

Л. О. Соколенко

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для студентів університетів спеціальності
014 Середня освіта (Математика)

Частина 1

Чернігів – 2020

Рецензенти:

Акуленко І. А. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Семенець С. П. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики та вищої математики Державного університету «Житомирська політехніка»

Кірман В. К. – кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри природничо-математичної освіти комунального закладу вищої освіти «Дніпровська академія неперервної освіти» Дніпропетровської обласної ради»

Соколенко Л. О.

С 59 Наукові основи шкільного курсу математики :
Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.

ISBN

УДК 378:[373.5.013.3:51

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольні-сміслові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 1 містить матеріал по змістових модулях № 1, № 2.

Посібник призначений для студентів університетів, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

*Рекомендовано до друку вченою радою Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка
(Протокол № 5 від 26 грудня 2019 року)*

ISBN

© Соколенко Л. О., 2020

ПЕРЕДМОВА	5
-----------------	---

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ	10
--------------------------------	----

МОДУЛЬ 1. Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри,
алгебри і початків аналізу

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 1.

Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики	18
---	----

Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики	18
--	----

Тема 2. Теорія множин і шкільна математика. Відповідності і відношення у шкільній математиці	22
--	----

Тема 3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел	35
---	----

Тема 4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики	43
---	----

Тема 5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики	53
---	----

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 2.

Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання	64
--	----

Тема 6. Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики.....	64
---	----

Тема 7. Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО.....	86
---	----

Тема 8. Застосування похідної в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу	99
---	----

Тема 9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу	120
Тема 10. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри 9-го класу, в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання	129
КОМПЛЕКСИ ЗАВДАНЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	135
Комплекс завдань самостійної роботи по змістовому модулю 1	135
Комплекс завдань самостійної роботи по змістовому модулю 2.....	136
ЛІТЕРАТУРА	137

Проблема професійної підготовки вчителя математики на даному етапі залишається досить актуальною, оскільки математична освіта має особливе значення у системі загальної освіти.

До складових системи професійної підготовки вчителя математики відносять: *змістову* (оволодіння спеціальними математичними знаннями); *технологічну* (оволодіння прийомами та методами навчання математики); *особистісну* (наявність особистісних якостей, необхідних для фахівця зазначеної професії) [1.24, с. 125].

Кожна з цих складових відіграє вагомую роль у підготовці майбутнього вчителя, до того ж всі вони взаємопов'язані між собою.

Навчальна дисципліна «Наукові основи шкільного курсу математики (НОШКМ)», яка належить до дисциплін професійної і практичної підготовки студентів галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), призначена для одержання ними дієвих знань та оволодіння професійними компетентностями, які виходять за межі шкільного курсу математики.

Вивчаючи «НОШКМ» студенти магістранти оволодівають *спеціальними, методологічною, логічною, процедурною* компетентностями. Під *спеціальними компетентностями* розуміють володіння власне професійною діяльністю на достатньо високому рівні, здатність проектувати свій подальший професійний розвиток [1.1, с. 231].

Вчитель математики, який володіє спеціальними компетентностями: 1) демонструє знання основ математичних дисциплін, історії їх виникнення і розвитку, має уявлення про сучасні тенденції розвитку математики; 2) володіє професійною мовою предметної галузі знань, вміє коректно висловлювати та аргументовано обґрунтовувати положення предметної галузі знань; 3) володіє системою основних математичних структур і аксіоматичним методом; 4) розуміє роль і місце математики у системі наук її загальнокультурне значення; 5) володіє змістом і методами елементарної математики; 6) розуміє логіку розвитку шкільного курсу математики [1.7, с. 18].

Методологічна компетентність передбачає наявність уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач. Володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, уміння розв'язувати типові математичні задачі свідчать про сформованість, відповідно, *логічної* та *процедурної* компетентностей [1.9, с. 5].

Навчальна дисципліна «НОШКМ» відноситься до методико-математичних дисциплін. Вона читається у багатьох ЗВО, серед яких Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова [1.8], Херсонський державний університет [1.23], Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка [1.5], Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка [1.19], [1.20] та ін. за авторськими програмами викладачів. Завдяки викладанню цієї дисципліни фундаментальна математична підготовка стає теоретичною основою шкільного курсу математики.

Робочі програми згаданого курсу та аналогічних до нього курсів «Математика шкільного курсу математики», «Теоретичні основи взаємозв'язку шкільного курсу алгебри і початків аналізу та вузівського курсу математичного аналізу», «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» [1.12], [1.13] певним чином відрізняються.

У Чернігівському державному педагогічному інституті імені Т. Г. Шевченка (нині Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка) методичний спецкурс «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» на початку 90-х років минулого століття читав завідувач кафедри математичного аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Я. А. Ройтберг. Слід зазначити, що курс давав можливість випускникам фізико-математичного факультету осмислити зміст шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору математичного аналізу [1.12].

Подальша ґрунтовна робота, пов'язана з *теоретичними основами* елементарної математики, проводилась колективом викладачів фізико-математичного факультету Чернігівського педагогічного інституту імені Т. Г. Шевченка, а саме, професором Вивальнюком Л. М., професором Боровиком В. Н., доцентом Мурачем М. М., доцентом Соколенком О. І. Результатом цієї співпраці став навчальний посібник «Курс математики» [1.6]. В посібнику розглянуто фундаментальні математичні поняття «множина», «відповідність», «відношення»; математичні твердження та їх структура; алгоритми; цілі невід'ємні числа; розширення поняття про число; рівняння, нерівності, функції; елементи геометрії; величини та їх вимірювання.

Питанням, пов'язаним з теоретичними основами шкільного курсу математики, також присвячені посібники [1.4], [1.11] та ін. Матеріал викладений у цих посібниках використовується викладачами під час читання названих курсів.

Питання розвитку у майбутніх вчителів *науково-теоретичного мислення* під час навчання курсу «Елементарна математика» розглядаються в роботах професора Семенця С. П. [1.3], [1.10].

Методика і технологія організації та проведення окремих занять дисципліни «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» розроблена і представлена нами у статтях [1.13]–[1.18].

Предмет навчальної дисципліни «НОШКМ» – шкільна математика, яка розглядається з позицій загальних ідей та понять математики, логіки та дидактики математики, що складають її основу.

Курс «НОШКМ» має надати можливість студентам – майбутнім учителям математики усвідомити свій предмет з точки зору вищої математики, об'єднати розрізнені факти, систематизувати їх на основі загальних ідей математики, логіки та дидактики математики.

Мета курсу – систематизація знань студентів на основі загальних математичних, логічних та дидактичних ідей, які покладено в основу сучасного шкільного курсу математики.

Основні завдання курсу:

1. Проаналізувати курс шкільної математики з точки зору фундаментальних математичних ідей: множина, відповідність, відображення, відношення, математична структура, алгебраїчна операція тощо.

2. Показати розвиток понять числа, функції, величини, алгоритму, фігури, які відіграють важливу роль у курсі сучасної шкільної математики.

3. Розкрити роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі.

4. Сприяти усвідомленню студентами змісту теоретико-множинного, алгебраїчного, логічного аспектів у викладі основ шкільної математики.

5. Вчити встановлювати зв'язки між різними розділами математики, виконувати аналіз шкільної математики з точки зору відображених у ній фундаментальних математичних ідей та понять.

6. Вчити здійснювати порівняльний аналіз означень ключових математичних понять шкільного курсу математики з загальнонауковими.

7. Формувати готовність майбутнього вчителя математики викладати шкільний курс на належному рівні науковості та строгості, здійснювати навчальний процес за будь-яким альтернативним діючим підручником.

Міждисциплінарні зв'язки.

Курс «*Наукові основи шкільного курсу математики*» тісно пов'язаний з курсами алгебри та теорії чисел, математичного аналізу, математичної логіки, геометрії, елементарної математики, методики навчання математики в закладах середньої освіти (ЗСО) та закладах вищої освіти (ЗВО).

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати:

- зміст і методи елементарної та вищої математики;
- методи математичного дослідження;
- сучасні тенденції розвитку математики;

- роль і місце математики у системі наук та її загальнокультурне значення;
- логіку розвитку шкільного курсу математики;
- історію виникнення основних математичних понять шкільного курсу математики;
- означення математичних понять та підходи до формування математичних понять, які використовуються під час навчання шкільного курсу математики та фундаментальних математичних дисциплін;
- роль і місце найважливіших понять сучасної математики у шкільному курсі;
- основні теореми курсу вищої математики, які використовуються та можуть бути використані при побудові курсу шкільної математики;
- зміст теоретико-множинного, алгебраїчного, логічного аспектів у викладі основ шкільної математики;
- систему основних математичних структур та аксіоматичний метод;
- спеціальну мову, яка використовується у шкільній математиці.

вміти:

- аналізувати шкільну математику з точки зору вищої математики;
- встановлювати зв'язки між різними розділами математики;
- аналізувати логічні основи шкільної математики;
- конкретно висловлювати та аргументовано обґрунтовувати положення окремих математичних дисциплін;
- підбирати приклади та контрприкладів для ілюстрації застосувань окремих теорем курсу вищої математики;
- розв'язувати вправи та задачі, використовуючи фундаментальні математичні поняття та методи і способи окремих дисциплін курсу вищої математики.

Курс «Наукові основи шкільного курсу математики» (НОШКМ) складається з двох частин: 1. «Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу»; 2. «Наукові основи шкільного курсу геометрії».

Складовими першої частини курсу «Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу» є такі **змістові модулі**:

Змістовий модуль № 1. Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.

Змістовий модуль № 2. Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання.

До другої частини курсу «Наукові основи шкільного курсу геометрії» відноситься ***змістовий модуль № 3*** Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання.

В цілому курс складається з 15-ти тем. Опрацювання цих тем відбувається під час проведення лекційних та практичних занять. Частина матеріалу виноситься на самостійне опрацювання студентів.

Навчально-методичний посібник «Наукові основи шкільного курсу математики» складається з двох частин. У частині 1 викладено матеріал, пов'язаний з науковими основами шкільних курсів «Математика», «Алгебра», «Алгебра і початки аналізу».

Розглянуті у посібнику теми містять: мету навчання, завдання, змістову структуру теми, **контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичні завдання реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи), відповіді та вказівки до контрольно-сміслових запитань та завдань репродуктивного характеру, зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру, список літератури до кожної з тем курсу.

Після розглянутих тем 1-10 у першій частині посібника представлені **комплекси завдань самостійної роботи** по змістовим модулям №1, №2.

В кінці посібника представлено **список літератури**, який містить науково-методичні роботи, що мають безпосереднє відношення до кожної з тем курсу та статті присвячені методиці та технології організації і проведення окремих занять курсу.

До цього списку літератури також включені чинні навчальні програми з математики для закладів середньої освіти та шкільні підручники, які використовуються під час опрацювання окремих тем курсу.

Серед **контрольно-сміслових запитань і завдань репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичних завдань реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи) є такі, що опрацьовуються в аудиторії, використовуючи певні вказівки, та запитання і завдання, призначені для самостійної роботи студентів. Запитання та завдання, призначені для самостійної роботи студентів мають відповідні позначення біля їх номерів (°).

Використання цього посібника надасть можливість майбутньому вчителю продовжити вивчення окремих тем курсу «Методика навчання математики» на більш ґрунтовному рівні.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Акуленко І. А., професору Семенцю С. П., доценту Кірману В. К. за цінні поради під час підготовки рукопису посібника до друку.

Л. О. Соколенко.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

Модуль 1.

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНИХ КУРСІВ МАТЕМАТИКИ, АЛГЕБРИ, АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 1.

Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики

Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики.

Про методологію математики. Предмет математики та її характерні риси. Основні етапи розвитку математики (Період зародження математики. Математика сталих величин. Математика змінних величин. Сучасний період розвитку математики). Математичні методи пізнання. (Математика і дійсність. Математичні моделі дійсності. Абстракція ототожнення та ідеалізація у математиці). Аксіоматичний метод у математиці.

Тема 2. Теорія множин і шкільна математика. Відповідності і відношення у шкільній математиці. Розвиток теорії множин. Основні поняття теорії множин. Місце теми в програмі. Вимоги до математичної підготовки учнів. Порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими. З'ясування методичних особливостей системи задач, призначених для вивчення елементів теорії множин у шкільному та вузівському курсах математики. Створення такої системи. Аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Вивчення властивостей згаданих відповідностей і відношень у вузівському та ШКМ. Методика навчання: множин та операцій над ними, відношень включення, еквівалентності, порядку.

Тема 3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел. Розвиток арифметики в історії математики. Основні поняття арифметики. Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1-4 класи. Математика 5-9 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Основні напрями повторення,

систематизації, поглиблення уточнення і розширення відомостей про натуральні числа в курсі математики 5-6 класів. Особливості та відмінності у формуванні поняття про число, читанні та записуванні багатоцифрових чисел, зображенні натуральних чисел на координатному промені, порівнянні натуральних чисел на різних ступенях навчання (курс математики початкової школи, курс математики 5-6 класів, вузівський курс математики). Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел. Їх застосування в курсі математики початкової та основної школи. Алгебраїчні основи змістової лінії «Числа». Основні алгебраїчні операції шкільного курсу математики. Різні підходи до вивчення їх основних властивостей. Формування обчислювальних навичок. Подільність натуральних чисел. Властивості та ознаки. Найбільший спільний дільник (НСД) та найменше спільне кратне (НСК). Спільне та відмінне у вивченні цього матеріалу у шкільному та вузівському курсах математики.

Тема 4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики. Виникнення та основні етапи розвитку дробів. Розширення поняття числа в історії математики. Місце теми в програмі для загальноосвітньої школи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Аналіз навчальних програм *фундаментальних математичних* дисциплін «Лінійна алгебра», «Алгебра і теорія чисел», «Числові системи» та *фахових* дисциплін «Елементарна математика», «Методика навчання математики в основній школі». Виділення основних понять теми. Аналіз введення і формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики. Методика навчання арифметичних дій над дробами, цілими, раціональними та дійсними числами в школі та її теоретичні основи. Створення тестових завдань, призначених для перевірки знань студентами теоретичних основ навчання окремих питань даної теми.

Тема 5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики. Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Математика 10-11 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Виникнення і розвиток поняття рівняння (нерівність) в історії математики та їх застосування. Теоретичний матеріал з курсу математичної логіки, пов'язаний з висловлювальними формами та предикатами. Розгляд різних підходів до означення поняття рівняння (нерівності), що передбачають використання математичних понять (виразу, функції) та понять математичної логіки (висловлювальної форми, предиката). Відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей) та їх властивості. Розгляд основних (типових) перетворень рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 2.

Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання

Тема 6. Наукові основи змістової лінії «Функції» шкільного курсу математики. Напрями які існують у тлумаченні поняття «функція» та їх суть. Означення поняття «функція» у діючих шкільних підручниках. Поняття «відображення» з яким ототожнюється поняття функції в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Означення поняття «відповідність» між множинами у різних посібниках для ЗВО. Функціональна відповідність. Використання методу доцільних задач перед введенням поняття «відображення». Математичні поняття, пов'язані з поняттям «відображення», введення яких ця задача робить більш наочним та сприяє їх формуванню. Формулювання означення ін'єктивної, сюр'єктивної, бієктивної функції на теоретико-множинній мові. Приклади. Обернене відображення. Означення, приклад, умова існування. Ототожнення понять «функція» та «відображення» у курсі вищої математики. Різні означення функції у вузівських підручниках та посібниках, родові поняття, відмінності у означеннях. Сталі, рівні (тотожні функції). Приклади. Числова функція у вузівському курсі вищої математики, родові поняття. Схожість у означеннях шкільного та вузівського курсів математики. Найпоширеніші способи задання функції у шкільному курсі математики та у вузівському курсі вищої математики.

Основні елементарні функції. Класифікація функцій за їх будовою (арифметичні операції над функціями, оборотна та обернена функції, складна функція або *суперпозиція* чи *композиція* функцій). Класифікація функцій за їх властивостями (обмежені й необмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні функції). Класи елементарних функцій. Спільні підходи та особливості які існують під час навчання елементарних функцій у шкільному курсі математики та вузівському курсі вищої математики.

Тема 7. Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО. Формування уявлення про границю функції в точці в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу. Визначеність функції та існування границі функції в точці. Роль прикладів та контрприкладів у формуванні понять. Означення границі функції в точці (за Коші, через існування околу, за Гейне). Геометрична інтерпретація. Теореми про границі функцій (про єдиність границі, арифметичні властивості границь, граничний перехід в нерівності, границю проміжної функції) та їх застосування. Односторонні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Формування

уявлення про неперервність функції в точці в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу. Поняття неперервності функції в точці (еквівалентні означення). Теореми про функції, неперервні в точці. Одностороння неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку (про обмеженість функції, існування найбільшого і найменшого значень функції, перетворення функції на нуль, проміжне значення) та їх застосування.

Тема 8. Застосування похідної в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу. Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка. Найбільше і найменше значення функції. Поняття опуклості і точок перегину диференційованої на інтервалі $(a; b)$ функції. Дослідження функції на опуклість і точки перегину. Асимптоти графіка функції. Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці. Застосування похідної до розв'язування задач прикладного змісту. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей. Застосування похідної до доведення нерівностей.

Тема 9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу. Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Методика вивчення первісної. Невизначений інтеграл та його властивості. Приклади задач, що приводять до поняття інтеграла. Методика вивчення визначеного інтеграла. Його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл. Застосування інтеграла до розв'язування прикладних задач.

Тема 10. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри 9-го класу, в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання. Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Перестановки. Розміщення. Комбінації. Методика введення основних понять теорії ймовірностей. Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події (класичне, статистичне означення ймовірності). Методика використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій. Аксиоми теорії ймовірностей. Операції над подіями. Ймовірність суми подій. Незалежність подій. Умовна ймовірність. Ймовірність добутку подій. [Геометрична ймовірність та її застосування до розв'язування задач]. Випадкові події. Елементи математичної статистики.

Модуль 2. НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3.

*Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури»
та «Геометричні величини» курсу геометрії
загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання*

Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників. Місце теми в програмі курсу геометрії 10 класу та в курсі проєктивної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Суть способу паралельного проєктування. Основні властивості паралельного проєктування та наслідки з них. Побудова зображення плоских фігур (кола, трикутника та його комбінацій з колом, квадрата, ромба та їх комбінацій з колом та ін.). Побудова зображень просторових фігур (многогранників, тіл обертання). Переріз многогранників площинами. Метод слідів січних площин. Метод внутрішнього проєктування.

Тема 12. Координати і вектори у просторі. Місце теми в програмі курсу геометрії 11 класу та курсу аналітичної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Методика вивчення координат у просторі: відстань між точками, поділ відрізка у даному відношенні, координати середини відрізка. Методика вивчення векторів у просторі. Дії над векторами. Скалярний добуток. Векторний та мішаний добуток, їх геометричні інтерпретації. Застосування методу координат і векторів до розв'язування геометричних задач.

Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.

Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин. Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин). Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими. Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Площина у просторі. Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне

рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінації геометричних тіл. Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення многогранників та тіл обертання у стереометрії. Методика формування основних понять тем «Многогранники», «Тіла обертання» в шкільному курсі стереометрії. Співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника. Теорема Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника та її застосування до класифікації правильних многогранників. Сфера, циліндр та конус як простіші поверхні обертання. Перерізи тіл обертання площинами та дотичні площини до тіл обертання. Зображення комбінацій просторових фігур.

Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії. Аналіз діючих програм шкільного курсу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії. Виділення геометричні величини, які розглядають у курсі геометрії 10-11 класів. Розгляд поняття «об'єм тіла» та його основних властивостей. Формування понять «рівноскладені тіла» та «рівновеликі тіла», встановлення взаємозв'язку між цими поняттями. Різні математичні та методичні підходи до виведення формул об'ємів та площ поверхонь: а) об'єму прямокутного паралелепіпеда; б) об'єму трикутної піраміди; в) площ поверхонь тіл обертання. Класифікація задач за рівнем складності залежно від профільної диференціації: на обчислення відстаней, величини кутів, площі поверхні, об'єму. Методика навчання учнів розв'язування задач на визначення об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		лекції	практ	лаб	інд	С.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1. Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу						
<i>Змістовий модуль № 1. Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики</i>						
Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики.	8	-	-			8
Тема 2. Теорія множин і шкільна математика. [Відповідності і відношення у шкільній математиці].	11	2	2			7
Тема 3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел.	9	1	2			6
Тема 4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики.	10	1	2			7
Тема 5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.	13	2	4			7
Разом за змістовим модулем 1	51	6	10			35
<i>Змістовий модуль № 2. Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання</i>						
Тема 6. Наукові основи змістової лінії «Функції» шкільного курсу математики.	13	2	4			7
Тема 7. Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО.	10	2	2			6
Тема 8. Застосування похідної в ШКМ та курсі математичного аналізу.	13	2	4			7
Тема 9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі	13	2	4			7

математичного аналізу.						
1	2	3	4	5	6	7
Тема 10. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання.	10	2	2			6
Разом за змістовим модулем 2	59	10	16			33
Усього годин за модуль 1	110	16	26			68
Модуль 2. Наукові основи шкільного курсу геометрії						
<i>Змістовий модуль № 3. Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання</i>						
Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.	10	1	2			7
Тема 12. Координати і вектори у просторі.	10	1	2			7
Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.	12	2	2			8
Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінацій геометричних тіл.	11	2	2			7
Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.	12	2	2			8
Разом за змістовим модулем 3	55	8	8			37
Усього годин за модуль 2	55	8	8			37
Всього:	165	24	36			105

Модуль 1.

**НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНИХ КУРСІВ МАТЕМАТИКИ,
АЛГЕБРИ, АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ**

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 1.

Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики

Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики

Мета навчання: окреслити коло питань, які утворюють предмет методології математики; розглянути предмет математики та характерні риси математичної науки; згадати основні етапи розвитку математики, математичні методи пізнання та розкрити роль аксіоматичного методу у математиці; ознайомити студентів з предметом, метою і основними завданнями навчання курсу «НОШКМ».

Завдання.

- 1) Згадати питання, які утворюють предмет методології математики, методологічні знання загальнонаукового та конкретно наукового рівня.
- 2) Використовуючи відповідну наукову та навчально-методичну літературу, визначити предмет математики та її характерні риси.
- 3) Згадати основні етапи розвитку математики.
- 4) Охарактеризувати математичні методи пізнання.
- 5) Розкрити роль аксіоматичного методу у математиці.
- 6) Ознайомитись з предметом, метою і основними завданнями навчання курсу «НОШКМ».

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Про методологію математики. Методологічні знання загальнонаукового та конкретно наукового рівня.	[1] – [3], [5]
2	Предмет математики та її характерні риси.	[4], [5]
3	Основні етапи розвитку математики (Період зародження математики. Математика сталих величин. Математика змінних величин. Сучасний період розвитку математики).	[4], [5]
4	Математичні методи пізнання. (Математика і дійсність. Математичні моделі дійсності. Абстракція ототожнення та ідеалізація у математиці).	[5]
5	Аксіоматичний метод у математиці.	[5]
6	Предмет, мета і основні завдання навчання курсу «НОШКМ».	



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

- 1°. Які тлумачення поняття «методологія» існують?
- 2°. Які види та рівні методології існують?
- 3°. Що є предметом математики? Які характерні риси математичної науки виділяють?
- 4°. Охарактеризуйте основні етапи розвитку математики.
- 5°. Які методи математичного пізнання дійсності існують? Охарактеризуйте метод побудови математичних моделей явищ, що вивчаються.
- 6°. Що таке абстракція ототожнення та ідеалізація? Як їх використовують у математиці?
- 7°. В чому полягає суть аксіоматичного методу? Наведіть приклади його використання в математиці.



Відповіді та вказівки до контрольно-сміслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. [3, с. 11]. **Методологія** – це вчення про структуру, логічну організацію, методи і засоби діяльності.

2°. [3, с. 22–23]. Розглядаючи методологію як вчення про організацію творчої людської діяльності виокремлюють такі **види методології**: 1) методологія ігрової діяльності; 2) методологія навчальної діяльності; 3) методологія трудової, професійної діяльності, яка включає в себе методологію практичної діяльності як у сфері матеріального, так і у сфері духовного виробництва, а також методологію науки (наукової діяльності).

Виокремлюють **4-ри рівні** методології: 1) філософський, 2) загальнонауковий, 3) конкретно науковий, 4) технологічний.

До *філософського* рівня методології математики відносять питання про: предмет математики; співвідношення математики і реального світу; структуру та істинність математичного знання; проблеми обґрунтування математики; місце математики в системі наук тощо [3, с. 25].

Загальнокультурна методологія – це теоретичні концепції, прийняті до всіх або до більшості наукових дисциплін [3, с. 34].

Конкретно наукова методологія розглядає сукупність теоретичних положень, закономірностей, методичних підходів, що застосовуються в тій чи іншій спеціальній науковій галузі [3, с. 36].

Технологічна методологія дозволяє використовувати найефективніші методи, способи і засоби дослідження [3, с. 37].

3°. [3, с. 25–27], [5, с. 6–7].

Математика, як і інші науки, вивчає навколишній світ, об'єкти цього світу і відношення між ними. Однак на відміну від природничих наук вона вивчає форми і відношення матеріального світу абстрагуючись від їх змісту.

До *характерних рис математичної науки* відносять:

1) Математика вивчає абстраговані властивості предметів – *числа*, а не сукупності предметів, *геометричні фігури*, а не реальні тіла.

2) Основним методом одержання математичних результатів є *логічний висновок*, який не потребує експериментальної перевірки.

3) *Абстракції*, що виникають у математиці, розвиваються від абстракцій, що безпосередньо узагальнюють властивості реальних предметів, до абстракцій такого високого рівня, як топологічні простори, загальні алгебраїчні системи, алгоритми і т.д.

4) Математика має властивість універсальної використовуваності в інших галузях.

5) Математика займає особливе положення у системі наук – її не можна віднести ні до гуманітарних ні до природничих наук. Вона дає ті основні поняття, які використовуються майже в усіх науках. Серед цих понять «множина», «структура», «система», «ізоморфізм» і т.д. [5].

4°. [1], [2], [5, Гл.1, § 2], [4, с. 560–564].

5°. [5, с. 21–25]. Однією з найважливіших задач людського пізнання є вивчення об'єктів матеріального світу, їх властивостей, взаємовідношень, взаємодій для того щоб використовувати це знання для розв'язування практичних задач.

На різних етапах розвитку математики в ній створювалися специфічні методи, які характеризували процеси математичного осмислення певних фрагментів різноманітних просторових форм і якісних відношень матеріального світу.

Роль математики в природознавстві полягає в тому, що вона пропонує достатньо загальні і достатньо чіткі моделі для вивчення оточуючої дійсності.

Одним з найбільш ефективних методів математичного пізнання дійсності є побудова *математичних моделей* досліджуваних явищ.

Математична модель – це наближений опис усякого класу явищ зовнішнього світу, виражений з допомогою математичної символіки. Побудова математичних моделей є методом пізнання зовнішнього світу, прогнозування явищ та управління різними процесами.

Метод *математичного моделювання* широко застосовуються в різноманітних науках: фізиці, хімії, біології, економіці, соціології. Під час побудови математичних моделей завжди доводиться нехтувати тими або іншими сторонами дійсності, завдяки чому одержана модель є дещо не еквівалентною явищу яке вивчається. Лише порівняння з дійсністю результатів, одержаних шляхом вивчення моделі, дозволяє робити висновки про якість цієї моделі, межі її застосування. Кожну модель можна застосовувати лише в певних умовах.

6°. [5, с. 25–28]. Побудова будь-якої математичної моделі починається з абстрагування. Процес абстрагування у математиці має свої характерні особливості. Найбільш розповсюдженими видами абстракції в математиці є *абстракція ототожнення* (узагальнююча) та *ідеалізація*.

Абстракція ототожнення починається з встановлення відношення еквівалентності у множині яка досліджується. Під час встановлення відношення еквівалентності в деякій множині еквівалентні об'єкти ототожнюються за деякою властивістю, яка абстрагується від решти властивостей цих об'єктів і стає самостійним абстрактним поняттям.

Так відношення рівності множин об'єднує в один клас всі скінченні множини, між якими можна встановити бієктивну відповідність. У наслідок цього ототожнення від множин, які належать одному й тому ж класу еквівалентності, абстрагується їх загальна властивість, що характеризує цей клас, властива всім множинам цього класу і не властива ніяким іншим множинам. Ця властивість є самостійним поняттям натурального числа, яке виражає *чисельність* множин даного класу.

Поряд з абстракцією ототожнення під час побудови математичних моделей дійсності широко застосовується і такий специфічний прийом абстрагування, як *ідеалізація*.

Під *ідеалізацією* розуміють створення нових понять, які наділені не лише властивостями, відокремленими від реальних прообразів, але й уявними властивостями, відсутніми у вихідних об'єктах. Це робиться для того, щоб вивчаючи ідеалізовані об'єкти полегшити вивчення і реальних прообразів. Багато вихідних понять різних галузей математики представляють собою такі ідеальні поняття. Ніде у природі не зустрічається «геометрична точка», що не має розмірів, але спроба побудови геометрії, яка не використовує це поняття, не приведе до успіху. Так само не можливо розвивати геометрію без таких ідеалізованих понять, як пряма лінія, площа, куля і т.д.

В геометрії до одержаних після ідеалізації геометричних фігур застосовують в подальшому абстракцію ототожнення. Так, ототожнюючи всі кулі, одержують загальне поняття кулі, ототожнюючи всі трикутники – загальне поняття трикутника і т.д.

Якщо пригадати, що основні поняття математики виходять з реального світу, то навряд чи доводиться дивуватись їх корисності під час дослідження цього світу. І розумна ідеалізація реальних об'єктів і процесів – це потужний метод пізнання дійсності.

7°. [5, с. 25–28]. Суть *аксіоматичного методу* полягає в тому, що деякі поняття та відношення, що їх пов'язують, вважають невизначеними (вихідними), а всі наступні поняття і їх властивості виводять з вихідних шляхом точних означень та логічних міркувань.

Першою спробою такого викладу математичної дисципліни була книга Евкліда «Начала». Аксіоматичну побудову має арифметика цілих

невід’ємних чисел здійснена у 1891 році італійським математиком Д. Пеано.

На сучасному етапі аксіоматичний метод став одним з основних під час побудови математичних моделей дійсності. Важливу роль у сучасній математиці відіграє аксіоматика *групи*, аксіоматика метричного та векторного просторів та ін. Російським математикам С. Бернштейну та А. Колмогорову належить заслуга аксіоматичного опису теорії ймовірностей. Десятки інших галузей сучасної математики також розвиваються на аксіоматичній основі.



Література

1. Бевз В. Г. Історія математики. Харків : Вид. гр. «Основа», 2006. 176 с.
2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. 312 с.
3. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
4. Математическая энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, т. 3 : Коопод. Москва : «Советская Энциклопедия», 1982. С. 560–564.
5. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин.-тов / Виленкин Н. Я., Дудничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.

Тема 2. Теорія множин і шкільна математика.

Відповідності і відношення у шкільній математиці

Мета навчання: визначити місце та роль фундаментальних математичних понять множина, відповідність, відношення у ШКМ, сприяти усвідомленню студентами змісту теоретико-множинного аспекту у викладі основ ШКМ, вчити здійснювати порівняльний аналіз означень понять шкільного курсу з загальнонауковими.

Завдання.

- 1) Провести аналіз Державного стандарту базової й повної загальної середньої освіти (освітня галузь «математика»), навчальних програм з математики для основної та старшої школи та визначити місце множин (числових, точкових) та понять пов’язаних з ними.
- 2) Навести приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.
- 3) Дослідити виникнення і розвиток *теорії множин* в історії математики.
- 4) Зробити *порівняльний аналіз* викладу теоретичного матеріалу, пов’язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими.

З'ясувати, які *поняття теорії множин* вивчаються в шкільному курсі математики? Чим відрізняються методи введення та формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики?

5) З'ясувати за рахунок вивчення яких понять та їх властивостей відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики.

6) Підібрати систему задач, в розв'язуванні яких множини та операції над ними відіграють першорядну роль, та розробити методику навчання учнів (студентів) їх розв'язування. З'ясувати методичні особливості задач, створеної системи.

7) Провести аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Розглянути відношення включення множин, відношення еквівалентності, відношення порядку у шкільній математиці та у вузівському курсі математики.

8) Повторити властивості відношень, які вивчаються в вузівському курсі математики та з'ясувати, які властивості мають відношення ШКМ.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Розвиток теорії множин. Основні поняття теорії множин.	[1]-[10]
2	Місце теми в програмі. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.4], [2.6], [2.7]
3	Порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими.	[3.16], [3.25] – [3.28], [2], [6]
4	З'ясування методичних особливостей системи задач, призначених для вивчення елементів теорії множин у шкільному та вузівському курсах математики. Створення такої системи.	[3.16], [3.25] – [3.28], [1], [2], [6], [10]
5	Аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Вивчення властивостей згаданих відповідностей і відношень у вузівському та ШКМ.	[2.4], [2.6], [2.7], [2], [6], [3.16], [3.23] – [3.28]
6	Методика навчання: - множин та операцій над ними, - відношення включення, - відношення еквівалентності, - відношення порядку	[2], [4], [6], [7], [9], [3.16], [3.23] – [3.28]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Яке місце займають множини та операції над ними у шкільному курсі математики? Проаналізуйте зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів (очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів), зазначені у діючих шкільних програмах з математики для основної та старшої школи.

2. Наведіть приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.

3°. З дослідженнями яких вчених пов'язані виникнення і розвиток теорії множин?

4. Які поняття теорії множин вивчаються в шкільному курсі математики? Які методи використовуються під час введення та формування згаданих понять? Наведіть приклади.

5. Чим відрізняються методи введення та формування цих понять у вузівському курсі математики?

6°. За рахунок вивчення яких понять та їх властивостей відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики?



Відповіді та вказівки до контрольно-сміслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. Аналіз навчальних програм з математики для основної та старшої школи.

Множини та операції над ними є виокремленою темою курсу алгебри 8 класу, який призначений для класів з поглибленим вивченням математики.

