)}{2az},$$

откуда находим

$$\alpha(z) \leq \frac{\operatorname{sh}(2a^2 dz)}{2a^2 dz} - 1. \quad (11a)$$

Следовательно, из (9) и (11) окончательно получаем

$$E(z) = \frac{2I_0}{\sqrt{\pi} ad} e^{-a^2 z^2} [1 + \alpha(z)]. \quad (12)$$

Таким образом, если распределение яркости по турбулентному диску звезды измерять при помощи достаточно узкой щели (узкой в смысле выполнения условия (10)), то, как это следует из формулы (12) найденное распределение практически не будет отличаться от истинного. Иными словами, если принять, что наблюдаемое распределение яркости задается формулой

$$E(z) = \frac{2I_0}{\sqrt{\pi}ad} e^{-a^2z^2},$$

то при этом допускается относительная погрешность, определяемая формулой (11а).

Профили изображения звезды, которые приведены в работе [1], хорошо аппроксимируются гауссианой. Некоторое расхождение иногда наблюдается в крыльях. Однако его можно ликвидировать, если представлять аппаратную функцию в виде суммы двух гауссиан, т. е.

$$K(x) = I_1 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} + I_2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (13)$$

Такое представление не вносит никаких принципиальных дополнительных трудностей при решении уравнения (3).

По всей видимости, распределение яркости не является изотропным. Естественно предположить, что диск дрожания будет иметь форму, близкую к форме эллипса. Тогда вместо формулы (4) имеем

$$K(x, y) = e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right)}. \quad (14)$$

В этом случае решение уравнения (1) усложняется. Поэтому, вообще говоря, важно установить, когда можно пренебрегать анизотропией в распределении яркости по диску дрожания. Скорее всего такое пренебрежение возможно для не очень больших зенитных расстояний. Однако для уверенного ответа на

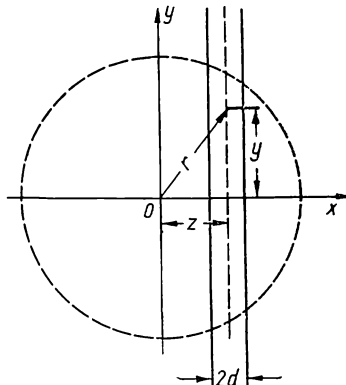


Рис. 1.

поставленный вопрос необходимо провести специальные наблюдения.

Наконец остается еще один важный вопрос. Так как между моментами наблюдения планеты и контура звезды заключен некоторый промежуток времени, то возникает вопрос о том, может ли за указанный промежуток времени существенно измениться распределение яркости по диску дрожания звезды.

Сошлемся по этому поводу на работу И. Г. Колчинского [5], который проводил изучение дрожания изображений звезд в ГАО АН УССР. Для этого на фотопластинках получались так называемые следы изображений звезд при остановленном часовом механизме. Средняя длина следа оказывалась равной 14 см, что для звезды со склонением $\delta = 0^\circ$ соответствует интервалу времени около 6 мин. Проведенный автором корреляционный анализ результатов наблюдений позволил сделать вывод о приближительной стационарности случайного процесса дрожания звездных изображений за указанный выше промежуток времени.

Поскольку программа наблюдений Марса [1] была составлена таким образом, что сразу же после Марса с тем же фильтром прогонялось изображение звезды, то промежуток времени между сканированиями Марса и звезды не превышал 10 мин. Так как этот промежуток времени сравним с указанным выше временем «протяжки» звезд [5], то можно, по-видимому, полагать, что за промежуток времени между наблюдениями Марса и звезды распределение яркости по диску последней существенно не менялось.

Отметим еще следующее обстоятельство. Звезда, для которой проводится исследование ее диска дрожания с целью определения аппаратной функции, должна выбираться на близких с планетой азимутах и зенитных расстояниях, как это и проводилось при наблюдениях Марса [1], ибо, как это было показано теоретически [8] и подтверждено экспериментально [5], среднеквадратические амплитуды дрожания изображений звезд в телескопе растут пропорционально величине \sqrt{M} , где M —воздушная масса.

О ТОЧНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Если предположить, что аппаратная функция имеет вид (14), то основное уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x', y') e^{-\left[\frac{(x-x')^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-y')^2}{2\sigma_2^2}\right]} dx' dy'. \quad (15)$$

Постоянный множитель перед интегралом найден из условия, что полная энергия излучения, приходящая от планеты через атмосферу Земли, не меняется, т. е. в земной атмосфере для рассматриваемых длин волн света отсутствует поглощение. Это условие, очевидно, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) dx dy. \quad (16)$$

В общем случае, описываемом уравнением (15), для определения $F(x, y)$ следует найти значения функции $f(x, y)$ во многих точках наблюдаемого изображения, что на практике вызывает принципиальные трудности. Поэтому рассмотрим следующие более простые случаи.

1. Если пренебречь градиентом яркости в направлении y , то вместо уравнения (15) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dy. \quad (17)$$

По-видимому, такое приближение оправдывается при достаточно малом σ и вблизи зенита. Ниже приведем некоторые оценки точности рассматриваемого приближения.

2. Если $\sigma_2 \rightarrow 0$, то из уравнения (15) имеем

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x', y) e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}} dx', \quad (18)$$

т. е. зависимость от второй координаты y будет чисто параметрической. Это приближение выполняется, если $\sigma_1 \gg \sigma_2$. Очевидно, что уравнение (17) является частным случаем уравнения (18).

3. Пусть распределение яркости по диску планеты обладает центральной симметрией и пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Перейдем к сферической системе координат r, φ . Тогда, если координаты точек M и M' соответственно x, y и x', y' (рис. 2), причем положения этих точек определяются, кроме того, соответственно радиусами-векторами r и r' , угол между которыми равен φ , то проекции отрезка MM' на оси x и y будут $AA' = x' - x$ и $BB' = y - y'$. Следовательно,

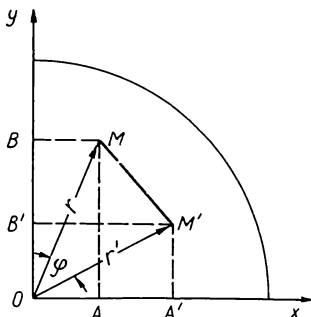


Рис. 2.

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi.$$

(19)

В таком случае вместо формулы (15) получим

$$f(r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} e^{\frac{rr'}{\sigma^2} \cos \varphi} d\varphi \int_0^{\infty} F(r') e^{-\frac{r'^2}{2\sigma^2}} r' dr'. \quad (20)$$

Функция Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка определяется формулой

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \varphi} d\varphi. \quad (21)$$

Следовательно, вместо (20) окончательно получаем

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \int_0^{\infty} F(y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xy}{\sigma^2}\right) y dy. \quad (22)$$

Рассматриваемое основное уравнение (15) (а также его частные виды (17), (18) и (22)) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Как известно, задачи, описываемые

уравнением такого типа, принадлежат к классу так называемых некорректно поставленных задач. Это значит, что непосредственное решение такого уравнения, например методом численного обращения преобразования Фурье или переходом к системе линейных алгебраических уравнений, здесь не проходит — малые ошибки в найденных из эксперимента функциях могут дать произвольно большие ошибки в результате.

Общая постановка проблемы регуляризации некорректно поставленных задач, конкретные методы регуляризации, исследование устойчивости результата обращения даны в работах А. Н. Тихонова [9—12].

Не будем останавливаться на применении метода Тихонова к решению рассматриваемой задачи. Остановимся лишь на методах точного решения основных уравнений, т. е. решения задачи в предположении, что найденные из эксперимента функции известны абсолютно точно. Как уже говорилось, такие решения не являются корректными и, следовательно, ими нельзя пользоваться на практике. Однако анализ решения, записанного в явном виде, в ряде случаев может помочь в выяснении особенностей поведения решения, которые затем могут быть учтены при регуляризации рассматриваемой некорректной задачи.

Очевидно, что решение уравнения (17) может быть получено обращением преобразования Фурье. Применение метода преобразования Фурье к решению уравнения (17) обсуждалось в работе [7]. Поэтому в дальнейшем на этом методе останавливаться не будем.

Рассмотрим метод ортогональных рядов для решения уравнения (17). Так как ядро этого уравнения эрмитовское, то вполне естественно искать функцию $F(x)$ в виде ряда по полиномам Эрмита.

Предположим, что

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(y), \quad (23)$$

где $H_n(y)$ — полином Эрмита порядка n , а c_n — коэффициенты, подлежащие определению. Тогда, подставляя (23) в (17), для $0 \leq \sigma^2 < 1/2$ получим [13, стр. 852]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-2\sigma^2)^{n/2} H_n \left[\frac{x}{(1-2\sigma^2)^{1/2}} \right]. \quad (24)$$

Учитывая свойство ортогональности полиномов Эрмита, находим

$$c_n = \frac{\gamma_n}{2^n n! (1 - 2\sigma^2)^{n/2}}, \quad (25)$$

где

$$\gamma_n = [\pi(1 - 2\sigma^2)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{1-2\sigma^2}} H_n \left[\frac{x}{(1-2\sigma^2)^{1/2}} \right] dx. \quad (26)$$

Если функция $F(x)$ является четной, то

$$\gamma_{2n+1} \equiv 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

и

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1/2}(x^2), \quad (27)$$

где $L_n^{-1/2}(x)$ — полином Лагерра.

Подставляя (27) в (23) и (26), после преобразований получим

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n L_n^{-1/2}(x^2), \quad (28)$$

где

$$\bar{c}_n = \frac{\gamma_n n! 2^n}{(2n-1)!! (1-2\sigma^2)^n}, \quad (29)$$

причем

$$\gamma_n = 2 [\pi(1-2\sigma^2)]^{1/2} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{1-2\sigma^2}} L_n^{-1/2} \left(\frac{x^2}{1-2\sigma^2} \right) dx. \quad (30)$$

Используя формулы

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x), \quad (31)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (32)$$

и разлагая $F(x)$ в ряд по σ^2 , получим

$$F(x) = f(x) - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\sigma^4}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \\ - \frac{\sigma^6}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{d^6 f(x)}{dx^6} + \dots \quad (33)$$

Из формул (17) и (33) видно, что если функция $f(x)$ является достаточно гладкой, а σ достаточно мало, то решение задачи восстановления не представляет особого труда. Однако в случае планеты гладкость $F(x)$ нарушается вблизи ее края и, следовательно, даже для малых σ восстановление вблизи края диска планеты представляет принципиальные трудности. В связи с этим уместно отметить, что исправление наблюдаемой спектральной линии за инструментальный контур, приведенное в работе [3], не вызвало принципиальных трудностей и было выполнено методом последовательных приближений, так как искажаемый контур представляет собой достаточно гладкую функцию.

Исходя из формулы (23), дающей точное решение идеализированной задачи, оценим ошибку $\Delta F(x)$ в решении уравнения (17), если функция $f(x)$ задана с постоянной абсолютной ошибкой Δf , а величина σ определяется с абсолютной ошибкой $\Delta\sigma$. Из (23) и (25) получим

$$\Delta F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta c_n H_n(x), \quad (34)$$

$$\Delta c_n = \frac{\Delta \gamma_n}{2^n n! (1-2\sigma^2)^{n/2}} + \frac{2\gamma_n (n+1) \sigma \Delta\sigma}{2^n n! (1-2\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (35)$$

Из формулы (26) при учете (31) и (32) находим

$$\Delta \gamma_0 = \Delta f; \quad (36)$$

$$\Delta \gamma_n = - \frac{\sigma \Delta\sigma}{(1-2\sigma^2)^{3/2}} [\gamma_{n+2} + 2(n+1)\gamma_n] \quad (37)$$

$$(n \geq 1).$$

Подставляя (36) и (37) в (35) и учитывая (23) и (34), окончательно получаем

$$\Delta F(x) = \Delta f - \sigma \Delta\sigma \frac{d^2 F(x)}{dx^2}. \quad (38)$$

Из этой формулы хорошо видно, что даже для сколь угодно малой погрешности в определении σ , можно получить сколь угодно большую абсолютную погрешность в определении функции $F(x)$, если последняя недостаточно гладкая.

Аналогично можно также найти точное решение уравнения (22). Предположим, что

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n L_n(y^2), \quad (39)$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра порядка n ; l_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (39) в (22), находим

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} l_n \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n(y^2) I_0\left(\frac{xy}{\sigma^2}\right) y dy, \quad (40)$$

но [13, стр. 861] для $0 \leq \sigma^2 < 1/2$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} L_n(y^2) I_0\left(\frac{xy}{\sigma^2}\right) y dy = \sigma^2 (1 - 2\sigma^2)^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} L_n\left(\frac{x^2}{1 - 2\sigma^2}\right),$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n (1 - 2\sigma^2)^n L_n\left(\frac{x^2}{1 - 2\sigma^2}\right). \quad (41)$$

Учитывая свойство ортогональности полиномов Лагерра, получаем

$$l_n = \frac{2}{(1 - 2\sigma^2)^{n+1}} \int_0^{\infty} f(x) L_n\left(\frac{x^2}{1 - 2\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{1 - 2\sigma^2}} x dx. \quad (42)$$

Аналогичным образом можно найти решение и более общего уравнения (15).

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для того чтобы иметь количественное представление о степени влияния атмосферы на распределение яркости по диску планеты, предположим, что

$$F(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^y, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (43)$$

Эта формула была эмпирически получена Н. Н. Сытинской для шероховатых поверхностей. Параметр ν связан с введенным Н. Н. Сытинской фактором гладкости q соотношением

$$\nu = \frac{q}{2}.$$

Для закона (43) вместо формулы (17) получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^\nu e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dy, \quad (44)$$

а вместо (22)

$$f_c(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \int_0^1 (1-y^2)^\nu e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xy}{\sigma^2}\right) y dy. \quad (45)$$

По формулам (44) и (45) на ЭВЦМ «Минск-22» были рассчитаны таблицы функций $f(x)$ и $f_c(x)$ для $\nu=0.0 \div 1.0$ (через 0.10), $\sigma=0.05 \div 0.40$ (через 0.05), которые приведены в приложении.

Расчет по формуле (44) не вызывал никаких трудностей. Что же касается формулы (45), то для $\sigma \geq 0.20$ оказалось удобным ее несколько преобразовать. При помощи выражения для производящей функции полиномов Лагерра [13, стр. 1052]

$$I_0(2\sqrt{xz}) e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{(-1)^n z^n}{n!} \quad (46)$$

формула (45) преобразовывается к виду

$$f_c(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{2\sigma^2} \Gamma(\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{2^n \sigma^{2n} \Gamma(\nu+n+2)}. \quad (47)$$

Это выражение для $f_c(x)$ и использовалось для расчета при $\sigma \geq 0.20$.

Для контроля точности производимых расчетов полезны следующие формулы. При $\nu=0$ из (44) имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right], \quad (48)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, а из (45) [13, стр. 731] находим

$$f_c(1) = \frac{1}{2} [1 - e^{-1/\sigma^2} I_0(1/\sigma^2)]. \quad (49)$$

Перейдем к некоторым выводам, которые можно сделать из анализа численных результатов, приведенных в таблицах приложения. Прежде всего оценим различие в результатах расчета по формулам (44) и (45) при одинаковых ν и σ . Для этого в таблице приведена величина

σ	ν	Δf
----------	-------	------------

$$\Delta f = \left| 1 - \frac{f(0.95) f_c(0)}{f(0) f_c(0.95)} \right| 100\%,$$

0.05	0.0	0.71
	0.5	1.1
0.10	0.0	2.7
	0.5	3.9
0.15	0.0	5.0
	0.5	6.1
0.20	0.0	7.3
	0.5	8.3
0.25	0.0	9.6
	0.5	9.8
0.30	0.0	12.0
	0.5	11.0
0.35	0.0	13.6
	0.5	11.5
0.40	0.0	14.2
	0.5	11.0

рассчитанная для $\nu=0.0$; 0.5 и различных σ .

Из таблицы следует, что использование более простого уравнения (44) взамен уравнения (45) для $\sigma \leq 0.25$ дает ошибку, не превышающую 10% для $x \leq 0.95$. Однако нужно иметь в виду, что для $x \geq 1$ (т. е. за краем диска) эта ошибка будет несколько возрастать. Например, для $\sigma=0.30$ при $x=1.25$ величина $\Delta f=19\%$ для $\nu=0$ и $\Delta f=18\%$ для $\nu=0.5$.

Отметим также, что в случае закона Ламберта ($\nu=0.5$) при $\sigma=0.20$ занижение яркости центра диска планеты из-за атмосферного дрожания составляет примерно 4%. Но уже при $\sigma=0.40$ это занижение равно 20%. Таким образом, только для достаточно малых σ (т. е. для $\sigma < 0.20$) при проведении измерений яркости по методу абсолютной фотометрии можно пренебрегать влиянием дрожания на абсолютную величину яркости в центре диска. Приведенные оценки ошибок относятся лишь к случаю закона Ламберта, для $\nu=0$ они будут гораздо меньшими.

Остановимся на применении приведенных в приложении таблиц. Если принять, что планета отражает свет согласно закону (43), то из сравнения полученного из наблюдений распределения яркости с результатами расчета при заданном σ

можно грубо оценить величину ν , т. е. по существу, решить обратную задачу. Такая попытка нахождения ν для Марса сделана в заметке И. К. Ковалья [2]. Однако в указанной работе не была оценена ошибка найденного ν . Поэтому результат является неуверенным.