Згідно з програмою [2.4] зміст навчального матеріалу містить такі питання:

Тема 2. МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ З НИМИ	
Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів	Зміст навчального матеріалу
пояснює поняття: множина, елемент множини, множини натуральних, цілих і раціональних чисел, взаємно однозначна відповідність, рівнопотужні множини, нескінченна множина; формулює означення: підмножини, порожньої множини, об'єднання і перерізу множин; теорему про кількість елементів множини, яка є об'єднанням двох скінченних множин; розв'язує вправи, що передбачають застосування вивченого матеріалу, зокрема символіки теорії множин.	<i>Множина. Елемент множини. Порожня множина. Переріз, об'єднання і різниця множин. Підмножина. Круги Ейлера. Числові множини. Взаємно однозначна відповідність між елементами множин. Рівнопотужні множини. [Рівнопотужність множин точок інтервала і прямої]. Нескінченні множини. [Зліченні множини].</i>

У старшій профільній школі множини та операції над ними вивчають в 10 класі, під час навчання теми 1 «Функції. Многочлени. Рівняння і нерівності» курсу алгебри і початків аналізу на профільному рівні. Згідно з програмою профільного рівня [2.6] зміст навчального матеріалу включає питання:

Тема 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ	
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Учень (учениця): зображує на діаграмах або числовій прямій об'єднання і переріз множин та ілюструє поняття підмножини; формулює означення підмножини, об'єднання і перерізу множин; знаходить об'єднання і переріз числових множин	Множини, операції над множинами.

2. Приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.

Математичні поняття, які вивчають у загальноосвітній школі, природно групуються у множини.

1) В курсі математики 5-6 класів розглядаються різні множини, що складаються з **натуральних чисел**: множини парних і непарних чисел, множини кратних та дільників даного натурального числа, множини простих і складених чисел і т.д. Усі ці множини є підмножинами множини $\mathbf{N}$ натуральних чисел. Тому можна сказати, що множина $\mathbf{N}$ є універсальною множиною для арифметики.

2) У шкільному курсі математики вивчаються **числові множини**. При цьому відбувається поступове розширення множини натуральних чисел N , а саме $N \subset N_0 \subset Q_+ \subset Q \subset R \subset C$. Під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики розглядають множину C комплексних чисел.

До найбільш важливих **прикладів числових множин**, які розглядаються у шкільному курсі відносяться: а) з кожним рівнянням $F_1(x) = F_2(x)$ пов'язані множина $X = X_1 \cap X_2$, де X_1, X_2 – області визначення виразів $F_1(x)$, $F_2(x)$ і множина T чисел, що задовольняють це рівняння – **множина його розв'язків**; б) нерівності виду $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a < x < b$ задають **числові проміжки**; в) підмножини множини $\mathbf{R}$ дійсних чисел, а саме множини $\mathbf{Q}$ – **раціональних чисел** та $\mathbf{I}$ – **ірраціональних чисел**; г) у тригонометрії під час розв'язування нерівностей ми зустрічаємось з об'єднанням нескінченної сукупності проміжків; д) множина значень аргументу функції f – **область**

визначення функції f , яку позначають $D(f)$; е) множина значень функції f – **область значень функції f** , яку позначають $E(f)$.

Приклад. Розв'язок нерівності $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ є об'єднанням проміжків
$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right).$$

3) **Точкові множини.** Точки площини задаються двома координатами, і тому плоским множинам відповідають множини, які складаються з пар дійсних чисел.

Точкові множини, які вивчаються в шкільному курсі математики як правило задаються кортежами дійсних чисел.

Приклад. Трикутник ABC з вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ задається кортежем із шести дійсних чисел $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Коло радіуса R , з центром у точці $C(a, b)$ задається кортежем з трьох чисел (a, b, R) і т.д.

Кожній просторовій геометричній фігурі відповідає деяка множина трійок дійсних чисел.

До точкових множин, які розглядаються в шкільному курсі відносяться: 1) множина точок площини (простору) – **геометрична фігура**; 2) **геометричні місця точок (ГМТ** – множина точок площини (простору), яким притаманна певна властивість).

3°. З історії виникнення і розвитку теорії множин: [6, с. 31], [8, с. 198–200].

Виникнення і розвиток теорії множин пов'язані з дослідженнями *нескінченних множин*, засновником яких був видатний німецький математик Георг Кантор (1845-1918). Перші праці вченого зустріли опір з боку багатьох сучасних математиків, оскільки вважалось, що нескінченність ніколи не увійде до складу математичних понять.

Проте **канторова теорія множин** розвивалася. У 70-80-х роках XIX ст. Г. Кантор встановив, що серед нескінченних множин є безліч *нерівнопотужних* між собою множин і що всі нескінченні множини також можна розбити на класи *рівнопотужних* множин. У результаті дістали узагальнення поняття *натурального числа* на випадок нескінченних множин у вигляді поняття *кардинального числа* [6, с. 31].

Зокрема у 1874 році Г. Кантором була доведена нееквівалентність множин раціональних та дійсних чисел. Через декілька років (1878 р.) в його працях було введено загальне поняття *потужності множини*, розглянуті основні відображення та порівняння множин і доведена *рівнопотужність* множини точок *лінійного континуума* та точок *n -вимірному многовиді*.

Систематична розробка теорії множин була завершена Кантором в наступні п'ять років (1879 р.). При цьому він ввів поняття *граничної точки, довільної множини, приклад досконалої множини*, яка у 1883 році одержала його ім'я (*канторова досконала множина*), висловив *континуум гіпотезу* і т.п.

Побудована Кантором загальна теорія потужностей множин, відображень, операцій над множинами, властивостей впорядкованих множин склала в майбутньому основний зміст *абстрактної теорії множин* [8, с. 198–200].

4. [3.16, § 1], [3.23, §2], [3.27, Р1, §1], [3.24, §1], [3.28, §1], [3.25, §1].

Методичні особливості навчання **понять теорії множин**, що вивчаються в шкільному курсі математики 8-го та 10-го класів.

Тема «*Множини, операції з ними*» курсу алгебри 8-го класу, згідно з чинною програмою для поглибленого вивчення математики [2.4], містить численні математичні поняття, до яких відносяться наступні:

- множина, елемент множини, рівні множини, одноеlementна та порожня множини, підмножина, власна підмножина, переріз, об'єднання множин, різниця множин;
- скінченна та нескінченна множини, взаємно однозначна відповідність між множинами, потужність множин, рівнопотужні множини, зліченна множина, незліченна множина.

Тема «*Множини, операції над множинами*», курсу алгебри і початків аналізу 10-го класу, що вивчається на профільному рівні згідно з чинною програмою [2.6], містить першу частину згаданих вище понять.

До первісних понять відносяться: множина, елемент множини, належить множині.

Описово вводяться поняття множина, одноеlementна множина, скінченна, нескінченна множина, потужність [3.16], [3.27]. Решта зазначених понять означаються. Більшість понять вводяться конкретно-індуктивним методом.

Приклад. [3.16, с. 29]. Перед введенням поняття *підмножина* розглядають множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. З цієї множини виокремлюють ті її елементи, які є парними цифрами. Отримують множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ усі елементи якої є елементами множини A . Далі формулюють таке означення.

Означення. Множину B називають *підмножиною* множини A , якщо кожний елемент множини B є елементом множини A .

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A » або «множина A містить множину B »).

5. Методи введення та формування окремих згаданих понять у шкільному та вузівському курсах математики дещо відрізняються, а саме:

5.1. Існує відмінність у означенні поняття *власна підмножина*. В означенні, яке дається у шкільному підручнику алгебри для 8-го класу [3.16] не зазначається, що підмножина B повинна бути не порожньою:

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 31]	«Курс математики» [6, с. 6]
Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають <i>власною підмножиною</i> множини A .	Означення. Підмножина B множини A називається <i>власною підмножиною</i> або <i>правильною частиною</i> множини A , якщо B є <u>непорожня множина</u> і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B . $\emptyset$ і сама множина – <i>невласні підмножини</i> .

5.2. Питання *взаємно однозначної відповідності* між елементами множин та *рівнопотужності* множин розглядають, у відповідності до нині діючої програми для поглибленого вивчення математики [2.4], під час навчання курсу алгебри 8 класу. Розгляд цих питань у шкільному курсі має свої методичні особливості порівняно з розглядом у курсі «Вища математика». Конкретизуйте сказане за вказаною літературою.

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 41–46]	Курс «Вища математика» [2, с. 13–14]
1) Конкретно індуктивний підхід до введення поняття <i>взаємно однозначна відповідність</i> між множинами A і B : Приклад 1 (скінченні множини) [3.16, с. 41]. Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.	1) Абстрактно-дедуктивний підхід до введення понять: <i>відповідність</i> між непорожніми множинами A і B ; <i>еквівалентні множини</i> (синонім «рівнопотужні»); <i>взаємно однозначна відповідність</i> .
2) Означення [3.16, с. 42]. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A , то кажуть, що між множинами A і B встановлено <i>взаємно однозначну відповідність</i> .	2) Означення (через декартів добуток) [2, с. 13]. <i>Відповідністю</i> між непорожніми множинами A і B називають будь-яку сукупність $C \subset A \times B$. При цьому, якщо $(a; b) \in C$, то кажуть, що елемент b відповідає елементу a .

3) Неможливість встановлення взаємно однозначної відповідності між скінченною множиною та її власною підмножиною.	3) Приклад 3 [2, с. 13]. Якщо $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, то $A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3)\}$. Відповідністю між цими множинами може бути множина $C = \{(1; 2), (1; 3)\}$ або множина $D = \{(1; 2), (2; 2)\}$, або якась інша підмножина декартового добутку $A \times B$.
4) Приклад 2 (нескінченні множини) [3.16, с. 46]. Між множинами N і Z ($N \subset Z$) можна встановити взаємно однозначну відповідність.	4) Означення [2, с. 13]. Множини A і B називають еквівалентними і пишуть $A \sim B$, якщо існує така відповідність між цими множинами, коли кожному елементу множини A відповідає один елемент множини B , а кожний елемент множини B – одному елементу з множини A . Таку відповідність називають взаємно однозначною .
5) Означення [3.16, с. 46]. Дві множини називають рівнопотужними , якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.	5) Приклад 4 [2, с. 14]. Множина $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ всіх натуральних чисел та множина $M = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ всіх парних чисел є еквівалентними, оскільки відповідність $C = \{(n; 2n) : n \in N\}$ є взаємно однозначною між множинами N і M .

5.3. У шкільному курсі алгебри поняття *скінченної* та *нескінченної множини* строго не означаються, а вводяться описово: «Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів – то **нескінченною**. Порожню множину називають скінченною».

У вузівському курсі вищої математики поняття «скінченна множина» означається як множина еквівалентна множині $\{1, 2, \dots, n\}$ [2, с. 14].

5.4. Існує певна відмінність в означенні **злічених** множин у ШКМ та курсі «Вища математика».

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 47]	Курс «Вища математика» [2, с. 14]
Означення [3.16, с. 47]. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають зліченною множиною .	Означення [2, с. 14]. Якщо множина A еквівалентна множині натуральних чисел N , то її називають зчисленною і кажуть, що вона має зчисленну кількість елементів , або зчисленну потужність .

Елементи зчисленної множини можна занумерувати всіма натуральними числами, тобто множину A можна записати у вигляді $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, де елементи x_k попарно різні.

Приклад 7. [2, с. 14] Зчисленними є множини N – натуральних чисел, Z – цілих чисел, Q – раціональних чисел.

6°. Поняття та їх властивості, за рахунок яких відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики.

Під час навчання теми «Множини, операції над множинами» у шкільному курсі алгебри і початків аналізу 10 класу, на профільному рівні, учень має навчитись *зображати* на діаграмах або числовій прямій *об'єднання* і *переріз множин* та *ілюструвати* поняття підмножини. Вивчаючи цю тему учень також повинен вміти *формулювати* означення підмножини, об'єднання і перерізу множин; *знаходити* об'єднання і переріз числових множин.

Виклад теоретичного матеріалу у діючих шкільних підручниках курсу алгебри і початків аналізу 10 класу, серед яких підручники Мерзляка А. Г. та ін. [3.27] та Неліна Є. П. [3.28] дещо відрізняється. У підручнику [3.28] вводяться поняття *різниці множин*, *доповнення множини*, *універсальна множина U* , *доповнення множини до універсальної множини*.

У вузівському курсі крім цього вивчаються **основні властивості операцій об'єднання, перерізу, доповнення.**

Нехай U – деяка універсальна множина, $P(U)$ – множина всіх її підмножин. Операції об'єднання, перерізу й доповнення над елементами з $P(U)$ мають такі властивості:

1. $(A')' = A' = A$ – закон подвійного доповнення.
2.
$$\left. \begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \right\} \text{ – переставна (комутативна) властивість.}$$
3.
$$\left. \begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned} \right\} \text{ – сполучна (асоціативна) властивість.}$$
4.
$$\left. \begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \right\} \text{ – розподільна (дистрибутивна)}$$

властивість.

5.
$$\left. \begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned} \right\} \text{ – закони де Моргана.}$$

6. $A \cup A' = U.$
7. $A \cup \emptyset = A.$
8. $A \cup A = A.$
9. $A \cap \emptyset = \emptyset.$
10. $A \cap A = A.$

Властивості 2, 6-9 впливають безпосередньо з означень. Справедливості властивостей 3-5 доводять методом подвійного включення [6, с. 13–14].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1°. Підберіть систему задач призначену для засвоєння теми «Множини і відношення між ними». У якості прикладів візьміть множини зі шкільної математики. Які завдання відмінні від завдань діючих шкільних підручників слід включити до неї? У чому особливості цих нетипових завдань?

2. Виокремте типи задач, призначених для навчання теми «Операції над множинами». З'ясуйте, чи всі типи задач вузівського курсу математики, пов'язані з цією темою, розглядають в школі. Якщо ні, то запропонуйте приклади таких задач та методику навчання їх розв'язування.

3. Підберіть приклади окремих задач ШКМ під час розв'язування яких, явно чи неявно, використовується поняття декартового добутку множин. Запропонуйте методику навчання учнів їх розв'язування.

4°. Згадайте означення відповідності між елементами двох множин через декартів добуток множин, наочні способи подання відповідностей, образи і прообрази елементів і множин. На окремих прикладах продемонструйте застосування цього матеріалу у ШКМ.

5°. Згадайте означення відношення. Наведіть приклади основних відповідностей і відношень, які мають місце у шкільному курсі математики. Розгляньте властивості цих відношень.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь на завдання 2. До системи задач, призначених для навчання в курсі алгебри і початків аналізу теми «Операції над множинами» відносяться такі типи задач: а) задачі на знаходження об'єднання та перетину множин, заданих описово, або за допомогою характеристичної властивості; б) задачі на знаходження різниці множин; в) текстові задачі на знаходження числа елементів об'єднання 2-х або 3-х множин; г) визначення множин між якими встановлено взаємно-однозначну відповідність та ін. У вузівському курсі математики цю систему задач доповнюють задачі інших типів, серед яких задачі на доведення рівностей *методом подвійного включення* та задачі, розв'язування яких передбачає використання внутрішньопредметних зв'язків.

Представимо деякі з них.

Задача 1. [7, с. 9, № 17 (1,5)]. Довести дані твердження або показати, що вони є неправильними: 1) $A \cup B = A \cup (B/A)$; 5) $A \cup (B/C) = (A \cup B)/C$.

Для доведення таких тверджень використовується метод подвійного включення.

Задача 2. [7, с. 9, № 16 (1-4)]. Нехай $A = \{x : f(x) = 0\}$, $B = \{x : \varphi(x) = 0\}$. Як виразити через ці множини множину розв'язків:

- 1) рівняння $f(x)/\varphi(x) = 0$; 2) системи $\begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0; \end{cases}$
 3) рівняння $f(x)\varphi(x) = 0$ 4) рівняння $f(x)/(f^2(x) + \varphi^2(x)) = 0$?

Відповідь на завдання 3.

Задача 3. [1, с. 36 № 3.7]. Складіть всі дробі, чисельниками яких є числа з множини $M = \{2, 3, 4\}$, а знаменниками – числа з множини $K = \{5, 7\}$.

Розв'язання. Розглядаючи дріб як упорядковану пару чисел (чисельник, знаменник), дістанемо дробі – елементи декартового добутку множин M і K : $M \times K = \{(2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,5), (4,7)\}$ або

$M \times K = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7} \right\}$. Кількість дробів дорівнює

$$n(M \times K) = n(M) \cdot n(K) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Відповідь на завдання 4 [6, §1.3, п. 1.3.1-1.3.4].

Відповідь на завдання 5 [6, §1.3, п. 1.3.8-1.3.10].

Основні відповідності і відношення у шкільному курсі математики та їх властивості.

Різні відповідності і відношення вивчаються у шкільному курсі математики. Розглянемо найбільш важливі з них.

Під час вивчення поняття множини найбільш важливими є відповідність належності «елемент a належить множині A », $a \in A$ і відношення включення «множина X є підмножиною множини Y », $X \subset Y$. Перерізом відношення включення і оберненого до нього відношення є відношення рівності множин (якщо $X \subset Y$ і $Y \subset X$, то $X = Y$).

У будь-якій множині, що вивчається в школі, визначено відношення рівності елементів і протилежне до нього відношення – нерівності елементів. У числових множинах відношення нерівності $x \neq y$ є об'єднанням відношень порядку $x < y$ і $x > y$ (якщо $x \neq y$, то $x < y$ або $x > y$), які взаємно обернені і несумісні, тобто не можуть виконуватися одночасно. Поряд з цими відношеннями строгого порядку в числових множинах розглядаються відношення і нестрогого порядку $x \leq y$ і $x \geq y$.

У множині натуральних чисел визначений ряд відношень, які не мають місця у довільних числових множинах: *відношення подільності* $x:y$ (x ділиться на y), «*взаємної простоти*» x взаємно просте з y .

Образом числа x при відношенні подільності є сукупність дільників цього числа, а повним прообразом числа y при цьому ж відношенні сукупність всіх кратних цього числа. Відношення *подільності* має властивості антисиметричності та транзитивності і тому є відношенням нестрогого порядку.

Багато прикладів відповідностей і відношень дає геометрія. На множині всіх геометричних фігур визначені відношення *рівності* та *подібності*. Обидва ці відношення є відношеннями еквівалентності. Між множиною X точок і множиною Y геометричних фігур має місце відношення *належності* і протилежне йому відношення *неналежності*.

Між множиною прямих та множиною площин у просторі існують *відповідності* «перетинає», «паралельна», «перпендикулярна».

Завдання. У наступній таблиці 1 представлено ряд відношень, що мають місце у ШКМ. Які властивості мають ці відношення? Заповніть таблицю.

Таблиця 1

Множина	Відношення	Рефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричність	Транзитивність	Зв'язність
М – довільна	$a = b$						
М – довільна	$a \neq b$						
N	$a:b$						
R	$a > b$						
R	$a \geq b$						
R	$a < b$						
R	$a \leq b$						
Прямі	$a \parallel b$						
Прямі	$a \perp b$						
Площини	$\alpha \parallel \beta$						
Площини	$\alpha \perp \beta$						
Кола	Дотик						
Кола	Концентричність						

Відношення еквівалентності у арифметиці та алгебрі. Багато з відношень, які розглядались у попередньому пункті відносяться до відношень еквівалентності (рівність та подібність геометричних фігур, паралельність прямих, концентричність кіл).

Відношення «вираз x має те ж числове значення, що і вираз y » у множині числових виразів є відношенням *еквівалентності*. Воно визначає розбиття всієї множини числових виразів на класи еквівалентності, які складаються з виразів, що мають одне й те ж числове значення.

Два вирази зі змінними називаються *тотожно рівними*, якщо при будь-яких значеннях змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють один одному. Відношення *тотожної рівності* є еквівалентністю.

Поняття еквівалентності відіграє важливу роль під час розв'язування рівнянь та нерівностей. Два рівняння називаються *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються. Цим визначається розбиття всієї множини рівнянь на класи еквівалентності. Під час розв'язування рівнянь переходять від одного рівняння до більш простого еквівалентного йому рівняння. Цей процес завершується одержанням рівняння виду $x = a$ або диз'юнкції таких рівнянь. Аналогічно розв'язуються нерівності.



Література

1. Боровик В. Н., Зайченко І. В., Рудник А. В. Математика. Практикум. Частина 1. Навчальний посібник. Чернівці, 2003. 126 с.
2. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
3. Жоль К. К. Вступ до сучасної логіки : навч. посібник для студ. гуманітарних спец.вищ. навч. закладів. Київ : Либідь, 2002. 151 с.
4. Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики. Москва : Просвещение, 1978. 86 с.
5. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А.И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.
6. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.
7. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч. : Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. Київ : Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
8. Рыбников К. А. История математики. Ч. 2. Москва : Изд.-во Московского ун.-та, 1963. 336 с.
9. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин-тов / Н. Я. Виленкин, К. И. Дудничев, Л. А. Калужин, А. А. Столяр. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.
10. Шунда Н. М., Томусьяк А. А., Войцеховський А. П. Вступний курс математики : Навч. посібник. Київ : Вища шк., 1990. 152 с.

Тема 3.**Логічна структура арифметики та її навчання.
Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи
до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел**

Мета навчання: визначити місце та роль фундаментальних математичних понять (множина, взаємно однозначна відповідність, відрізок N_m натурального ряду, лічба елементів, відношення еквівалентності, відношення (')) «безпосередньо йде за», відношення порядку, класи еквівалентних множин, кількісне (кардинальне) натуральне число, потужність множини, операції над множинами, порядкове натуральне число, алгебраїчна операція, бінарна операція, числове кільце, числове поле та ін.) у змістовій лінії «Числа» курсу математики основної школи, сприяти усвідомленню студентами теоретико-множинного та аксіоматичного підходів у викладі теоретичного матеріалу згаданої змістової лінії, вчити здійснювати порівняльний аналіз означень понять, вивчення властивостей, доведення законів шкільного курсу з загальнонауковими.

Завдання.

1) Провести аналіз Державного стандарту базової та повної середньої освіти (освітня галузь «Математика»), навчальних програм з математики для початкової та основної школи, визначити місце натуральних чисел і понять пов'язаних з ними.

2) Дослідити виникнення і розвиток арифметики в історії математики.

3) Навести приклади арифметичних понять, які зустрічаються в курсі математики початкової та основної школи. Пригадати, як вони вводяться у шкільному курсі.

4) Повторити суть *теоретико-множинного* та *аксіоматичного підходів* до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел (ЦНЧ), викладених в курсі математики для студентів педагогічних навчальних закладів [4] та в курсі «Числові системи» [2].

5) Зробити порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з натуральними та цілими невід'ємними числами в курсі математики початкової, основної школи з загальнонауковими. З'ясувати, який підхід (теоретико-множинний чи аксіоматичний) взято за основу у ШКМ.

6) З'ясувати, які відмінності існують у введенні арифметичних понять в шкільному та вузівському курсах математики. Навести приклади.

7) З теми «Системи числення» курсу математики [4] повторити питання: запис чисел у десятковій системі числення; алгоритми арифметичних операцій над ЦНЧ у десятковій системі числення. Знайти обґрунтування алгоритмам виконання дій у стовпчик, які розглядаються в курсі математики початкової школи та в курсі математики основної школи. Проілюструвати це на прикладах.

8) Повторити зміст фундаментальних математичних понять *алгебраїчна структура, бінарна операція, n –місна (-арна) операція, група, числове кільце, числове поле*. Пригадати, які основні алгебраїчні операції, пов’язані з числами, вивчаються в курсі математики основної школи. В чому відмінність у вивченні цих операцій у шкільному та вузівському курсах?

9) Повторити основні закони додавання та множення, їх обґрунтування у ШКМ та доведення у теоретико-множинній та аксіоматичній теорії ЦНЧ. З’ясувати, які правила з них впливають. Навести приклади.

10) Пригадати, які питання теорії подільності вивчаються в курсі математики 6 класу. З’ясувати в чому полягає відмінність вивчення цих питань у шкільному та вузівському курсах. Навести приклади, пов’язані з введенням понять, вивченням властивостей, ознак.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Розвиток арифметики в історії математики. Основні поняття арифметики.	[1], [4], [4.1]
2	Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1-4 класи. Математика 5-9 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.2], [2.3]
3	Основні напрями повторення, систематизації, поглиблення уточнення і розширення відомостей про натуральні числа в курсі математики 5-6 класів.	[7], [8], [3.2] – [3.8]
4	Особливості та відмінності у формуванні поняття про число, читанні та записуванні багатоцифрових чисел, зображенні натуральних чисел на координатному промені, порівнянні натуральних чисел на різних ступенях навчання (курс математики початкової школи, курс математики 5-6 класів, вузівський курс математики).	[7], [8], [3.1] – [3.8], [4]
5	Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід’ємних чисел. Їх застосування в курсі математики початкової та основної школи.	[2] – [4], [3.1] – [3.6]
6	Алгебраїчні основи змістової лінії «Числа». Основні алгебраїчні операції шкільного курсу математики. Різні підходи до вивчення їх основних властивостей. Формування обчислювальних навичок.	[2] – [4], [3.1] – [3.6]
7	Подільність натуральних чисел. Властивості та ознаки. Найбільший спільний дільник (НСД) та найменше спільне кратне (НСК). Спільне та відмінне у вивченні цього матеріалу у шкільному та вузівському курсах математики.	[4], [3.7], [3.8]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Згадайте історичне походження слова «арифметика». Що є предметом вивчення науки арифметика?

2°. Наведіть приклади арифметичних понять, які зустрічаються в курсі математики початкової та основної школи.

3. Згадайте два напрями розвитку поняття про натуральне число. До появи яких теорій вони привели?

4°. Проаналізуйте, як вводиться поняття «натуральне число» в курсі математики початкової школи та в курсі математики 5 класу. Розгляньте ілюстрації та записи, які представлені у підручнику з математики для 1 класу, де вивчається число «3». Поясніть які з них представлені з метою розкрити учням *порядкове* та *кількісне* значення числа «3».

5. Наведіть приклади завдань з діючих підручників з математики для 5 класу, в яких натуральні числа виступають як: а) кількісні; б) порядкові; в) міра величини; г) компонент обчислень.

6°. Згадайте суть аксіоматичного методу, систему аксіом Пеано. В чому полягає *принцип математичної індукції*? З яких частин складається доведення методом *математичної індукції*?

7°. Повторіть зміст фундаментальних математичних понять *алгебраїчна структура*, *бінарна операція*, *n-місна (-арна) операція*, *група*, *числове кільце*, *числове поле*.

8. Які з операцій є бінарними алгебраїчними?

А	Б	В	Г	Д
додавання натуральних чисел	ділення цілих чисел	віднімання цілих чисел	множення натуральних чисел	віднімання на множині натуральних чисел

9. Які з множин є групами?

А	Б	В	Г	Д
$(\mathbb{Z}, +)$	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{N}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{R}, +)$



Відповіді та вказівки до контрольно-сміслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. [4.1, с. 35-36] **Арифметика** – наука про числа й операції над ними. Вивчає кількісні відношення реального світу. Її основою є вчення про *натуральні* і *раціональні додатні* числа та правила виконання дій над ними. На початковому ступені навчання А. вивчає множину натуральних

чисел N , потім множину додатних раціональних чисел Q_+ , множину цілих чисел Z . Наступним розширенням є множини $Q \subset R \subset C$. Арифметика в своїх вищих розділах вивчає структури порядку і структури алгебраїчні (кільця, поля, групи, векторні простори тощо), тобто вона зливається вже з алгеброю.

2. [2.2], [2.3], [7, Т 1.1], [8, Р10, §10.1].

3. [4, Р3, §3.1]. Перший напрямок – через безпосереднє встановлення взаємно однозначної відповідності між скінченними множинами. Він привів до поняття натурального числа як кількісної характеристики певного класу скінченних множин. При цьому натуральне число називають **кількісним** або **кардинальним**.

Другий напрямок розвитку поняття натурального числа пов'язано з визначенням за допомогою натурального числа місця знаходження елементів будь-якої зчисленної впорядкованої множини. Він привів до поняття **порядкового натурального числа**.

Відповідно до двох функцій натурального числа існує *теоретико-множинна (кількісна)* та *порядкова (аксіоматична) теорія*.

5. а) [3.3, с. 8, № 15]. На одній ділянці ростуть 34 кущі смородини, а на другій – на 18 кущів менше. Скільки всього кущів смородини росте на двох ділянках?

б) [3.2, с. 16, № 65]. Учень виписав кілька послідовних натуральних чисел у порядку зростання. Число 27 сьоме, рахуючи як з одного так і з іншого боку. Скільки чисел виписав учень? Яке з них найменше, а яке – найбільше?

в) [3.2, с. 34, № 166]. Швидкість катера за течією 25 км/год, а власна швидкість катера 20 км/год. На скільки швидкість катера за течією більша за швидкість катера проти течії?

г) [3.2, с. 26, № 120.4]. Обчислити найзручнішим способом: $34+35+36+37+38$.

6°. [4, Р3, §3.3].

7°. [3, Р IV, §10-13], [5, Р10, §40].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

Завдання 1. Оберіть правильні відповіді.

1. Натуральне число може бути:

А	Б	В	Г	Д
від'ємним	порядковим	дробовим	кількісним	раціональним

2. Серед наведених множин виберіть рівнопотужні.

А	множина материків
Б	множина океанів
В	множина літер слова «математика»
Г	множина діагоналей шестикутника
Д	множина парних чисел, серед перших десяти чисел натурального ряду чисел

3. Нехай $a = n(A)$, $b = n(B)$. Число a менше від числа b ($a < b$) тоді і тільки тоді коли:

А	Б	В	Г
$A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ і $B_1 \neq B$, $B_1 = \emptyset$	$A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ і $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \emptyset$	$A \sim B$	$A \sim B_1$, де $B_1 \neq B$, $B_1 = \emptyset$

4. Нехай A і B – дві скінченні множини, $A \cap B = \emptyset$, $n(A) = a$, $n(B) = b$. **Сумою** цілих невід’ємних чисел a і b називають ціле невід’ємне число $c = a + b$, яке визначає:

А	Б	В	Г	Д
$n(A/B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \times B)$	$n(\overline{B_A})$	$n(A \cap B)$

5. Яке з тверджень є **неправильним** для цілих невід’ємних чисел (ЦНЧ)?

А	Добуток ЦНЧ існує і єдиний
Б	Різниця ЦНЧ існує і завжди
В	Якщо ділення двох ЦНЧ можливе, то їхня частка єдина
Г	Ділення неасоціативне
Д	Сума ЦНЧ існує і єдина

6. **Додаванням** цілих невід’ємних чисел називається така **бінарна операція**, яка кожній упорядкованій парі чисел (x, y) ставить у відповідність суму чисел $(x + y) \in N_0$ і задовольняє аксіоми:

А	Б	В	Г
$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y \neq x)$	$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y = y + x)$	$(\forall x \in N_0)$ $(x + 0 = x)$	$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y' = (x + y)')$

Завдання 2. З’ясуйте як вводяться та обґрунтовуються *операції* (дій) над числами на різних ступенях навчання (початкова школа, основна школа) у діючих шкільних підручниках. Який підхід (*теоретико-множинний* чи *аксіоматичний*) покладено в основу обґрунтування дій? Продемонструйте це на прикладах дій додавання, віднімання, множення ділення. За рахунок чого відбувається спрощення у викладі матеріалу, обґрунтуйте.

Завдання 3°. [4, с. 128]. Розгляньте як використовується *метод математичної індукції* для доведення асоціативного (сполучного) закону: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$, де a, b, c – цілі, невід’ємні числа.

Завдання 4. Оберіть правильні відповіді.

1. Відношення *подільності* на множині ЦНЧ має властивості:

А	Б	В	Г	Д
рефлексивності	антисиметричності	антирефлексивності	асиметричності	транзитивності

2. Вкажіть істинні твердження.

А	Якщо кожний доданок ділиться на натуральне число n , то й їхня сума ділиться на це число
Б	Якщо сума ділиться на деяке число n , то й кожний доданок її ділиться на це число
В	Якщо різниця ділиться на деяке число n , то й зменшуване і від’ємник діляться на це число
Г	Якщо один з множників ділиться на натуральне число n , то й добуток ділиться на це число
Д	Якщо добуток ділиться на натуральне число n , то принаймні один з множників ділиться на число n

3. Якщо $a < b$, то:

А	Б	В	Г	Д
$\text{НСД}(a, b) > a$	$\text{НСД}(a, b) \leq a$	$\text{НСД}(a, b) = a$	$\text{НСД}(a, b) > b$	$\text{НСД}(a, b) = b$

4. Для того щоб натуральне число ділилось на складене число $n = b \cdot c$, де $\text{НСД}(a, b) = 1$, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на:

А	Б	В	Г
b	c	b і c	b або c

Завдання 5. Пригадайте, які ознаки подільності вивчаються в курсі математики 6 класу. Як відбувається їх вивчення? Чому обмежуються лише прикладами та формулюваннями? Що необхідно для строгого обґрунтування цих ознак? Продемонструйте це на прикладі окремої ознаки.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь на завдання 2 (на прикладі дії додавання).

Розпочнемо з аналізу підручника для 4 класу [3.1, с. 174]. Бачимо, що автори для пояснення використовують таку **проблемну ситуацію**: «Розглянемо таку *подію*: білі та червоні троянди об’єднали у букет. У

цьому разі відбулося *об'єднання двох множин* в одну нову множину, яку називають **сумою даних множин**. Ще в давні часи перед людиною постало питання, як передбачити чисельність суми двох чи кількох множин, якщо відомі чисельності множин-доданків. Тепер ми знаємо, що ця задача розв'язується дією **додавання**».

Висновок очевидний: у нових підручниках для початкової школи використовується теоретико-множинний підхід для обґрунтування дії додавання.

Систематизуючи властивості дії додавання, стверджують: **додавання натуральних чисел** завжди можливе і підпорядковане **переставному закону** (сума не змінюється від зміни місць доданків) та **сполучному закону** (сума не змінюється, якщо будь-яку групу доданків замінити їх сумою).

У теоретико-множинній теорії обґрунтування цих законів відбувається на основі означення суми цілих невід'ємних чисел a і b , означення операції об'єднання та її властивостей.

Означення [4, с. 112]. Сумою цілих невід'ємних чисел a і b , що є кількісною характеристикою множин A і B , називається число елементів об'єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

Числа a і b називаються *доданками*, а дія знаходження їх суми – *операцією додавання*.

З означення об'єднання двох множин A і B випливає його переставна (комутативна) властивість: $A \cup B = B \cup A$. Тому аналогічну властивість має дія додавання цнч. Справді, якщо $a = n(A)$, $b = n(B)$, то $a + b = n(A \cup B)$, а $b + a = n(B \cup A)$. Через те, що $A \cup B = B \cup A$, то $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. Отже, $a + b = b + a$.

У шкільному курсі математики (початкова школа) для обґрунтування цих законів використовується конкретизація, тобто посиляються на окремі життєві приклади. У підручниках з математики для 5 класу відбувається повторення та систематизація матеріалу вивченого у початковій школі. Нагадують, що в рівності $a + b = c$ числа називають *доданками*, а число c і запис $a + b$ – *сумою* [3.2, с. 58].