В дальнейшей нашей работе нахождение величины ν предполагается провести следующим образом. Сначала грубо оценивается ν из сравнения наблюдаемых значений распределения яркости по диску Марса в противостоянии [1] с результатами расчетов по формуле (45). Затем по методу наименьших квадратов по формуле (45) находятся значения ошибок $\Delta\nu$ и $\Delta\sigma$ к принятым грубым значениям ν и σ и, наконец, оценивается вероятная ошибка нахождения последних. Такой метод решения основной задачи является корректным, если предположение о том, что поверхность Марса отражает свет согласно закону (43), справедливо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаенко Л. А., Бугаенко О. И., Коваль И. К., Морозенко А. В. — В кн.: Физика Луны и планет. «Наукова думка», К., 1966.
2. Коваль И. К. — АЦ, 1965, 319.
3. Гуртовенко Э. А. — АЖ, 1966, 43, 3, 659.
4. Мейнел А. Б. — В кн.: Телескопы. ИЛ, М., 1963, 196—206.
5. Колчинский И. Г. — АЖ, 1957, 34, 4, 638.
6. Duntley S. Q., Culver W. H., Ricuey F., Preisendorfer R. W. — J. Opt. Soc. Amer., 1963, 53, 3, 351.
7. Барабашов Н. П., Гаража В. И., Дудинов В. Н. — АЖ, 1966, 1, 144.
8. Красильников В. А. — ДАН СССР, 1949, 65, 3, 241.
9. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1943, 39, 5, 198.
10. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1963, 151, 3, 501.
11. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1963, 153, 1, 49.
12. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, 2, 564.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

v	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c
	$\sigma=0.05$									
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.999	0.998
0.10	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.998	0.996	0.995	0.995	0.994
0.15	1.000	1.000	0.997	0.997	0.995	0.995	0.992	0.991	0.990	0.989
0.20	1.000	1.000	0.996	0.996	0.991	0.991	0.987	0.986	0.983	0.982
0.25	1.000	1.000	0.993	0.993	0.987	0.987	0.980	0.979	0.973	0.972
0.30	1.000	1.000	0.990	0.990	0.981	0.981	0.971	0.970	0.962	0.961
0.35	1.000	1.000	0.987	0.987	0.974	0.974	0.961	0.960	0.948	0.947
0.40	1.000	1.000	0.982	0.982	0.965	0.965	0.948	0.947	0.931	0.930
0.45	1.000	1.000	0.977	0.977	0.955	0.955	0.933	0.932	0.912	0.911
0.50	1.000	1.000	0.971	0.971	0.943	0.943	0.916	0.915	0.890	0.888
0.55	1.000	1.000	0.964	0.964	0.929	0.929	0.896	0.895	0.864	0.863
0.60	1.000	1.000	0.956	0.955	0.913	0.912	0.873	0.872	0.834	0.833
0.65	1.000	1.000	0.946	0.945	0.894	0.893	0.846	0.845	0.800	0.799
0.70	1.000	1.000	0.934	0.933	0.872	0.871	0.815	0.813	0.761	0.759
0.75	1.000	1.000	0.919	0.918	0.844	0.844	0.776	0.775	0.714	0.712
0.80	1.000	1.000	0.900	0.900	0.810	0.809	0.730	0.729	0.658	0.657
0.85	0.999	0.998	0.873	0.872	0.764	0.763	0.670	0.668	0.588	0.586
0.90	0.977	0.976	0.818	0.816	0.687	0.685	0.580	0.577	0.491	0.488
0.95	0.841	0.835	0.666	0.660	0.530	0.526	0.426	0.422	0.344	0.340
1.00	0.500	0.490	0.374	0.365	0.282	0.276	0.215	0.210	0.165	0.161
1.05	0.159	0.153	0.113	0.107	0.082	0.078	0.059	0.056	0.043	0.042
1.10	0.023	0.022	0.015	0.014	0.009	0.009	0.007	0.007	0.004	0.004
1.15	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\sigma=0.10$									
0.00	1.000	1.000	0.999	0.998	0.998	0.996	0.997	0.994	0.996	0.992
0.05	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.996	0.993	0.995	0.991
0.10	1.000	1.000	0.998	0.997	0.996	0.994	0.994	0.991	0.992	0.988
0.15	1.000	1.000	0.997	0.996	0.993	0.991	0.990	0.987	0.987	0.982
0.20	1.000	1.000	0.995	0.994	0.990	0.988	0.985	0.981	0.979	0.975
0.25	1.000	1.000	0.992	0.991	0.985	0.983	0.977	0.974	0.970	0.966
0.30	1.000	1.000	0.989	0.988	0.979	0.976	0.968	0.965	0.958	0.954
0.35	1.000	1.000	0.986	0.984	0.971	0.969	0.958	0.954	0.944	0.939
0.40	1.000	1.000	0.981	0.980	0.963	0.960	0.945	0.941	0.927	0.922
0.45	1.000	1.000	0.976	0.974	0.952	0.949	0.929	0.926	0.907	0.902
0.50	1.000	1.000	0.969	0.968	0.940	0.937	0.912	0.908	0.884	0.879
0.55	1.000	1.000	0.962	0.960	0.926	0.923	0.891	0.887	0.858	0.853
0.60	1.000	1.000	0.953	0.951	0.909	0.906	0.867	0.862	0.827	0.822
0.65	1.000	1.000	0.942	0.940	0.888	0.885	0.838	0.833	0.791	0.785
0.70	0.999	0.998	0.928	0.925	0.863	0.859	0.803	0.798	0.749	0.742
0.75	0.994	0.993	0.907	0.904	0.829	0.824	0.760	0.753	0.697	0.690
0.80	0.977	0.974	0.872	0.867	0.782	0.774	0.702	0.694	0.632	0.623
0.85	0.933	0.926	0.812	0.803	0.710	0.700	0.623	0.613	0.549	0.539
0.90	0.841	0.828	0.712	0.698	0.606	0.593	0.519	0.506	0.447	0.435
0.95	0.691	0.673	0.568	0.552	0.471	0.456	0.394	0.380	0.331	0.318

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>
0.999	0.998	0.999	0.997	0.998	0.996	0.998	0.996	0.998	0.996	0.998	0.995
0.998	0.997	0.998	0.996	0.997	0.995	0.997	0.995	0.996	0.994	0.996	0.993
0.994	0.993	0.993	0.991	0.991	0.990	0.990	0.988	0.989	0.987	0.988	0.985
0.987	0.986	0.985	0.983	0.982	0.980	0.980	0.978	0.977	0.975	0.975	0.972
0.978	0.977	0.974	0.972	0.970	0.968	0.966	0.964	0.962	0.959	0.958	0.955
0.967	0.966	0.960	0.959	0.954	0.952	0.948	0.946	0.941	0.939	0.935	0.932
0.952	0.952	0.943	0.942	0.934	0.932	0.925	0.923	0.916	0.914	0.908	0.905
0.935	0.934	0.923	0.921	0.911	0.909	0.899	0.897	0.887	0.884	0.875	0.872
0.915	0.914	0.899	0.897	0.883	0.881	0.868	0.866	0.852	0.850	0.837	0.835
0.891	0.890	0.871	0.870	0.851	0.849	0.832	0.830	0.813	0.811	0.795	0.792
0.864	0.863	0.839	0.838	0.815	0.813	0.792	0.790	0.769	0.767	0.748	0.745
0.833	0.832	0.803	0.802	0.775	0.773	0.747	0.745	0.721	0.718	0.695	0.693
0.798	0.796	0.762	0.761	0.729	0.727	0.697	0.695	0.667	0.664	0.637	0.635
0.757	0.755	0.717	0.714	0.678	0.676	0.642	0.639	0.608	0.605	0.575	0.572
0.711	0.709	0.665	0.662	0.621	0.619	0.581	0.578	0.543	0.540	0.508	0.505
0.657	0.655	0.605	0.603	0.557	0.554	0.513	0.510	0.472	0.470	0.435	0.433
0.594	0.592	0.536	0.534	0.484	0.482	0.437	0.435	0.395	0.393	0.358	0.355
0.517	0.514	0.455	0.452	0.400	0.398	0.353	0.350	0.311	0.309	0.275	0.268
0.416	0.413	0.354	0.351	0.301	0.298	0.257	0.254	0.220	0.217	0.188	0.186
0.278	0.275	0.227	0.223	0.186	0.183	0.152	0.150	0.129	0.123	0.104	0.102
0.128	0.125	0.099	0.097	0.077	0.075	0.061	0.059	0.049	0.047	0.039	0.037
0.032	0.031	0.023	0.023	0.017	0.017	0.013	0.013	0.010	0.010	0.008	0.008
0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.995	0.990	0.994	0.988	0.993	0.986	0.992	0.984	0.991	0.982	0.990	0.980
0.994	0.989	0.992	0.986	0.991	0.984	0.990	0.982	0.989	0.980	0.987	0.977
0.990	0.985	0.988	0.982	0.986	0.979	0.984	0.976	0.982	0.973	0.980	0.970
0.983	0.978	0.980	0.974	0.977	0.970	0.974	0.966	0.971	0.962	0.968	0.958
0.974	0.969	0.969	0.963	0.965	0.957	0.960	0.952	0.955	0.946	0.950	0.940
0.963	0.957	0.955	0.949	0.948	0.941	0.941	0.933	0.934	0.925	0.928	0.918
0.948	0.942	0.938	0.932	0.928	0.921	0.919	0.911	0.909	0.900	0.900	0.890
0.931	0.925	0.917	0.911	0.905	0.897	0.892	0.884	0.880	0.870	0.868	0.858
0.910	0.904	0.893	0.886	0.877	0.869	0.861	0.852	0.845	0.836	0.830	0.820
0.886	0.880	0.865	0.858	0.845	0.837	0.825	0.817	0.806	0.797	0.788	0.778
0.858	0.852	0.833	0.826	0.808	0.801	0.785	0.776	0.762	0.753	0.740	0.730
0.826	0.820	0.796	0.789	0.767	0.759	0.739	0.731	0.713	0.703	0.688	0.677
0.790	0.783	0.754	0.747	0.721	0.712	0.689	0.680	0.659	0.649	0.630	0.620
0.748	0.741	0.707	0.699	0.668	0.660	0.633	0.624	0.599	0.589	0.568	0.558
0.699	0.691	0.652	0.644	0.610	0.601	0.570	0.561	0.534	0.524	0.500	0.490
0.641	0.633	0.590	0.581	0.543	0.534	0.501	0.491	0.463	0.453	0.428	0.418
0.571	0.561	0.516	0.506	0.468	0.458	0.425	0.415	0.386	0.376	0.352	0.342
0.486	0.475	0.431	0.420	0.383	0.373	0.342	0.332	0.305	0.296	0.274	0.264
0.387	0.375	0.336	0.325	0.293	0.282	0.256	0.246	0.224	0.216	0.197	0.189
0.280	0.268	0.238	0.225	0.203	0.193	0.174	0.165	0.150	0.142	0.129	0.122