Альтернативою теоретико-множинному підходу у вузівських курсах, зокрема у курсі [4], є аксіоматичний підхід при якому **додаванням цнч** називається *бінарна операція*, яка кожній упорядкованій парі чисел (a, b) ставить у відповідність суму цих чисел $(a + b) \in N_0$ і задовольняє аксіоми : 5) $\forall a \in N_0 (a + 0 = a)$; 6) $\forall a, b \in N_0 (a + b' = (a + b)')$.

Комутативний та сполучний закони при цьому підході доводяться на основі принципу математичної індукції [4, с. 128].

Відповідь на завдання 5 (на прикладі ознаки подільності на 2 і на 5).

У підручнику математики 6 класу [3.7, с. 12-13] вводиться поняття *парної* та *непарної* цифри та формулюється ознака, яка допомагає встано-

вити парність числа: **Якщо запис натурального числа закінчується парною цифрою, то це число ділиться на 2. Якщо запис натурального числа закінчується непарною цифрою, то це число не ділиться на 2.**

Далі дається пояснення, як серед натуральних чисел розпізнавати такі, що є кратними 5. І формулюється відповідна ознака.

У вузівському курсі математики сформульовані ознаки є наслідками з **теорема (ознаки подільності на 2 і 5)** [4, с. 159]: Для того щоб число ділилося на 2 (на 5), необхідно й достатньо, щоб на 2 (на 5) ділилося число його одиниць.

Доведення цієї теореми спирається на **достатню умову подільності суми**, яка в 6 класі не вивчається.

Під час доведення число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ записане у позиційній десятковій системі числення представляють у вигляді суми розрядних одиниць, яку розбивають на два доданки: $a = (a_n 10^n + \dots + a_1 10) + a_0$. Оскільки перший доданок ділиться і на 2 і на 5, то щоб сума ділилася на 2 або на 5, необхідно й достатньо, щоб і другий доданок a_0 ділився відповідно на 2 або на 5.

У зв'язку з відсутністю необхідної і достатньої умови подільності суми у згаданих підручниках, що обґрунтовується складністю сприймання для даної вікової групи учнів, виклад матеріалу спрощено.



Література

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. 312 с.
2. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. Київ : Вища шк. Головне вид-во, 1988. 272 с.
3. Завало С. Т. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел, Ч. 1. Київ : Вища школа, 1974. 464 с.
4. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.
5. Математика : Посібник для шк. та кл. з поглибл. вивченням математики / Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко та ін. Київ : Освіта, 1998. 301 с.
6. Музиченко С. В. та ін. Збірник тестів і комплексних контрольних робіт з математики. 1-2 курси : Посібник для студентів факультетів початкового навчання педуніверситетів / С. В. Музиченко, Л. О. Соколенко, Н. М. Стукало, Л. М. Шидловська. Чернівці : Видавництво ЧДПУ ім. Т. Г. Шевченка, 2009. 200 с.
7. Практикум з методики навчання математики. Основна школа : навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця. Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. 267 с.
8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.

Тема 4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики

Мета навчання: здійснити порівняльну характеристику *історичної* та *логічної* схем розвитку поняття числа та обґрунтувати їх вибір у шкільному та вузівському курсах математики. Виділити основні поняття теми «Розширення поняття про число» та здійснити порівняльну характеристику введення цих понять та їх формування у названих курсах; проаналізувати методику навчання виконання арифметичних дій над дробами, цілими, раціональними та дійсними числами, запропоновану у шкільному курсі математики, знайти та розглянути теоретичні основи виконання цих дій у фундаментальних математичних дисциплінах.

Завдання.

1) Провести аналіз Державного стандарту базової та повної середньої освіти (освітня галузь «математика»), навчальних програм з математики для основної та старшої школи, визначити місце теми «Розширення поняття про число» та основних понять пов'язаних з нею.

2) Згадати яка зі схем, *історична* чи *логічна*, використовується у шкільному курсі під час навчання даної теми. З'ясувати чим ці схеми відрізняються.

3) Виділити основні поняття теми, серед яких, «звичайний дріб»; «мішане число», «десятковий дріб», «нескінченний періодичний десятковий дріб»; «додатне число», «від'ємне число», «ціле число», «раціональне число», «ірраціональне число», «дійсне число» та поняття пов'язані з ними. Здійснити порівняльну характеристику введення та формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики.

4) Дослідити виникнення і розвиток цих понять в історії математики.

5) Проаналізувати методику навчання *арифметичних дій* над дробами (звичайними, десятковими), цілими, раціональними, дійсними числами, запропоновану у шкільному курсі математики. Знайти теоретичні основи виконання цих дій у фундаментальних математичних дисциплінах.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Виникнення та основні етапи розвитку дробів. Розширення поняття числа в історії математики.	[1], [9]
2	Місце теми в програмі для загальноосвітньої школи. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.2] – [2.7]
3	Аналіз навчальних програм <i>фундаментальних математичних</i> дисциплін «Лінійна алгебра», «Алгебра і теорія чисел», «Числові системи» та <i>фахових</i> дисциплін «Елементарна математика», «Методика навчання математики».	навчальні програми дисциплін

4	Виділення основних понять теми. Аналіз введення і формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики.	[3.2] – [3.17], [2] – [5], [7], [8]
5	Методика навчання арифметичних дій над дробами, цілими, раціональними та дійсними числами в школі та її теоретичні основи.	[3.2] – [3.17], [2] – [5], [7], [8], [9] – [11]
6	Створення тестових завдань призначених для перевірки знань студентами теоретичних основ навчання окремих питань даної теми.	[5], [6]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Згадайте *історичну* та *логічну* схему розвитку поняття числа. Яка з них використовується у шкільному курсі математики, а яка у курсах математики ЗВО?

2°. Коли і у зв'язку з чим виникли звичайні дробі?

3°. Який підхід до вивчення дробових чисел представлено у діючій програмі з математики для 5-9 класів [2.3]? Згадайте етапи вивчення та дайте їм коротку характеристику.

4. Як в курсі математики 5 класу формується уявлення про звичайний дріб? Чи існують інші підходи до введення поняття звичайного дробу? Розкрийте їх суть на прикладах. Де ці підходи використовують?

5°. Згадайте методичні особливості вивчення правильних і неправильних дробів, порівняння дробів, зображення дробів на координатному промені в курсі математики 5-го класу? Які підходи використано до вивчення мішаних чисел?

6°. Згадайте характерні методичні особливості наступних етапів вивчення арифметичних дій над звичайними дробами?

Клас	Етап вивчення арифметичних дій	Складові теми
5	Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками	1) правило додавання звичайних дробів з однаковими знаменниками; 2) дія віднімання; 3) переставна та сполучна властивості додавання; 4) правила знаходження суми та різниці двох мішаних чисел.
6	Додавання і віднімання звичайних дробів з різними знаменниками	1) основна властивість дробу; 2) скорочення дробів; 3) зведення дробів до спільного знаменника; 4) порівняння дробів; 5) правило додавання (віднімання) двох дробів з різними знаменниками; 6) переставна та сполучна властивості додавання.

6	Множення дробів	1) правило множення дробу на натуральне число; 2) означення добутку двох дробів; 3) переставна та сполучна властивості множення, розподільна властивість множення відносно додавання (віднімання); 4) знаходження дробу від числа.
6	Ділення дробів	1) взаємно обернені числа; 2) правило ділення дробів; 3) знаходження числа за даним значенням його дробу

7. Назвіть методичні особливості введення поняття десяткового дробу в курсі математики 5 класу та в курсі математики для педагогічних ЗВО. Що спільного і які відмінності?

8°. З яких етапів складається вивчення арифметичних дій над десятковими дробами? Згадайте характерні методичні особливості відокремлених вами етапів.

9. Який підхід використовується до введення наступних понять в курсі математики 6-го класу: 1) протилежні числа; 2) цілі числа; 3) дробові числа; 4) цілі додатні числа; 5) цілі від'ємні числа; 6) раціональні числа:

А	Б	В	Г
поняття вводиться описово	використовується означення через перелік	використовується протиставлення	використовується синонім

10°. Яким чином здійснюється порівняння чисел у 6-му класі? Яку роль при цьому відіграє координатна пряма?

11°. З яких етапів складається вивчення арифметичних дій над раціональними числами? Згадайте характерні методичні особливості цих етапів.

12. Які методичні підходи існують до введення поняття *ірраціонального числа* в курсі алгебри 8 класу? Продемонструйте їх та зробіть відповідне теоретичне обґрунтування.

13. Які методичні підходи існують до введення поняття *дійсного числа* в курсі алгебри 8 класу? Продемонструйте їх та зробіть відповідне теоретичне обґрунтування.



Відповіді та вказівки до контрольно-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. В школі прийнято *історичну* схему розвитку поняття числа: $N \subset N_0 \subset Q_+ \subset Q \subset R \subset C$. *Логічна* схема $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ використовується у курсах математики для ЗВО, зокрема [3], [5].

2°. [1], [9, с.19-24].

3°. [2.3] **5 клас.** Тема 2. Дробові числа і дії з ними.

[2.3] **6 клас.** Тема 2. Звичайні дробі.

Тема 4 Раціональні числа і дії з ними.

4. У курсі математики 5 класу уявлення про звичайний дріб формується як про частину цілого: «Звичайні дроби записують за допомогою двох натуральних чисел і риски дробу. Число записане над рисою, називають *чисельником* дробу; число записане під рисою, називають *знаменником* дробу. Знаменник дробу показує, на скільки рівних частин поділили щось ціле, а чисельник скільки таких частин узяли» [3.4, с. 157].

Крім того, в курсі математики 5 класу виокремлюється тема «Дроби і ділення натуральних чисел», в якій за допомогою задачі про розділ 3-х мішків золота між 4-ма шукачами скарбів підводять учнів до такого означення: Звичайний дріб це запис виду $\frac{a}{b}$, де a і b натуральні числа. У такому дробі число a називається чисельником, а b знаменником дробу [3.3, с. 177].

У курсах математики для ЗВО існують інші підходи до введення поняття звичайного дробу.

Перший з них пов'язаний з процесом вимірювання довжини відрізка [5, с. 181]. Розпочинають з прикладу вимірювання відрізка a одиничним відрізком e , за умови що $4e < a < 5e$. Приходять до висновку, що довжину такого відрізка a при одиничному відрізку e не можна виразити натуральним числом. Проте якщо розглянути відрізок e_1 , для якого $3e_1 = e$, то виявляється, що $a = 14e_1$, тобто міра відрізка $m_{e_1}(a) = 14$.

Повертаючись до початкового одиничного відрізка e , вказують, що відрізок a складається з 14 відрізків, кожен з яких дорівнює третій частині відрізка e , тобто, говорячи про довжину відрізка a , оперують двома натуральними числами 14 і 3.

При цьому вважають, що $m(a) = \frac{14}{3}$, де $m(a)$ – довжина відрізка a , а символ $\frac{14}{3}$ називають *дробом*.

Розгляд загального випадку приводить до такого означення.

Означення. Нехай дано одиничний відрізок e і відрізок a , причому $e = n \cdot e_1$, $n \in N$. Якщо $a = pe_1$, $p \in N$, то вважають, що $m(a) = \frac{p}{n}$, де $m(a)$ – довжина відрізка a . Символ $\frac{p}{n}$, в якому p і n – натуральні числа, називають *дробом* з чисельником p і знаменником n [5, с. 182].

Другий підхід пов'язаний з поняттям упорядкованої пари та розумінням дробу як частини цілого.

Означення [2, с. 61] Упорядкована пара натуральних чисел $(a;b)$ називається **дробом**. Традиційно дріб позначають символом $\frac{a}{b}$. При цьому b – *знаменник дробу*, показує, на скільки рівних частин поділено одиницю, моделлю якої може бути деякий предмет або геометрична фігура (круг, відрізок тощо); a *чисельник дробу*, показує, *скільки таких частин взято*.

6°. Фрагмент відповіді.

5	Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками	1) правило <i>ілюструється з допомогою наочності (прямокутник розділений на частини).</i> 2) дія віднімання <i>розглядається як обернена до дії додавання.</i> 3) переставна та сполучна властивості додавання <i>розглядаються без доведення.</i> 4) правила знаходження суми та різниці двох мішаних чисел <i>обґрунтовуються на конкретних прикладах на основі переставної та сполучної властивостей додавання.</i>
---	---	--

7. Введення поняття десяткового дробу у школі та ЗВО містить етап мотивації, на якому обґрунтовують важливість дробів зі знаменниками, що є степенем числа 10. А обґрунтування форми запису дробів, яку називають *десятьковою* та означення самого поняття відрізняються. На рівні школи, це здійснюється в описовій формі та з допомогою правила, яке сформульоване для запису дробової частини [3.4, с. 190], а у курсі математики [5, с. 197] дається строге обґрунтування способу запису дробів виду $\frac{p}{10^k}$, який називають записом у *позиційній десятковій системі числення*.

12. [5, Р4 п. 4.3.1], [9, с. 27–42]. 13. [5, Р4 п. 4.3.6].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

Завдання 1. Оберіть правильні відповіді.

1.1. Натуральне число можна розглядати як:

А	кількісну характеристику певного класу еквівалентних скінченних множин
Б	порядкову характеристику місця знаходження елементів будь-якої зчисленної множини
В	характеристику збільшення чисельності
Г	характеристику відсутності зміни чисельності
Д	характеристику зменшення чисельності

1.2. Звичайним дробом називають:

А	запис виду $\frac{a}{b}$, де a і b – натуральні числа, a – чисельник дробу, b – знаменник дробу
Б	символ $\frac{p}{n}$, де $p \in N, n \in N$, p – чисельник дробу, n – знаменник дробу
В	Дріб $\frac{p}{10^k}$, записаний у позиційній десятковій системі числення
Г	упорядковану пару $(a; b)$, де a – чисельник, b – знаменник дробу
Д	символ виду $\overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots}$, в якому після коми одна цифра або деяка група цифр нескінченно повторюються

1.3. Два дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ називають рівними і записують $\frac{p}{n} = \frac{q}{k}$, якщо:

А	Б	В	Г
$p = q$ і $n = k$	$pk = nq$	$n = k$	$p = q$

1.4. Від'ємні числа використовуються для позначення:

А	розташування місцевості над рівнем океану
Б	зміни суми грошей у касі банку після зняття їх вкладниками банку
В	маси предметів
Г	значення температури взимку
Д	об'ємів тіл

Завдання 2. Зробити порівняльну характеристику навчання *цілих чисел* в курсі математики 6 класу та в курсі математики для ЗВО [5] та оформити її у вигляді таблиці. Який матеріал, розглянутий у курсі математики [5] можна вважати теоретичними основами шкільного курсу? Які інші підходи до навчання цілих чисел розглядаються студентами під час навчання фундаментальних математичних дисциплін?

Завдання 3. Установіть відповідність між елементами стовпців.

3.1. Нехай $\frac{p}{n}$ – звичайний дріб.

1 $p \geq n$	А дріб $\frac{p}{n}$ – нескоротний
2 $p < n$	Б дріб $\frac{p}{n}$ – правильний
3 $\text{НСД}(p, n) = 1$	В дріб $\frac{p}{n}$ – неправильний

3.2. Нехай A і B – дві скінченні множини. Заміну множини A множиною B називають *переходом від множини A до множини B* і позначають $A \rightarrow B$.

Якщо при $A \rightarrow B$:

- | | |
|-----------------|--|
| 1 $n(A) < n(B)$ | A зміна чисельності відсутня |
| 2 $n(A) = n(B)$ | Б чисельність збільшується на $n(B) - n(A)$ |
| 3 $n(A) > n(B)$ | В чисельність зменшується на $n(A) - n(B)$ |

3.3. Нехай $\Delta_{A \rightarrow B}$ – зміна чисельності при переході $A \rightarrow B$.

Якщо при $A \rightarrow B$:

- | | |
|-----------------|--|
| 1 $n(A) < n(B)$ | A $\Delta_{A \rightarrow B} = 0$ |
| 2 $n(A) = n(B)$ | Б $\Delta_{A \rightarrow B} = -(n(A) - n(B)) = -a, a \in N$ |
| 3 $n(A) > n(B)$ | В $\Delta_{A \rightarrow B} = n(B) - n(A) = a, a \in N$ |

Завдання 4. Оберіть правильні відповіді.

4.1. Які твердження виконуються для *цілих чисел* k, l, q ?

A	якщо $k < l$ і $l < q$, то $k < q$
Б	$(\forall k, l \in Z)$, якщо $k < l$, то $\bar{l} < \bar{k}$
В	$(\forall k, l \in Z) k < l$ або $l < k$
Г	$(\forall k, l \in Z)$, якщо $k \neq l$, то $k > l$
Д	$(\forall k, l \in Z) k < l$, або $l < k$, або $l = k$

4.2. Звичайний нескоротний дріб перетворюється у *десятковий*, якщо до канонічного розкладу знаменника:

A	входить принаймні один простий множник відмінний від 2 і 5
Б	входять лише прості множники 2 і 5
В	не входять множники 2 і 5
Г	крім множників 2 і 5 входять інші прості множники

4.3. Звичайний нескоротний дріб перетворюється у *чистий періодичний десятковий дріб* якщо до канонічного розкладу знаменника:

A	входить принаймні один простий множник відмінний від 2 і 5
Б	входять лише прості множники 2 і 5
В	не входять множники 2 і 5
Г	крім множників 2 і 5 входять інші прості множники

Завдання 5°. Створіть систему завдань у тестовій формі, які дають можливість перевірити знання студентами теоретичних основ перетворення звичайних дробів у десяткові.

Завдання 6. Оберіть правильну відповідь.

Додатним раціональним числом називають:

А	Кожен з класів еквівалентності, на які відношення рівності дробів розбиває множину дробів
Б	символ $\frac{p}{n}$, де $p \in N, n \in N, p$ – чисельник дробу, n – знаменник дробу
В	Дріб $\frac{p}{10^k}$, записаний у позиційній десятковій системі числення
Г	упорядковану пару $(a; b)$, де a – чисельник, b – знаменник дробу

Завдання 7. Наведіть приклад додатного раціонального числа. Що розуміють під його зображенням?

Завдання 8. Розгляньте задачу про визначення довжини відрізка, який є сумою двох відрізків. Яким чином використання властивості адитивності приводить до означення суми додатних раціональних чисел $(a, b \in Q_+)$. Як означається сума додатних раціональних чисел?

Завдання 9°. Розгляньте задачу про визначення довжини відрізка з допомогою двох одиничних відрізків e_1 та e_2 , яка приводить до означення добутку додатних раціональних чисел $(a, b \in Q_+)$. Яким чином під час її розв’язування використовується властивість мультиплікативності? Як означається добуток додатних раціональних чисел?

Завдання 10°. Повторіть, що розуміють під поняттям *наближення ірраціонального числа раціональним (з нестачею, з надлишком)*.

Завдання 11°. З яких етапів складається вивчення арифметичних дій над додатними дійсними числами в курсі математики для ЗВО? Згадайте характерні методичні особливості цих етапів.

Знаючи, що $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, $\sqrt{3} = 1,73205\dots$ знайдіть: а) суму $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ з точністю до 0,001; б) добуток $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ з точністю до 0,1.

Завдання 12°. Як означається множина дійсних чисел? Які властивості вона має?



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь до завдання 2. Ознайомившись з відповідним матеріалом, викладеним у шкільному підручнику [3.7] та вузівському курсі математики [5], студенти зможуть скласти таблицю.

Таблиця. Порівняльна характеристика навчання цілих чисел

№	Етапи навчання	Математика, 6 клас	Курс математики [5]
1	Обґрунтування необхідності введення від'ємних чисел	на прикладах (кредит, температура взимку та ін.)	Зменшення чисельності $\Delta_{A \rightarrow B} = -(n(A) - n(B))$, якщо $n(A) > n(B)$
2	Означення поняття «від'ємне число»	–	Число виду $-n$, де $n \in N$
3	Введення понять «додатне число», «0», «числа, що мають однакові (різні) знаки», «протилежні числа»	описово, на прикладах	означаються на основі зміни чисельності, через протиставлення та перелік
4	Зображення чисел на координатній прямій	+	+
5	Властивості множини цілих чисел	–	[5, с. 175–176]
6	Арифметичні операції	для раціональних чисел	для цілих чисел
	додавання	за допомогою координатної прямої та конкретних прикладів	на основі означення суми та залежно від знаків доданків (7 випадків)
	віднімання	обернена до додавання $a - b = a + (-b)$	аналогічно
	множення	правила, приклади	на основі означення добутку та залежно від знаків множників (7 випадків)
	ділення	обернена до множення	аналогічно

Теоретичними основами шкільного курсу по даній темі є матеріал всіх пунктів, крім 4-го (оскільки він розглядається майже аналогічно).

Існує інший підхід до вивчення цілих чисел, який розглядається в курсі «Числові системи» [3]. Тут на основі півкільця N побудована числова система Z . Основною вимогою, яка має виконуватись при її побудові, є існування у цій системі розв'язку рівняння $b + x = a$ для довільних $a, b \in Z$. Цілі числа при цьому означаються як елементи системи, якою є алгебра $(Z, +, \cdot, 0, 1, N)$ для якої справедливі аксіоми цілих чисел (структурні та спеціальні) [3, с. 115].

Відповідь до завдання 5. Ці тестові завдання можуть форму завдання за вибором однієї (чи декількох) правильних відповідей, або завдань на встановлення відповідності (*логічні пари*).

Приклад 1. Звичайний нескоротний дріб перетворюється у *чистий* періодичний десятковий дріб якщо до канонічного розкладу знаменника:

А	Б	В	Г
входить принаймні один простий множник відмінний від 2 і 5	входять лише прості множники 2 і 5	не входять множники 2 і 5	крім множників 2 і 5 входять інші прості множники

Приклад 2. Установіть відповідність між твердженнями (1-4) та дробами (А-В).

- | | |
|--|-------------------|
| 1 Звичайний дріб перетворюється у чистий періодичний дріб | А $\frac{13}{50}$ |
| 2 Звичайний дріб перетворюється у мішаний періодичний дріб | Б $\frac{14}{63}$ |
| 3 Звичайний дріб перетворюється у десятковий дріб | В $\frac{11}{36}$ |

7. [5, Р4, п.4.2.2]. 8. [5, Р4, п.4.2.3]. 9°. [5, Р4, п.4.2.5]. 10° [5, Р4, п.4.3.3]. 11° [5, Р4, п.4.3.4, п.4.3.5]. 12° [5, Р4, п.4.3.6].



Література

- Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. 312 с.
- Боровик В. Н. Зайченко І. В., Рудник А. В. Математика. Практикум. Частина 4. Навчальний посібник. Чернівці, 2004. 94 с.
- Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. Київ : Вища шк. Головне вид-во, 1988. 272 с.
- Завало С. Т. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч. 1. Київ : Вища школа, 1974. 464 с.
- Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.
- Музиченко С. В. та ін. Збірник тестів і комплексних контрольних робіт з математики. 1-2 курси : Посібник для студентів факультетів початкового навчання педуніверситетів / С. В. Музиченко, Л. О. Соколенко, Н. М. Стукало, Л. М. Шидловська. Чернівці : Видавництво ЧДПУ ім. Т. Г. Шевченка, 2009. 200 с.

7. Практикум з методики навчання математики. Основна школа : навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.

8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.

Додаткова література

9. Від числа до нескінченності / Едвард Кофлер; Пер. з польської В. Д. Волох, С. С. Гороховський. Київ : Вид.-во «Рад. шк.», 1968. 296 с.

10. Магія математики. Як знайти x і навіщо це потрібно / Артур Бенджамін; Пер. з англ. М. Гоцацюка. Київ : Вид. група КМ-БУКС, 2018. 352 с.

11. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу : Експерим. навч. посібник для 10 кл. шк. з поглибл. вивченням математики і спеціалізов. шк. фізико-мат. профілю. Київ : Освіта, 1993. 336 с.

Тема 5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики

Мета навчання: здійснити порівняльну характеристику функціонального підходу до означення поняття рівняння (нерівності) та підходу, який передбачає використання висловлювальної форми (предиката). Використати поняття логіки для означення понять пов'язаних з поняттям рівняння (нерівності), серед яких рівняння (нерівності) наслідки, рівносильні рівняння (нерівності). З'ясувати властивості відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей). Розглянути основні (типові) перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.

Завдання.

1) Провести аналіз Державного стандарту базової та повної середньої освіти (освітня галузь «математика»), навчальних програм з математики для основної та старшої школи, визначити місце рівнянь та нерівностей і понять пов'язаних з ними.

2) Проаналізувати як означається поняття «рівняння» («нерівність») в ШКМ та які підходи при цьому застосовуються.

3) Дослідити виникнення і розвиток цих понять в історії математики та їх застосування.

4) Повторити означення понять «висловлювальна форма», «одномісний предикат», «характеристична множина (область істинності) предиката», «двомісний предикат», відомі з курсу математичної логіки.

5) Скласти таблиці відповідності математичних понять, пов'язаних з рівнянням (нерівністю) з однією змінною та понять математичної логіки, пов'язаних з одномісним предикатом.

6) Згадати відношення слідування та відношення рівносильності між предикатами та на основі цих означень сформулювати означення рівняння (нерівності) наслідку та рівносильних рівнянь (нерівностей).

7) Розглянути основні (типові) перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Математика 10-11 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.2] – [2.7]
2	Виникнення і розвиток поняття рівняння (нерівності) в історії математики та їх застосування.	[1]
3	Теоретичний матеріал з курсу математичної логіки, пов'язаний з висловлювальними формами та предикатами	[2], [3], [5]
4	Розгляд різних підходів до означення поняття рівняння (нерівності), що передбачають використання математичних понять (виразу, функції) та понять математичної логіки (висловлювальної форми, предиката).	[3.2], [5], [3.11], [3.23] – [3.28]; [2], [3], [5]
5	Відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей) та їх властивості.	[2], [3], [5]; [3.24], [3.28]
6	Розгляд основних (типових) перетворень рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.	[4], [3.23] – [3.28], [7], [8]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1°. Проаналізуйте місце змістової лінії «Рівняння і нерівності» в програмах з математики основної та старшої школи.

2. Як означається поняття «рівняння» в шкільному курсі математики?

3°. Згадайте історію виникнення та розвитку поняття «рівняння (нерівність)».

4°. Згадайте застосування рівнянь у різних математичних та суміжних дисциплінах.

5. Повторіть означення понять *висловлювальна форма, одномісний предикат, характеристична множина (область істинності предиката), двомісний предикат*, які розглядаються в курсі математичної логіки. Наведіть приклади цих понять.

6. У якому класі поняття рівняння неявно означається з допомогою *висловлювальної форми (предиката)*, а у якому класі відображено *функціональний підхід* до означення даного поняття?

7. Чи існує відмінність між поняттями «рівняння» і «тотожність»? Наведіть приклади та обґрунтуйте.

8. Як означається поняття «нерівність» у шкільному курсі математики? Який підхід при цьому застосовується?

9°. Згадайте застосування нерівностей у різних математичних та суміжних дисциплінах.

10. Згадайте *відношення слідування* між предикатами та означення *рівняння наслідку* зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу 10 класу.

11. Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

а) $\frac{x^2}{x} = 1$ і $x^2 = x$;

б) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$?

12. Згадайте *відношення рівносильності* між предикатами та означення **рівносильних рівнянь** зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу 10 класу.

13. Чи рівносильні такі предикати: а) $m(x): "(x+3)(x-1)=0"$ і $l(x): "x^2-2x-3=0"$; б) $g(x): "\frac{5x-1}{x^2+4} = \frac{3x+4}{x^2+4}"$ і $q(x): "5x-1=3x+4"$?

14°. Повторіть означення *бінарного відношення*, визначеного у множині, та властивості відношень (рефлексивність, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність та ін.).

15°. Згадайте причини одержання **рівнянь наслідків**. Наведіть приклади.

16°. Згадайте причини втрати коренів при розв'язуванні рівняння. Наведіть приклади.

17. Які особливості навчання властивостей рівнянь в курсі математики 6-7 класів та в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу? Сформулюйте ці властивості.



Відповіді та вказівки до контрольних-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

2. У шкільному курсі математики поняття рівняння вводиться в **5 класі** описово після розгляду задачі на відшукування невідомого числа в рівності, яка містить невідоме. У підручнику з математики для 5-го класу Істера О. С. [3.2, с. 76] зазначається «*Рівність, що містить невідоме число називається **рівнянням***». Це не означення, а зрозумілий для п'ятикласників опис.

У курсі алгебри 7-го класу «*Рівнянням називається рівність зі змінною, значення якої треба знайти*» [3.12, с. 187].

Загальний вигляд рівняння з однією змінною x : $f(x) = g(x)$ представлено в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу [3.24, с. 68]. Під цим коротким записом розуміють математичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох функцій рівні.

5. Означення 1 [3, с. 69]. Речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об'єктів з певної множини M перетворюються у висловлення, називаються **висловлювальними формами**.

Приклад 1. $h(x)$: « x — непарне число» — це речення не є висловленням, бо про нього не можна сказати істинне воно чи хибне. Якщо в $h(x)$ замість змінної x підставляти конкретні натуральні числа, то матимемо висловлення.

Висловлювальна форма $h(x)$ визначає одномісне відображення, визначене на множині N натуральних чисел, з множиною значень у двоелементній множині $\{0; 1\}$, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями хибності та істини.

Означення 2 [3, с. 70]. **Одномісним предикатом** називається відображення p , визначене на деякій предметній множині M , яке набуває значення лише у двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M \rightarrow \{0; 1\}$.

Вираз $p(x)$ називають **висловлювальною формою предиката** p .

Розглядаючи, наприклад, предикат $h(x)$ на множині N , бачимо, що для одних натуральних чисел він набуває значення 1, а для других — 0. Цим самим множина N поділяється на дві підмножини, на одній з яких предикат $h(x)$ набуває лише значення 1, а на другій — лише значення 0. Першу з цих підмножин називають **характеристичною множиною предиката** $h(x)$ або його **областю істинності**.

Це саме можна сказати про будь-який одномісний предикат $p(x)$. Характеристичну множину предиката $p(x)$ з областю визначення M позначають через M_p .

Наприклад, для предиката $h(x)$, визначеного на N , маємо $N_h = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2k+1, \dots\}$, тобто множину всіх непарних чисел.

Означення 3 [3, с. 70]. **Двомісним предикатом** називається відображення f , визначене на деякій предметній множині M , яке набуває значення лише у двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M^2 \rightarrow \{0; 1\}$, де $M^2 = M \times M$.

Приклад 2. $t(x, y)$: " $3x - y + 4 = 0$ " на множині R , R_t^2 є множина точок на площині, які задовольняють рівняння $3x - y + 4 = 0$.

6. У 10 класі відображено **функціональний підхід** до поняття рівняння. А в основній школі (5 кл., 7 кл.) поняття рівняння неявно означається з допомогою одного з фундаментальних понять математичної логіки — поняття **висловлювальної форми (предиката)**.

7. Близьким до поняття рівняння є поняття **тотожності**. Згідно з чинною програмою з математики для основної школи [2.3] це поняття вводиться в курсі алгебри 7 класу. У підручнику алгебри 7 класу Тарасенкової Н. А. та ін. [3.12, с. 33] зауважується «Рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами, називається **тотожністю**».

Перед тим дається означення **тотожно рівних виразів**: «Два вирази зі змінними називаються **тотожно рівними**, якщо вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їх змінних».

Треба, щоб учні розрізняли поняття **рівняння** та **тотожності**. У деяких випадках існує зовнішня схожість. Наприклад, $5(x-4) = 5x - 20$ може бути, як рівнянням так і тотожністю. Тому слід звертати увагу на словесне доповнення, яким супроводжуються ці рівності. Рівняння **розв'язують**, а тотожності **доводять**.

Тотожність і рівняння – це істотно різні поняття.

Тотожність – твердження, яке може бути правильним, або неправильним. Із тотожностей $A = B$ і $B = C$ випливає, що $A = C$.

Рівняння – не твердження, воно не може бути правильним, чи неправильним, із рівнянь $A = B$ і $B = C$ не випливає, що $A = C$ [7, с. 100].

10. Відношення слідування між предикатами

Означення [5, с. 22]. Нехай $p(x)$ і $q(x)$ – висловлювальні форми визначені на множині M . Говорять, що $q(x)$ **логічно випливає** з $p(x)$ і записують $p(x) \models q(x)$, якщо $q(x)$ набуває значення 1 для всіх тих елементів з M , для яких $p(x)$ набуває значення 1.

Отже, якщо $p(x) \models q(x)$, то $(\forall a \in M)$ як тільки $p(a) = 1$, то обов'язково $q(a) = 1$.

Звичайно, може бути, що для деякого $a \in M$ $p(a) = 0$, а $q(a) = 1$.

У ШКМ 10 класу дається таке **означення рівняння наслідку**: Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається **наслідком** першого [3.26, с. 94].

Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо рівняння-наслідки.

12. Відношення рівносильності між предикатами:

Дві висловлювальні форми, визначені на множині M , називають **рівносильними**, якщо вони набувають однакових значень істинності при підстановці в них замість змінних елементів з множини M . $(p(x) \equiv q(x)) \Leftrightarrow (M_p = M_q)$.

У ШКМ 10 класу даються такі **означення рівносильних рівнянь**:

Означення 1 [3.26, с. 93]. Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають **рівносильними**, якщо множини їх коренів рівні.

Означення 2 [3.26, с. 94]. Якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що належить множині M , є коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що належить множині M , є коренем рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то такі два рівняння називають **рівносильними на множині M** .

Наприклад, рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ рівносильні на множині $(-\infty; 0)$.

14°. [3, с. 35-38].

15° [3.24, с. 78-80]. Причини появи сторонніх коренів при розв'язуванні рівняння: а) перехід до рівняння, у якого ОДЗ ширша, ніж у заданого рівняння (1) зведення подібних членів, 2) зведення обох частин рівняння до спільного знаменника (при відкиданні знаменника), 3) піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрата, 4) звільнення від знаків логарифмів); б) виконання перетворень, при яких відбувається неявне множення на нуль (множення обох частин рівняння на вираз зі змінною); в) застосування до обох частин рівняння функції, яка не є зростаючою або спадною (піднесення обох частин рівняння до парного степеня або застосування до обох частин рівняння тригонометричних функцій).

16° [3.24, с. 80-81]. Причина втрати коренів при розв'язуванні рівняння: явне чи неявне звуження ОДЗ заданого рівняння, зокрема виконання перетворень, у процесі яких відбувається неявне ділення на нуль (1) ділення обох частин рівняння на вираз зі змінною, 2) додавання, віднімання, множення або ділення обох частин рівняння на вираз, у якого ОДЗ вужча, ніж у заданого рівняння).