ν x	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
1.00	0.500	0.480	0.400	0.383	0.323	0.309	0.264	0.251	0.216	0.206
1.05	0.309	0.292	0.241	0.227	0.190	0.179	0.151	0.142	0.122	0.114
1.10	0.159	0.147	0.121	0.112	0.094	0.086	0.073	0.067	0.058	0.053
1.15	0.067	0.061	0.050	0.045	0.038	0.034	0.029	0.026	0.022	0.020
1.20	0.023	0.020	0.017	0.015	0.012	0.011	0.009	0.008	0.007	0.006
1.25	0.006	0.006	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001
1.30	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.35	0.000	0.000	0.000	0.000						

$\sigma=0.15$

0.00	1.000	1.000	0.998	0.995	0.995	0.990	0.993	0.987	0.991	0.981
0.05	1.000	1.000	0.997	0.994	0.995	0.990	0.992	0.986	0.990	0.980
0.10	1.000	1.000	0.997	0.993	0.993	0.989	0.990	0.983	0.987	0.977
0.15	1.000	1.000	0.995	0.992	0.991	0.986	0.986	0.979	0.981	0.971
0.20	1.000	1.000	0.993	0.990	0.987	0.982	0.980	0.973	0.974	0.964
0.25	1.000	1.000	0.991	0.988	0.982	0.977	0.973	0.965	0.964	0.954
0.30	1.000	1.000	0.988	0.985	0.975	0.970	0.964	0.956	0.952	0.942
0.35	1.000	1.000	0.984	0.981	0.968	0.963	0.952	0.944	0.937	0.926
0.40	1.000	1.000	0.979	0.976	0.958	0.953	0.939	0.930	0.920	0.909
0.45	1.000	1.000	0.973	0.970	0.947	0.941	0.923	0.914	0.899	0.888
0.50	1.000	0.999	0.966	0.962	0.934	0.928	0.904	0.894	0.875	0.863
0.55	0.999	0.998	0.957	0.952	0.918	0.910	0.881	0.870	0.846	0.833
0.60	0.996	0.995	0.945	0.940	0.897	0.889	0.853	0.842	0.813	0.799
0.65	0.990	0.987	0.928	0.921	0.871	0.861	0.820	0.807	0.772	0.757
0.70	0.977	0.972	0.903	0.894	0.837	0.824	0.777	0.762	0.724	0.707
0.75	0.952	0.943	0.866	0.853	0.791	0.775	0.724	0.707	0.666	0.647
0.80	0.909	0.894	0.812	0.795	0.730	0.711	0.658	0.638	0.597	0.576
0.85	0.841	0.821	0.738	0.716	0.652	0.630	0.579	0.557	0.517	0.495
0.90	0.748	0.722	0.644	0.618	0.559	0.534	0.488	0.465	0.429	0.407
0.95	0.631	0.601	0.533	0.506	0.455	0.430	0.391	0.368	0.339	0.317
1.00	0.500	0.470	0.416	0.388	0.349	0.325	0.295	0.274	0.252	0.232
1.05	0.369	0.342	0.302	0.278	0.250	0.229	0.208	0.190	0.175	0.159
1.10	0.252	0.230	0.203	0.184	0.166	0.149	0.136	0.123	0.113	0.101
1.15	0.159	0.142	0.126	0.112	0.101	0.090	0.082	0.073	0.067	0.059
1.20	0.091	0.080	0.071	0.063	0.057	0.050	0.045	0.039	0.037	0.032
1.25	0.048	0.041	0.037	0.032	0.029	0.025	0.023	0.020	0.018	0.016
1.30	0.023	0.019	0.017	0.015	0.013	0.011	0.011	0.009	0.008	0.007
1.35	0.010	0.008	0.007	0.006	0.006	0.005	0.004	0.003	0.003	0.003
1.40	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
1.45	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000
1.50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000			

$\sigma=0.20$

0.00	1.000	1.000	0.996	0.991	0.992	0.983	0.987	0.974	0.983	0.966
0.05	1.000	1.000	0.995	0.991	0.991	0.982	0.987	0.974	0.982	0.965
0.10	1.000	1.000	0.995	0.990	0.989	0.980	0.984	0.971	0.979	0.962
0.15	1.000	1.000	0.993	0.989	0.986	0.977	0.980	0.967	0.973	0.956

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
0.179	0.170	0.149	0.141	0.124	0.117	0.105	0.098	0.088	0.083	0.075	0.070
0.099	0.092	0.080	0.075	0.066	0.061	0.054	0.050	0.045	0.042	0.037	0.035
0.046	0.042	0.037	0.033	0.029	0.027	0.024	0.022	0.019	0.018	0.016	0.014
0.018	0.016	0.014	0.012	0.011	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.006	0.005
0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000						
0.989	0.978	0.986	0.972	0.984	0.968	0.982	0.964	0.980	0.959	0.978	0.955
0.987	0.975	0.985	0.971	0.982	0.966	0.980	0.962	0.977	0.956	0.975	0.952
0.983	0.971	0.980	0.966	0.977	0.961	0.974	0.955	0.971	0.950	0.967	0.945
0.977	0.965	0.972	0.958	0.968	0.952	0.964	0.946	0.959	0.938	0.955	0.933
0.968	0.956	0.961	0.947	0.955	0.939	0.949	0.931	0.943	0.923	0.938	0.915
0.956	0.943	0.947	0.933	0.939	0.912	0.931	0.912	0.923	0.902	0.915	0.892
0.941	0.928	0.929	0.915	0.919	0.902	0.908	0.889	0.898	0.877	0.888	0.865
0.923	0.910	0.908	0.893	0.894	0.877	0.881	0.862	0.868	0.848	0.855	0.832
0.901	0.888	0.883	0.868	0.866	0.849	0.849	0.830	0.833	0.812	0.818	0.795
0.876	0.862	0.854	0.838	0.833	0.815	0.813	0.794	0.794	0.773	0.775	0.752
0.847	0.833	0.821	0.805	0.796	0.778	0.772	0.753	0.749	0.728	0.728	0.705
0.814	0.798	0.783	0.766	0.754	0.735	0.726	0.706	0.700	0.678	0.675	0.652
0.774	0.759	0.739	0.721	0.706	0.687	0.675	0.654	0.645	0.624	0.618	0.595
0.729	0.712	0.689	0.670	0.652	0.632	0.618	0.597	0.586	0.564	0.556	0.534
0.676	0.657	0.632	0.612	0.591	0.571	0.555	0.534	0.521	0.500	0.490	0.468
0.613	0.594	0.567	0.546	0.525	0.504	0.487	0.466	0.452	0.431	0.421	0.400
0.542	0.521	0.495	0.473	0.452	0.431	0.415	0.394	0.381	0.361	0.351	0.331
0.463	0.441	0.417	0.396	0.376	0.356	0.341	0.321	0.309	0.290	0.282	0.263
0.379	0.358	0.336	0.316	0.300	0.281	0.268	0.250	0.240	0.223	0.216	0.200
0.295	0.275	0.258	0.240	0.227	0.210	0.200	0.185	0.177	0.163	0.158	0.145
0.216	0.199	0.186	0.171	0.162	0.148	0.141	0.128	0.123	0.112	0.108	0.098
0.148	0.134	0.126	0.114	0.108	0.097	0.093	0.084	0.080	0.072	0.070	0.062
0.094	0.084	0.079	0.071	0.067	0.060	0.057	0.051	0.049	0.043	0.042	0.037
0.055	0.049	0.046	0.040	0.038	0.034	0.032	0.028	0.027	0.024	0.023	0.020
0.030	0.026	0.025	0.021	0.020	0.017	0.017	0.015	0.014	0.012	0.012	0.010
0.015	0.013	0.012	0.010	0.010	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005
0.007	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002
0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000						
0.979	0.958	0.975	0.950	0.971	0.942	0.968	0.935	0.964	0.927	0.960	0.920
0.978	0.957	0.974	0.949	0.970	0.941	0.966	0.933	0.961	0.925	0.958	0.917
0.974	0.953	0.969	0.944	0.964	0.935	0.959	0.927	0.955	0.918	0.950	0.910
0.967	0.946	0.961	0.936	0.955	0.926	0.949	0.916	0.943	0.907	0.938	0.897

x \ v	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c
0.20	1.000	1.000	0.991	0.986	0.982	0.973	0.974	0.960	0.966	0.948
0.25	1.000	1.000	0.988	0.983	0.977	0.967	0.966	0.952	0.955	0.937
0.30	1.000	1.000	0.985	0.979	0.970	0.960	0.956	0.942	0.942	0.924
0.35	0.999	0.999	0.980	0.974	0.961	0.951	0.944	0.929	0.927	0.907
0.40	0.999	0.998	0.974	0.968	0.951	0.940	0.929	0.913	0.908	0.888
0.45	0.997	0.995	0.966	0.959	0.938	0.925	0.911	0.894	0.885	0.864
0.50	0.994	0.991	0.956	0.947	0.921	0.907	0.889	0.870	0.858	0.836
0.55	0.988	0.983	0.942	0.931	0.900	0.884	0.862	0.841	0.827	0.802
0.60	0.977	0.969	0.923	0.909	0.874	0.855	0.830	0.807	0.789	0.763
0.65	0.960	0.948	0.897	0.879	0.841	0.819	0.790	0.765	0.745	0.716
0.70	0.933	0.916	0.861	0.840	0.799	0.773	0.743	0.715	0.694	0.663
0.75	0.894	0.872	0.815	0.789	0.747	0.718	0.687	0.656	0.635	0.602
0.80	0.841	0.813	0.757	0.726	0.685	0.652	0.623	0.590	0.570	0.536
0.85	0.773	0.739	0.686	0.651	0.614	0.578	0.552	0.517	0.499	0.464
0.90	0.691	0.653	0.606	0.568	0.535	0.498	0.475	0.440	0.425	0.391
0.95	0.599	0.558	0.518	0.479	0.451	0.416	0.396	0.363	0.351	0.319
1.00	0.500	0.460	0.427	0.390	0.368	0.334	0.319	0.289	0.279	0.251
1.05	0.401	0.364	0.338	0.305	0.288	0.258	0.248	0.221	0.214	0.190
1.10	0.309	0.276	0.257	0.228	0.217	0.192	0.184	0.162	0.158	0.138
1.15	0.227	0.199	0.187	0.164	0.156	0.136	0.131	0.114	0.111	0.096
1.20	0.159	0.137	0.129	0.112	0.107	0.092	0.089	0.076	0.075	0.064
1.25	0.106	0.090	0.085	0.073	0.070	0.059	0.058	0.049	0.048	0.040
1.30	0.067	0.056	0.053	0.045	0.043	0.036	0.035	0.029	0.029	0.024
1.35	0.040	0.033	0.032	0.026	0.026	0.021	0.021	0.017	0.017	0.014
1.40	0.023	0.019	0.018	0.015	0.014	0.012	0.011	0.009	0.009	0.008
1.45	0.012	0.010	0.010	0.008	0.008	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004
1.50	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002
1.55	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
1.60	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
1.65	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.70	0.000									

$\sigma=0.25$

0.00	1.000	1.000	0.993	0.985	0.986	0.971	0.980	0.958	0.973	0.945
0.05	1.000	1.000	0.993	0.985	0.986	0.971	0.979	0.957	0.972	0.944
0.10	1.000	0.999	0.992	0.984	0.984	0.969	0.976	0.954	0.969	0.940
0.15	1.000	0.999	0.990	0.982	0.980	0.965	0.971	0.949	0.963	0.934
0.20	0.999	0.998	0.987	0.978	0.976	0.960	0.965	0.942	0.954	0.924
0.25	0.999	0.997	0.984	0.974	0.969	0.952	0.956	0.932	0.943	0.912
0.30	0.997	0.995	0.979	0.968	0.961	0.943	0.945	0.919	0.929	0.897
0.35	0.995	0.992	0.972	0.960	0.951	0.931	0.930	0.904	0.911	0.878
0.40	0.992	0.986	0.964	0.950	0.937	0.916	0.913	0.885	0.890	0.856
0.45	0.986	0.978	0.952	0.935	0.921	0.897	0.892	0.861	0.865	0.829
0.50	0.977	0.966	0.937	0.917	0.900	0.873	0.867	0.834	0.836	0.797
0.55	0.964	0.949	0.917	0.893	0.875	0.844	0.836	0.800	0.802	0.761
0.60	0.945	0.925	0.891	0.863	0.843	0.810	0.800	0.762	0.762	0.719
0.65	0.919	0.893	0.859	0.826	0.806	0.768	0.759	0.717	0.717	0.672

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
0.958	0.936	0.950	0.924	0.942	0.913	0.935	0.901	0.927	0.891	0.920	0.880
0.945	0.923	0.935	0.909	0.925	0.896	0.916	0.882	0.907	0.870	0.898	0.858
0.929	0.907	0.917	0.890	0.905	0.874	0.893	0.859	0.881	0.844	0.870	0.830
0.910	0.887	0.895	0.868	0.880	0.849	0.865	0.831	0.851	0.814	0.838	0.798
0.888	0.864	0.869	0.841	0.850	0.819	0.833	0.799	0.816	0.779	0.800	0.760
0.861	0.836	0.838	0.810	0.817	0.785	0.796	0.762	0.777	0.739	0.758	0.718
0.830	0.804	0.803	0.774	0.778	0.746	0.755	0.719	0.732	0.695	0.711	0.671
0.794	0.766	0.763	0.732	0.735	0.701	0.708	0.672	0.683	0.645	0.659	0.620
0.752	0.722	0.718	0.686	0.686	0.652	0.656	0.621	0.629	0.592	0.604	0.565
0.704	0.673	0.666	0.634	0.632	0.598	0.600	0.565	0.571	0.535	0.544	0.507
0.649	0.617	0.609	0.576	0.573	0.538	0.540	0.505	0.510	0.474	0.483	0.446
0.589	0.555	0.547	0.513	0.510	0.476	0.477	0.442	0.447	0.412	0.419	0.385
0.523	0.489	0.481	0.447	0.445	0.411	0.412	0.379	0.383	0.350	0.356	0.324
0.453	0.419	0.413	0.380	0.378	0.346	0.347	0.316	0.320	0.290	0.295	0.266
0.382	0.350	0.345	0.314	0.312	0.283	0.284	0.256	0.259	0.233	0.237	0.212
0.312	0.282	0.279	0.251	0.250	0.224	0.225	0.201	0.204	0.181	0.185	0.164
0.246	0.220	0.218	0.194	0.194	0.171	0.173	0.152	0.155	0.136	0.140	0.122
0.187	0.165	0.164	0.144	0.144	0.126	0.128	0.111	0.114	0.098	0.101	0.088
0.136	0.119	0.118	0.103	0.103	0.089	0.091	0.078	0.080	0.068	0.071	0.060
0.095	0.082	0.082	0.070	0.071	0.060	0.062	0.052	0.054	0.046	0.047	0.040
0.063	0.054	0.054	0.046	0.046	0.039	0.040	0.034	0.035	0.029	0.030	0.025
0.040	0.034	0.034	0.028	0.029	0.024	0.025	0.021	0.021	0.018	0.019	0.015
0.024	0.020	0.020	0.017	0.017	0.014	0.015	0.012	0.013	0.010	0.011	0.009
0.014	0.011	0.012	0.009	0.010	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005
0.008	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002
0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000							
0.967	0.932	0.961	0.920	0.955	0.908	0.949	0.897	0.943	0.886	0.938	0.875
0.966	0.931	0.959	0.918	0.953	0.906	0.947	0.895	0.941	0.884	0.935	0.873
0.961	0.926	0.954	0.913	0.947	0.901	0.941	0.888	0.934	0.877	0.928	0.865
0.954	0.919	0.946	0.905	0.938	0.891	0.930	0.878	0.922	0.865	0.915	0.853
0.944	0.908	0.934	0.892	0.924	0.877	0.915	0.863	0.906	0.849	0.898	0.835
0.930	0.894	0.919	0.876	0.907	0.859	0.896	0.843	0.885	0.828	0.875	0.813
0.914	0.876	0.899	0.856	0.886	0.837	0.873	0.819	0.860	0.802	0.848	0.786
0.893	0.855	0.876	0.832	0.860	0.811	0.845	0.791	0.830	0.772	0.816	0.754
0.869	0.829	0.849	0.804	0.830	0.780	0.812	0.758	0.795	0.737	0.779	0.718
0.841	0.799	0.817	0.771	0.796	0.745	0.775	0.721	0.756	0.698	0.738	0.677
0.808	0.764	0.781	0.734	0.757	0.706	0.734	0.679	0.712	0.655	0.692	0.632
0.770	0.725	0.740	0.692	0.713	0.662	0.688	0.634	0.665	0.608	0.643	0.584
0.727	0.680	0.695	0.646	0.665	0.614	0.638	0.585	0.613	0.558	0.590	0.533
0.679	0.631	0.645	0.595	0.614	0.562	0.585	0.532	0.559	0.505	0.535	0.480

v \ x	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c
0.70	0.885	0.853	0.819	0.782	0.761	0.720	0.711	0.667	0.666	0.620
0.75	0.841	0.803	0.771	0.729	0.710	0.666	0.657	0.611	0.611	0.564
0.80	0.788	0.745	0.714	0.669	0.652	0.605	0.598	0.551	0.552	0.504
0.85	0.726	0.678	0.651	0.603	0.589	0.540	0.535	0.488	0.489	0.442
0.90	0.655	0.605	0.582	0.533	0.521	0.473	0.470	0.423	0.426	0.381
0.95	0.579	0.528	0.509	0.460	0.452	0.405	0.403	0.359	0.363	0.321
1.00	0.500	0.450	0.435	0.389	0.382	0.339	0.339	0.298	0.302	0.264
1.05	0.421	0.373	0.363	0.320	0.316	0.276	0.277	0.241	0.245	0.212
1.10	0.345	0.301	0.294	0.256	0.254	0.219	0.221	0.190	0.194	0.165
1.15	0.274	0.237	0.232	0.199	0.199	0.169	0.172	0.145	0.149	0.126
1.20	0.212	0.180	0.178	0.150	0.151	0.127	0.129	0.108	0.112	0.093
1.25	0.159	0.133	0.132	0.110	0.111	0.092	0.095	0.078	0.081	0.067
1.30	0.115	0.095	0.095	0.078	0.080	0.065	0.067	0.055	0.057	0.046
1.35	0.081	0.066	0.066	0.054	0.055	0.044	0.046	0.037	0.039	0.031
1.40	0.055	0.044	0.045	0.036	0.037	0.029	0.031	0.024	0.026	0.020
1.45	0.036	0.028	0.029	0.023	0.024	0.019	0.020	0.015	0.016	0.013
1.50	0.023	0.018	0.018	0.014	0.015	0.012	0.012	0.009	0.010	0.008
1.55	0.014	0.011	0.011	0.009	0.009	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005
1.60	0.008	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003
1.65	0.005	0.003	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001
1.70	0.003	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
1.75	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
1.80	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
1.85	0.000		0.000							