17. 6 кл. [3.7, с. 316-317]; 10 кл. [3.26, с. 94 Т.13.1, 13.2; с. 95 Т.13.3; с. 96-98 Т.13.4-13.6]; 11 кл. [3.29, с. 166-167 Т.17.1 (Наслідок). с. 202-203 Т.21.1 (Наслідок)].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1. Знайдіть область визначення та область істинності (характеристичну множину) предикатів: а) $p(x) : "x(x-1)(x-2) = 0"$;

б) $s(x) : "7 - 2x + \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-2} = 11 - 4x"$; в) $t(x) : "\frac{2(x-10)}{x^2 - 13x + 30} = 1"$.

2. Використовуючи підручники математики для ЗВО, серед яких [2], [3], з'ясуйте, як формулюється означення поняття рівняння (нерівності). Які поняття математичної логіки при цьому задіяні?

3. Самостійно сформулюйте означення рівняння з однією (з двома) змінними, взявши за основу поняття *висловлювальної форми*.

4°. Самостійно сформулюйте означення нерівності з однією змінною, взявши за основу поняття *висловлювальної форми*.

5. Складіть таблицю відповідності математичних понять, пов'язаних з рівнянням з однією змінною, та понять математичної логіки, пов'язаних з одномісним предикатом.

6°. На основі означення відношення слідування між предикатами сформулюйте означення *рівняння наслідку*.

7. На основі означення відношення рівносильності між предикатами сформулюйте означення *рівносильних рівнянь*.

8. Які властивості мають *відношення слідування* та *відношення рівносильності* на множині рівнянь? Чи є ці відношення *відношеннями еквівалентності*?

9. Завдяки якому порушенню трапляються помилки при розв'язуванні рівнянь?

10. Обґрунтуйте доведення першої теореми про рівносильність рівнянь, запропонованої у підручнику [3.26, с. 94, Т 13.1], використовуючи *висловлювальну форму*.

11. Нехай дано деяке рівняння:

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

до обох частин якого додали вираз $h(x)$. При цьому одержали рівняння:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (2).$$

Дослідіть та проаналізуйте, використовуючи конкретні приклади, чи може перетворення, що проведене над рівнянням (1), привести до:
а) втрати коренів рівняння, б) появи зайвих коренів рівняння.

12°. Нехай дано деяке рівняння:

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

обидві частини якого помножили на вираз $h(x)$. При цьому одержали рівняння:

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \quad (3).$$

В залежності від характеру функції $h(x)$ можуть бути різні випадки:
1) рівняння можуть бути рівносильними; 2) може мати місце поява сторонніх коренів; 3) може мати місце втрата коренів рівняння.

Дослідіть це питання у випадку, якщо дано рівняння $x - 1 = 3$, а вираз $h(x)$ дорівнює: а) $x - 2$; б) $\sqrt{x - 5}$.

13. Чи завжди розширення ОДЗ змінної рівняння приводить до появи зайвих коренів?

14°. Розв'яжіть рівняння з підручника [3.24, с. 83, № 7 (1-3)] і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

$$1) \frac{8}{x} - \frac{5-x}{2} = \frac{8+3x}{x} - x; \quad 2) \frac{x}{4} + \frac{(x-2)^2+8}{x} = \frac{(4-x)(2-x)}{x};$$

$$3) \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-4}{3+x}.$$

15. Розв'яжіть рівняння з підручника [3.24, с. 83, №8] з допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності: 1) $3x + \sqrt{x-2} = 5x - 1 + \sqrt{x-2}$; 2) $\sqrt{2x+5} = x+1$.

16°. За якої умови рівняння є рівносильними?

$$1) \frac{f(x)}{2x-3} = g(x) \text{ і } f(x) = g(x) \cdot (2x-3);$$

$$2) f(x) + \sqrt{x} = g(x) + \sqrt{x} \text{ і } f(x) = g(x).$$

17. Розв'яжіть рівняння та проаналізуйте перетворення які використовувались на предмет рівносильності. Чи з'явилися сторонні корені? Як їх визначити?

$$1) \sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5; \quad 2) \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1}.$$

18. Наведіть приклад нерівності під час розв'язування якої відбувається розширення ОДЗ змінної нерівності та розв'язки нерівності-наслідку потрапляють до області розширення. Прокоментуйте, які помилки можуть допустити учні під час розв'язування такої нерівності.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь на питання 2.

Розглянемо означення поняття рівняння сформульовані в курсах математики для ЗВО.

Означення 1 [2, с. 422]. Нехай на множині M задано два вирази $f(x)$ і $g(x)$ з однією змінною x . Предикат виду $f(x) = g(x)$, $x \in M$, для якого потрібно знайти область істинності, називається *рівнянням з однією змінною*. Вирази $f(x)$ і $g(x)$ називаються *частинами рівняння*, $f(x)$ – *лівою*, $g(x)$ – *правою*.

Означення 2 [3, с. 248]. Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – два вирази від змінної x , областями визначення яких є непорожні множини відповідно X_1 і X_2 , причому серед цих виразів принаймні один є *числовою формою* від змінної x , і нехай $X = X_1 \cap X_2$. Тоді висловлювальна форма виду $F_1(x) = F_2(x)$, $x \in X$, називається *рівнянням з однією змінною*, а множина X – його *областю визначення*.

Вирази $F_1(x)$ і $F_2(x)$ називають відповідно *лівою* й *правою* частинами рівняння.

Родовим поняттям для поняття «рівняння» є поняття «предикат» та «висловлювальна форма».

Відповідь на питання 3.

Означення 1. Рівняння з однією змінною на множині R визначає відображення $R \rightarrow \{1; 0\}$, тобто є логічною функцією (предикатом) з областю визначення R , яка приймає значення з $\{1; 0\}$. Множина E розв'язків цього рівняння – підмножина R ($E \subseteq R$).

Означення 2. Рівняння з двома змінними – це двомісна висловлювальна форма, що визначає на множині R^2 всеможливих пар дійсних чисел логічну функцію (предикат) $R^2 \rightarrow \{1; 0\}$. Множина E розв'язків цього рівняння – підмножина R^2 ($E \subseteq R^2$), а кожний розв'язок – упорядкована пара дійсних чисел.

Відповідь на питання 5.

№	Математичне поняття	Поняття логіки
1	Рівняння з однією змінною $f(x) = g(x)$	Предикат $L(x)$
2	Область допустимих значень (або область визначення рівняння) ОДЗ – спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, що стоять у лівій і правій частинах рівняння	Область визначення предиката $x \in M$
3	Множина розв'язків рівняння (множина коренів)	Область істинності (характеристична множина) предиката $E = \{x \mid x \in M \wedge L(x)\}$
4	Розв'язок (корінь) даного рівняння	Число, що належить множині істинності предиката $x \in E$

Відповідь на питання 6.

Означення (рівняння наслідку).

Нехай на множині M визначені два рівняння $L(x)$ і $L_1(x)$, $x \in M$.

Рівняння $L_1(x)$ є **наслідком рівняння** $L(x)$, якщо $L_1(x)$ перетворюється у істинне висловлення при всіх тих значеннях x із M , при яких $L(x)$ перетворюється у істинне висловлення, тобто якщо істинне висловлення: $(\forall x) L(x) \Rightarrow L_1(x)$.

Із означення слідування маємо, що $E \subseteq E_1$ (де E і E_1 – відповідні множини розв'язків).

Відповідь на питання 7.

Означення (рівносильних рівнянь).

Якщо кожне з двох рівнянь є наслідком іншого, тобто істинним є висловлення: $(\forall x)(L(x) \Rightarrow L_1(x) \wedge L_1(x) \Rightarrow L(x))$, то ці рівняння **рівносильні**, тобто істинним є висловлення: $(\forall x)(L(x) \Leftrightarrow L_1(x))$.

Це означає, що $E \subseteq E_1$ і $E_1 \subseteq E$, отже, $E = E_1$.

Таким чином, рівняння $L(x)$ та $L_1(x)$ рівносильні тоді і тільки тоді, коли множини їх розв'язків співпадають.

Відповідь на питання 10.

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

додати один і той же вираз $\varphi(x)$, який має смисл при всіх x із ОДЗ рівняння (1), то одержимо рівняння:

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x), \quad (2)$$

рівносильне даному.

Доведення. Нехай $x = a$ – будь-який корінь рівняння (1), тоді $f(a) = g(a)$. Крім того, $\varphi(a) = m$ – число, бо за умовою теореми функція $\varphi(x)$ визначена, тобто дорівнює певному числу при кожному значенні x з ОДЗ рівняння (1). Тоді $f(a) + m = g(a) + m$ – істинне висловлення на основі відповідної властивості числових рівностей. Це означає, що кожний розв'язок рівняння (1) є також розв'язком рівняння (2).

Доведемо, що й навпаки, кожний розв'язок рівняння (2) є розв'язком рівняння (1).

Припустимо, що значення $x = b$ – будь-який розв'язок рівняння (2). Це означає, що $f(b) + \varphi(b) = g(b) + \varphi(b)$ – числова рівність, що є істинним висловленням. Разом з тим, $\varphi(b) = n$ – цілком певне число. Віднявши це число від обох частин рівності, дістанемо істинне висловлення: $f(b) = g(b)$, яке показує, що число $x = b$ є розв'язком рівняння (1).

Відповідь на питання 11.

а) *Втрата коренів* відбувається завдяки звуженню ОДЗ заданого рівняння. В даному випадку до обох частин рівняння (1) додається вираз у якого ОДЗ вужча ніж у рівняння (1).

$$\text{Приклад. } x^2 + 5x = 0 \quad (1) \qquad x^2 + \frac{7}{x+5} + 5x = \frac{7}{x+5} \quad (2).$$

Коренями першого рівняння є числа 0 і -5 , а кореням другого рівняння число 0.

б) *Поява зайвих коренів* відбувається в результаті розширення ОДЗ рівняння. Як приклад слід розглянути обернений перехід від другого рівняння до першого, який можна здійснити додаванням до обох частин рівняння (2) виразу $h(x) = -\frac{7}{x+5}$.

Відповідь на питання 13.

Ні, не приводить коли до ОДЗ другого рівняння додається число, що не є його розв'язком.

Приклад. $2x - 5 + \frac{1}{x-4} = 4 - x + \frac{1}{x-4}$ (1) $2x - 5 = 4 - x$ (2)

ОДЗ рівняння (1): $x \neq 4$. ОДЗ рівняння (2): $x \in R$. $x = 4$ не є коренем другого рівняння, отже, зайві корені у другому рівнянні не з'являться. $x = 3$ є коренем обох рівнянь.



Література

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. 312 с.

2. Затула Н. І. Математика: Навчальний посібник / Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим. Київ : Кондор, 2006. 560 с.

3. Курс математики: Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

4. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Річняк Р. Я. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник. Інноваційні методи навчання математики. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.

5. Математика. Посібник для факультативних занять у 8 класі / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, В. І. Пономаренко, І. Ф. Тесленко. Київ : Радянська школа, 1981. 206 с.

6. Мордкович А. Г. О некоторых методических вопросах, связанных с решением уравнений. *Математика в школе*. 2006. № 3. С. 25–34.

7. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.

8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.

Додаткова література

9. Соколенко Л. О., Швець В. О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій в курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в сучасній школі*. 2013. № 12. С. 32–41.

10. Соколенко Л. О., Швець В. О. Прикладні задачі, призначені для вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі*. 2014. № 4. С. 34–40.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 2.
Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ
та змістової лінії «Елементи комбінаторики,
теорії ймовірностей і математичної
статистики» та наукові основи їх навчання

Тема 6. Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики

Мета навчання: систематизація знань студентів, пов'язаних з поняттям *функція*, яке покладено в основу сучасного шкільного курсу математики.

Завдання.

1) Аналіз курсу шкільної математики з точки зору фундаментальних математичних ідей: *відповідність, відображення, функція*.

2) Показ розвитку поняття «*функція*», яке відіграє провідну роль в курсі сучасної шкільної математики.

3) Розкриття ролі і місця понять «*функція*» та «*відображення*» у шкільному та вузівському курсі математики.

4) Сприяння усвідомленню студентами теоретико-множинного та логічного аспектів у викладі теми, яка відноситься до теоретичних основ шкільної математики.

5) Проведення порівняльного аналізу означень загальнонаукових понять, пов'язаних з функцією з означеннями цих понять у ШКМ.

6) Розгляд *основних елементарних та елементарних* функцій і їх класів, класифікації функцій за їх будовою та властивостями.

7) З'ясування спільних підходів та особливостей, які використовують під час навчання елементарних функцій та їх властивостей у шкільному курсі математики та вузівських курсах «Математичний аналіз», «Вища математика».

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Напрями які існують у тлумаченні поняття «функція» та їх суть.	[12]
2	Означення поняття « <i>функція</i> » у діючих шкільних підручниках. Поняття « <i>відображення</i> » з яким отожднюється поняття <i>функції</i> в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу.	[3.23] – [3.28]
3	Означення поняття « <i>відповідність</i> » між множинами у різних посібниках для ЗВО. Функціональна відповідність.	[3], [6], [8].

4	Використання методу доцільних задач перед введенням поняття « <i>відображення</i> ». Математичні поняття, пов'язані з поняттям « <i>відображення</i> », введення яких ця задача робить більш наочним та сприяє їх формуванню.	[8]
5	Формулювання означення <i>ін'єктивної, сюр'єктивної, бієктивної функції</i> на теоретико-множинній мові. Приклади.	[8]
6	<i>Обернене відображення</i> . Означення, приклад, умова існування.	[8]
7	Ототожнення понять « <i>функція</i> » та « <i>відображення</i> » у курсі вищої математики. Різні означення <i>функції</i> у вузівських підручниках та посібниках, родові поняття, відмінності у означеннях. <i>Числова функція</i> .	[3], [8], [17] – [19], [21]
8	Сталі, рівні (тотожні функції). Приклади.	[3], [8], [17] – [19], [21]
9	Найпоширеніші <i>способи задання функції</i> у шкільному курсі математики та у вузівському курсі вищої математики.	[3], [8], [17] – [19], [21] [3.23] – [3.28]
10	Основні елементарні функції. Класи елементарних функцій. Класифікація функцій за їх <i>будовою</i> (арифметичні операції над функціями, оборотна та обернена функції, складна функція або <i>суперпозиція</i> чи <i>композиція</i> функцій). Класифікація функцій за їх <i>властивостями</i> (обмежені й необмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні функції).	[3], [8], [17] – [19], [21] та ін.
11	Спільні підходи та особливості, які існують під час навчання елементарних функцій у шкільному курсі математики та вузівському курсі вищої математики.	[8], [17] – [19], [21], [3.23] – [3.35], [5], [7], [9], [10], [11], [13] – [16], [20]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1°. Які два напрями існують у тлумаченні поняття функція? Розкрийте їх суть.

2. Як означається поняття «*функція*» у діючих шкільних підручниках?

3. Нагадайте означення поняття «*відповідність*» між множинами, яке сформульовано у різних посібниках для ЗВО, зокрема [3], [6], [8]. Яку відповідність називають *функціональною*? Наведіть приклади.

4. Які синоніми терміну «*функція*» зустрічаються в різних розділах математики?

5. Чим відрізняється інтуїтивний опис поняття «*відображення*» від теоретико-множинного означення? Сформулюйте інтуїтивний опис поняття «*відображення*».

6. Запропонуйте методику використання **методу доцільних задач** на етапі мотивації під час формування поняття «*відображення*». Наведіть приклад такої задачі.

7. Нагадайте теоретико-множинне означення поняття «*відображення*», яке розглядається в курсі вищої математики. Що таке «*область визначення відображення*», «*образ відображення (функції)*»? Чим є образ відображення множини A у множину B ?

Введення яких математичних понять, розглянута на етапі мотивації задача, робить більш наочним?

Які види відображень крім згаданого (відображення множини A у множину B) розглядаються в курсі вищої математики? Як це відбувається?

8. Який вид відображення розглядається в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу?

9. Виділіть **види відображень**, нагадайте їх означення та наведіть відповідні приклади.

10. Яке відображення називається *оберненим*? Сформулюйте умову його існування та наведіть приклад оберненого відображення.

11°. Які функції називаються *сталими*? Які функції називаються *рівними (тотожними)*? Наведіть приклади таких функцій.

12°. Які найпоширеніші *способи задання функції* у шкільному курсі математики та у вузівському курсі вищої математики?

13. Які функції вважають *основними елементарними*? Які функції вважають *елементарними*? Наведіть приклади неелементарних функцій.

14. Як здійснюється **класифікація елементарних функцій** за їх будовою?

15°. Яку функцію називають *суперпозицією (композицією)* функцій або **складною функцією**?

16°. Як здійснюється класифікація функцій за їх **властивостями**? Зробіть **порівняння**, щодо навчання властивостей функцій у ШКМ та в курсі вищої математики (зокрема у вступі до математичного аналізу).

17. В чому полягає одне з основних завдань навчання функціональної змістової лінії ШКМ?

18. Які характеристики функції можна з'ясувати засобами елементарної математики?

19. Знайдіть область визначення функцій [8, §2.1, № 6 (14, 15, 20, 23, 25)]:

$$14) y(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}; \quad 20) y(x) = \lg \frac{x+1}{x}; \quad 25) y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}.$$

$$15) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+6}}; \quad 23) y(x) = \sqrt{1-x} + \lg(x-1);$$

Яким чином відбувається ускладнення завдань?

20. Розгляньте алгоритм застосування *області визначення функцій* до розв'язування рівнянь та нерівностей. Ознайомтесь з прикладами розв'язування рівнянь та нерівностей.

21. Які методи *знаходження множини значень функції* є найпоширенішими у ШКМ? Розгляньте приклади їх використання.

22. Розгляньте теоретичну основу застосування *обмеженості функцій* (*множини значень*) до розв'язування деяких рівнянь та нерівностей [10], [11], [20]. Ознайомтесь з алгоритмами розв'язування рівнянь та нерівностей та відповідними прикладами.

23. На що саме звертається увага під час навчання *парності та непарності функцій* в курсі алгебри і початків аналізу? Згадайте типові задачі ШКМ. В чому їх особливості? Які питання залишаються осторонь?

24. Які існують основні типи задач на доведення *монотонності функцій* елементарними способами? Які з них розглядаються у ШКМ?

25. Розгляньте теоретичну основу використання *зростання і спадання функцій* до розв'язування деяких рівнянь [7], [10], [11], [20]. Ознайомтесь з відповідними прикладами.

26. Які існують основні типи задач на дослідження *періодичності функцій*? Які з них розглядаються у ШКМ?

27°. Яку роль відіграють прикладні задачі під час навчання елементарних функцій курсу алгебри і початків аналізу старшої школи?



Відповіді та вказівки до контрольних запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. Класичний та сучасний підходи у тлумаченні поняття функція [12, с. 237].

2. На сучасному етапі поняття «*функція*» означається через поняття «*залежності*», «*змінної*», «*правила*». У підручнику Мерзляка А.Г. та ін. «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу [3.23] вказується, що слова «*відображення*» і «*функція*» є синонімами. При цьому йдеться про **відображення** множини X на множину Y .

В означенні функції істотними є такі два моменти: 1) вказування області X зміни аргументу; 2) встановлення правила або закону відповідності між змінними x та y .

3. **Означення** [8, с. 32]. **Відповідністю** між множинами A і B називають деяку множину пар (x, y) , де $x \in A$, а $y \in B$. При цьому кажуть, що елемент y відповідає елементу x .

Приклад 1. Якщо $A = \{1, 3\}$, а $B = \{2, 4\}$, то $\Gamma = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2)\}$ – одна з можливих відповідностей між множинами A і B .

Далі з існуючих відповідностей між непорожніми множинами A і B слід згадати так звані **функціональні відповідності**.

Означення [9, с. 8]. **Функціональна відповідність** це така відповідність коли кожному елементу $x \in A$ відповідає єдиний елемент $y \in B$, який називають **образом елемента** $x \in A$.

Отже, Γ – функціональна відповідність, якщо $\Gamma \subset A \times B$ і $\forall x \in A \exists! y \in B : (x, y) \in \Gamma$, тобто будь-які різні пари, що утворюють Γ , мають різні перші координати.

Приклад 2. Якщо $A = \{1, 3\}$ і $B = \{2, 4\}$, то відповідності $\Gamma_1 = \{(1, 2), (3, 2)\}$, $\Gamma_2 = \{(1, 4), (3, 4)\}$, $\Gamma_3 = \{(1, 2), (3, 4)\}$ та $\Gamma_4 = \{(1, 4), (3, 2)\}$ є функціональними, а будь-яка інша відповідність між множинами A і B не є функціональною.

4. Залежно від природи множин термін «функція» в різних розділах математики має ряд синонімів: *відображення, перетворення* [1], [2], *морфізм, оператор, функціонал*.

5. Інтуїтивний опис: Відображення – це правило, яке кожному елементу з першої множини (*області визначення*) ставить у відповідність один і тільки один елемент з другої множини.

6. Задача. Нехай маємо деяку вибірку людей $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ та двохметрову лінійку з поділками, які є елементами множини $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{199}, y_{200}\}$. Результати вимірювання зросту людей представте у вигляді графіка відповідності.

Розв’язання. В результаті вимірювання зросту людей може трапитись, що дві або більше людини мають один і той самий зріст, тобто можливе існування пар з однаковою другою компонентою, наприклад $(x_1, y_{165}), (x_2, y_{165})$. Можливо, що деякі елементи множини B не будуть задіяні (у даній вибірці немає людей які мали б зріст, наприклад $y_3, y_9, \dots, y_j, j = \overline{1, 200}$). Неможливе існування пар з однаковою першою компонентою, оскільки одна людина не може мати два різні зрости.

Як приклад, графік відповідності може бути таким $\Gamma(f) = \{(x_1, y_{165}), (x_2, y_{165}), (x_3, y_{178}), (x_4, y_{172}), (x_5, y_{182})\}$. Множина A називається **областю визначення** відображення f , а множина $B_1 = \{y_{165}, y_{172}, y_{178}, y_{182}\}$ – **образом відображення (функції)**.

7. Теоретико-множинне означення [8, с. 32]: **Відображенням** множини A у множину B називають таку **відповідність** між A і B , для якої кожному елементу $x \in A$ відповідає єдиний елемент $y \in B$, який називають **образом елемента** x або **значенням відображення** у точці x і позначають $y = f(x)$. Саме відображення позначають $f : A \rightarrow B$, або $A \rightarrow B$, або $y = f(x), x \in A, y \in B$, і називають ще **функцією** з множини A у множину B .

Для відображення (функції) $f: A \rightarrow B$ множину A називають **областю визначення** і позначають $D(f)$, а довільний елемент $x \in A$ називають **незалежною змінною**. Якщо $A \subset R$ і $B \subset R$, то відображення $f: A \rightarrow B$ називають **функцією дійсної змінної**.

З допомогою розглянутої на етапі мотивації задачі легко пояснити, що являють собою **область визначення відображення**, **образ відображення (функції)**, а також **факт** про те, що образ відображення множини A у множину B є підмножиною множини B ($B_1 \subset B$).

Крім згаданого відображення множини A у множину B в курсі вищої математики розглядають **відображення A на B , взаємно однозначне відображення A на B , обернене відображення** [8, с. 32].

При відображенні A на B образ відображення $f(A) = B$.

8. У ШКМ під час означення функції про множину B_1 не згадують. Виходячи з означення поняття **функції**, яке дається у шкільних підручниках, зокрема підручнику Мерзляка А. Г. «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу [3.23] можна зробити висновок про те, що множина Y не містить інших елементів крім тих які відповідають деяким значенням x . Тобто кожний елемент множини Y відповідає деякому елементу $x \in X$. Отже, розглядається відображення множини X **на множину Y** .

9. Означення 1. Нехай маємо множини A та B . Якщо $(\forall x_i, x_j \in A) \wedge x_i \neq x_j, \quad f(x_i) \neq f(x_j)$ то $y = f(x)$ є **ін'єктивним відображенням (функцією)**.

Приклад 1. Нехай $A = \{3, 2, 6, 7\}$; $B = \{28, 12, 4, 9, 11\}$, $f: A \rightarrow B$ – це відображення, яке кожному числу з A ставить у відповідність найменше спільне кратне цього числа і числа 4, яке входить до множини B . Отже, маємо $f(3) = 12$, $f(2) = 4$, $f(6) = 12$, $f(7) = 28$.

Ін'єктивне відображення – це відображення f множини A в множину B , при якому f установлює **взаємно однозначну відповідність** між множиною A і підмножиною $f(A) \subset B$.

Означення 2. Нехай маємо множини A та B . Якщо $(\forall y_j \in B) (\exists x_i \in A) f(x_i) = y_j$, то $y = f(x)$ є **сюр'єктивною функцією**.

Приклад 2. Якщо $f: \{1, 3\} \rightarrow \{2, 4\}$, то f відображення множини $\{1, 3\}$ на множину $\{2, 4\}$ тоді й тільки тоді, коли $\Gamma(f) = \{(1, 2), (3, 4)\}$ або $\Gamma(f) = \{(1, 4), (3, 2)\}$.

Сюр'єктивне відображення, або накладання – відображення однієї множини **на** другу. Іншими словами, відображення $f: A \rightarrow B$ множини A на множину B називається **сюр'єкцією**, якщо будь-який елемент y з B має прообраз, тобто **образ усієї множини A збігається з множиною B ($f(A) = B$)**.

Означення 3. Нехай маємо множини A та B . Якщо $(\forall y_j \in B) (\exists! x_i \in A) f(x_i) = y_j$, то $y = f(x)$ є бієктивною функцією.

Приклад 3. Нехай $M_1 = \{A, B, C\}$ – множина вершин трикутника, $M_2 = \{a, b, c\}$ – множина сторін того самого трикутника. Тоді f – бієктивне відображення якщо $\Gamma(f) = \{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Бієктивне відображення – це взаємно однозначне відображення однієї множини на другу. Є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним.

Через $f: A \leftrightarrow B$ позначають взаємно однозначне відображення A на B , тобто таке відображення, для якого $f(A) = B$ і $f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$ з множини A [8, с. 32].

10. Умовою існування оберненого відображення є взаємна однозначність відображення A на B .

Означення [8, с. 32]. Якщо $f: A \leftrightarrow B$, то для нього існує так зване *обернене відображення* $f^{-1}: B \leftrightarrow A$, яке визначається умовою $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Обернене відображення називають також *оберненою функцією* і позначають $x = f^{-1}(y)$, $y \in B$, $x \in A$ або $y = f^{-1}(x)$, $x \in B$, $y \in A$.

Приклад. Якщо для відображення $f: \{1, 2\} \leftrightarrow \{3, 4\}$ його графік $\Gamma(f) = \{(1, 3), (2, 4)\}$, то відображення $f^{-1}: \{3, 4\} \leftrightarrow \{1, 2\}$ має графік $\Gamma(f^{-1}) = \{(3, 1), (4, 2)\}$.

Коли відображення (функція) $f: A \rightarrow B$ не є взаємно однозначним, то вважають, воно не має оберненого відображення (функція f не має оберненої) у розумінні даного вище означення відображення (функції).

Контрприклад. Будь-яке відображення $f: \{3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2\}$ не має оберненого відображення, функція $y = x^4$, визначена на R , не має оберненої функції.

11°. [3], [8], [17], [19], [21].

12°. [3], [8], [17], [19], [21].

13. Основними елементарними функціями вважаються такі функції: 1) стала $y = C$, $C = \text{const}$; 2) степенева; 3) показникова; 4) логарифмічна; 5) тригонометричні; 6) обернені тригонометричні [3, с. 125].

З основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозиції утворюють функції, які називають *елементарними*.

Серед елементарних функцій виділяють такі класи: 1) *многочлени* (або *цілі раціональні функції*); 2) *раціональні* (або *дробово-раціональні*) *функції*, які є відношеннями двох многочленів; 3) *ірраціональні функції* – це

функції, що не є раціональними; 4) *алгебраїчні функції* $y = f(x)$, що є розв'язками рівняння $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n = 0$, коефіцієнти якого є цілими раціональними функціями; 5) *трансцендентні функції* [3, с. 125].

Функція Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $y = |x|$, $y = \operatorname{sgn} x$ відносяться

до неелементарних.

14. Класифікація функцій за їх *будовою* (арифметичні операції над функціями, *оборотна* та *обернена* функції, *складна функція* або *суперпозиція* чи *композиція* функцій) [3], [8], [17], [19].

15°. [8, с. 33].

16. Класифікація функцій за їх *властивостями* (обмежені й необмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні функції) [3], [8], [17], [19].

19. 14) $x \in \mathbb{R}$; **15)** $x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$; **20)** $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; **23)** $\emptyset$; **25)** [1; 4].

20. Алгоритм застосування *області визначення функцій* до розв'язування рівнянь та нерівностей.

1. Перенесіть всі члени рівняння або нерівності в ліву частину.

2. Розгляньте функцію $f(x)$ і знайдіть її область визначення $D(f)$.

3. З'ясуйте який з випадків має місце:

3.1. Якщо $D(f) = \emptyset$, то рівняння або нерівність розв'язків не має;

3.2. Якщо $D(f) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, то дійсні розв'язки даного рівняння (нерівності) знаходяться серед чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Необхідно перевірити, які з цих чисел є розв'язками рівняння (нерівності).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[6]{1-x^2} + \sqrt[8]{x^4-1} = 5^x - \log_3(2+x^4).$$

Розв'язання.

$$1) \sqrt[6]{1-x^2} + \sqrt[8]{x^4-1} - 5^x + \log_3(2+x^4) = 0.$$

$$2) \text{ Розглянемо функцію } f(x) = \sqrt[6]{1-x^2} + \sqrt[8]{x^4-1} - 5^x + \log_3(2+x^4) \text{ і}$$

$$\text{знайдемо її область визначення } D(f): \begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x^4-1 \geq 0, \\ 2+x^4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1, \\ |x| \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=-1. \end{cases}$$

Отже, $D(f) = \{-1, 1\}$.

3) Зробивши перевірку, з'ясовують що жодне з цих чисел не є коренем рівняння.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\arcsin(x^2 + 1) < 3$.

Розв'язання.

1) $\arcsin(x^2 + 1) - 3 < 0$.

2) Розглянемо функцію $f(x) = \arcsin(x^2 + 1) - 3$ і знайдемо її область визначення $D(f)$: $-1 \leq x^2 + 1 \leq 1$, то $-2 \leq x^2 \leq 0$. Звідси $x = 0$.

Отже, якщо нерівність має розв'язок, то їм є число нуль.

Перевірка. $\arcsin(0 + 1) < 3$, що правильно, оскільки $\frac{\pi}{2} < 3$.

Відповідь. $x = 0$.

21. До методів знаходження множини значень функції, які є найпоширенішими у ШКМ відносяться: 1) найпростіші: а) використання простіших оцінок та обмежень ($x^2 \geq 0$, $2^x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$); б) виділення повного квадрату; в) перетворення тригонометричних виразів; 2) метод оцінки; 3) метод введення параметра; 4) метод оберненої функції [20, с. 7].

Алгоритм знаходження області значень функції *методом введення параметра*:

1. Вибирають довільне $a \in E(y)$.

2. Прирівнюють функцію (аналітичний вираз) до a .

3. Знаходять всі значення a при яких складене у п.2 рівняння має розв'язки.

4. Множина цих значень a і буде $E(y)$.

Теоретична основа методу оберненої функції [20, с. 7]: Множина значень функції складається лише з тих значень y , для кожного з яких існує принаймні одне значення x , що задовольняє рівняння $f(x) = y$. Якщо рівняння $f(x) = y$ можна розв'язати відносно x , тобто записати його у вигляді $x = \varphi(y)$, то в множину значень функції $f(x)$ увійдуть усі ті значення y , для яких вираз $\varphi(y)$ має смисл.

Задача. Знайдіть множину значень функції, використовуючи вказаний метод: 1) метод простіших оцінок та обмежень: а) $y(x) = x^2 + 2$; б) $y(x) = 3x - x^2$; 2) метод виділення повного квадрату: а) $y(x) = x^2 - 10x + 9$; б) $y(x) = 5x^2 + 3x + 2$; 3) метод перетворення тригонометричних виразів: $y(x) = \sin x \cdot \cos x (1 - 2\sin^2 x)$; 4) метод оцінки:

а) $y(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} + 1$; б) $y(x) = 2^{3\cos x + 4\sin x}$; 5) метод введення параметра:

$y = \frac{3x+1}{2x+3}$; 6) метод оберненої функції [20, с. 7]: а) $y = \lg(1 - 2\cos x)$; б) $y = \lg(2\sin x - 1)$.

Розв'язання 6а. Виразимо x через y : $1 - 2 \cos x = 10^y$, $\cos x = \frac{1 - 10^y}{2}$.

Оскільки $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $-1 \leq \frac{1 - 10^y}{2} \leq 1$. Звідси $-1 \leq 10^y \leq 3$. $10^y > 0$, то маємо $0 < 10^y \leq 3$. Отже, $y \leq \lg 3$.

Відповідь: 1а. $[2; +\infty)$; 1б. $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right]$. 2а. $[-16; +\infty)$; 2б. $\left[1\frac{11}{20}; +\infty\right)$.
3. $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. 4а. $\left[\frac{4}{3}; 4\right]$; 4б. $\left[\frac{1}{32}; 32\right]$. 5. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. 6а. $(-\infty; \lg 3]$; 6б. $(-\infty; 0]$.

22. Теоретичною основою застосування обмеженості функцій (множини значень) до розв'язування деяких рівнянь та нерівностей є такі факти:

1) [20, с.8]. Маємо рівняння $f(x) = g(x)$, областю визначення якого є множина $X = X_1 \cap X_2$. Y_1, Y_2 – множини значень функцій $f(x), g(x)$ відповідно.

Якщо $x_1 \in X$ є коренем даного рівняння, то виконується числова рівність $f(x_1) = g(x_1)$ і тому $f(x_1) \in Y_1$, $g(x_1) \in Y_2$. Тоді множини Y_1 і Y_2 мають спільний елемент, тобто $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$.

З наявності спільних елементів у множин Y_1 і Y_2 не випливає, що рівняння має корінь. Але якщо множини значень функцій $f(x)$ і $g(x)$ не мають спільних елементів, то рівняння коренів не має.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$.

Розв'язання. Оцінимо значення лівої та правої частини рівняння. Нехай $f(x) = \sin(x^3 + 2x^2 + 1)$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$. $(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$.
 $g(x) = x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2$.

Отже, $f(x) \leq 1$, $g(x) \geq 2$, то рівняння коренів не має.

Відповідь. рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3^x + 3^{-x} = \log_2 4 + \log_3 \cos x$.

Розв'язання. Оцінимо значення лівої та правої частини рівняння. Нехай $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, $g(x) = \log_2 4 + \log_3 \cos x$. $(\forall x \in \mathbb{R}) 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2$ $(a + \frac{1}{a} \geq 2)$.

$g(x) = \log_2 4 + \log_3 \cos x = 2 + \log_3 \cos x \leq 2$, оскільки $0 < \cos x \leq 1$, а $\log_3 \cos x \leq 0$.

Таким чином маємо, $f(x) \geq 2$, $g(x) \leq 2$. Рівність можлива лише при $x = 0$ ($f(0) = g(0) = 2$).

Відповідь. $x = 0$.

2) [20, с. 8]. Якщо множини значень функцій $f(x)$ і $g(x)$, відповідно Y_1 і Y_2 являють собою неперервні числові проміжки і $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, то для будь-якого значення x із спільної частини областей визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$ значення цих функцій перебувають між собою у відношенні тільки більше або тільки менше.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6}$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$X_1 = [-1; +\infty)$, $X_2 = \mathbb{R}$, то $X = X_1 \cap X_2 = [-1; +\infty)$.

$Y_1 = [\sqrt{5}; +\infty)$, $Y_2 = (0; 2]$, а $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Тому $f(x) > g(x)$ ($\forall x \in [-1; +\infty)$).

Відповідь. $x \in [-1; +\infty)$.

3) [20, с. 8-9]. Якщо у рівнянні $f(x) = g(x)$ одна з функцій функція-константа, що дорівнює a , то необхідною і достатньою умовою існування хоча б одного кореня цього рівняння є умова $a \in Y$, де Y – множина значень другої з цих функцій.

Приклад 4. З'ясувати, чи мають наступні рівняння корені:

а) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 4$,

б) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-5} = 2$.

Розв'язання.

а) Оскільки множиною значень функції $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$ є проміжок $Y_1 = [\sqrt{5}; +\infty)$, а $4 \in Y_1$ то рівняння має корінь;

б) Оскільки множиною значень функції $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-5}$ є проміжок $Y_1 = [\sqrt{6}; +\infty)$, а $2 \notin Y_1$, то рівняння коренів не має.

4) [11, с. 135]. Якщо функція $f(x)$ набуває найбільшого чи найменшого значення, яке дорівнює A , то для розв'язування рівняння $f(x) = A$ достатньо дослідити, при яких значеннях x функція $f(x)$ досягає свого найбільшого чи найменшого значення.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{5+4x-x^2} = 5$.

Розв'язання. Виділивши повні квадрати з підкоренових виразів, рівняння переписують у вигляді: $\sqrt{4-(x-2)^2} + \sqrt{9-(x-2)^2} = 5$. Максимальне значення лівої частини дорівнює 5 та досягається лише при $x = 2$.

Відповідь. 2.

23. Основна увага в старшій школі приділяється засвоєнню означень, алгоритму дослідження функції на парність (непарність); властивостей графіка парної (непарної) функції; властивостей пов'язаних з арифметичними операціями над функціями, які розглядаються на спільній області визначення функцій.

Задача. Визначте, які з функцій є ні парними ні непарними? На якому кроці алгоритму це з'ясовується?

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = \frac{x}{x}; & \text{в) } y = \sqrt{x^2 - 1}; & \text{д) } y = 5 \operatorname{tg}^5 5x | \operatorname{tg} 5x | \\ \text{б) } y = \frac{x-2}{x-2}; & \text{г) } y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}; & \text{е) } y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right). \end{array}$$

Залишаються осторонь питання 1) існування і єдиності функції, яка є одночасно парною і непарною; 2) зображення функції $f(x)$, з симетричною областю визначення, у вигляді суми парної функції $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ та непарної функції $\phi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ [9, с. 31]; 3) парності (непарності) складеної функції.

24. До основних типів задач на доведення монотонності функцій елементарними способами відносять: 1) доведення монотонності функції $f(x)$ на множині X безпосередньо за означенням із застосуванням основних властивостей нерівностей; 2) доведення монотонності за означенням за допомогою класичних нерівностей; 3) доведення та застосування основних властивостей арифметичних дій з монотонними функціями; 4) доведення та застосування властивостей композицій монотонних функцій та ін. [5, с. 77-80].

Розглянемо приклади окремих з них, які розглядаються під час навчання курсу алгебри та алгебри і початків аналізу на різних рівнях.

Розпочнемо з прикладу задачі 1-го типу.

Приклад 1. Доведіть, за означенням, що функція $y = \frac{5}{2x+1}$ спадає на проміжку $(-\infty; -0,5)$.

Доведення. Нехай $x_1 \in (-\infty; -0,5)$, $x_2 \in (-\infty; -0,5)$, $x_1 < x_2$. Знайдемо $y(x_2) - y(x_1)$.

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= \frac{5}{2x_2+1} - \frac{5}{2x_1+1} = 5 \left(\frac{1}{2x_2+1} - \frac{1}{2x_1+1} \right) = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{2(x_1 - x_2)}{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{\left(x_2 + \frac{1}{2}\right)\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$. $x_2 + \frac{1}{2} < 0$, $x_1 + \frac{1}{2} < 0$. Отже,
 $y(x_2) - y(x_1) < 0$.

Звідси, $y(x_2) < y(x_1)$, і тому за означенням робимо висновок, що функція спадає на проміжку $(-\infty; -0,5)$.

Для розв'язування задач **3-го типу** застосовують такі *властивості монотонних функцій* [4, с.137].

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задані на одній множині M , $M \subset X$, тоді:

1. Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на M і $c = \text{const}$, то:
а) функція $f(x) + c$ зростає (спадає) на M ; б) функція $c f(x)$, $c > 0$ зростає (спадає) на M ; в) функція $c f(x)$, $c < 0$ спадає (зростає) на M .

Зокрема, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на M , то функція $-f(x)$ спадає (зростає) на M .

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ зростають (спадують) на M , то функція $f(x) + g(x)$ також зростає (спадає) на M .

3. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ невід'ємні на M і обидві зростають (спадують) на M , то функція $f(x) \cdot g(x)$ також зростає (спадає) на M .

Навпаки, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ від'ємні на M і обидві зростають (спадують) на M , то функція $f(x) \cdot g(x)$ спадає (зростає) на M .

Зокрема, якщо $f(x) > 0$ і функція $f(x)$ зростає (спадає) на M , то $f^2(x)$ також зростає (спадає) на M ; якщо ж $f(x) < 0$ і функція $f(x)$ зростає (спадає) на M , то $f^2(x)$ спадає (зростає) на M .

4. Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на M і $f(x) > 0$, то функція $1/f(x)$ спадає (зростає) на M .

Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на M і $f(x) < 0$, то функція $1/f(x)$ спадає (зростає) на M .

Приклад 2. Дослідіть на монотонність функцію $y = 3^x + \log_3 x$.

Розв'язання. $y(x) = f(x) + g(x)$, де $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$. На проміжку $(0; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ зростають. За властивістю 2 робимо висновок, що функція $y(x)$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Відповідь. функція $y(x)$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Для розв'язування задач **4-го типу** використовується теорема про *монотонність складної функції* [9, с. 35].

25. [3.23, с. 42] Теорема 6.3. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині $D(f)$, то рівняння $f(x) = a$, де a – деяке число, має не більше одного кореня.

Якщо одна з функцій f або g є зростаючою на множині $D(f) \cap D(g)$, а інша – спадною на цій множині, то рівняння має не більше одного кореня.

Приклад 1. [3.26, с. 77, № 10.26]. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x} = 4$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \geq 26$. Рівняння має єдиний корінь $x = 27$, оскільки функція $f(x) = \sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x}$ зростає на всій області визначення $x \geq 26$, як сума двох зростаючих функцій.

Відповідь. $x = 27$.

Приклад 2. [3.23, с. 48, № 139]. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \geq 5$. Рівняння має єдиний корінь $x = 9$, оскільки функція $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-5}$ зростає на проміжку $[5; +\infty)$, а функція $g(x) = 23 - 2x$ спадає на цьому проміжку.

26. До основних типів задач на дослідження періодичності функцій відносять: 1) задачі на наочно-інтуїтивне осмислення поняття періодичної функції, аналіз на періодичність по графікам; 2) завдання на осмислення формального означення періодичної функції; 3) задачі на пошук періоду та доведення періодичності функцій (для розв'язування яких необхідно: а) з інтуїтивно-наочних міркувань вгадати період; б) довести, що вгадане число є періодом функції); 4) основні задачі на доведення неперіодичності функцій; 5) доведення неперіодичності шляхом зведення до суперечливої системи співвідношень; 6) доведення загальних властивостей періодичних функцій; 7) задачі на застосування властивостей періодичних функцій для доведення періодичності, неперіодичності, дослідження на періодичність; 8) задачі для знаходження головного періоду для найпростіших тригонометричних функцій; 9) задачі на знаходження головного періоду функцій типу $f(kx+b)$, де $f(x)$ – періодична нетригонометрична функція; 10) знаходження періоду і головного періоду суми декількох періодичних функцій з сумірними періодами; 11) задачі з параметром; 12) задачі на дослідження періодичних функцій з несумірними періодами [5, с. 81-86].

Розглянемо приклади задач 1-го, 2-го, 4-го, 5-го, 9-го, 10-го типів, які розглядаються під час навчання курсу алгебри та алгебри і початків аналізу на різних рівнях.

Приклад 1 (задача 1-го типу). Динамічна модель зміни чисельності популяції.

В екологічній системі чисельність популяції хижаків і поживи змінюється періодично. На рис. 1 показано співвідношення між поживою та хижаками.

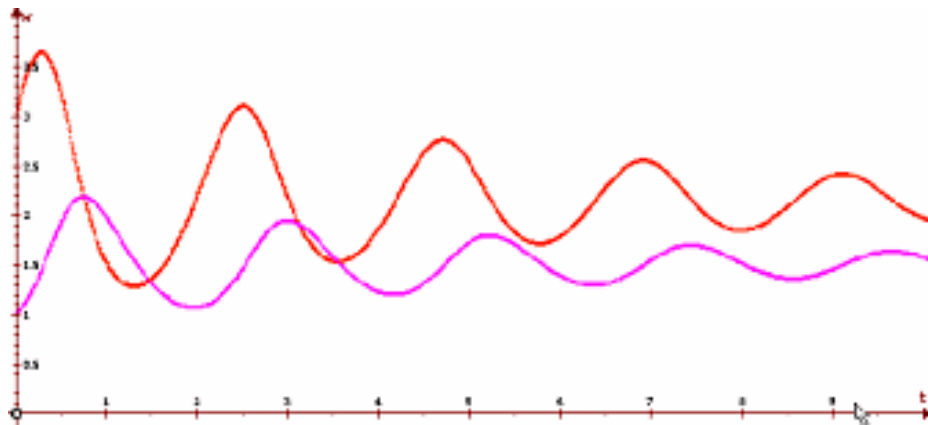


Рис. 1.

Приклад 2 (задача 2-го типу). [3.23, с. 243, № 741(3)]. Довести, що число $T = 3$ є періодом функції $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

Доведення.

Оскільки $f(x + 3) = \operatorname{ctg} \pi(x + 3) = \operatorname{ctg} (\pi x + 3\pi) = \operatorname{ctg} \pi x = f(x)$, і $T \neq 0$, то на основі означення робимо висновок, що $T = 3$ є періодом функції $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

Приклад 3 (задачі 9-го та 10-го типу). Знайти період функції [8, с. 48, № 18 (3, 9, 13); № 23(6)].

$$18.3. y = \cos \left(3x + \frac{\pi}{2} \right); \quad 18.9. y = |\sin x|; \quad 18.13. y = \sin^2 4x;$$

$$23.6. y = \sin 2x + \sin 4x + \cos 6x.$$

Причиною неперіодичності функцій може стати: а) структура області визначення функції; б) скінченна кількість нулів або точок екстремумів; в) монотонність функції на нескінченному проміжку.

Приклад 4 (задача 4-го типу). Доведіть, що функція $f(x) = x^2 + \sin x$ не є періодичною.

Доведення. Зрозуміло, що $x = 0$ – нуль функції. При $|x| > 1$ функція нулів не має.

Отже, функція має скінченну кількість нулів і не є періодичною.

Розглянемо приклад 5-го типу задач.

Приклад 5 (задача 5-го типу). Доведіть, що функція $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ не є періодичною.

Доведення. Якщо f має період T , то

$$\cos(x + T) + \cos \sqrt{2}(x + T) = \cos x + \cos \sqrt{2}x. \quad (1)$$

Підставивши в (1) $x = 0$, отримаємо $\cos T + \cos \sqrt{2}T = 2$.

Оскільки $|\cos T| \leq 1$, то це рівняння рівносильне системі:
$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos \sqrt{2}T = 1. \end{cases}$$

Звідки маємо $\begin{cases} T = 2\pi n, n \in Z, \\ \sqrt{2}T = 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

Якщо $n = k = 0$, то $T = 0$ розв'язок системи.

Якщо $n \neq 0$ і $k \neq 0$, то отримаємо $\sqrt{2} \cdot 2\pi n = 2\pi k$. $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$. Оскільки

$\frac{k}{n} \in Q$, то остання рівність є суперечливою.

На основі одержаного протиріччя робимо висновок про неперіодичність функції.

27°. [13, § 2.2.1, §2.2.2.], [14, Р II], [15], [16].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1. З'ясуйте до якого виду відносяться наступні функції: а) $R \xrightarrow{f} R$, де f визначається умовою $f(x) = x^2$ для довільного $x \in R$; б) $[0; +\infty) \xrightarrow{h} R$, де h визначається умовою $h(x) = x^2$ для довільного $x \in [0; +\infty)$; в) $[0; +\infty) \xrightarrow{g} [0; +\infty)$, де g визначається умовою $g(x) = x^2$ для довільного $x \in [0; +\infty)$.

2. Серед даних відображень $f: R \rightarrow R$ знайти відображення R на R :

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$; 3) $f(x) = 4x + 7$;

4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$; 5) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 6) $f(x) = \text{arcctg } x$;

7) $f(x) = 3x^5$; 8) $f(x) = \log_2(|x| + 2)$;

9) $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{якщо } x < 3, \\ x + 3, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

3. Які з відображень f є взаємно однозначними? Які множини є їх областю визначення та множиною значень?

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; 4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \sin x$; 6) $f(x) = \cos x$; 7) $f(x) = \text{arctg } x$; 8) $f(x) = \ln(|x| + 1)$.

4. Побудувати відображення обернені до тих, що дані:

1) $f(x) = x^2, x \in [0; +\infty)$; 2) $f(x) = x^3, x \in R$; 3) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in R/\{0\}$.

5. Наведіть приклад функції, заданої аналітично, у якої областю визначення є: а) множина, яка складається з двох чисел; б) множина, яка складається з трьох чисел; в) відрізок $[0; 1]$ і точка $x = 2$.

6. Знайдіть область визначення функцій [8, § 2.1, № 6 (30, 32, 34, 42)]:

30) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$;

38) $y = \sqrt{\arccos(\lg x)}$;

32) $y = \lg(\sin(x-3)) + \sqrt{16-x^2}$;

42) $y = \arccos(2 \sin x)$.

34) $y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

7. Застосуйте область визначення функцій до розв'язування рівняння:

а) $\sqrt{9-x^2} = \log_3(|x|-3)$;

б) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-2x} = 0$;

в) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sqrt{|x|-1}$.

8. У чому полягає суть методу послідовного знаходження значень складних аргументів функції. Розгляньте застосування цього методу до знаходження множини значень функції $y = \log_{0,5}(4 - 2 \cdot 3^x - 9^x)$.

9. Чи можна, використовуючи метод оцінок, на основі одержаної оцінки, наприклад нерівності $a \leq f(x) \leq b$, робити висновок, що множиною значень функції є відрізок $[a; b]$?

10. Застосуйте теоретичний матеріал, викладений у пункті 22.1 даної теми (перша самооцінка) до розв'язування рівняння $\sin x + 2 \sin 2x = 4 + \sin 17x$.

11. Застосуйте теоретичний матеріал, викладений у пункті 22.3 даної теми до розв'язування рівняння $\sin x + \sin 5x + \sin 9x + \sin 13x = 4$.

12. Застосуйте метод оцінки значень лівої та правої частини рівняння для розв'язування рівняння $4^{\sin^2(\pi x)} + 4^{\cos^2(\pi x)} = -8x^2 + 12|x| - \frac{1}{2}$.

13. Які особливості існують під час навчання властивостей обмеженості та необмеженості функцій у шкільному та вузівському курсі математики?

14. Наведіть приклад елементарної функції, яка задовольняє таку умову:

а) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

б) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

в) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$;

г) $f(xy) = f(x) + f(y)$.

15. Наведіть приклад парної функції, визначеної на всій числовій прямій, яка набуває як додатних так і від'ємних значень, але в жодній точці не перетворюється на нуль.

16. Розгляньте теорему (про зображення функції з симетричною областю визначення у вигляді суми парної та непарної функцій) [9, с. 31]. Запропонуйте приклад її застосування.

17. Якою функцією буде: а) сума скінченної кількості парних функцій; б) сума скінченної кількості непарних функцій; в) добуток скінченної кількості парних функцій; г) добуток скінченної кількості непарних функцій; д) сума парної та непарної функцій; е) добуток парної та непарної функцій? Обґрунтуйте відповідь, використовуючи означення парної та непарної функцій.

18°. Сформулюйте відповідні твердження для частки функцій та доведіть їх.

19. Розгляньте теорему про парність і непарність складної функції [9, с. 32-33]. Запропонуйте приклад її застосування.

20°. Використайте властивість монотонності до розв'язування рівняння $(2 + \sqrt{3})^x + 1 = (2\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$.

21°. Розгляньте теорему про монотонність складної функції [9, с. 35]. Запропонуйте приклад її застосування.

22°. Розгляньте загальні властивості періодичних функцій у діючих шкільних підручниках 10-го класу [3.26], [3.27], посібнику [4, с. 157-159] та підберіть задачі на застосування властивостей періодичних функцій для доведення періодичності, неперіодичності, дослідження на періодичність функцій.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

1. а) Оскільки образ функції $f(R) = R_+$, де R_+ – множина всіх дійсних невід'ємних чисел, то ця функція *несюр'єктивна*. Вона *неін'єктивна* оскільки не виконується означення 1 (с. 69), наприклад $f(-2) = f(2) = 4$.

4. Розв'язання. 1) В даному випадку $x \rightarrow x^2$. Оберненим до нього відображенням є $x^2 \rightarrow x$. Маємо $\sqrt{x^2} \rightarrow \sqrt{x}$, $|x| \rightarrow \sqrt{x}$. Оскільки $x \in [0; +\infty)$, то $x \rightarrow \sqrt{x}$.

Відповідь. 1) $f^{-1}(y) = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$; 2) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{x}$ $x \in R$;
3) $f^{-1}(y) = \frac{1}{x}$, $x \in R/\{0\}$.

5. а) $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - x^4 - \frac{1}{9}}$. 6. 30) $D(y) : \bigcup_{n=0}^{\infty} [4\pi^2 n^2; (\pi + 2\pi n)^2]$;
 32) $D(y) : (3 - 2\pi; 3 - \pi) \cup (3; 4]$; 34) $D(y) : [0; 4]$; 38) $D(y) : [0; 10]$;
 42) $D(y) : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right]$. 7. **Відповідь.** а) рівняння розв'язків не має; б) $x = 5$; в) $x = 1$.

8. Щоб знайти множину значень складної функції $y = f(\varphi(x))$ доцільно скористатись множиною значень функцій $\varphi(x)$ та $f(x)$.

Розв'язання. Виділивши повний квадрат у підлогарифмічному виразі, одержимо $4 - 2 \cdot 3^x - 9^x = 5 - (3^x + 1)^2$. Використаємо згаданий метод до знаходження множини значень функції $y = \log_{0,5}(5 - (3^x + 1)^2)$.

Послідовно знайдемо множину значень її складних аргументів:

$$E(3^x) = (0; +\infty), \quad E(3^x + 1) = (1; +\infty), \quad E(-(3^x + 1)^2) = (-\infty; -1), \\ E(5 - (3^x + 1)^2) = (-\infty; 4).$$

Позначимо $t = 5 - (3^x + 1)^2$, де $t \in (-\infty; 4)$.

Отже, задача зводиться до знаходження множини значень функції $y = \log_{0,5} t$, де $t \in (-\infty; 4)$. Оскільки $t > 0$, то будемо шукати множину її значень на інтервалі $(0; 4)$.

$y = \log_{0,5} t$ на інтервалі $(0; 4)$ неперервна і спадає. При $t \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$, а при $t = 4$, $y = -2$. Отже, $E(y) = (-2; +\infty)$.

Відповідь. $(-2; +\infty)$.

9. Такий висновок можна робити якщо областю визначення неперервної функції $f(x)$ є деякий проміжок і $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ [3.29, с. 38].

У загальному випадку нерівність $a \leq f(x) \leq b$ лише означає, що множина значень функції належить відріzkу $[a; b]$.

Контрприклад. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$.

Розв'язання. Значення функції $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$ задовольняє нерівностям $-3 \leq f(x) \leq 3$, але не існує таких значень x , при яких функція набуває значення -3 . Тому на основі нерівності $-3 \leq f(x) \leq 3$ можна лише стверджувати про те, що $E(f) \subset [a; b]$.

Перепишемо $f(x)$ у вигляді $f(x) = 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1$.

Нехай $\cos x = z$, тоді $g(z) = 2z^2 + 2z - 1$. Оскільки $E(\cos x) = [-1; 1]$, то слід з'ясувати, яка множина значень квадратичної функції $g(z)$ на відріzkі $[-1; 1]$.

Графіком цієї функції є парабола з вершиною у точці $z_0 = -0,5$ і вітками напрямленими вгору. Маємо $g(z_0) = -1,5$, $g(-1) = -1$, $g(1) = 3$.

Якщо побудувати графік функції $g(z) = 2z^2 + 2z - 1$, то можна переконатись, що множина її значень на відрізку $[-1; 1]$ є відрізок $\left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Отже, множиною значень функції $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$ є відрізок $\left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

10. Відповідь. рівняння розв'язків не має. **11. Вказівка.** Ліву частину рівняння перетворіть в добуток та визначте множину значень одержаної функції. З'ясуйте при яких значеннях x буде виконуватись рівність $\sin 7x \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x = 1$. **Відповідь.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **12. Вказівка.** Для

оцінки значень лівої частини скористайтесь нерівністю $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Для оцінки значень правої частини дослідіть функцію $g(x) = -8x^2 + 12|x| - \frac{1}{2}$ та побудуйте її графік. **Відповідь.** $x = \pm \frac{3}{4}$.

13. У шкільному курсі алгебри і початків аналізу 10-го класу, який вивчається на поглибленому рівні розглядають поняття «обмежена функція» та «функція обмежена на множині» [3.27].

Означення	Приклад
Функцію f називають <i>обмеженою</i> , якщо існує число M таке, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $ f(x) \leq M$	$y = \arctg x$ – обмежена функція $ \arctg x < \frac{\pi}{2}$
Функцію f називають <i>обмеженою на множині</i> M , якщо існує таке число $c > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $ f(x) \leq c$	$g(x) = x^2$ – обмежена на відрізку $[-1; 2]$, оскільки $ g(x) < 5$

Не будь-яка функція визначена на відрізку є обмеженою.

Контрприклад. $y = \operatorname{ctg} x$, визначена на відрізку $[a; b]$, але не є обмеженою на цьому відрізку.

Теорема 40.3. (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.

Зауваження. Для проміжків виду $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження не справджується.

Контрприклад. $y = \frac{1}{x}$ – неперервна на проміжку $(0; a]$ проте вона не є обмеженою.

У курсі вищої математики вводяться також поняття функції *обмеженої зверху (знизу) на множині, необмеженої зверху (знизу) на множині, необмеженої на множині* [17, с. 23], [8, с. 45].

Задача. [8, с. 46, № 5 (1-3)]. Показати, що функція: 1) $y = \frac{1}{x^3}$ обмежена знизу на інтервалі $(0; 1)$; 2) $y = -5^x$ обмежена зверху на R ; 3) $y = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ обмежена на R .

14. а) $f(x) = 3^x$.

16. Теорема (про зображення функції з симетричною областю визначення у вигляді суми парної і непарної функцій) [9, с. 31]. Якщо область визначення функції f симетрична відносно точки $x = 0$, то існує єдина пара функцій φ та ϕ таких, що φ – парна, а ϕ непарна функції і

$$f(x) = \varphi(x) + \phi(x), \quad \forall x \in D(f) \quad (1)$$

Зауваження. Під час доведення з'ясовують, що $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, а $\phi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Приклад. $f(x) = 2^x$, $D(f) = R$. $f(x) = \varphi(x) + \phi(x)$, $\forall x \in D(f)$, де $\varphi(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ – парна функція, а $\phi(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ – непарна функція.

17. а) парна функція; в) парна функція; г) парна функція, якщо кількість множників парне число; непарна функція, якщо кількість множників непарне число.

19. Теорема [9, с. 32-33]. Складна функція є парною, якщо внутрішня функція парна або якщо внутрішня функція непарна, а зовнішня парна. Якщо внутрішня та зовнішня функції непарні, то складна функція є непарною.

Приклад. $g(x) = \cos^3 x$ – парна функція, оскільки $\cos x$ – парна. $q(x) = \sin^2 x$ – парна функція, оскільки внутрішня функція непарна, а зовнішня – парна. $\varphi(x) = \sin(\operatorname{ctg} x)$ – непарна, оскільки внутрішня і зовнішня функції непарні.

20°. Вказівка. Поділіть обидві частини рівняння на праву частину.
Відповідь. $x = 2$.

21°. Теорема про монотонність складеної функції [9, с. 35]. Нехай функція $y = f(t)$ монотонна на $\langle c, d \rangle$, а функція $t = \varphi(x)$ монотонна на $\langle a, b \rangle$ і $\varphi(x) \in \langle c, d \rangle \forall x \in \langle a, b \rangle$. Тоді функція $y = f(\varphi(x))$ монотонна на $\langle a, b \rangle$, а саме: а) зростає, якщо функції f і φ одночасно зростають або спадають; б) спадає, якщо одна з функцій f та φ зростає, а інша спадає.



Література

1. Боровик В. Н., Зайченко І. В., Рудник А. В. Математика. Практикум. Частина 1. Навчальний посібник. Чернігів, 2003. 126 с.
2. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник / В. Н. Боровик, І. В. Зайченко, М. М. Мурач, В. П. Яковець. Суми: ВТД «Університетська книга», 2003. 504 с.
3. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі: Посібник. Київ: Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
4. Задачі по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 608 с.
5. Кірман В. К. Вивчення функцій в класах фізико-математичного профілю. Посібник для вчителів. Дніпропетровськ: вид-во «Свідлер», 2009. 180 с.
6. Курс математики: Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ: Вища шк., 1995. 392 с.
7. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Просвещение, 1991. 352 с.
8. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Ляшенко та ін. Київ: Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
9. Михалін Г. О., Томащук О. П. Що повинен знати учитель математики про елементарні функції. Київ: УДПУ, 1995. 102 с.
10. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: Справочник. Москва: Изд-во МГУ, 1991. 144 с.
11. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. Київ: Видавництво А.С.К., 2004. 344 с.
12. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.
13. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.
14. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навч. посіб. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
15. Соколенко Л. О., Швець В. О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій в курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в сучасній школі*. 2013. № 12. С. 32–41.

16. Соколенко Л. О., Швець В. О. Прикладні задачі, призначені для вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі*. 2014. № 4. С. 34–40.
17. Соколенко О. І. Вища математика : Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
18. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.
19. Шиманський І. Є. Математичний аналіз. Київ : Вища школа, 1972. 632 с.
20. Шунда Н. М. Функції та їх графіки. Київ : Рад. школа, 1983. 190 с.
21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. 607 с.

Тема 7. Границя функції. Неперервність функції.

Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО

Мета навчання: здійснити порівняльну характеристику методичних підходів, які використовуються під час формування понять «границя функції» та «неперервність функції» у старшій та вищій школі. Виявити спільне та відмінне у цих підходах, виділити теоретичний матеріал, який є науковою основою методів розв’язування окремих типів задач шкільного курсу математики.

Завдання.

- 1) Аналіз шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення понять «границя функції» та «неперервність функції» та пов’язаних з ними понять.
- 2) Ознайомлення з запропонованими у ШКМ підходами, щодо формування уявлення про границю функції в точці та неперервність функції в точці. Встановлення взаємозв’язку між визначеністю функції в точці та існуванням границі функції в точці.
- 3) Здійснення порівняльного аналізу означення цих та пов’язаних з ними понять і їх геометричних інтерпретацій в курсі математичного аналізу та курсі алгебри і початків аналізу.
- 4) Розгляд теорем про границі функцій та їх застосування в шкільному та вузівському курсах (спільне та відмінне).
- 5) Розгляд еквівалентних означень неперервної функції в точці як пропедевтика вивчення похідної.
- 6) З’ясування особливостей методики ознайомлення з розривними функціями, точками розриву та їх класифікацією у шкільному та вузівському курсах.
- 7) Ознайомлення з підходами до навчання властивостей функцій, неперервних на відрізку та застосування цих властивостей до розв’язування задач ШКМ.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення границі функції та неперервності функції в старшій профільній школі.	[2.5] – [2.7]
2	Формування уявлення про границю функції в точці в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Порівняльний аналіз з курсом вищої математики. Визначеність функції в точці та існування границі функції в точці.	[3.26], [3.27], ([3.29], [3.31]), [10], [2], [4], [7], [11]
3	Розв’язування графічних завдань, пов’язаних з визначеністю функції в точці, існуванням границі функції в точці (лівої та правої границь), неперервністю функції в точці.	[3.26], ([3.29]), [8], [12], [3], [4], [7]
4	Порівняльний аналіз <i>означень понять</i> границі функції, неперервності функції і їх <i>геометричних інтерпретацій</i> у курсі вищої математики та шкільному курсі алгебри і початків аналізу.	[3.26], [3.27], ([3.29], [3.31]) [2], [4], [7], [11]
5	Теореми про границі функцій та їх застосування. Спільне та відмінне на різних ступенях навчання.	[3.26], [3.27], ([3.29], [3.31]), [10], [2], [4], [7], [11]
6	Означення неперервної функції в точці їх еквівалентність та пропедевтична роль для навчання похідної.	[2], [4], [7], [11], [10] та ін.
7	Розривні функції, точки розриву та їх класифікація.	[2], [4], [7], [11], [3.26], [3.27], ([3.29], [3.31])
8	Властивості функцій неперервних на відрізку та їх застосування до розв’язування задач ШКМ.	[1], [3], [4], [7], [8], [3.26], [3.27] ([3.29], [3.31])



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Проведіть аналіз діючих шкільних програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення понять «границя функції» та «неперервність функції» та пов’язаних з ними понять. Визначте місце теми в програмі, ознайомтесь з очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів (для різних рівнів навчання курсу).

2°. Згадайте запропоновані у ШКМ підходи, щодо формування уявлення про границю функції в точці та неперервність функції в точці.

3°. Як означається поняття границі функції f у точці a в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу та в курсі вищої математики, зокрема у вступі до математичного аналізу? Які *геометричні інтерпретації* розглядаються?

4. Як вводяться поняття «лівий (правий) ε -окіл» та «ліва (права) границя функції у точці a »?

5. Яка теорема визначає зв'язок між границею функції в точці та її односторонніми границями в тій самій точці?

6°. Згадайте **теореми про арифметичні дії з границями функцій** та їх застосування. Виділіть спільне та відмінне на різних ступенях навчання (старша та вища школи).

7. Які **еквівалентні означення неперервної функції в точці** розглядаються в курсі «Вища математика»?

8. Яке з цих означень розглядається під час навчання курсу алгебри і початків аналізу на профільному рівні? Як означається неперервна функція під час поглибленого вивчення курсу алгебри і початків аналізу?

9°. Які **теореми про функції неперервні в точці** розглядаються в курсі математичного аналізу, а які з них в курсі алгебри і початків аналізу під час навчання його в класах з поглибленим вивченням математики?

10. Що розуміють під *односторонньою неперервністю функції в точці*? Дайте означення функції f неперервної в точці a справа (зліва).

11. Сформулюйте необхідну й достатню умову неперервності функції в точці.

12. Сформулюйте означення розривної функції та точки розриву функції. Наведіть приклади.

13. Як здійснюється класифікація точок розриву? Які точки називаються *точками розриву 1-го роду*? Які точки називаються *точками розриву 2-го роду*? Наведіть приклади.

14. Які **властивості функцій неперервних на відрізку** розглядаються в курсі алгебри і початків аналізу на профільному рівні? Сформулюйте їх. Зробіть порівняння з вивченням згаданих властивостей в курсі «Вища математика».



Відповіді та вказівки до контрольно-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. [2.5]-[2.7]. 10 кл., профільний рівень [2.6]:

Тема 5. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (54 години)	
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Учень (учениця): формулює означення границі функції в точці; неперервності функції; формулює основні властивості границі функції та використовує їх для знаходження границь заданих функцій.	Границя функції в точці. Основні теореми про границі функції в точці. Неперервність функції в точці і на проміжку.

10 кл., поглиблене вивчення математики [2.7]:

Тема 5. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ (18 год).	
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Учень (учениця): формулює означення границі функції в точці; неперервності функції; формулює основні властивості границь та використовує їх для знаходження границь заданих функцій; знаходить асимптоти графіків функцій; застосовує властивості неперервних функцій до розв’язування задач.	Границя функції в точці. <i>Основні теореми про границі функцій в точці.</i> Неперервність функції в точці та на проміжку. <i>Властивості неперервних функцій.</i> <i>Поняття границі функції на нескінченності та нескінченно велика функція в точці.</i> <i>Асимптоти графіка функції.</i> <i>Перша чудова границя.</i>

2°. [3.29, §1. п. 2-3 с. 15-26, §1. п. 5 с.31], [3.31, §1. п. 1 с.5-17, §1. п. 3 с.23] або [3.26, §5 с. 260-274], [3.27, §6 п.37-41].

3°. Повторіть наступний матеріал (табл. 1).

Таблиця 1. Границя функції

Курс «Алгебра і початки аналізу»		
	Означення	Геометрична інтерпретація
Введення означення за Коші	[3.26, с. 263], [3.29, с. 24]: Число a називають границею функції f у точці x_0 , якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ , що для всіх $x \in D(f)$ з нерівностей $0 < x - x_0 < \delta$ випливає нерівність $ f(x) - a < \varepsilon$.	[3.26, с. 262–264] Рис. 34.8–34.11
Введення означення за Гейне	[3.27, с. 287]. Число a називають границею функції f у точці x_0 , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f таких, що $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа a .	[3.27] с. 285 Рис. 37.1, с. 288 Рис. 37.8; Рис. 37.7, с. 287 – границі в точці x_0 не існує.
Методика навчання математики [10]		
Введення означення за Коші	[10, с.391–395]	[10, с. 391–393] Рис. 13.27–13.29
Введення означення за Гейне	[10, с. 395–397]	[10, с. 391] Рис. 13.25, 13.26.