$\sigma=0.30$

0.00	0.999	0.996	0.989	0.974	0.979	0.953	0.969	0.934	0.960	0.915
0.05	0.999	0.996	0.988	0.974	0.978	0.952	0.968	0.933	0.958	0.914
0.10	0.999	0.995	0.987	0.972	0.975	0.950	0.965	0.929	0.954	0.910
0.15	0.998	0.993	0.984	0.968	0.971	0.945	0.959	0.923	0.948	0.902
0.20	0.996	0.990	0.980	0.963	0.966	0.938	0.952	0.914	0.938	0.892
0.25	0.994	0.986	0.975	0.956	0.958	0.928	0.941	0.902	0.926	0.878
0.30	0.990	0.980	0.968	0.946	0.947	0.916	0.928	0.887	0.910	0.861
0.35	0.985	0.972	0.958	0.934	0.934	0.900	0.912	0.869	0.891	0.840
0.40	0.977	0.961	0.946	0.919	0.918	0.881	0.892	0.846	0.868	0.815
0.45	0.967	0.946	0.930	0.899	0.898	0.857	0.868	0.820	0.841	0.786
0.50	0.952	0.927	0.911	0.875	0.874	0.830	0.841	0.789	0.810	0.753
0.55	0.933	0.902	0.887	0.846	0.845	0.798	0.808	0.754	0.775	0.716
0.60	0.909	0.872	0.857	0.812	0.812	0.760	0.772	0.715	0.736	0.674
0.65	0.878	0.836	0.822	0.773	0.773	0.718	0.730	0.671	0.692	0.629
0.70	0.841	0.793	0.781	0.728	0.729	0.672	0.684	0.623	0.644	0.581
0.75	0.798	0.744	0.735	0.678	0.681	0.621	0.634	0.573	0.593	0.530
0.80	0.748	0.690	0.683	0.623	0.628	0.567	0.581	0.519	0.540	0.478
0.85	0.691	0.631	0.626	0.566	0.572	0.511	0.525	0.464	0.485	0.425
0.90	0.631	0.568	0.567	0.506	0.513	0.453	0.468	0.409	0.429	0.372
0.95	0.566	0.504	0.505	0.445	0.454	0.396	0.411	0.355	0.374	0.321
1.00	0.500	0.439	0.442	0.385	0.394	0.340	0.355	0.303	0.321	0.272

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
0.627	0.578	0.591	0.541	0.559	0.508	0.530	0.478	0.503	0.451	0.479	0.426
0.570	0.522	0.534	0.485	0.501	0.452	0.472	0.423	0.446	0.396	0.421	0.373
0.511	0.463	0.475	0.427	0.443	0.396	0.414	0.367	0.388	0.342	0.365	0.320
0.449	0.403	0.415	0.369	0.384	0.340	0.356	0.313	0.332	0.290	0.310	0.269
0.388	0.345	0.355	0.313	0.326	0.286	0.301	0.262	0.278	0.241	0.258	0.222
0.328	0.288	0.298	0.260	0.272	0.235	0.249	0.214	0.229	0.196	0.211	0.180
0.271	0.235	0.244	0.210	0.221	0.189	0.201	0.171	0.184	0.156	0.168	0.142
0.218	0.187	0.195	0.166	0.176	0.149	0.159	0.134	0.144	0.121	0.131	0.109
0.171	0.145	0.152	0.128	0.136	0.114	0.122	0.102	0.110	0.091	0.099	0.082
0.131	0.110	0.116	0.096	0.102	0.085	0.091	0.075	0.082	0.067	0.074	0.060
0.097	0.080	0.085	0.070	0.075	0.061	0.066	0.054	0.059	0.048	0.053	0.043
0.070	0.057	0.061	0.050	0.053	0.043	0.047	0.038	0.042	0.033	0.037	0.029
0.049	0.040	0.042	0.034	0.037	0.029	0.032	0.026	0.028	0.022	0.025	0.020
0.033	0.026	0.029	0.023	0.025	0.019	0.021	0.017	0.019	0.015	0.016	0.013
0.022	0.017	0.019	0.015	0.016	0.012	0.014	0.011	0.012	0.009	0.011	0.008
0.014	0.011	0.012	0.009	0.010	0.008	0.009	0.007	0.007	0.006	0.007	0.005
0.008	0.007	0.007	0.005	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.004	0.003
0.005	0.004	0.004	0.003	0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002
0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.951	0.898	0.942	0.881	0.934	0.865	0.926	0.850	0.918	0.835	0.910	0.821
0.949	0.896	0.940	0.879	0.932	0.863	0.923	0.847	0.915	0.833	0.908	0.818
0.945	0.891	0.935	0.874	0.926	0.857	0.917	0.841	0.909	0.826	0.900	0.811
0.937	0.883	0.926	0.864	0.916	0.847	0.906	0.830	0.897	0.814	0.888	0.799
0.926	0.871	0.914	0.851	0.902	0.832	0.891	0.815	0.881	0.798	0.871	0.782
0.911	0.855	0.898	0.834	0.885	0.814	0.872	0.795	0.860	0.777	0.849	0.760
0.893	0.836	0.878	0.813	0.863	0.792	0.848	0.772	0.835	0.752	0.822	0.734
0.872	0.813	0.854	0.788	0.837	0.765	0.821	0.744	0.805	0.723	0.791	0.704
0.846	0.786	0.826	0.759	0.806	0.735	0.788	0.712	0.772	0.690	0.756	0.670
0.817	0.755	0.794	0.726	0.772	0.700	0.752	0.676	0.734	0.653	0.716	0.632
0.783	0.720	0.757	0.690	0.734	0.662	0.712	0.637	0.692	0.613	0.673	0.591
0.745	0.681	0.717	0.649	0.692	0.620	0.669	0.594	0.647	0.570	0.627	0.548
0.703	0.638	0.674	0.606	0.647	0.576	0.622	0.549	0.600	0.524	0.579	0.502
0.658	0.592	0.627	0.559	0.599	0.529	0.573	0.502	0.550	0.478	0.528	0.455
0.609	0.544	0.577	0.510	0.548	0.481	0.522	0.454	0.498	0.430	0.477	0.408
0.557	0.493	0.525	0.461	0.496	0.431	0.470	0.405	0.447	0.382	0.425	0.361
0.504	0.442	0.472	0.410	0.443	0.382	0.418	0.357	0.395	0.335	0.374	0.315
0.449	0.390	0.418	0.360	0.391	0.334	0.367	0.311	0.345	0.290	0.325	0.271
0.395	0.340	0.366	0.312	0.340	0.287	0.317	0.266	0.297	0.247	0.278	0.230
0.342	0.291	0.315	0.266	0.291	0.244	0.270	0.224	0.251	0.207	0.234	0.192
0.292	0.245	0.267	0.223	0.245	0.203	0.226	0.186	0.209	0.171	0.194	0.158

x \ v	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c
1.05	0.434	0.376	0.381	0.327	0.337	0.287	0.301	0.254	0.270	0.227
1.10	0.369	0.316	0.322	0.273	0.283	0.238	0.251	0.209	0.224	0.186
1.15	0.309	0.261	0.267	0.223	0.233	0.194	0.205	0.169	0.182	0.149
1.20	0.252	0.210	0.217	0.179	0.188	0.154	0.164	0.134	0.145	0.117
1.25	0.202	0.166	0.172	0.141	0.149	0.120	0.129	0.104	0.113	0.090
1.30	0.159	0.129	0.134	0.108	0.115	0.092	0.099	0.079	0.087	0.068
1.35	0.122	0.097	0.102	0.081	0.087	0.069	0.075	0.059	0.065	0.051
1.40	0.091	0.072	0.076	0.060	0.065	0.050	0.055	0.043	0.048	0.037
1.45	0.067	0.052	0.056	0.043	0.047	0.036	0.040	0.030	0.034	0.026
1.50	0.048	0.037	0.040	0.030	0.033	0.025	0.028	0.021	0.024	0.018
1.55	0.033	0.025	0.027	0.021	0.023	0.017	0.019	0.014	0.016	0.012
1.60	0.023	0.017	0.019	0.014	0.015	0.011	0.013	0.010	0.011	0.008
1.65	0.015	0.011	0.012	0.009	0.010	0.007	0.008	0.006	0.007	0.005
1.70	0.010	0.007	0.008	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.005	0.003
1.75	0.006	0.004	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002
1.80	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
1.85	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
1.90	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
1.95	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$\sigma = 0.35$