Зробіть порівняльний аналіз, щодо викладу цього матеріалу в курсах «Вища математика» та «Математичний аналіз».

Таблиця 2. Границя функції

Курс «Вища математика» [4], [11]		
	Означення	Геометрична інтерпретація
Введення означення за Коші	Означення 5.3 [11, с. 101]. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. Число A називається <i>границею функції f в точці a</i>, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, для яких $0 < x - a < \delta$ справджується нерівність $f(x) - A < \varepsilon$. Якщо число A є <i>границею функції f в точці a</i>, то це записують так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ (читають «границя $f(x)$ при x, що прямує до a, дорівнює A» або відповідно «$f(x)$ прямує до A при x, що прямує до a») [4, с. 162].	[11] с. 101, Рис.31; [4, с. 162]
Введення означення за Гейне	Означення [4, с. 161]. Число c (скінченне або нескінченне) називається <i>границею функції $y = f(x)$, $x \in E$, в точці x_0</i> (скінченній або нескінченно віддаленій) і записують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$, якщо $f(x_n) \rightarrow c, n \rightarrow \infty$, для будь-якої послідовності точок $x_n \in E, n \in N$, що задовольняють умову $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$.	
Курс «Математичний аналіз» [2], [7]		
Введення означення за Коші	[2, с. 24], [7, с. 80]	[2, с. 25] Рис. 9
Введення означення за Гейне	[7, с. 80]	

Геометрична інтерпретація означення 5.3 [11, с. 101, Рис. 31]: оскільки нерівності в **означенні 5.3** рівносильні відповідно нерівностям $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$ і $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, то рівність $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ має

таке **геометричне тлумачення**:

які б ми не взяли дві прямі $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), знайдуться дві прямі $x = a - \delta$ і $x = a + \delta$ ($\delta > 0$) такі, що частини графіка функції f , яка відповідає всім точкам $x \in (a - \delta; a + \delta), x \neq a$, потрапляє всередину прямокутника, обмеженого прямими $y = A - \varepsilon, y = A + \varepsilon, x = a - \delta$ і $x = a + \delta$ (рис. 31). Що ж до точки $(a; f(a))$ (якщо в точці a функція f визначена), то

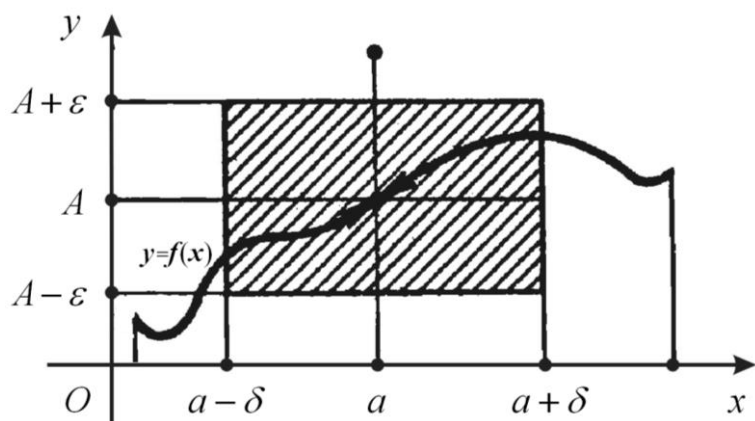


Рис. 31.

вона може належати або не належати цьому прямокутнику.

Якщо число $\varepsilon > 0$ прямує до нуля, то цей прямокутник стягується до точки $(a; A)$, і, отже, коли точка x наближається до точки a , то точка $(x; f(x))$ наближається до точки $(a; A)$.

Зауваження 1. Вираз «границя функції f в точці a » часто замінюють виразом «границя функції f при x , що прямує до a ». Цей вираз більше відповідає ідеї поняття границі функції, тому що число $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ нічого не говорить про значення f в самій точці $x = a$, а вказує на поведінку функції поблизу точки a .

Зауваження 2. У курсі «Вища математика» [11], на відміну від шкільного курсу «Алгебра і початки аналізу», під точкою a (x_0) розуміють або число (скінченне), або символ ∞ ($+\infty, -\infty$) (нескінченні числа).

Означення 5.4 [11, с. 103]. Нехай функція f визначена для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > K$ ($x > K$, $x < -K$) при деякому $K > 0$. Число A називається *границею функції f при $x \rightarrow \infty$* ($x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $M = M(\varepsilon) > K$ таке, що для всіх x , для яких $|x| > M$ ($x > M$, $x < -M$) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символічний запис у цьому випадку такий: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow -\infty$).

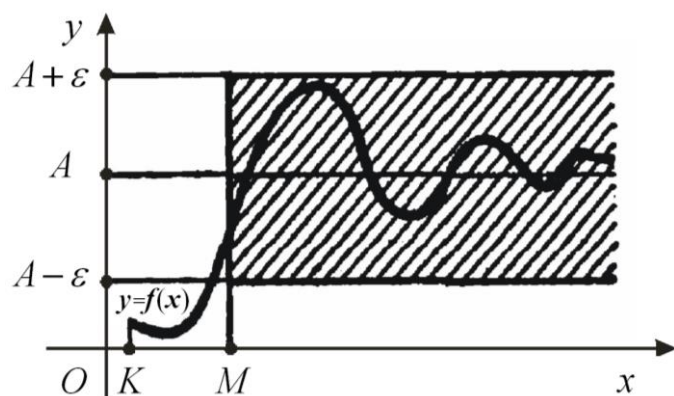


Рис. 32.

Геометричне тлумачення означення 5.4: які б ми не взяли дві прямі $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$, знайдеться пряма $x = M$ ($M \geq K$, $K > 0$) така, що частина графіка функції f , яка відповідає всім $x > M$, потрапляє всередину півсмуги, обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ і $x = M$, що лежить праворуч від прямої $x = M$ (рис. 32).

Оскільки $\varepsilon > 0$ може бути як завгодно малим, то з віддаленням точки x ($x > K$) праворуч від точки K точка $(x; f(x))$ наближатиметься до прямої $y = A$.

Сформульовані два окремі означення 5.3 і 5.4, що мають відповідні геометричні інтерпретації, узагальнюють і дають нове означення границі функції в точці через існування околу (означення 5.5).

Проводячи узагальнення, приходять до наступного **означення 5.5 [11, с. 105]**: Нехай функція f визначена в деякому околі точки a (a – число або $\infty(+\infty, -\infty)$), крім, можливо власне точки a . Число A називають *границею функції f при $x \rightarrow a$* , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U(a)$, що для всіх $x \in U(a)$, $x \neq a$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4. [11, с. 112]. Нехай a – деяка точка (деяке число). Будь-який півінтервал $[a; a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, називають **правим ε -околом** (або просто **правим околом**) точки (числа) a , а будь-який півінтервал $(a - \varepsilon; a]$, $\varepsilon > 0$, – **лівим ε -околом** (або просто **лівим околом**) точки (числа) a .

Означення 5.6. Нехай функція f визначена в деякому правому (лівому) околі точки a , крім, можливо, самої точки a . Число A називається **правою (лівою) границею функції f в точці a** , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x , для яких $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a + \delta$), виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Той факт, що число A є правою (лівою) границею функції f в точці a , прийнято записувати так: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a+0$, ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a-0$). Запис $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) означає, що точка x наближається до точки a справа (зліва).

Права і ліва границі функції в точці називаються **однобічними границями функції в цій точці**.

5. Теорема 5.13 [11, с. 112]. Для того щоб функція f мала границю в точці a , яка дорівнює числу A , необхідно і достатньо, щоб існували і права, і ліва границі функції f в точці a , кожна з яких дорівнює числу A .

6°. [3.26, с. 264], [11, с. 106-109].

У шкільному курсі «Алгебри і початків аналізу» обмежуються розглядом теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці [3.26, с. 264]. Формулювання цих теорем аналогічні до формулювань, які пропонуються в курсі «Вища математика» [11, с. 106-109].

7. [11, с. 118-121].

Означення 6.1. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a . Функція f називається **неперервною в точці a** , якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Означення 6.2. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a . Функція f називається *неперервною в точці a* , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x , для яких $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (Рис. 34).

Означення 6.3. Функція f , визначена в деякому околі точки a , називається *неперервною в точці a* , якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0$. (Рис. 35).

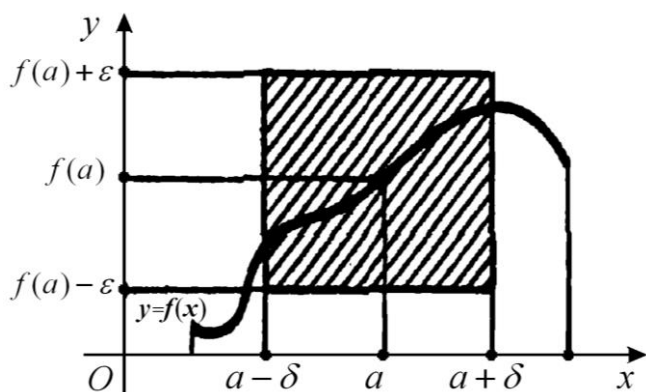


Рис. 34.

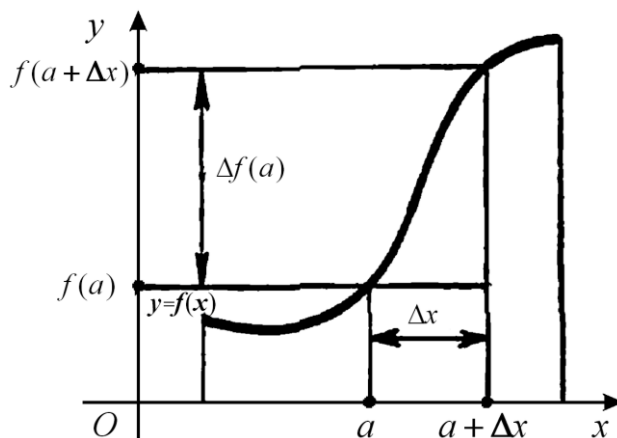


Рис. 35.

8. [3.26, с. 265], [3.27, с. 303].

Означення [3.27, с. 303]. Функцію f називають *неперервною в точці x_0* , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

9°. [11, с. 121-122], [3.27, с. 304-308]

Курс «Вища математика» [11]	Курс «Алгебра і початки аналізу» [3.27] (основні теореми)
Теореми 6.1. Якщо функція неперервна в деякій точці, то вона обмежена в деякому околі цієї точки.	Теорема 39.1. Нехай функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція f <i>неперервна</i> в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Теорема 6.2. (про арифметичні операції над неперервними функціями).	Теорема 39.2. (про арифметичні дії над неперервними функціями)
Теорема 6.3. (про неперервність складної функції).	Теорема 39.5. (про неперервність складної функції).

10. [11, с. 123]. Означення 6.4. Нехай функція f визначена в деякому правому (лівому) околі точки a . Функція f називається *неперервною в точці a справа (зліва)*, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)).$$

11. [11, с. 123]. Теорема 6.4. Для того щоб функція f була неперервною в точці a , необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в точці a і справа, і зліва.

12. [11, с. 124]. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a , крім, можливо, самої точки a . Якщо функція f не є неперервною в точці a , то вона називається *розривною в цій точці*, а точка a називається *точкою розриву функції f* .

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ 3, & \text{якщо } 1 \leq x < 3, \\ -x + 6, & \text{якщо } 3 < x < 6. \end{cases} \quad (1)$$

Дана функція в точці $x=1$ розривна, оскільки $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$, а

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3$, і, отже, за **теоремою 5.13** функція f не має границі в точці

$x=1$. Функція f в точці $x=3$ має границю, яка дорівнює 3, оскільки

$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 3$ і $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 3$, але розглядувана функція не є визначеною

в точці $x=3$. Тому функція f є розривною в точці $x=3$. Неважко переконатись, що в кожній точці інтервалу $(0; 6)$, відмінній від 1 і 3, функція f неперервна.

Функція f , визначена в деякому правому (лівому) околі точки a , крім, можливо, самої точки a , що не є неперервною в точці a справа (зліва), називається *розривною в цій точці справа (зліва)*, а точка a називається *точкою розриву функції f справа (зліва)*.

Наприклад, функція f , що визначається рівностями (1), розривна в точці $x=1$ зліва, оскільки $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$, і неперервна в точці

$x=1$ справа, оскільки $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3 = f(1)$. Ця функція в точці $x=3$

розривна і справа, і зліва, оскільки вона не є визначеною в даній точці. У кожній точці інтервалу $(0; 6)$, відмінній від 1 і 3, функція f , будучи неперервною, неперервна і справа, і зліва.

13. [11, с. 125]. Точка a розриву функції f називається *точкою розриву першого роду*, якщо існують і права, і ліва границі (скінченні) цієї функції в точці a .

Точка a розриву функції f , що не є точкою розриву першого роду, називається *точкою розриву другого роду*.

Наприклад, для функції f , що визначається рівностями (1), $x = 1$ і $x = 3$ – точки розриву першого роду; точок розриву другого роду вона не має. А для функції $y = \frac{1}{x}$, наприклад, $x = 0$ – точка розриву другого роду.

14. [3.26, с.270-274], [11, с. 125-129].

Курс «Алгебра і початки аналізу» [3.26]	Курс «Вища математика» [11]
Теорема 34.2. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.	Теорема 6.7. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях відрізка має значення, протилежні за знаком, то існує <u>принаймні одна точка</u> $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = 0$.
Наслідок. Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I , то вона на цьому проміжку зберігає знак.	Лема. Якщо функція f неперервна в точці a і $f(a) \neq 0$, то існує окіл $U(a)$, для всіх точок якого значення функції f за знаком будуть такими, як $f(a)$.
Теорема 34.3. (друга теорема Больцано-Коші про проміжне значення функції). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.	Теорема 6.8. (друга теорема Больцано-Коші). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для будь-якого числа C , що міститься між числами $f(a)$ та $f(b)$, існує точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = C$.
Наслідок. Якщо областю визначення неперервної функції f є деякий проміжок, $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.	
Теорема 34.4 (перша теорема Вейєрштраса). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому відрізку.	Теорема 6.5. (перша теорема Вейєрштраса). Функція неперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку.
Теорема 34.5 (друга теорема Вейєрштраса). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку вона набуває найбільшого і найменшого значень.	Теорема 6.6 (друга теорема Вейєрштраса). Якщо функція неперервна на відрізку, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше і найбільше.



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1. Встановіть взаємозв'язок між *визначеністю функції в точці* та *існуванням границі функції в точці*. З'ясуйте чи правильні наступні твердження:

а) Якщо функція $y = f(x)$ **визначена** в деякій точці x_0 , то вона обов'язково має границю в цій точці.

б) Якщо функція $y = f(x)$ **невизначена** в деякій точці x_0 , то вона **не має границі** в цій точці.

в) Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 **має границю**, то вона **визначена** в цій точці.

г) Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 **не має границі**, то вона **не визначена** в цій точці.

Якщо твердження правильне не завжди, то переконайте в цьому, навівши контрприклад.

2°. Розв'яжіть з шкільного підручника [3.26, с. 267] № 34.3. Обґрунтуйте відповіді.

3. Приведіть приклади функцій, які не мають границі в точці.

4. Розв'яжіть з посібника [8, с. 207] № 3.141.

5°. Підберіть приклади застосування **теорем про арифметичні властивості границь функцій**, призначені для розгляду у шкільному курсі, які відрізняються від розглянутих у діючих шкільних підручниках алгебри і початків аналізу. Прокоментуйте в чому полягає їх відмінність та оригінальність.

6. Виконайте завдання на доведення неперервності функції в точці, запропоновані у підручнику з курсу «Алгебра і початки аналізу» для старшої школи та навчальному посібнику з вищої математики. В чому відмінність таких завдань?

Завдання 1. З'ясуйте, який теоретичний матеріал використовується для розв'язування завдань з підручника [3.29, с. 20-21, с. 39-40] № 2.6, № 2.7, № 5.7. Запропонуйте методику його використання.

№ 2.6. З'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0 :

1) $f(x) = x^2 - 1, x_0 = -1$;

3) $f(x) = \frac{|x|}{x}, x_0 = 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$;

4) $f(x) = \sqrt{-x}, x_0 = -1$.

№ 2.7. З'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0 :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 2, \\ x + 2, & \text{якщо } x \geq 2, \end{cases} x_0 = 2$;

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x > 1, \\ x - 2, & \text{якщо } x \leq 1, \quad x_0 = 1. \end{cases}$$

№ 5.7. Чи є неперервною в точці x_0 функція:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{якщо } x \neq 3, \\ 6, & \text{якщо } x = 3, \quad x_0 = 3; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\cos x}, & \text{якщо } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{якщо } x = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

Завдання 2. Розв'яжіть завдання № 5.3 з посібника [12, с. 52-54]. Які особливості використання означення 3 для доведення неперервності функції в точці?

№ 5.3. Користуючись означенням 3 довести неперервність функції f в точці a , якщо:

$$1) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$2) f(x) = \cos x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

7. Дослідіть задані функції [4, § 13, с. 188, № 4 (1, 2, 4, 8, 9)] на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву:

$$1) f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x-1}; \quad 4) f(x) = e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } x = 0; \end{cases} \quad 9) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{якщо } x \neq -2, \\ -4, & \text{якщо } x = -2. \end{cases}$$

8. Чи виконуються перша теорема Вейерштрасса на інтервалі?

9. Чи виконуються друга теорема Вейерштрасса на інтервалі?

10. Про яку кількість точок йдеться в першій теоремі Больцано-Коші?

11. Розгляньте задачі на застосування властивостей неперервних на відрізку функцій, які включені до курсу «Алгебра і початки аналізу». Обґрунтуйте способи їх розв'язування.

Завдання 1. З'ясуйте, застосування якої теореми відбувається під час доведення того, що рівняння має корінь. Застосуйте цю теорему.

№ 5.13 [3.29, с. 41].

$$1) x^6 + 2x - 13 = 0;$$

$$2^\circ) 3\sin x = 2x - 1.$$

Завдання 2. З'ясуйте наслідок з другої теореми Больцано-Коші до знаходження області значень функції [3.29, с. 41]:

№ 5.17. $y = \frac{x^2}{9x^4 + 1}$.

№ 5.18°. $y = \frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1}$.

12. Властивість. Якщо функція $y = f(x)$ перетворюється на нуль в точках $x = a$ і $x = b$ ($f(a) = f(b) = 0$) і не перетворюється на нуль ні в яких інших точках відрізка $[a; b]$, то на всьому інтервалі $(a; b)$ функція $y = f(x)$ або додатна, або від'ємна.

Застосуйте вказану властивість [4, с. 333] неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ до розв'язування нерівностей:

а) $(1 - x^2) \arcsin x > 0$;

б) $(x^8 - 1) \log_2 \left(x + \frac{1}{2} \right) > 0$.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

1. Відповідь: а) твердження не завжди правильне. Можливі варіанти [3.26, с. 260, 265] **Рис. 34.1, 34.12** – так; **Рис. 34.13, с. 265** – ні.

3. 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$; 2) $y = [x]$ (в усіх цілих точках функція не має границі, а в усіх дробових точках має границю) та ін.

11. [3.29, с. 41], [3.27, с. 318-320, § 6, п.40].

Завдання 2. Відповідь. № 5.17. $\left[0; \frac{1}{6}\right]$. № 5.18. $\left[0; \frac{1}{7}\right]$. Вказівка.

Використайте метод оцінки для знаходження $E(y)$ та нерівність Коші для оцінки значень виразу $4x^4 + 1$.

12. Відповідь. а) $x \in (0; 1)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.



Література

1. Виленкин Н. Я. Задачник по курсу математического анализа / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А и др. Учеб. пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1971. 343 с.

2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу : Підручник: У 3 ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1990. 383 с.

3. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Изд. 4-е доп. Москва : Просвещение, 1973. 256 с.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі : Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
5. Задачи по математике. Начала анализа : Spraw. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 608 с.
6. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А. И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.
7. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч. : Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Ляшенко та ін. Київ : Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
8. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу. Тернопіль : Підручники і посібники, 2001. 304 с.
9. Михалін Г. О. Дюженкова Л. І. Границя і неперервність функції : Навчальний посібник. Київ : УДПУ імені М. П. Драгоманова, 1997. 96 с.
10. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.
11. Соколенко О. І. Вища математика : Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
12. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.

Тема 8. Застосування похідної в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу

Мета навчання: здійснити аналіз методичних підходів, які використовуються в шкільному курсі алгебри і початків аналізу під час навчання застосувань похідної, виявити спільне та відмінне з викладом даного матеріалу у вузівських курсах «Вища математика» та «Математичний аналіз», розглянути методику навчання застосувань похідної під час розв'язування задач ШКМ та прикладних задач ШКМ.

Завдання.

- 1) Аналіз шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення застосувань похідної.
- 2) Ознайомлення з запропонованими у діючих шкільних підручниках підходами, щодо навчання застосувань похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції, найбільшого та найменшого значення функції. Здійснення порівняння цих підходів з підходами, які використовують в курсах «Вища математика» та «Математичний аналіз».

3) Ознайомлення з підходами, щодо формування понять «опуклість», «точки перегину», «асимптоти» графіка функції у шкільному курсі алгебри і початків аналізу та в курсах «Вища математика» та «Математичний аналіз».

4) Розгляд загальної та розширеної схем дослідження функції для побудови їх графіка та методики навчання їх застосувань до розв'язування задач.

5) Ознайомлення з методикою застосувань похідної до розв'язування задач ШКМ (розв'язування рівнянь, нерівностей, доведення нерівностей, порівняння чисел та ін.).

6) Ознайомлення з методикою застосувань похідної до розв'язування прикладних задач шкільного курсу алгебри і початків аналізу.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення застосувань похідної	[2.5] – [2.7]
2	Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції. Здійснення порівняння шкільних підходів з підходами, які використовують в курсі вищої математики.	[2] – [10], [17], [18], [3.23] – [3.35]
3	Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Розв'язування задач.	[2] – [10], [17], [18], [3.23] – [3.35]
4	Поняття опуклості і точок перегину диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції. Дослідження функції на опуклість і точки перегину. Асимптоти графіка функції. Здійснення порівняння шкільних підходів з підходами, які використовують в курсі вищої математики.	[2] – [10], [17], [18], [3.23] – [3.35]
5	Загальна та розширена схеми дослідження функції для побудови їх графіка та методика навчання їх застосувань до розв'язування задач у шкільному курсі алгебри і початків аналізу, який вивчається на різних рівнях.	[10], [3.23] – [3.35]
6	Застосування похідної до розв'язування задач ШКМ (доведення тотожностей, розкладання многочленів на множники, спрощення виразів, доведення нерівностей, порівняння чисел, розв'язування рівнянь, нерівностей та ін.).	[1], [6], [10], [11], [12], [21] [3.23] – [3.35]
7	Методика застосувань похідної до розв'язування прикладних задач шкільного курсу алгебри і початків аналізу	[13] – [15], [19], [20]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення застосувань похідної. Визначте місце теми в програмі, ознайомтесь з очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів (для різних рівнів навчання курсу).

2°. Повторіть з курсу вищої математики наступні поняття «приріст аргументу», «приріст функції f у точці x_0 », «похідна функції f у точці x_0 », «функція f диференційовна у точці x_0 », «похідна функції f », «диференціювання» та методику їх формування під час навчання курсу алгебри і початків аналізу на різних рівнях.

3°. Пригадайте фізичний, геометричний, біологічний та хімічний зміст похідної.

4°. Повторіть теореми про функції, диференційовні в точці: 1) про неперервність диференційовної функції; 2) про похідну суми, різниці, добутку, частки; 3) про похідну складної функції; 4) про похідну оберненої функції; 5) про похідні основних елементарних функцій, які вивчаються в курсі вищої математики. Порівняйте методику їх навчання з методикою навчання відповідних теорем у шкільному курсі алгебри і початків аналізу.

5. Згадайте теореми Ферма, Ролля та Лагранжа з курсу вищої математики. Яке місце вони займають в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи? Яке застосування мають ці теореми у диференціальному численні? Які типи задач ШКМ розв'язуються з допомогою цих теорем?

6. Визначте особливості навчання учнів ознаки сталості функції, ознак зростання (спадання) функції на проміжку у шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Чим відрізняються підходи до навчання цих ознак у ШКМ та курсі вищої математики?

7. Ознайомтесь з методикою формування понять «внутрішні точки області визначення функції», «критичні точки», «точка максимуму (мінімуму) функції», «точки екстремуму» та доведення необхідної умови екстремуму функції та ознак точок мінімуму і максимуму.

8°. Який методичний підхід використовується в курсі алгебри і початків аналізу до навчання найбільшого і найменшого значення функції?

9. Ознайомтесь з методикою формування понять «опуклість функції», «точки перегину» у шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Розгляньте теоретичні основи алгоритмів знаходження проміжків опуклості та точок перегину. Здійсніть порівняльну характеристику навчання цього матеріалу у ШКМ та курсі вищої математики.

10°. Який методичний підхід використовується в курсі алгебри і початків аналізу до вивчення асимптот графіка функції? Порівняйте його з підходом до вивчення у курсі вищої математики.

11°. Згадайте загальну схему дослідження функції та побудови її графіка.

12. Який теоретичний матеріал покладено в основу застосування похідної до доведення тотожностей?

13. Який теоретичний матеріал покладено в основу застосування похідної до доведення умовних нерівностей з однією змінною?

14. Які способи використовуються при доведенні нерівностей з декількома змінними? Розгляньте приклади їх використання.

15. Розгляньте застосування похідної до порівняння чисел. Яка закономірність існує у запропонованому прикладі?

16. Які властивості функцій використовуються в шкільному курсі «Алгебри і початків аналізу» під час розв'язування рівнянь? Розгляньте приклади їх використання.

17. Розгляньте приклади застосування похідної до розв'язування нерівності. З яких етапів складається розв'язання?



Відповіді та вказівки до контрольних запитань та завдань репродуктивного характеру

1. 10 клас [2.6, з Теми 5].

Зміст навчального матеріалу:
Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей. Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину. Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції. Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Зміст навчального матеріалу відповідної теми курсу алгебри і початків аналізу, під час поглибленого вивчення [2.7], розширено такими питаннями: 1) похідна оберненої функції; 2) основні теореми диференціального числення; 3) застосування похідної для доведення тотожностей, а також для розв'язування нерівностей; 4) похідні вищих порядків.

2°. [3, с. 63–64, Р3, § 3.1; с. 94–96, Р4, § 4.1, § 4.2], [17, с. 119–120, § 1.6; с. 132–139, § 1.7], [3.26, § 5, п. 34–36], [3.27, § 7, п. 43–44].

3°. [3, с. 92–95, Р4, § 4.1], [17, с. 133–135, § 1.7], [3.26, § 5, п. 36], [3.27, § 7, п. 43–44]; [16, с. 48, § 3.1].

4°. [3, Р4, § 4.2, § 4.3], [17, § 1.7], [3.26, § 5, п. 37], [3.27, § 7, п. 45].

5. Теорема Ферма, Ролля та Лагранжа в курсі «Математичний аналіз» [3, с. 119–123] в курсі вищої математики [17, с. 155–158] та в курсі алгебри і початків аналізу [3.27]:

Курс математичного аналізу [3, с. 119-123] Курс вищої математики [16, с. 155-158]	Курсі алгебри і початків аналізу [3.27]	Геометрична інтерпретація
Теорема 9.1 (теорема Ферма) [16, с. 155]. Якщо функція f , визначена в деякому околі точки a , набуває в цій точці найменшого (найбільшого) в розглядуваному околі значення і має в точці a похідну, то ця похідна дорівнює нулю	с. 383 Теорема 47.1	Рис. 47.1
Теорема 9.2 (теорема Ролля) [16, с. 156]. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f'(c) = 0$. <i>Наслідок</i> [2, с. 120]. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то між кожними двома нулями функції $f(x)$ міститься принаймні один нуль її похідної $f'(x)$.	с. 385 Теорема 47.2	Рис. 47.4
Теорема 9.3 (теорема Лагранжа) [16, с. 156]. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.	с. 387 Теорема 47.3	с. 386 Рис. 47.5

Застосування теорем Ферма, Ролля та Лагранжа

	Диференціальне числення	Приклади задач ШКМ
Теорема Ферма	Використовується під час доведення властивостей певних функцій	[3.29, с. 94] № 10.5.
Теорема Ролля	<i>Зауваження.</i> Порушення однієї з умов теореми унеможливорює її застосування до певної функції	<u>Розв'язування рівнянь</u> [6], [10], [18]. [6, с. 436], Приклад 34. Доведіть, що рівняння $3^{x+2} - 26x = 29$ має не більше двох різних дійсних коренів.

Теорема Лагранжа	Використовується під час доведення: 1) ознаки сталості; 2) ознаки зростання, спадання функції на проміжку, 3) необхідної та достатньої умови існування екстремумів функції в даній точці.	1) Доведення нерівностей: [3.29], [3.31], [3.27], [6], [8] – [12]. 2) Розв’язування рівнянь (нерівностей): [11, с. 130–131].
-------------------------	---	---

6. [3.26] § 5, п. 39, [17, с. 168–170]. Ознайомтесь більш детально з наступними етапами навчання ознак сталості функції, зростання (спадання) функції за підручником [3.26] § 5, п. 39.

Ознака	Проблемна ситуація [3.26, с. 309]	Формулювання ознаки	Ідея, покладена в основу доведення [3.26, с. 310–311]
сталості функції	Якщо функція f така, що для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I ?	Якщо для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.	Використовуючи теорему Лагранжа обґрунтовують, що $f(x_2) = f(x_1)$ для довільних x_1 і x_2 з проміжку I
зростання функції	Розгляд дотичних, проведених до графіка деякої функції, яка є диференційовна на проміжку $[a; b]$ Рис. 39.4 (будь-яка дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис)	Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.	Використовуючи теорему Лагранжа обґрунтовують, що $f(x_2) > f(x_1)$ для $x_2 > x_1$ з проміжку I Отже, функція f зростає на цьому проміжку.
спадання функції	Розгляд дотичних, проведених до графіка деякої функції яка є диференційована на проміжку $[a; b]$ Рис. 39.5 (будь-яка дотична до графіка функції утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис)	Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.	Доведення аналогічне.

7. [3.26, § 5, п. 40]

Точка екстремуму	Означення	Приклад	Контрприклад
Точка максимуму	Точку x_0 називають точкою максимуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$	$y = \sin x$. $x_0 = \frac{\pi}{2}$ – точка максимуму $\left(x_{\max} = \frac{\pi}{2}\right)$	$y = \arcsin x$. $x_0 = 1$ не є точкою максимуму, але $\max \arcsin x = [-1; 1] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$
Точка мінімуму	Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$	$y = \sin x$. $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ – точка мінімуму $\left(x_{\min} = -\frac{\pi}{2}\right)$	$y = \sqrt{x}$. $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму, але $\min \sqrt{x} = [0; +\infty) = \sqrt{0} = 0$

Зауваження 1. Зверніть увагу на види точок екстремуму: 1) точки екстремуму, у яких похідна дорівнює нулю ([3.26, с. 320, Рис. 40.8]); 2) точки екстремуму, у яких функція недиференційовна ([3.26, с. 320, Рис. 40.9]).

Теорема 40.1 (необхідні умови екстремуму) [3.26, с. 320]	Теорема 9.9 (необхідні умови екстремуму) [17, с. 170]
Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f , то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0 .	Якщо точка a є точкою екстремуму функції f , то її похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Зауваження 2. Умови рівності нулю похідної або її неіснування в заданій точці, будучи необхідними, не є достатніми умовами для того, щоб ця точка була точкою екстремуму для функції, яка розглядається.

Завдання 1. Обґрунтуйте сказане, використовуючи контрприклад:

а) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

Завдання 2. З'ясуйте, яке поняття є **родовим** для поняття «критичні точки» [3.26, с. 320], в чому полягає **видова відмінність**. Розгляньте співвідношення між множиною точок екстремуму та множиною критичних точок [3.26, с. 321, Рис. 40.12, Рис. 40.13].

Теорема 40.13 [3.26, с. 322] (<i>ознака точки максимуму функції</i>). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a; b)$ і x_0 – деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.	Теорема 40.14 [3.26, с. 322] (<i>ознака точки мінімуму функції</i>). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a; b)$ і x_0 – деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.
Теорема 9.10 [17, с. 171] (<i>достатні умови екстремуму в термінах першої похідної</i>). Нехай функція f диференційовна в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, в якій функція f неперервна. Якщо при переході точки x через точку a похідна f' змінює знак, то a є точкою екстремуму функції f, причому точкою мінімуму, якщо похідна f' змінює знак з «мінуса» на «плюс», і точкою максимуму, якщо похідна f' змінює знак з «плюса» на «мінус»	Теорема 9.11 [17, с. 171] (<i>достатні умови екстремуму в термінах першої і другої похідних</i>). Якщо функція f задовольняє умови $f'(a) = 0$ та $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), то a є точкою мінімуму (максимуму) функції f.

8°. [3.26, с. 328–332, § 5, п. 41], [20]

9. [3.26, с. 337–341, § 5, п. 42], [3.27, § 7, п. 51], [17, с. 174–178].

Нехай функція f диференційовна на проміжку I . Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. При цьому можливі випадки:

Опуклість функції на проміжку I

Графік функції на проміжку I розміщений	Характер опуклості функції на проміжку I	Приклади	Ознака опуклості функції: Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність
1) не вище будь-якої такої дотичної	опукла вгору	[3.26, с. 337, Рис. 42.4]	1) $f''(x) \geq 0$, то функція f є <i>опуклою вниз</i> на проміжку I .
2) не нижче будь-якої такої дотичної	опукла вниз	[3.26, с. 337, Рис. 42.5]	2) $f''(x) \leq 0$, то функція f є <i>опуклою вгору</i> на проміжку I .

	Курс алгебри і початків аналізу [3.26, с. 340]	Курс «Вища математика» [17]
Поняття вводиться	описово (с. 340, Рис. 42.10)	означається (с. 176, Рис. 45)
Необхідна умова точки перегину	–	[17, с. 176] Теорема 9.14
Достатня умова точки перегину	Приклад 2 (с. 340–341)	[17, с. 176] Теорема 9.15

10°. [3.26, § 5, п. 43, с. 346–348, Приклад 4], [17, с. 178–180].

11°. [3.26, с. 343, § 5, п. 43].

12. Якщо тотожні перетворення деякого виразу важко виконувати, то ефективним може виявитись застосування похідної.

Розглянемо цей вираз як функцію f деякої змінної величини x . Може статися, що похідна функції $f'(x)$ легше спрощується. Виконаємо відповідні перетворення похідної, а потім повернемося до початкової функції.

Слід мати на увазі, що похідна визначає вихідну функцію з точністю до сталої.

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) \equiv g'(x)$, $x \in (a; b)$, то $f(x) \equiv g(x) + C$.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) \equiv 0$, $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ тотожно дорівнює сталій, тобто $f(x) \equiv C$.

Приклад 1. Доведіть тотожність

$$(x + y + z)^3 = (-x + y + z)^3 + (x - y + z)^3 + (x + y - z)^3 + 24xyz.$$

Доведення. Будемо вважати y і z сталими, тоді ліву і праву частину даної рівності можна розглядати як функції від x .

Маємо, $f(x) = (x + y + z)^3$,

$$g(x) = (-x + y + z)^3 + (x - y + z)^3 + (x + y - z)^3 + 24xyz.$$

Продиференціюємо функції $f(x)$ і $g(x)$:

$$f'(x) = 3(x + y + z)^2,$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3(-x + y + z)^2 + 3(x - y + z)^2 + 3(x + y - z)^2 + 24yz = \\ &= 3(-(-x + y + z)^2 + (x - y + z)^2 + (x + y - z)^2 + 8yz) = \\ &= 3(-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2yz + 2xz + x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + \\ &\quad + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz + 8yz) = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + \\ &\quad 2yz + 2xz) = 3(x + y + z)^2. \end{aligned}$$

Отже, $f'(x) = g'(x) = 3(x + y + z)^2$.

Виходячи з цього на основі теореми робимо висновок про те, що $f(x) \equiv g(x) + C$, де $C = \text{const}$.

Щоб визначити значення сталої C , достатньо обчислити значення $f(x)$ і $g(x)$ в будь-якій спільній точці.

Так, наприклад, в точці $x = 0$: $f(0) = (0 + y + z)^3 = (y + z)^3$;
 $g(0) = (y + z)^3 + (-y + z)^3 + (y - z)^3 = (y + z)^3 - (y - z)^3 + (y - z)^3 = (y + z)^3$.

Отже, $f(0) = g(0) + C$. Тобто $(y + z)^3 = (y + z)^3 + C$. Звідки $C = 0$.
Тому $f(x) \equiv g(x) + 0$. А отже, рівність, яку слід було довести, виконується.

13. Умовні нерівності – це нерівності істинні на певному проміжку.

13.1. Застосування достатньої умови зростання (спадання) функції до доведення умовних нерівностей з однією змінною.

Алгоритм доведення нерівностей.

1) Виходячи з умови нерівності підібрати допоміжну функцію, визначеному на вказаному в задачі проміжку.

2) Дослідити функцію на монотонність.

3) Визначивши характер монотонності, записати відповідну йому нерівність за означенням зростаючої (спадної функції), або нерівність яка порівнює значення функції на проміжку з найбільшим (найменшим) значенням функції на цьому проміжку.

4) Проаналізувавши і перевіривши, якщо це потрібно, останню нерівність, зробити відповідний висновок про істинність заданої в умові задачі нерівності.

Приклад 1. Довести, що $\sin x < x$ для всіх $x > 0$.

Доведення.

1) Розглянемо функцію $f(x) = x - \sin x$, $x \in (0; +\infty)$.

2) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ($\forall x \in R$). Отже, $f(x)$ зростає на R .

3) За означенням зростаючої функції, якщо $x > 0$, то $f(x) > f(0)$.

4) $f(x) > f(0)$, $f(0) = 0$.

Звідси $x - \sin x > 0$, $\sin x < x$ ($\forall x > 0$).

Нерівність доведено.

Приклад 2. Доведіть нерівність $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x \geq x$ при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Доведення.

1) Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x - x$.

2) $f'(x) = \frac{1}{3 \cos^2 x} + \frac{2}{3} \cos x - 1 = \frac{1 + 2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x}{3 \cos^2 x}$.

Знак похідної визначається знаком чисельника, оскільки $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$3\cos^2 x > 0.$$

2.1) Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = 1 + 2\cos^3 x - 3\cos^2 x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2.2) $\varphi'(x) = 6\cos^2 x(-\sin x) - 6\cos x(-\sin x) = -6\cos x \sin x(\cos x - 1) > 0$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\varphi(x)$ зростає на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В точці $x = 0$ $\varphi(x)$ неперервна, $\varphi(0) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Тому, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$. Тобто $\varphi(x) \geq 0$ (рівність можлива лише при $x = 0$).

2.3) Звідси $f'(x) \geq 0$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $f(x)$ зростає на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $f(x) \geq f(0)$. Оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) \geq 0$.

3) Маємо $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x - x \geq 0$. Звідси $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x \geq x$.

13.2. Застосування достатньої умови існування екстремуму функції в точці до доведення умовних нерівностей з однією змінною.

Приклад 3. Доведіть нерівність $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$, при $x > -1$.

Доведення.

1) Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1; +\infty)$.

2) Дослідимо її на екстремум.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$. Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з «-» на «+», то за достатньою умовою екстремуму функції $x = 0$ – точка мінімуму. $x_{\min} = 0$, $f_{\min} = f(0) = 0$.

Оскільки це єдина точка з інтервалу $(-1; +\infty)$, то в ній функція досягає свого найменшого значення $f(x) \geq f(0)$, $f(0) = 0$, тому $f(x) \geq 0$.

3) $\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} \geq 0$. Звідси $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ при $x > -1$.

13.3. Застосування правила знаходження найбільшого та найменшого значень функції f на проміжку $[a; b]$ до доведення нерівностей виду $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a; b]$, де m – найменше, M – найбільше значення функції f на $[a; b]$.

Приклад 4. Доведіть нерівність $-1\frac{1}{8} \leq \cos 2x - \cos x \leq 2$.

Доведення.

1) Нехай $f(x) = \cos 2x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1$.

Введемо підстановку $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Маємо функцію $f(t) = 2t^2 - t - 1$, $t \in [-1; 1]$.

Функції $f(x)$ і $f(t)$ мають однакові області значень.

2) Знайдемо найбільше та найменше значення функції $f(t)$ на проміжку $[-1; 1]$.

$$f'(t) = 4t - 1. \quad f'(t) = 0 \text{ при } t = \frac{1}{4}.$$

Обчислимо значення функції в критичній точці та на кінцях відрізка $[-1; 1]$.

$$\text{Матимемо, } f\left(\frac{1}{4}\right) = -1\frac{1}{8}, \quad f(-1) = 2, \quad f(1) = 0.$$

$$\text{Отже, } \min_{t \in [-1; 1]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -1\frac{1}{8}, \quad \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = 2.$$

$$E(f(t)) = E(f(x)) = \left[-1\frac{1}{8}; 2\right].$$

3) Ми одержали подвійну нерівність $-1\frac{1}{8} \leq \cos 2x - \cos x \leq 2$.

14. При доведенні *нерівностей з декількома змінними* використовують різні способи:

1) вводять допоміжну функцію, яку потім досліджують,

2) ділять нерівність на певний вираз, звівши цим самим її до нерівності з однією змінною, а потім діють за розглянутим у попередньому пункті алгоритмом,

3) вважають одну із букв змінною величиною, а значення решти букв фіксованими і при цьому діють також за вказаним алгоритмом.

Приклад 5. Відомо, що $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $x^2 - y^2 < 2(\cos y - \cos x)$.

Доведення.

Перенесемо доданки зі змінною x в ліву сторону нерівності, а зі змінною y у праву: $x^2 + 2\cos x < y^2 + 2\cos y$.

1) Розглянемо допоміжну функцію $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\cos \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Дослідимо її на монотонність:

$$f'(\alpha) = 2\alpha - 2\sin \alpha = 2(\alpha - \sin \alpha).$$

Оскільки $\alpha > \sin \alpha$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (доведено у прикладі 1), то

$$f'(\alpha) > 0 \text{ і } f(\alpha) \text{ зростає на } \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

За означенням зростаючої функції якщо $x < y$, то $f(x) < f(y)$, тобто $x^2 + 2\cos x < y^2 + 2\cos y$.

3) З останньої нерівності одержуємо $x^2 - y^2 < 2(\cos y - \cos x)$, при $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

Приклад 6. Доведіть, що при $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq p \leq 1$ $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

Доведення.

Поділивши обидві частини нерівності на $a^p > 0$, після певних перетворень приходимо до нерівності $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^p \leq 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p$.

Нехай $\frac{b}{a} = x$, тоді матимемо нерівність: $(1+x)^p \leq 1 + x^p$, $x > 0$.

1) Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$, $x \in (0; +\infty)$.

2) Дослідимо її на монотонність:

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} = p \left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}} \right) > 0 \quad \text{якщо } x > 0,$$

оскільки $1-p \geq 0$ за умовою.

Отже, $f(x)$ зростає на інтервалі $(0; +\infty)$. $f(x)$ — неперервна в точці $x = 0$, $f(0) = 0$. Тому коли $x \geq 0$ $f(x) \geq f(0)$ (рівність можлива лише при $x = 0$).

Отже, $f(x) > 0$, при $x > 0$.

3) Маємо, $1 + x^p - (1+x)^p > 0$. Зробивши обернену заміну та необхідні тотожні перетворення, приходимо до нерівності $(a+b)^p < a^p + b^p$. Якщо $p = 1$, то $(a+b)^1 = a^1 + b^1$.

Виходячи зі сказаного робимо висновок, що $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

Приклад 7. Доведіть, що нерівність $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ має місце для будь-яких додатних значень a, b, c .

Доведення.

Вважатимемо, що $0 < a \leq b \leq c$.

1) Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$, $x > 0$, $x < b$.

2) Дослідимо її на монотонність: $f'(x) = 3x^2 - 3bc = 3(x^2 - bc)$, то при $0 < x < b \leq c$ $f'(x) < 0$. Оскільки $f(x)$ неперервна в точці $x = b$, то $f(x)$ спадає на відрізку $[0; b]$, звідси $f(x) \geq f(b)$,

тобто
$$x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc \geq 2b^3 + c^3 - 3b^2c. \quad (1)$$

3) Розглянемо другу функцію $g(x) = 2x^3 + c^3 - 3x^2c$, $0 < x < c$, c – фіксоване число.

4) Дослідимо $g(x)$ на монотонність: $g'(x) = 6x^2 - 6xc = 6x(x - c)$. При $0 < x < c$ $g'(x) < 0$. Оскільки $g(x)$ неперервна в точці $x = c$, то $g(x)$ спадає на відрізку $[0; c]$, звідси $g(b) \geq g(c)$, тобто $2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 3c^3 - 3c^2 \cdot c$.

Отже,
$$2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 0. \quad (2)$$

З (1) і (2), за властивістю транзитивності, маємо: $x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc \geq 0$.

5) Отже, $x^3 + b^3 + c^3 \geq 3xbc$. Підставивши замість x a , одержуємо нерівність яку слід було довести.

15. Приклад. Що більше:

- а) 100^{101} чи 101^{100} , б) 107^{113} чи 113^{107} , в) 1997^{2018} чи 2018^{1997} ,
г) e^π чи π^e , д) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ чи $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

Виявляється, що всі ці задачі можна звести до наступної *допоміжної задачі*.

Допоміжна задача. Якщо $0 < x < y$, то при яких умовах виконується нерівність $x^y < y^x$, а при яких умовах істинна нерівність $x^y > y^x$?

Розв'язання. Візьмемо нерівність $x^y < y^x$ і прологорифмуємо її.

$$y \ln x < x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y} \quad (0 < x < y).$$

1) Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2) Дослідимо її на монотонність $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Знак похідної залежить від знака чисельника.

Якщо $0 < x < e$, то $1 - \ln x > 0$, $f'(x) > 0$, отже, $f(x)$ зростає на $(0; e]$.

Якщо $x > e$, то $1 - \ln x < 0$, $f'(x) < 0$, отже, $f(x)$ спадає на $[e; +\infty)$.

3) Якщо $0 < x < y \leq e$, то $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y}$. Звідси $x^y < y^x$.

Якщо $e \leq x < y$, то $e \leq x < y$, то $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y}$. Звідси $x^y > y^x$.

4) Оскільки $e \leq \pi$, то на основі попереднього робимо висновок про те, що $e^\pi > \pi^e$.

16. У темі 6 було показано, що під час розв'язування деяких рівнянь ефективно використовувати наступне: скінченність ОДЗ рівняння (нерівності), обмеженість множини значень функції, монотонність функції або функцій.

Іноді для з'ясування потрібних властивостей доцільно використовувати похідну. Це використання перш за все пов'язано з оцінкою множини значень функції та знаходженням проміжків зростання і спадання функції.

Відповідні прийоми такого дослідження представлені у підручнику [3.28, Р5, § 36, с. 151-152]: 1) оцінка лівої та правої частин рівняння; 2) використання зростання і спадання функцій (теореми про корені рівняння).

Розглянемо приклад розв'язування рівняння *методом оцінки*.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння з підручника [3.28, с. 254, № 36.1(1)]

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$, $g(x) = x^2 - 6x + 11$.

Виділивши повний квадрат, з'ясуємо, що $g(x) = (x-3)^2 + 2 \geq 2$.

Областю визначення функції $f(x)$ є проміжок $[2; 4]$. Знайшовши похідну $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$, з'ясуємо, що $x = 3$ – єдина критична точка функції на проміжку $[2; 4]$.

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[2; 4]$, то порівнюючи її значення у критичній точці $f(3) = 2$ і на кінцях відрізка $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$ приходимо до висновку, що $\max_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2$. Отже, $f(x) \leq 2$.

Застосовуючи метод оцінки, приходимо до висновку, що дане рівняння рівносильне системі рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2, \\ (x-3)^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Відповідь. 3.

Розглянемо, як використовується *зростання функції* при розв'язуванні рівняння.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$.

Розв'язання. Легко бачити, що $x = 0$ є коренем рівняння. Покажемо, що інших коренів це рівняння не має. Дослідимо функцію

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \text{ на монотонність.}$$

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Встановимо проміжки, на яких функція $g = f'(x)$ зберігає знак. Для цього дослідимо її на монотонність $g'(x) = f''(x) = -\sin x + x$.

Оскільки при $x > 0$ $\sin x < x$, то $g'(x) > 0$ при $x > 0$. Отже, функція $g = f'(x)$ зростає при додатних значеннях x . $f'(0) = 0$. Тому при $x > 0$ $g(x) > g(0)$, тобто $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

На основі парності функція $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ набуває додатних значень при всіх $x \neq 0$. Отже, $f(x)$ зростає на всій числовій осі. Згідно з властивістю 1 [3.28, с. 252], рівняння $f(x) = 0$ має не більше одного кореня.

Отже, $x = 0$ – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 0.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння з підручника [3.28, с. 254, №3 6.4(1)] $\sin 5x - 2\cos x - 8x = x^5 - 2$.

Розв'язання. Легко бачити, що $x = 0$ є коренем рівняння. Покажемо, що інших коренів це рівняння не має.

Нехай $f(x) = \sin 5x - 2\cos x - 8x$, $g(x) = x^5 - 2$. Знайшовши похідні функцій $f'(x) = 5\cos 5x + 2\sin x - 8 < 0$ (оскільки $5\cos 5x + 2\sin x \leq 7$) та $g'(x) = 5x^4 > 0$, на основі ознаки спадання (зростання) функції приходимо до висновку, що $f(x)$ спадає, а $g(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$. За властивістю 2 [3.28, с. 252] приходимо до висновку, що рівняння має єдиний корінь.

Відповідь. 0.

Під час розв'язування рівнянь інколи використовується наступне: якщо ми змогли підібрати два корені заданого рівняння виду $f(x) = a$, то щоб довести, що рівняння не має інших коренів, достатньо впевнитися, що функція має тільки два проміжки зростання чи спадання.

Для того щоб диференційовна на інтервалі функція мала на цьому інтервалі не більше двох проміжків зростання чи спадання, достатньо щоб на цьому інтервалі вона мала тільки одну критичну точку.

Розглянемо приклад рівняння яке має два корені та розв'язується на основі властивостей функцій.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $2^{x+1} - 4x = 0$.

Розв'язання. Легко впевнитись, що задане рівняння має два корені $x = 1$ і $x = 2$.

Доведемо, що інших коренів це рівняння не має. Для цього достатньо довести, що функція $f(x) = 2^{x+1} - 4x$ має не більше двох проміжків зростання чи спадання.

$D(f) = \mathbb{R}$. $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 4$ – існує на всій області визначення функції.

Знайдемо критичну точку, розв'язавши рівняння $2^{x+1} \ln 2 - 4 = 0$. Виявляється що, $x_0 = 1 - \log_2 \ln 2$ – єдина критична точка функції.

На проміжку $(-\infty; x_0]$ $f'(x) < 0$, отже, функція спадає, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ $f'(x) > 0$, отже, функція зростає.

Тоді на кожному з проміжків, за властивістю 1, рівняння $f(x) = 0$ може мати не більше ніж один корінь, тобто всього задане рівняння може мати не більше ніж два корені.

Відповідь. $-1; 2$.

17. [3.28, P5, § 36.2, с. 253].

Приклад 5. Застосовуючи похідну, розв'яжіть нерівність $2x^9 - x^5 + x > 2$.

Розв'язання. Дослідимо функцію $f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2$.

$f'(x) = 18x^8 - 5x^4 + 1$. Зробивши заміну $x^4 = y$, одержимо $f'(y) = 18y^2 - 5y + 1$.

$18y^2 - 5y + 1 = 0$. $D = 25 - 4 \cdot 18 = -47 < 0$, отже $f'(y) > 0$, $f'(x) > 0$.

Таким чином, функція $y = f(x)$ є неперервною і зростаючою на $\mathbb{R}$.

Згідно з властивістю 1 робимо висновок, що графік функції $f(x)$ може перетинати вісь x тільки в одній точці.

Враховуючи, що $f(1) = 0$, робимо висновок, що розв'язками даної нерівності є всі числа x з проміжку $(1; +\infty)$.

$(\forall x > 1) f(x) > f(1)$. Звідси $f(x) > 0$.

Відповідь. $(1; +\infty)$.



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1°. Продемонструйте методику знаходження приросту функцій $f(x)$ в точці x_0 , якщо:

- 1) $f(x) = kx + b$; 2) $f(x) = a^x$; 3) $f(x) = \sin x$; 4) $f(x) = \sin^2 x$.

2°. З'ясуйте, чи можна теорему Ролля застосовувати до наступних функцій. Якщо ні, то вкажіть яка з умов теореми порушена.

1) $y = -x^2 + 1, \quad x \in [-1; 1];$

3) $y = \begin{cases} x + 3, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 1, \\ x^4, & \text{якщо } -1 < x \leq 0; \end{cases}$

2) $y = \frac{2 - x^2}{x^4}, \quad x \in [-1; 1];$

4) $y = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1 + x^2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

3. Застосуйте теорему Ролля до доведення того, що рівняння $x - a \sin x - b = 0$ (1) при $0 < a < 1, b \in R$ має не більше одного дійсного кореня.

4°. Застосуйте теорему Лагранжа до доведення нерівностей:

1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

2) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|;$

3) $px^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y),$ де $0 < y < x, p \in N, p \geq 2;$

4) $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}.$

5. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника [3.26] § 5 на знаходження проміжків зростання і спадання функції:

№ 39.3(4). Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}.$

№ 39.10(2). Доведіть, що функція $f(x) = \sin 2x - 3x$ спадає на множині дійсних чисел.

6. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника [3.29] § 1 на знаходження точок екстремуму функції:

№ 12.14(5). Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}.$

№ 12.30(2). Знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x) = \sin x - \cos x + x.$

7. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника [3.26] § 5 на знаходження найбільшого і найменшого функції:

№ 41.5(2). Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x,$ де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

№ 41.15. У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

8. Запропонуйте методику навчання учнів побудови графіка функції на прикладі задачі з підручника [3.26] § 5 п.43:

№ 43.3(1). Побудуйте графік функції $y = f(x) = \frac{4 - x}{x + 2}.$

9°. Розгляньте його застосування **фізичного змісту** похідної під час розв'язування прикладних задач [14, с. 45–49]:

№ 33. Ліфт після виключення рухається за законом $S(t) = 1,5t^2 + 2t + 12$, де t – час у секундах; S – шлях, який пройдено, у метрах. Знайдіть швидкість руху в кінці четвертої секунди, рахуючи з моменту початку руху.

№ 34. Кількість теплоти $Q = Q(T)$, яка необхідна для нагрівання 1 кг заліза від 0 до T градусів, визначається за формулою $Q(T) = 440,857T + 0,29725T^2$. Знайдіть питому теплоємність заліза при температурі 100°C .

№ 42. Висота тіла, яке кинули вертикально вгору, змінюється в залежності від часу t за законом $h(t) = 200t - 4,9t^2$. Знайдіть швидкість тіла в кінці 10-ї секунди. Який час тіло буде летіти вгору і якої найбільшої висоти воно досягне?

10. Розгляньте його застосування біологічного та хімічного змісту похідної під час розв'язування прикладних задач [16, с. 50]:

№ 3.2. Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом $m(t) = m_0 e^{-kt}$, де $m(t)$ – маса речовини (в г) в момент часу t (в с); m_0 – початкова маса; k – деяка стала. Знайдіть швидкість розпаду в момент $t = 8$ с.

№ 3.4. Розмір популяції бактерій у момент часу t год, задається формулою $p(t) = -10^3 t^2 + 10^4 t + 10^6$. Знайдіть швидкість зростання популяції в момент t , якщо: 1) $t = 1$ год; 2) $t = 5$ год; 3) $t = 10$ год.

11°. Використовуючи похідну доведіть тотожності:

а) $(x+b+c)^2 + (-x+b+c)^2 + (x-b+c)^2 + (x+b-c)^2 = 4(x^2 + b^2 + c^2)$;

б) $\cos^2(x-a) + \cos^2(x-b) - 2\cos(a-b) \cdot \cos(x-a)\cos(x-b) = \sin^2(a-b)$;

в) $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x \equiv 1$; г) $\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

д) $2\arctg x - \arctg \frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi, & \text{якщо } x < -1 \\ 0, & \text{якщо } -1 < x < 1 \\ \pi, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$ е) $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

є) Для кутів трикутника α, β, γ доведіть тотожність: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Вказівка. Скористайтесь рівністю $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

12. Запропонуйте методику застосування похідної до розкладання многочлена $xu(x-y) + yz(y-z) + xz(z-x)$ на множники.

13. Запропонуйте методику застосування похідної до спрощення виразів:

а) $(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3$;

б) $\sin^3 x(1+\operatorname{ctgx}) + \cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)$.

14. Запропонуйте методику застосування похідної до доведення нерівностей: а) $(\forall x \geq 0) \operatorname{arctg} x \leq x$; б) $e^x \geq ex$, $(\forall x \in R)$; в) $-4 \leq \cos 3x - \cos 2x + 2 \cos x \leq 2$.

15°. Розв'яжіть наступні рівняння, використовуючи метод оцінки та властивості функцій:

а) $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29$;

в) $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$;

б) $2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3}$;

г) $x^5 - x^3 + 2x - 28 = 0$.

16. Застосуйте похідну до розв'язування нерівностей:

а) $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35 \sin 2x > 0$; б) $e^x > 1 + x$.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

3. Доведення проведемо методом відсупротивного. Нехай рівняння (1) має принаймні два корені: x_1 і x_2 . Функція $f(x) = x - a \sin x - b$, $x \in R$ диференційовна на R . Оскільки $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то згідно з теоремою Ролля її похідна $f'(x) = 1 - a \cos x$ в інтервалі $(x_1; x_2)$ має корінь. Проте очевидно, що при $0 < a < 1$ рівняння $1 - a \cos x = 0$ розв'язків не має. Отримане протиріччя показує, що рівняння (1) не може мати більше ніж одного кореня.

4. Вказівка. 1) Для функції $y = \sin t$, неперервної на відрізку $[y; x]$ та диференційовної в інтервалі $(y; x)$, застосуйте теорему Лагранжа. 2) Для функції $y = \cos t$, неперервної на відрізку $[y; x]$ та диференційовної в інтервалі $(y; x)$, застосуйте теорему Лагранжа. 3) Для функції $f(t) = t^p$, $t > 0$, яка неперервна на відрізку $[y; x]$ і диференційовна в інтервалі $(y; x)$ застосуйте теорему Лагранжа. Використайте нерівність $y^{p-1} \leq \xi^{p-1} \leq x^{p-1}$, $\xi \in (y; x)$. 4) Для функції $y = \ln x$, неперервної на відрізку $[x; x+1]$ та диференційовної в інтервалі $(x; x+1)$ застосуйте теорему Лагранжа.

5. № 39.3(4). зростає на $[1; 3]$ і $(3; 5]$, спадає на $(-\infty; 1]$ і $[5; +\infty)$.

6. № 12.14(5). зростає на $(0; 2]$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$.

№ 12.30(2). $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x_{\max} = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. 7. № 41.5(2).

$$\frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{2 - \pi\sqrt{3}}{2}. \quad \text{№ 41.15. } 20\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}. \quad \text{9. № 33. } 14\frac{m}{c}.$$

№ 34. $500,307 \text{ Дж/}^{\circ}\text{C}$. № 42. 102 м/с ; $20,4 \text{ с}$; $2040,8 \text{ м}$. 10. № 3.2.
 $v = -km_0 e^{-8k}$. № 3.4. 8000 бакт/год ; 0 бакт/год ; -10000 бакт/год .
 12. $(x-y)(x-z)(y-z)$. 13. а) $24xyz$; б) $\cos x + \sin x$, $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. 15. а) 5;
 б) 0; в) -1 ; г) 2. 16. а) $x \in (0; +\infty)$; б) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Література

1. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. Київ : Вища школа, 1988. 120 с.
2. Виленкин Н. Я. Задачник по курсу математического анализа / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А и др. Учеб. пособие для студентов заочн. отд. физ.-мат. фак-тов пединститут. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1971. 343 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу : Підручник: У 3 ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1990. 383 с.
4. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Изд. 4-е доп. Москва : Просвещение, 1973. 256 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі : Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
6. Задачи по математике. Начала анализа. Справ. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Москва : Наука, 1990. 608 с.
7. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А. И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.
8. Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Київ : Вища шк., 1974. 680 с.
9. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч. : Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Ляшенко та ін. Київ : Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
10. Мерзляк А. Г. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Тернопіль : Підручники і посібники, 2001. 304 с.
11. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств : Справочник. Москва : Изд-во МГУ, 1991. 144 с.
12. Семенов В. О. Тристан В. М. Доведення нерівностей. Показникові і логарифмічні нерівності. Харків : Вид. група «Основа», 2007. 192 с.
13. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.
14. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу : Навч. посібник. Чернігів : Сіверянська думка, 2002. 128 с.

15. Соколенко Л. О. Досвід використання професійних сюжетів у процесі навчання математики старшої школи. *Математика в сучасній школі*. 2013. № 4. С. 43–48.
16. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
17. Соколенко О. І. Вища математика : Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
18. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.
19. Соколенко Л. О., Швець В. О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі*. 2014. № 9. С. 2–10.
20. Соколенко Л. О., Швець В. О. Прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції в курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі*. 2014. № 12. С. 25–32.
21. Швець В. О., Заболотня Л. В., Соколовська І. С. Математичний гурток: старша школа: нерівності та їх доведення. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. 112 с.

Тема 9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу

Мета навчання: здійснити аналіз методичних підходів до навчання первісної, інтеграла та їх застосувань, які використовуються в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Виявити спільне та відмінне з викладом даного матеріалу у вузівському курсі математичного аналізу, розглянути методику застосувань первісної та інтеграла під час розв’язування задач ШКМ та прикладних задач ШКМ.

Завдання.

- 1) Аналіз шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення первісної, інтеграла та їх застосувань.
- 2) Ознайомлення з запропонованими у діючих шкільних підручниках підходами, щодо формування понять «первісна», «невизначений інтеграл», «визначений інтеграл» та методикою навчання їх властивостей.
- 3) Розгляд прикладних задач, що приводять до понять «первісна», «визначений інтеграл». З’ясування геометричного, фізичного, біологічного змісту визначеного інтеграла та застосування його під час розв’язування прикладних задач.
- 4) Порівняльний аналіз викладу даного матеріалу у шкільному курсі та в курсі вищої математики.
- 5) Ознайомлення з методикою застосувань інтеграла до розв’язування задач ШКМ (доведення тотожностей, нерівностей, обчислення сум).

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення первісної, інтеграла та їх застосувань.	[2.5] – [2.7]
2	Методика вивчення первісної, невизначеного інтеграла та їх властивостей в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі вищої математики.	[2]–[10], [13], [14], [16], [17]–[18], [3.29]–[3.35]
3	Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Його геометричний, фізичний, біологічний зміст. Порівняльний аналіз шкільного та вузівського підходів.	[2]–[10], [13], [14], [16], [17]–[18], [3.29]–[3.35]
4	Формула Ньютона-Лейбніца та її застосування у шкільному курсі алгебри і початків аналізу та в курсі вищої математики.	[2]–[10], [13], [14], [16], [17]–[18], [3.29]–[3.35]
5	Застосування визначеного інтеграла до: обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл, розв'язування прикладних задач.	[2]–[10], [13], [14], [16], [17]–[18], [3.29]–[3.35]
6	Ознайомлення з методикою застосувань інтеграла до розв'язування задач ШКМ (доведення тотожностей, нерівностей, обчислення сум).	[1], [4], [6], [11], [12], [21]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1°. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення первісної та інтеграла. Визначте місце теми в програмі. Вимоги до знань і вмінь учнів.

2°. Згадайте задачі, що привели до поняття похідної.

3. З допомогою якої задачі відбувається введення поняття «*первісної*» в курсі алгебри і початків аналізу? Запропонуйте методику її використання. Сформулюйте означення «*первісної*».

4. Який вираз є загальним виглядом *первісної*? Сформулюйте **основу властивість первісної**.

5°. Згадайте таблицю первісних, запропоновану в шкільному підручнику [3.34] та **три правила знаходження первісних**.

6. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла, запропоноване у шкільному підручнику [3.34]. Які властивості невизначеного інтеграла розглядають в курсі алгебри і початків аналізу?

7°. Наведіть приклади задач, що приводять до поняття «*визначений інтеграл*».

8. Сформулюйте означення криволінійної трапеції. Чи можна фігуру зображену на **рисунку 2 (с. 123)** вважати криволінійною трапецією?

9. Розгляньте задачу про визначення площі криволінійної трапеції. Який алгоритм розв'язання використовується в курсі алгебри і початків аналізу?

10°. Який підхід до виведення формули Ньютона-Лейбніца використовується в курсі алгебри і початків аналізу?



Відповіді та вказівки до контрольно-смыслових запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. [2.6, 11 кл. (профільний рівень)] Тема 2. Інтеграл та його застосування.

2°. [14, с. 45–46] таблиця 2 (фрагмент)

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1	2	3	4	5
1. $S = S(t)$ – шлях, який проходить тіло за час t ; [м]	Δt	$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$	$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c$ – швидкість [м/с]
2. $v = v(t)$ – швидкість нерівномірного руху тіла, де t – час; [м/с]	Δt	$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$	$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_c$ – прискорення [м/с ²]

3. [3.34, §2, п. 9]. **Задача 1.** Дано функцію $f(x) = 2x$, яка є похідною невідомої функції $F(x)$. Від якої функції $F(x)$ взяли похідну, щоб одержати функцію $f(x) = 2x$?

Відповідь. $F(x) = x^2$, оскільки $(x^2)' = 2x$.

Цю функцію називають **первісною**.

Означення [3.34, с. 84]. Функцію F називають **первісною функцією** (або коротко **первісною**) функції f на проміжку I , якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

4. **Питання.** Чи існують ще функції, похідні яких дорівнюють даній функції $f(x) = 2x$?

Відповідь. $(x^2 + 1)' = (x^2 - 3)' = (x^2 + 100)' = 2x$.

Існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють даній функції $f(x) = 2x$.

Множину всіх первісних записують у вигляді $F(x)+C$, де C – довільна стала. Цей вираз називають **загальним виглядом первісної**.

Теорема 9.1 (основна властивість первісної).

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I .

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C – деяке число.

5°. [3.34, с. 91-92, Теореми 10.1-10.3].

6. 1) *Означення невизначеного інтеграла* [3.34] § 2, п. 9, с. 86;
2) *Властивості невизначеного інтеграла* [3.34] § 2, п. 10, с. 91-92.

7°. [14, с. 69-70], [22]: 1) задача про площу криволінійної трапеції; 2) задача про масу неоднорідного стержня; 3) задача про шлях, який пройшло тіло при прямолінійному нерівномірному русі; 4) задача про роботу змінної сили; 5) задача про силу тиску рідини на вертикально розміщену пластинку.

[16, с. 67-68]: 1) задача про чисельність популяції; 2) задача про кількість речовини, яка вступила в хімічну реакцію.

8. **Означення.** Плоску фігуру, обмежену графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ і прямими $x = a$, $x = b$ називають **криволінійною трапецією** (рис. 1).

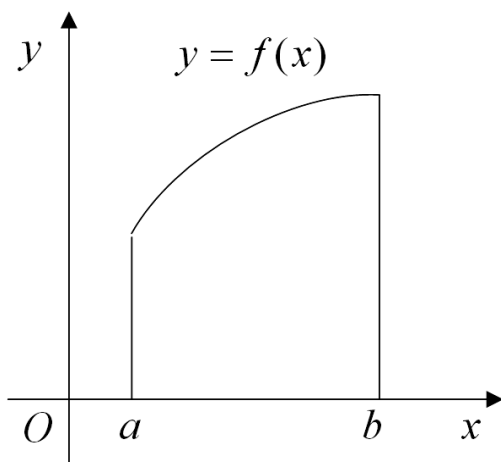


Рис. 1.

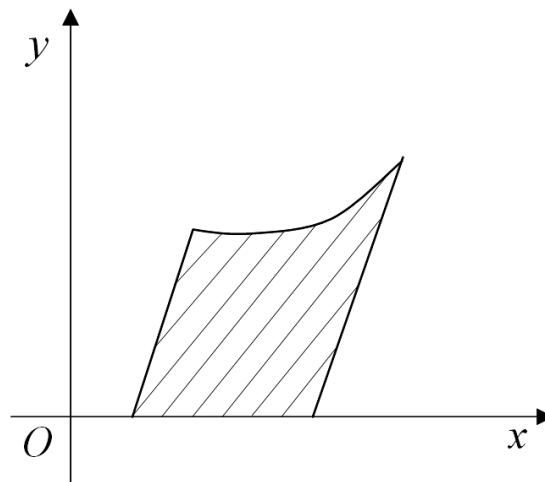


Рис. 2.

9. Задача про площу криволінійної трапеції.