0.00	0.996	0.983	0.981	0.953	0.967	0.925	0.954	0.899	0.942	0.875
0.05	0.995	0.982	0.980	0.952	0.966	0.924	0.953	0.898	0.940	0.874
0.10	0.994	0.980	0.978	0.949	0.963	0.920	0.949	0.893	0.936	0.869
0.15	0.992	0.976	0.974	0.944	0.958	0.914	0.943	0.886	0.929	0.861
0.20	0.989	0.971	0.969	0.936	0.951	0.905	0.934	0.876	0.918	0.849
0.25	0.984	0.963	0.961	0.926	0.941	0.893	0.922	0.862	0.905	0.834
0.30	0.977	0.953	0.952	0.913	0.929	0.878	0.907	0.845	0.888	0.816
0.35	0.968	0.940	0.939	0.897	0.913	0.859	0.889	0.825	0.867	0.794
0.40	0.957	0.924	0.924	0.878	0.894	0.837	0.868	0.801	0.843	0.768
0.45	0.942	0.904	0.905	0.855	0.872	0.812	0.843	0.773	0.816	0.739
0.50	0.923	0.880	0.882	0.828	0.846	0.782	0.814	0.742	0.785	0.706
0.55	0.901	0.852	0.856	0.797	0.816	0.749	0.781	0.707	0.750	0.670
0.60	0.873	0.819	0.825	0.762	0.782	0.712	0.745	0.669	0.712	0.631
0.65	0.841	0.782	0.789	0.723	0.745	0.672	0.705	0.628	0.670	0.590
0.70	0.804	0.740	0.750	0.680	0.703	0.629	0.662	0.585	0.626	0.546
0.75	0.762	0.694	0.706	0.634	0.658	0.583	0.616	0.539	0.580	0.501
0.80	0.716	0.645	0.659	0.585	0.610	0.535	0.568	0.492	0.532	0.455
0.85	0.666	0.593	0.608	0.534	0.560	0.486	0.518	0.445	0.482	0.409
0.90	0.612	0.539	0.556	0.483	0.508	0.436	0.468	0.397	0.433	0.364
0.95	0.557	0.484	0.502	0.431	0.456	0.387	0.417	0.350	0.384	0.319
1.00	0.500	0.429	0.448	0.380	0.404	0.339	0.368	0.306	0.337	0.277
1.05	0.443	0.376	0.394	0.331	0.354	0.294	0.320	0.263	0.292	0.237
1.10	0.388	0.324	0.343	0.284	0.306	0.251	0.275	0.223	0.249	0.200
1.15	0.334	0.276	0.294	0.240	0.260	0.211	0.233	0.187	0.210	0.167
1.20	0.284	0.232	0.248	0.200	0.219	0.175	0.195	0.154	0.174	0.137

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
f	f_c	t	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
0.245	0.203	0.222	0.184	0.203	0.166	0.186	0.152	0.171	0.139	0.158	0.127
0.201	0.165	0.182	0.148	0.165	0.134	0.151	0.121	0.138	0.110	0.127	0.101
0.163	0.132	0.146	0.118	0.132	0.106	0.120	0.095	0.109	0.086	0.100	0.078
0.129	0.103	0.115	0.092	0.103	0.082	0.093	0.073	0.085	0.066	0.077	0.060
0.100	0.079	0.089	0.070	0.079	0.062	0.071	0.056	0.064	0.050	0.058	0.045
0.076	0.060	0.067	0.052	0.060	0.046	0.053	0.041	0.048	0.037	0.043	0.033
0.057	0.044	0.050	0.038	0.044	0.034	0.039	0.030	0.035	0.026	0.031	0.024
0.041	0.032	0.036	0.027	0.032	0.024	0.028	0.021	0.025	0.019	0.022	0.017
0.029	0.022	0.026	0.019	0.022	0.017	0.020	0.015	0.017	0.013	0.016	0.011
0.020	0.015	0.018	0.013	0.015	0.011	0.014	0.010	0.012	0.009	0.011	0.008
0.014	0.010	0.012	0.009	0.010	0.008	0.009	0.007	0.008	0.006	0.007	0.005
0.009	0.007	0.008	0.006	0.007	0.005	0.006	0.004	0.005	0.004	0.005	0.003
0.006	0.004	0.005	0.004	0.004	0.003	0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002
0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000				
0.930	0.853	0.919	0.832	0.908	0.812	0.898	0.794	0.888	0.776	0.878	0.759
0.928	0.851	0.917	0.830	0.906	0.810	0.896	0.791	0.886	0.774	0.876	0.757
0.923	0.846	0.911	0.824	0.900	0.804	0.889	0.785	0.879	0.767	0.869	0.750
0.915	0.837	0.902	0.815	0.890	0.794	0.879	0.774	0.868	0.756	0.857	0.739
0.903	0.824	0.889	0.801	0.876	0.780	0.864	0.760	0.852	0.741	0.841	0.723
0.888	0.808	0.873	0.784	0.858	0.762	0.845	0.741	0.832	0.722	0.820	0.703
0.870	0.788	0.853	0.763	0.837	0.740	0.822	0.718	0.808	0.698	0.794	0.679
0.847	0.765	0.828	0.739	0.811	0.715	0.795	0.692	0.779	0.671	0.765	0.652
0.821	0.738	0.801	0.711	0.781	0.685	0.764	0.662	0.747	0.641	0.731	0.621
0.792	0.708	0.769	0.679	0.748	0.653	0.729	0.629	0.711	0.607	0.695	0.587
0.758	0.674	0.734	0.645	0.712	0.618	0.692	0.593	0.673	0.571	0.655	0.550
0.722	0.637	0.696	0.607	0.673	0.580	0.651	0.555	0.631	0.533	0.613	0.512
0.682	0.598	0.655	0.567	0.630	0.540	0.608	0.515	0.587	0.492	0.568	0.472
0.639	0.556	0.611	0.526	0.586	0.498	0.563	0.474	0.542	0.451	0.523	0.431
0.594	0.513	0.566	0.482	0.540	0.456	0.517	0.431	0.495	0.410	0.476	0.390
0.547	0.468	0.519	0.439	0.493	0.413	0.470	0.389	0.449	0.368	0.430	0.349
0.499	0.423	0.471	0.395	0.446	0.370	0.423	0.347	0.402	0.327	0.384	0.309
0.451	0.378	0.423	0.352	0.399	0.328	0.377	0.307	0.357	0.288	0.339	0.271
0.403	0.335	0.376	0.309	0.353	0.287	0.332	0.268	0.313	0.250	0.296	0.235
0.356	0.292	0.330	0.269	0.308	0.249	0.289	0.231	0.271	0.215	0.256	0.201
0.310	0.252	0.287	0.231	0.266	0.213	0.248	0.197	0.232	0.182	0.218	0.170
0.267	0.215	0.246	0.196	0.227	0.180	0.211	0.165	0.196	0.153	0.184	0.142
0.227	0.181	0.208	0.164	0.191	0.150	0.177	0.137	0.164	0.126	0.153	0.117
0.190	0.150	0.173	0.136	0.159	0.123	0.146	0.112	0.135	0.103	0.125	0.095
0.157	0.123	0.143	0.110	0.130	0.100	0.119	0.091	0.110	0.083	0.101	0.076

x \ v	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c	f	f _c
1.25	0.238	0.191	0.206	0.165	0.181	0.143	0.160	0.126	0.143	0.111
1.30	0.196	0.156	0.169	0.133	0.147	0.115	0.130	0.101	0.115	0.089
1.35	0.159	0.125	0.136	0.106	0.118	0.091	0.104	0.079	0.091	0.069
1.40	0.127	0.098	0.108	0.083	0.093	0.071	0.081	0.062	0.071	0.054
1.45	0.099	0.076	0.084	0.064	0.072	0.055	0.063	0.047	0.055	0.041
1.50	0.077	0.058	0.065	0.049	0.055	0.041	0.048	0.035	0.042	0.031
1.55	0.058	0.043	0.049	0.036	0.042	0.031	0.036	0.026	0.031	0.022
1.60	0.043	0.032	0.036	0.027	0.031	0.022	0.026	0.019	0.023	0.016
1.65	0.032	0.023	0.026	0.019	0.022	0.016	0.019	0.014	0.016	0.012
1.70	0.023	0.016	0.019	0.014	0.016	0.011	0.013	0.010	0.012	0.008
1.75	0.016	0.011	0.013	0.009	0.011	0.008	0.009	0.007	0.008	0.006
1.80	0.011	0.008	0.009	0.006	0.008	0.005	0.006	0.004	0.005	0.004
1.85	0.008	0.005	0.006	0.004	0.005	0.004	0.004	0.003	0.004	0.002
1.90	0.005	0.003	0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002
1.95	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001
2.00	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
2.05	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
2.10	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000		0.000	
2.15	0.001	0.000	0.000		0.000					
2.20	0.000									

$\sigma=0.40$

0.00	0.988	0.956	0.968	0.918	0.951	0.884	0.934	0.853	0.919	0.825
0.05	0.987	0.955	0.967	0.917	0.950	0.883	0.933	0.852	0.918	0.824
0.10	0.985	0.952	0.965	0.913	0.946	0.879	0.929	0.847	0.913	0.818
0.15	0.981	0.946	0.960	0.907	0.940	0.871	0.922	0.839	0.905	0.810
0.20	0.976	0.938	0.953	0.897	0.931	0.861	0.912	0.828	0.894	0.798
0.25	0.969	0.928	0.943	0.885	0.920	0.848	0.899	0.814	0.880	0.783
0.30	0.959	0.915	0.931	0.870	0.906	0.831	0.883	0.796	0.862	0.765
0.35	0.948	0.898	0.917	0.852	0.889	0.812	0.864	0.775	0.842	0.743
0.40	0.933	0.879	0.899	0.831	0.869	0.789	0.842	0.752	0.818	0.718
0.45	0.915	0.856	0.878	0.806	0.846	0.763	0.817	0.724	0.791	0.690
0.50	0.894	0.830	0.854	0.779	0.819	0.734	0.788	0.694	0.760	0.660
0.55	0.870	0.801	0.827	0.748	0.789	0.702	0.756	0.662	0.727	0.626
0.60	0.841	0.768	0.796	0.714	0.756	0.667	0.722	0.626	0.691	0.591
0.65	0.809	0.732	0.761	0.677	0.720	0.630	0.684	0.589	0.652	0.554
0.70	0.773	0.692	0.724	0.637	0.681	0.590	0.644	0.550	0.611	0.515
0.75	0.734	0.650	0.683	0.595	0.640	0.549	0.602	0.509	0.569	0.475
0.80	0.691	0.606	0.640	0.552	0.596	0.507	0.558	0.468	0.526	0.435
0.85	0.646	0.560	0.595	0.508	0.551	0.464	0.514	0.426	0.481	0.394
0.90	0.599	0.513	0.548	0.463	0.505	0.421	0.469	0.385	0.437	0.355
0.95	0.550	0.466	0.500	0.418	0.459	0.378	0.424	0.345	0.393	0.316
1.00	0.500	0.418	0.453	0.374	0.413	0.337	0.379	0.306	0.351	0.279
1.05	0.450	0.372	0.405	0.331	0.368	0.297	0.336	0.268	0.310	0.244
1.10	0.401	0.328	0.359	0.290	0.324	0.259	0.295	0.233	0.270	0.211
1.15	0.354	0.286	0.315	0.251	0.283	0.223	0.256	0.200	0.234	0.181
1.20	0.309	0.246	0.273	0.216	0.244	0.191	0.220	0.170	0.200	0.153

0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>	<i>f</i>	<i>f_c</i>
0.128	0.099	0.116	0.089	0.105	0.080	0.096	0.072	0.088	0.066	0.081	0.060
0.103	0.078	0.092	0.070	0.084	0.063	0.076	0.057	0.069	0.051	0.063	0.047
0.081	0.061	0.073	0.054	0.065	0.049	0.059	0.044	0.054	0.039	0.049	0.036
0.063	0.047	0.056	0.042	0.051	0.037	0.045	0.033	0.041	0.030	0.037	0.027
0.048	0.036	0.043	0.032	0.038	0.028	0.034	0.025	0.031	0.022	0.028	0.020
0.036	0.027	0.032	0.023	0.029	0.021	0.026	0.018	0.023	0.016	0.021	0.015
0.027	0.020	0.024	0.017	0.021	0.015	0.019	0.013	0.017	0.012	0.015	0.010
0.020	0.014	0.017	0.012	0.015	0.011	0.013	0.009	0.012	0.008	0.011	0.007
0.014	0.010	0.012	0.009	0.011	0.008	0.010	0.007	0.008	0.006	0.008	0.005
0.010	0.007	0.009	0.006	0.008	0.005	0.007	0.005	0.006	0.004	0.005	0.004
0.007	0.005	0.006	0.004	0.005	0.004	0.005	0.003	0.004	0.003	0.004	0.002
0.005	0.003	0.004	0.003	0.004	0.002	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002
0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001
0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
0.001	0.000	0.000		0.000							
0.000											
0.905	0.799	0.891	0.775	0.878	0.753	0.866	0.732	0.855	0.712	0.844	0.694
0.903	0.797	0.889	0.773	0.876	0.751	0.864	0.730	0.852	0.710	0.841	0.692
0.898	0.792	0.884	0.768	0.871	0.745	0.858	0.724	0.846	0.704	0.835	0.686
0.889	0.783	0.875	0.759	0.861	0.736	0.848	0.714	0.835	0.694	0.823	0.676
0.877	0.771	0.862	0.746	0.847	0.722	0.833	0.701	0.820	0.681	0.808	0.662
0.862	0.755	0.845	0.729	0.830	0.706	0.815	0.684	0.801	0.663	0.788	0.644
0.843	0.736	0.825	0.710	0.809	0.685	0.793	0.663	0.779	0.642	0.765	0.623
0.821	0.713	0.802	0.687	0.784	0.662	0.768	0.639	0.752	0.618	0.738	0.599
0.795	0.688	0.775	0.660	0.756	0.636	0.739	0.613	0.722	0.591	0.707	0.572
0.767	0.659	0.745	0.632	0.725	0.606	0.707	0.583	0.689	0.562	0.674	0.542
0.735	0.628	0.712	0.600	0.691	0.575	0.672	0.551	0.654	0.530	0.637	0.510
0.700	0.595	0.676	0.566	0.654	0.541	0.634	0.518	0.616	0.496	0.599	0.477
0.663	0.559	0.638	0.531	0.616	0.506	0.595	0.483	0.576	0.462	0.559	0.442
0.624	0.522	0.598	0.494	0.575	0.469	0.554	0.446	0.535	0.426	0.517	0.407
0.583	0.484	0.557	0.456	0.533	0.432	0.512	0.410	0.493	0.390	0.475	0.372
0.540	0.445	0.514	0.418	0.491	0.394	0.470	0.373	0.451	0.354	0.433	0.336
0.497	0.406	0.471	0.380	0.448	0.357	0.427	0.337	0.409	0.318	0.392	0.302
0.453	0.366	0.428	0.342	0.406	0.320	0.386	0.301	0.367	0.284	0.351	0.269
0.410	0.328	0.385	0.305	0.364	0.285	0.345	0.267	0.327	0.251	0.312	0.237
0.367	0.292	0.344	0.270	0.324	0.251	0.305	0.235	0.289	0.220	0.274	0.207
0.326	0.256	0.304	0.237	0.285	0.219	0.268	0.204	0.253	0.191	0.239	0.179
0.286	0.223	0.266	0.205	0.248	0.190	0.233	0.176	0.219	0.164	0.206	0.153
0.249	0.192	0.231	0.176	0.215	0.162	0.200	0.150	0.188	0.139	0.176	0.130
0.215	0.164	0.198	0.150	0.183	0.137	0.170	0.126	0.159	0.117	0.149	0.109
0.183	0.138	0.168	0.126	0.155	0.115	0.144	0.106	0.134	0.097	0.125	0.090

$x \backslash v$	0.0		0.1		0.2		0.3		0.4	
	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c	f	f_c
1.25	0.266	0.210	0.234	0.183	0.209	0.161	0.187	0.143	0.169	0.128
1.30	0.227	0.176	0.199	0.153	0.176	0.134	0.157	0.119	0.142	0.106
1.35	0.191	0.147	0.166	0.127	0.147	0.111	0.131	0.098	0.117	0.087
1.40	0.159	0.121	0.138	0.104	0.121	0.090	0.107	0.079	0.096	0.070
1.45	0.130	0.098	0.113	0.084	0.098	0.073	0.087	0.063	0.077	0.056
1.50	0.106	0.078	0.091	0.067	0.079	0.058	0.070	0.050	0.062	0.044
1.55	0.085	0.062	0.072	0.053	0.063	0.045	0.055	0.039	0.048	0.034
1.60	0.067	0.048	0.057	0.041	0.049	0.035	0.043	0.030	0.038	0.026
1.65	0.052	0.037	0.044	0.032	0.038	0.027	0.033	0.023	0.029	0.020
1.70	0.040	0.028	0.034	0.024	0.029	0.020	0.025	0.017	0.022	0.015
1.75	0.030	0.021	0.026	0.018	0.022	0.015	0.019	0.013	0.016	0.011
1.80	0.023	0.016	0.019	0.013	0.016	0.011	0.014	0.009	0.012	0.008
1.85	0.017	0.012	0.014	0.010	0.012	0.008	0.010	0.007	0.009	0.006
1.90	0.012	0.008	0.010	0.007	0.009	0.006	0.007	0.005	0.006	0.004
1.95	0.009	0.006	0.007	0.005	0.006	0.004	0.005	0.003	0.004	0.003
2.00	0.006	0.004	0.005	0.003	0.004	0.003	0.004	0.002	0.003	0.002
2.05	0.004	0.003	0.004	0.002	0.003	0.002	0.003	0.002	0.002	0.001
2.10	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001
2.15	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
2.20	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000
2.25	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000		0.000	
2.30	0.001	0.000	0.000		0.000					
2.35	0.000									

ON THE INFLUENCE OF THE ATMOSPHERIC VIBRATION
ON THE BRIGHTNESS DISTRIBUTION ALONG THE DISK OF PLANET

I. K. KOVAL, A. A. RUBASHEVSKY, E. G. YANOVITSKY

Summary

The problem on the corrections of the observed brightness distribution along the disk of planet because of the distortion due to the atmospheric vibration is discussed. The basic equations concerning this problem are given. An influence of the split's width, taken for obtaining of the vibration disk, on the atmospheric vibration (instrument's function) if the last one is the Gauss function is estimated. It was shown that the fairly narrow split did not effect the instrument's function. The problem is, may the process of distortion be stationary or not. The detailed tables of the observed brightness distribution if the true distribution is known are given.