Алгоритм розв'язання

1. Розбиття відрізка $[a; b]$ на якому визначена неперервна і невід'ємна функція $y = f(x)$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n рівних частин;

2. Визначення довжини кожного з відрізків $[x_{k-1}; x_k]$;

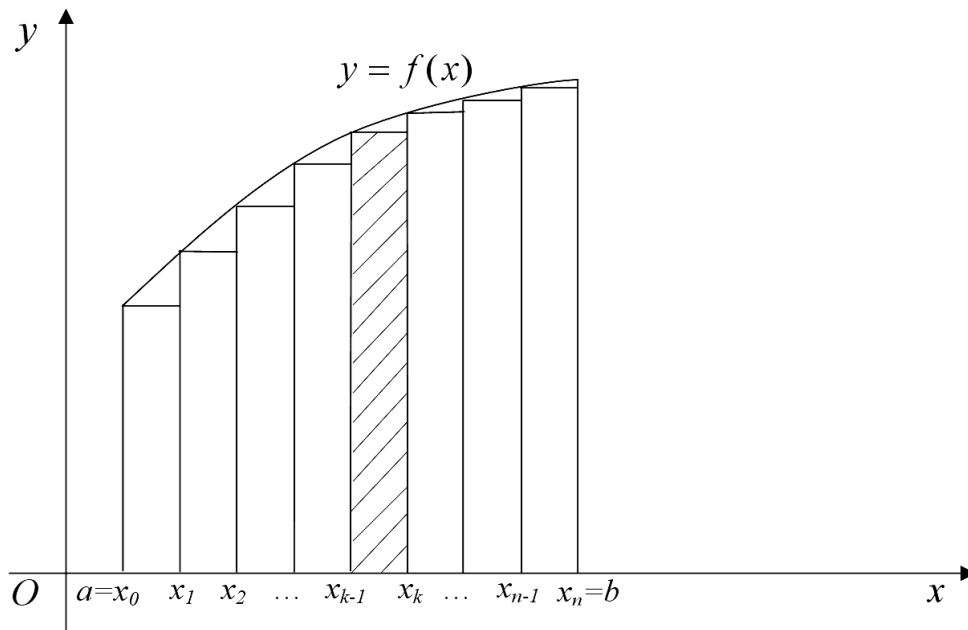


Рис. 3.

3. Утворення добутків $f(x_0)\Delta x, f(x_1)\Delta x, \dots, f(x_{n-1})\Delta x$;

4. Знаходження суми $S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$;

5. Обчислення границі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, яку за означенням називають

визначеним інтегралом і позначають $\int_a^b f(x)dx$.

10°. [3.34, §2, п.11 Теорема 11.1], [3.34, Р2 §10].



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1. Розгляньте приклади використання означення первісної функції, основної властивості первісної та правил знаходження первісних для розв'язування задач з підручника [3.34] § 2:

№ 9.10(1,2). Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F , яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$

№ 10.3 (2,4,6). Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

$$2) f(x) = 2 \cos \frac{x}{2}; \quad 4) f(x) = \left(\frac{x}{7} - 2 \right)^4. \quad 6) f(x) = 7^{3x}.$$

На які суттєві моменти слід звернути увагу учнів?

2°. Підберіть прикладну задачу в розв'язуванні якої поняття первісної відіграє першорядну роль. Запропонуйте методику її розв'язування.

3. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника [3.34] §2:

№ 10.15 (1,2). Знайдіть:

$$1) \int \sin^2 x \, dx; \quad 2) \int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx.$$

4°. Як означається невизначений інтеграл в курсі вищої математики? Які властивості невизначеного інтеграла розглядають?

5°. Які відмінності у розв'язуванні задач про визначення площі криволінійної трапеції в курсі вищої математики?

6. Запропонуйте методику навчання учнів розв'язування задач з підручника [3.34] § 2:

№ 11.5 (1,7). Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

$$1) \text{ параболою } y = x^2 + 1 \text{ і прямими } y = 0, x = 0, x = 2;$$

$$7) \text{ синусоїдою } y = \sin 2x \text{ і прямими } y = 0, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{\pi}{4}.$$

№ 11.10 (2,15). Знайдіть площу фігури обмеженої лініями:

$$2) y = 2x^2, y = 2x; \quad 15) y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$$

7°. Як розв'язуються інші прикладні задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла (задача про шлях, який пройшло тіло при прямо-лінійному нерівномірному русі; задача про роботу змінної сили; задача про чисельність популяції; задача про кількість речовини, яка вступила в хімічну реакцію; задача про обсяг випуску продукції) в курсі алгебри і початків аналізу?

8°. Який підхід до вивчення формули Ньютона-Лейбніца застосовують в курсі вищої математики?

9. Запропонуйте методику застосування формули Ньютона-Лейбніца до розв'язування задач з підручника [3.34] § 2 на обчислення **визначеного інтеграла**:

№ 10.8 (2,5,7).

$$2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} \, dx; \quad 5) \int_{\frac{1}{5}}^1 (5x-3)^5 \, dx; \quad 7) \int_0^1 \frac{dx}{3-2x}.$$

№ 10.19 (1,4).

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{tg}^2 3x \, dx; \quad 4) \int_1^2 \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x} \, dx.$$

10. Використовуючи посібник [14] розгляньте застосування інтеграла у фізиці. Розв'яжіть задачі № 99, № 105 та ін.

№ 99. Два тіла починають рухатись одночасно з однієї точки: одне зі швидкістю $v_1 = (6t^2 + 4t)$ м/с, друге зі швидкістю $v_2 = 4t$ м/с. Через скільки секунд відстань між ними буде дорівнювати 250 м, якщо рух відбувається вздовж прямої лінії в одному напрямку?

№ 105. При розтягуванні пружини на 5 см затрачена робота в 29,43 Дж. На скільки розтягнеться пружина, якщо затратити роботу в 9,81 Дж?

11°. Наведіть приклади задач з курсу вищої математики під час розв'язування яких використовується формула Ньютона-Лейбніца. Чим ці задачі відрізняються від задач шкільного курсу алгебри і початків аналізу? Запропонуйте методику навчання студентів їх розв'язування.

12. На якому твердженні базується застосування невизначеного інтеграла у тотожних перетвореннях? Розгляньте приклад застосування цього твердження до доведення тотожності $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x = \operatorname{ctg} x - 16\operatorname{ctg} 16x$.

13. Використовуючи невизначений інтеграл доведіть тотожності:

а) $(x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3 = 24abx$;

б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3\operatorname{tg} 3x$.

14. Сформулюйте теорему про *середнє значення* та *наслідок* з неї, який використовується під час доведення нерівностей [12, с. 64].

Розгляньте приклад застосування **наслідку** з теореми про середнє до доведення подвійної нерівності $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ якщо $0 < a < b$.

15. Застосуйте наслідок з теореми про середнє до доведення нерівності:

а) $4 \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^3} dx \leq 2\sqrt{30}$;

б) $\frac{\pi}{6} < \ln 2 < \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

1. № 9.10. 1) $F(x) = -\frac{1}{x} - 6$; 2) $F(x) = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$.

№ 10.11. $S(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t$. 2°. [16, с. 66, задача 4.1] Популяція, початкова чисельність якої дорівнює 90 особин, зростає зі швидкістю $W(t) = 20t$ особин у день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції в залежності

від часу t , час виражено у днях. *Відповідь.* $P(t) = 10t^2 + 90$. **3. № 10.15.**

1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **4°.** [17] §1.12, с.259-264.

5°. [17] §1.13, с.280-283. **6. № 11.5.** 1) $4\frac{2}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **№ 11.10.** 2) $\frac{1}{3}$; 15) $\sqrt{2} - 1$.

7°. [14, с.68-69]; [16, с. 67-68]. **8°** [17] § 1.13, с. 294-295, Теорема 13.8, 13.9.

9. № 10.8. 2) $\frac{3}{2}$; 5) 0; 7) $\frac{1}{2}\ln 3$. **№ 10.19.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 4) $\frac{3e^2 + 8e - 8}{8e^2}$. **10. № 99.**

Відповідь. 5 с. **№ 105. Вказівка.** Для розв'язування задачі формулу роботи

$A = \int_a^b F(x)dx$ потрібно використати двічі. *Відповідь.* 2,9 см.

12. Застосування невизначеного інтеграла у тотожних перетвореннях базується на наступному **твердженні**:

Якщо дві функції $F(x)$ і $f(x)$ (вважають для спрощення, що обидві функції неперервні на $[a; b]$) зв'язані залежністю

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a; b), \quad (1)$$

то вони зв'язані залежністю

$$F(x) = \int f(x)dx. \quad (2)$$

Розглянемо приклади застосування невизначеного інтеграла до доведення тотожностей.

Приклад 1. Доведіть тотожність

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x = \operatorname{ctg} x - 16\operatorname{ctg} 16x.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x$. Знайдемо невизначений інтеграл $\int f(x)dx = \int \operatorname{tg} x dx + \int \operatorname{tg} 2x d(2x) + \int \operatorname{tg} 4x d(4x) + \int \operatorname{tg} 8x d(8x)$.

Як відомо $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$. Скориставшись цим, матимемо:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|.$$

$$\int \operatorname{tg} 2x d(2x) = \int \frac{\sin 2x d(2x)}{\cos 2x} = -\int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\ln|\cos 2x|.$$

.....

$$\begin{aligned} \text{Тому } \int f(x)dx &= -\ln|\cos x| - \ln|\cos 2x| - \ln|\cos 4x| - \ln|\cos 8x| + C = \\ &= -\ln|\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x| + C. \end{aligned}$$

Замінімо косинуси на рівні їм частки, а саме:

$$\begin{aligned} &= -\ln\left|\frac{\sin 2x}{2\sin x} \cdot \frac{\sin 4x}{2\sin 2x} \cdot \frac{\sin 8x}{2\sin 4x} \cdot \frac{\sin 16x}{2\sin 8x}\right| + C = -\ln\left|\frac{\sin 16x}{16\sin x}\right| + C = \\ &= -(\ln|\sin 16x| - \ln|\sin x| - \ln 16) + C = -\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + C \end{aligned}$$

Отже, $\int f(x)dx = -\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + C$.

$$f(x) = \left(\int f(x)dx \right)' = \left(-\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + C \right)' = -16\operatorname{ctg} 16x + \operatorname{ctg} x.$$

Тому рівність, яку слід було довести, виконується.

14. Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і функція $g(x)$ не змінює знак на цьому відрізку, то $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$, де c – деяка точка на проміжку $(a; b)$.

Наслідок. $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$, де m , M – найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Зокрема, якщо $g(x) \equiv 1$, то: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ строго монотонні на відрізку, то будемо мати строгі подвійні нерівності.

Вказівка. Для доведення нерівності розгляньте інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на довільному проміжку $[a; b]$, якщо $a > 0$. Тому найменше значення цієї функції на даному проміжку $m = \frac{1}{b}$, а найбільше значення $M = \frac{1}{a}$.

Застосовуючи наслідок з теореми про середнє, одержуємо: $\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{a}$. Обчислимо інтеграл, застосовуючи формулу Ньютона-

Лейбніца. $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$. Отже, $\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$.

15. б) Вказівка. Розгляньте інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} x dx$.



Література ([1]–[21] з теми 9)

22. Соколенко Л. О., Швець В. О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення інтеграла та його застосувань у курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі*. 2015. № 1–2. С. 20–29.

23. Ткач Ю. М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці. Навчально-метод. посібник. Харків : Вид-во «Ранок», 2011. 176 с.

Тема 10.**Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри 9-го класу, в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання**

Мета навчання: здійснити порівняльний аналіз методичних підходів до навчання елементів комбінаторики, теорії ймовірностей під час навчання курсу алгебри 9-го класу та курсу алгебри і початків аналізу на різних рівнях в старшій школі. Виявити спільне та відмінне з викладом даного матеріалу у вузівських курсах «Вища математика», «Теорія ймовірностей». З'ясувати методичні особливості навчання елементів математичної статистики в ЗСО.

Завдання.

1) Аналіз шкільного курсу алгебри та курсу алгебри і початків аналізу на предмет вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики.

2) Ознайомлення з запропонованими у діючих шкільних підручниках підходами, щодо навчання комбінаторних правил суми та добутку, формування основних понять «перестановки», «розміщення», «комбінації» без повторень.

3) Порівняння підходів до навчання елементів комбінаторики в шкільному курсі алгебри 9-го класу та курсі алгебри і початків аналізу 11-го класу на різних рівнях з науково-методичними підходами, що використовуються під час навчання в ЗВО.

4) Ознайомлення з запропонованими у діючих шкільних підручниках підходами, щодо формування основних понять теорії ймовірностей «випадкова подія», «відносна частота події», «ймовірність події» (класичне, статистичне означення ймовірності).

5) З'ясування питань методики навчання учнів використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій.

6) Порівняння підходів до формування понять ШКМ з науково-методичними підходами, що використовуються під час навчання в ЗВО. Розгляд понять «*стохастичний експеримент*», «*простір елементарних подій*», «*елементарні події*».

7) Розгляд аксіоматичних основ теорії ймовірностей: аксіоматика теорії ймовірностей; властивості ймовірності, що впливають з аксіоматичного означення.

8) Розгляд операцій над подіями, теореми додавання для несумісних подій, теореми додавання для довільних подій та їх застосувань до розв'язування прикладних задач.

10) Розгляд незалежних подій, умовної ймовірності, теореми множення та їх застосувань до розв'язування прикладних задач.

11) Розгляд геометричної ймовірності та її застосувань.

12) З'ясування методичних особливостей навчання випадкової величини та її математичного сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків) у курсі «Алгебра і початки аналізу».

13) З'ясування методичних особливостей навчання елементів математичної статистики в ЗСО.

Змістова структура теми

№	Структурні елементи змісту	Де знайти відповідь
1	Аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри 9 класу та алгебри і початків аналізу 11 класу на предмет вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики.	[2.3] – [2.7],
2	Методика вивчення елементів комбінаторики. Комбінаційні правила суми та добутку. Сполуки без повторень: перестановки, розміщення, комбінації в ШКМ та в курсах «Вища математика», «Теорія ймовірностей».	[6], [7], [9], [2]–[5], [8], [3.18]–[3.22], [3.29]–[3.35]
3	Методика використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій.	там само
4	Аксіоматика теорії ймовірностей. Властивості ймовірності, що впливають з аксіоматичного означення.	[1], [9] [3.34]
5	Операції над подіями. Теорема додавання та її застосування до розв'язування прикладних задач.	[1], [9], [8], [3.34]
6	Незалежні події. Умовна ймовірність. Теорема множення та її застосування до розв'язування прикладних задач.	[1], [6]–[9], [3], [5]
7°	<i>Геометрична ймовірність та її застосування до розв'язування задач.</i>	[9], [3.31], [3.34]
8°	<i>Методика навчання випадкової величини та її математичного сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків).</i>	[6], [9], [3.34]
9°	<i>Методика навчання елементів математичної статистики в закладах середньої освіти.</i>	[6], [9], [3.34], [2], [3], [5], [8]



Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1°. Проведіть аналіз діючих програм шкільного курсу алгебри 9 класу та алгебри і початків аналізу 11 класу на предмет вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики.

2°. Згадайте методичні підходи, які використовуються в курсі алгебри 9-го класу та курсі алгебри і початків аналізу 11 класу до навчання основних правил комбінаторики (правила суми, правила добутку), сполук без повторень (перестановок, розміщень, комбінацій).

3. Яким чином в шкільному курсі алгебри 9-го класу вводяться поняття «подія», «випадкова подія», «частота випадкової події»?

Порівняйте ці підходи з підходами, що використовуються до введення відповідних понять в курсах «Вища математика», «Теорія ймовірностей».

4. Як означаються поняття «*стохастичний експеримент*», «*простір елементарних подій*», «*елементарні події*» в курсі «Теорія ймовірностей»? Підберіть приклади цих понять. Проведіть порівняльний аналіз викладу цього матеріалу з його викладом у діючих шкільних підручниках 11 класу. Зверніть увагу на поняття «*експеримент (випадковий експеримент)*», «*результат (експериментальний наслідок)*», «*простір елементарних наслідків Ω* », «*випадкові події*» та приклади, запропоновані у підручнику [3.34].

5°. Як формуються поняття «*достовірна (вірогідна) подія*», «*неможлива подія*», «*подія A спричинює подію B* », «*рівні (рівносильні)*» або «*еквівалентні*» події? Згадайте відповідні означення, наведіть приклади.

6. Які операції виконуються над подіями? Яку подію називають «*протилежною подією*»? Які події називають «*несумісними подіями*»? Розгляньте приклади цих подій.

7°. Як відбувається введення **статистичного означення ймовірності** у курсі алгебри 9-го класу та курсі «Теорія ймовірностей» у ЗВО?

8°. Як відбувається введення **класичного означення ймовірності** у курсі алгебри 9-го класу та курсі «Теорія ймовірностей» у ЗВО?

9. Згадайте **аксіоматичні основи** теорії ймовірностей [9, §12, с. 38–42]. Які поняття та аксіоми розглядається у сучасних підручниках курсу алгебри і початків аналізу 11 класу? Які теореми доводяться? Які підходи використовують автори для спрощення аксіоматичної теорії?

10. Розгляньте задачі, які використовуються на етапі мотивації, під час формування поняття «*умовна ймовірність*», запропоновані у підручнику алгебри та початків аналізу 11 класу [3.34] та у курсі «Теорія ймовірностей». Згадайте теорему множення та формулу повної ймовірності.

11°. Як означається «*випадкова величина*»? Що таке *розподіл ймовірностей* випадкової величини? Як означається «*математичне сподівання розподілу випадкової величини*» у шкільному курсі та в курсі «Теорія ймовірностей»?

12°. Які елементи математичної статистики вивчаються в курсі алгебри 9-го класу, а які в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу? З'ясуйте методичні особливості їх навчання.



Відповіді та вказівки до контрольних запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. [2.3, 9 кл.] **Тема 4.** Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики; [2.4, 9 кл.] **Тема 5.** Елементи прикладної математики; [2.6, 11 кл.] **Тема 3.** Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей; [2.7, 11 кл.], **Тема 9.** Елементи теорії ймовірностей.

2°. [3.20, п. 21], [3.21, §6, п.23-25], [3.34, §3, п. 13, 14].

3. [3.20, п. 22], [3.21, §6, п.26].

4. [1, §1], [9, P2, §9], [6, §2.1, с.380-381], [3.34, §3, п.15].

5°. [1, §2], [9, P2, §9], [6, §2.1, с.381-382], [3.34, §3, п.15].

6. [1, §3], [9, P2, §9], [6, §2.1, с.382-383], [3.34, §3, п.15].

7°. [3.20, п. 22], [3.21, §6, п.26], [9, P2, §8], [6, §2.1, с.383-384].

8°. [3.21, §6, п.27], [9, P2, §10], [6, §2.1, с.384-385].

9. [9, §12, с.38-42], [3.34, §3, п.15]. Зверніть увагу на аксіоми, поняття, теореми: 1) **твердження 1** (про ймовірність об'єднання несумісних подій) та **твердження 2** (про ймовірність достовірної події), які є аксіомами теорії ймовірностей; 2) поняття «алгебра подій», «ймовірнісний простір» [3.34, с.146]; 3) **теорему додавання** для довільних подій ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$), де A і B – події деякого досліду.

10. [3.34, §3, п.16], [6, §2.1, с.393-396], [9, P2, §14].

11°. [3.34, §3, п.18, 19], [9, P IV, §23, §24; P V, §29], [6, §2.2, с.399-405].

12°. 9 клас [2.3]-[2.4]; 11 клас [2.5]-[2.7]. Проаналізуйте методичні підходи до викладу теоретичного матеріалу у діючих шкільних підручниках та порівняйте їх з науковими.



Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1. З'ясуйте, який теоретичний матеріал з комбінаторики використовується для розв'язування наступних задач та запропонуйте методику його використання.

1.1. За підрахунками існує 2 млн. видів комах, 1 млн. видів рослин, 20000 видів риб і 8700 видів птахів. Якщо для порівняльного аналізу потрібно обрати по одному виду від кожної з цих чотирьох категорій, то скількома способами це можна зробити?

1.2. У трьох пробірках, поставлених у три пробірковий штатив, містяться різні препарати. Скільки можливих способів розміщення цих препаратів у штативі?

1.3. Студент повинен скласти 3 екзамени протягом 12 днів. Скількома способами це можна зробити, якщо студенту надано право складати по одному екзамену щоденно?

1.4. У деякого захворювання існує 6 відомих симптомів. Це захворювання діагностується, якщо у хворого проявляється не менше

чотирьох симптомів. Скільки різних комбінацій симптомів можуть привести до встановлення даного діагнозу?

2. Запропонуйте методику використання понять «частота випадкової події», «статистична ймовірність» до розв'язування задачі: Хімічний дослід повторюють 7 разів, в 5 випадках він закінчується успіхом, а в інших – невдачею. Визначте відносну частоту успішних виходів даного дослідження і найможливіше число успішних виходів у наступній серії, що складається з 10 дослідів.

3. Запропонуйте методику використання класичного означення ймовірності та формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій:

3.1. У деякій популяції у 40% людей волосся темне, у 40% – руде і у 20% – світле. У цій популяції у всіх темноволосих людей очі карі, у всіх світловолосих – блакитні, у однієї половини рудих – блакитні, а у іншій карі. Яка ймовірність того, що у людини темне волосся? Яка ймовірність того, що у людини карі очі?

3.2. У партії з 10 виробів знаходиться 7 стандартних. Навмання взято 6 виробів. Яка ймовірність того, що серед них: а) 4 стандартні; б) більше чотирьох стандартних?

4. Серед усіх родин з двома дітьми обрано одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: A – в родині є хлопчик і дівчинка; B – в родині не більше ніж одна дівчинка; $A \cap B$; $\bar{A}$.

5°. Використовуючи матеріал навчальних посібників [3, с. 99–102], [5, с. 97–103] та інших підберіть задачі на застосування *теорем про додавання ймовірностей несумісних подій, множення ймовірностей незалежних подій, ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій*. Запропонуйте методику навчання учнів їх розв'язування.

6. Продемонструйте застосування поняття «умовна ймовірність» до розв'язування наступної задачі: Захворювання вдається вилікувати у 96% хворих, причому у 85% не спостерігається рецидивів. Яка ймовірність того, що у хворого взятого навмання з даним діагнозом не буде рецидивів?

7. Продемонструйте застосування *формули повної ймовірності* до розв'язування наступної задачі: Готуючись до екзамену з теорії ймовірностей, студент з n екзаменаційних білетів вивчив лише m ($m < n$). В якому випадку ймовірність витягти вивчений білет буде більшою: коли він тягне білет першим, коли він тягне білет другим?

8°. Використовуючи навчально-методичні посібники [3], [5], [8] та інші, підберіть задачі на визначення вибірових характеристик: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення та задачі на графічне подання інформації про вибірку (полігон, гістограма). Запропонуйте методику навчання учнів їх розв'язування.



Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

1.1. $3,48 \cdot 10^{20}$ способів. 1.2. 6 способів. 1.3. 1320 способів.
1.4. 22 комбінації. 2. 0,714; 7 дослідів. 3.1. 0,4; 0,6. 3.2. а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$. 6. 0,816.

7. *Вказівка.* Нехай A – подія, яка полягає в тому, що студент витягне вивчений білет коли буде брати його першим, B – подія, яка полягає в тому, що студент витягне вивчений білет коли буде брати його другим, H_1 – подія, яка полягає в тому, що перший студент взяв білет, який знає другий; H_2 – подія, яка полягає в тому, що перший студент взяв білет, якого не знає другий. *Відповідь.* Ймовірність витягнути вивчений білет однакова і дорівнює $\frac{m}{n}$.



Література

1. Елементи стохастики : Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін. Київ : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000. 70 с.
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.
3. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу : Навч. посібник. Чернігів : Сіверянська думка, 2002. 128 с.
4. Соколенко Л. О. Особливості методики навчання елементів комбінаторики та теорії ймовірностей в роботах З. Г. Шеф теля. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки.* Чернігів, 2013. Вип. 113. С. 90–93.
5. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
6. Соколенко О. І. Вища математика : Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
7. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.
8. Швець В. О. Вибрані теми з алгебри. 11 клас: Елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей / В. Швець, Г. Михалін, І. Соколовська. Київ : Шк. світ, 2011. 128 с.
9. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей : Підручник. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1994. 192 с.

КОМПЛЕКСИ ЗАВДАНЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Комплекс завдань самостійної роботи по змістовому модулю 1

Завдання	Тема	Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)	Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)
1	1. Математика як наука. Методологічні основи математики	1-7	
2	2. Теорія множин і шкільна математика. Відповідності і відношення у шкільній математиці	3	1, 4, 5
3	3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел	2, 4, 6, 7	3
4	4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики	Повторити з курсу МНМ питання: 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11	5, 9-12
5	5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики	1, 3, 4, 9, 14-16 Для відповідей на питання № 4, № 9 використовуйте джерела [9], [10]	4, 6, 12, 14, 16

Комплекс завдань самостійної роботи по змістовому модулю 2

Завдання	Тема	Контрольно-сміслові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)	Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)
1	6. Наукові основи змістової лінії «Функції» шкільного курсу математики	1, 11, 15, 16, 27	18, 20-22
2	7. Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО	2, 3 (частково), 6, 9	2, 5
3	8. Застосування похідної в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу	2, 3, 4, 8, 10, 11	1, 2, 4 (2,4), 9, 11 (б,г,е), 15 (а,в), 16 (б)
4	9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу	1, 2, 5, 7, 10	2, 4, 5, 7, 8, 11
5	10. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри 9-го класу, в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання	1, 2, 5, 7, 8, 11, 12	5, 8

1.1. Акуленко І. А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія. Черкаси : видавець Чабаненко Ю, 2013. 460 с.

1.2. Бурбаки Н. Архитектура математики (Перевод с французского Д. Н. Ленского), Матем. просв., 1960, выпуск 5, 99–112.

1.3. Елементарна математика. Навчальна програма (розроблена на основі концепції розвивальної освіти) / Укладач доцент Семенець С. П. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. 88 с.

1.4. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А. И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.

1.5. Кугай Н. В., Бурчак С. О. Робоча програма навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики» для студентів галузі 01 Освіта. Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Глухівський національний педагогічний університет імені О. Довженка. URL: <http://www.pfm.gnpu.edu.ua>.

1.6. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

1.7. Мартинюк О. И. Опыт формирования компетентностной модели выпускника педагогического вуза как нормы качества и базы оценки результатов образования. URL: <http://testor.ru/files/qualimetry/3.doc>.

1.8. Працьовитий М. В., Ніколаєнко С. В. «Наукові основи шкільного курсу математики» в системі підготовки сучасного вчителя математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі* : Зб. наукових праць. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. № 5. С. 17–24.

1.9. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. *Математика в школі*. 2005. № 5. С. 2–7.

1.10. Семенець С. П., Семенець Л. М. Елементарна математика : навч.-метод. посіб. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. 244 с.

1.11. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин.-тов / Виленкин Н. Я., Дудничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.

1.12. Соколенко Л. О. Шкільна математика з точки зору вищої. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. Чернігів, 2011. Вип. 83. С. 126–128.

1.13. Соколенко Л. О. Роль курсу «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» у професійній підготовці вчителя.

Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ : Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. С. 249–252.

1.14. Соколенко Л. О. Роль наукових основ шкільного курсу математики у професійній підготовці вчителя. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки.* Чернігів, 2015. Вип. 130. С. 214–219.

1.15. Соколенко Л. О. Технологія навчання теоретичних основ теми «Розширення поняття про число». *Збірник наукових праць «Педагогічні науки» Херсонського державного університету.* Херсон, 2016. Вип. LXXI. Том 2. С. 135–142.

1.16. Соколенко Л. О. Роль теоретичних основ змістової лінії «Числа» у професійній підготовці вчителя математики. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія педагогічна / редкол.: П. С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. Вип. 22. С. 114–117.*

1.17. Соколенко Л. О. Технологія навчання теоретичних основ змістової лінії «Рівняння і нерівності». *Збірник наукових праць «Педагогічні науки» Херсонського державного університету.* Херсон, 2017. Вип. LXXIV. Том 2. С. 168–173.

1.18. Соколенко Л. О. Методика навчання наукових основ функціональної змістової лінії майбутніх вчителів математики. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки.* Черкаси, 2017. Вип. 11. С. 77–87.

1.19. Соколенко Л. О. Досвід формування спеціальних компетентностей під час навчання дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики». *Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи.* Випуск 61. *Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М.П.Драгоманова.* Київ : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2018. С. 264–269.

1.20. Соколенко Л. О. «Наукові основи шкільного курсу математики» як невід'ємна складова частина професійної підготовки сучасного вчителя. *Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи.* Випуск 62. *Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова.* Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. С. 188–193.

1.21. Соколенко Л. О. Про застосування теорії прямої до розв'язування задач шкільного курсу геометрії. *Сучасна освіта в контексті нової української школи : зб. тез за матеріалами Всеукраїнської*

науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 153–156.

1.22. Тарасенкова Н. А., Кірман В. К. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Математика в школі*. 2008. № 6. С. 3–9.

1.23. Таточенко В. І. Програма спецкурсу «Наукові основи шкільного курсу математики» для магістрів. Херсонський державний університет. URL: <http://dls.ksu.kherson.ua>

1.24. Теплицька А. О. Професійна підготовка майбутнього вчителя математики як об'єкт теоретичного аналізу. *Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили комплексу «Києво-Могилянська академія»*. Серія : Педагогіка. 2016. Т. 269. Вип. 257. С. 125–130.

Навчальні програми з математики

2.1. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти. *Математика в школі*. 2012. № 3. С. 2–8.

2.2. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1–4 класи / Укл. Онопрієнко О. В., Скворцова С. О., Листопад Н. П., 2011. URL: www.mon.gov.ua.

2.3. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.4. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.5. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. *Математика в рідній школі*. 2017. № 10. С. 2–10.

2.6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

2.7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://mon.gov.ua/...programi/navchalni-programi-dlya-10-11...2018>

Шкільні підручники

3.1. Богданович М. В., Лищенко Г. П. Математика : підруч. для 4 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Генеза, 2015. 176 с.

3.2. Істер О. С. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2013. 368 с.

- 3.3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, **2013**. 352 с.
- 3.4. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. 5 клас : підруч. для закладів загальної середньої освіти. Вид. 2-ге доопрац. відповідно до чинної навч. програми. Харків : Гімназія, **2018**. 272 с.
- 3.5. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2013**. 352 с.
- 3.6. Тарасенкова Н. А. Математика. 5 кл. : підруч. для закладів загальної середньої освіти / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2018**. 240 с.
- 3.7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, **2014**. 400 с.
- 3.8. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2014**. 304 с.
- 3.9. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **7 класу** загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавництво «Відродження», **2015**. 288 с.
- 3.10. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра : підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, **2014**. 224 с.
- 3.11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, **2015**. 256 с.
- 3.12. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2015**. 288 с.
- 3.13. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **8 класу** загальноосвіт. навч. закл. Харків : ФОЛІО, **2016**. 256 с.
- 3.14. Кравчук В. Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, **2016**. 256 с.
- 3.15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, **2016**. 240 с.
- 3.16. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. Харків : Гімназія, **2016**. 384 с.
- 3.17. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : УОВІЦ «Оріон», **2016**. 336 с.
- 3.18. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **9 кл.** загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2017**. 272 с.
- 3.19. Кравчук В. Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, **2017**. 264 с.

- 3.20. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.
- 3.21. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
- 3.22. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
- 3.23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для **10 кл.** загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2010**. 416 с.
- 3.24. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для **10 кл.** загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень. Харків : Гімназія, **2010**. 416 с.
- 3.25. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2018**. 336 с.
- 3.26. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для **10 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2018**. 400 с.
- 3.27. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для **10 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2018**. 512 с.
- 3.28. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для **10 кл.** закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», **2018**. 272 с.
- 3.29. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. 431 с.
- 3.30. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень. Харків : Гімназія, 2011. 448 с.
- 3.31. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. 256 с.
- 3.32. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. Ч. 2. 272 с.

3.33. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу: (профіль. рівень) : підруч. для **11**-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, **2019**. 416 с.

3.34. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для **11 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, **2019**. 352 с.

3.35. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для **11 кл.** закладів загальної середньої освіти. Харків : Вид-во «Ранок», **2019**. 240 с.

Математичні Енциклопедії, словники

4.1. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 1 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 383 с.

4.2. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 2 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 360 с.

4.3. Математическая Энциклопедия. Ред. коллегия : И. М. Виноградов (глав. ред.) и др. Т. 1 – Москва : «Советская Энциклопедия», 1977. **Т 1. А-Г**. 1977. 1152 стб. с илл.

4.4. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т2 Д-Коо**. Москва : «Советская Энциклопедия», 1979. 1104 стб. с илл.

4.5. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т3 Коо-Од**. Москва : «Советская Энциклопедия», 1982. 1184 стб., ил.

4.6. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т4 Ок-Сло**. Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1216 стб., ил.

4.7. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т5 Слу-Я**. Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1248 стб., ил.

4.8. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – Москва : Педагогика. 1985. 352 с.

Соколенко Л. О. НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1.

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольні-сміслові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 1 містить матеріал по змістових модулях №1, №2.

Посібник призначений для студентів університетів, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

Liliya SOKOLENKO. SCIENTIFIC FOUNDATIONS OF THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS : Teaching aid for universities students of the speciality 014 Secondary Education (Mathematics). Part 1.

Teaching aid contains a modular program of the discipline "Scientific fundamentals of the school course of mathematics", and methodical support for its implementation.

The aid provides material for lectures and practical classes at SFSCM, in which the main content lines of the school mathematics course are considered from the point of higher mathematics. In the school course are revealed the role and place of the most important concepts of modern mathematics, the comparative analysis is made of the key mathematical concepts of the school course and their properties with the general scientific.

For the purpose of thematic classes, were developed control and semantic questions and tasks of reproductive, reconstructive and creative character. Answers to specific questions and tasks are presented in this aid. Part 1 contains material for content modules №1, № 2.

The aid is intended for universities students, specialty 014 Secondary education (Mathematics), teachers and lecturers of mathematics.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

**НАУКОВІ ОСНОВИ
ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ**

Навчально-методичний посібник

Частина 1

Технічний редактор *О. М. Єрмоленко*

Верстка та макетування *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Підписано до друку . . . 2019 р. Формат 60×84 1/16.

Папір офсетний. Друк на різнографі.

Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 8,99.

Наклад 100 прим. Зам. № .

Віддруковано ТОВ «Видавництво «Десна Поліграф»

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до Державного реєстру видавців, виготівників

і розповсюджувачів видавничої продукції.

Серія ДК №4079 від 1 червня 2011 року

14035, м. Чернігів, вул. Станіславського, 40

Тел. (0462) 972-664