УДК 51(091)/517

Т.В. Кілочицька

Формування та розвиток загальної теорії стійкості (середина XVIII ст. — 30-і рр. XX ст.)

У статті розглянуто історію вивчення стійкості (середина XVIII — початок XX ст., світовий контекст). Досліджено внесок А. Пуанкаре та О.М. Ляпунова в розвиток загальної теорії стійкості. Показано розвиток їх ідей у працях російських та українських учених.

Дослідження стійкості рівноваги велися ще в Античності. Зокрема, Архімед (287 — 212 до н.е.) у праці "Про рівновагу плоских фігур" досліджував, чи може тіло (важіль), яке вивели зі стану рівноваги, повернутися до нього [1, с. 554—564]. У цій праці він розглянув умови рівноваги плаваючого сегменту параболоїда обертання.

Леонардо да Вінчі в XV ст. розвинув вчення про момент сили, довів, що тіло, яке спирається на горизонтальну площину, залишається в рівновазі, якщо вертикаль, проведена з його центра ваги, потрапляє всередину площі опори [2].

Е. Торрічеллі в праці "Про рух вільно падаючих і кинутих важких тіл" (1641) вивчав питання стійкості системи двох тіл (двох з'єднаних вантажів), які перебувають під дією сил тяжіння. Він вважав, що такий вантаж знаходитиметься в спокої, якщо його центр тяжіння не опускається. Виходячи з такого висновку, Е. Торрічеллі встановив закон рівноваги тіла на похилій площині та принцип руху центрів ваги.

Х. Гюйгенс узагальнив висновок Е. Торрічеллі на випадок руху. У праці "Годинники, які качаються, або геометричні доведення, що стосуються руху маятника" (1673) він вивчав закони падіння тіл і показав, що при русі деякої кількості важких тіл під дією сили тяжіння загальний центр їх ваги не може піднятися вище, ніж був на початку руху [3].

У середині XVIII ст. розробляється математичний апарат і зароджуються основи теорії стійкості. Так, праця Л. Ейлера "Корабельна наука" (1749) була першою, в якій містилися початки математичного апарату теорії стійкості. У її третьому розділі "Про стійкість, з якою тіла, занурені в воду, протидіють в положенні рівноваги" Л. Ейлер ввів міру стійкості. Вона визначається величиною моменту відновлювальної сили. Л. Ейлер запровадив поняття про стійкість рівноваги відносно нескінченно малих збурень і досліджував її за допомогою аналізу малих коливань плаваючого тіла навколо положення рівноваги.

Після Л. Ейлера, дослідженням малих коливань механічної системи біля положення рівноваги займалися А. Клеро, Д. Бернуллі, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж.

Значну роль в розвитку вчення про стійкість руху відіграли дослідження руху тіл Сонячної системи. Уперше (1786) задачу про стійкість руху небесних тіл поставив Ж. Лагранж. Він заклав основи теорії малих (лінійних) коливань, звівши деякі задачі теорії малих коливань до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Ж. Лагранж вивів з диференціальних рівнянь вікових збурень інтегральне співвідношення, в якому деяка додатна квадратична функція збурень ексцентриситету й довготи перигелію залишається незмінною і рівною k^2 [4, т.2, с. 160]. Ж. Лагранж використовував цей інтеграл для доведення стійкості незбуреного стану планетної системи. Він довів теорему про стійкість ізольованого положення рівноваги матеріальної системи, коли силова функція діючих на систему сил має максимум, сформулював теорему про стійкість стану рівноваги консервативної системи, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії.

У шостому розділі "Про малі коливання будь-якої системи тіл" своєї основної праці "Аналітична механіка" (1787) Ж. Лагранж проаналізував диференціальні рівняння будь-якої системи тіл, які завжди інтегровані, коли тіла дуже мало відхиляються від своїх положень рівноваги [4, т. 1, с. 439—521]. При дослідженні коренів алгебраїчного рівняння, яке визначає частоти коливань, він висловив помилкове твердження, що при наявності кратних коренів цього рівняння повинні з'являтися "вікові члени" (члени, які містять час t поза знаком синуса або косинуса) і стійкості не буде. Оскільки в консервативній системі амплітуда коливань зростати не може, то Ж. Лагранж вважав, що рівняння частот не може містити кратних коренів. Цієї помилки допустився в 1761 р. і Д'Аламбер.

Дослідження Ж. Лагранжа з стійкості руху планет продовжив П. Лаплас. Зокрема, до п'ятого тому своєї праці "Небесна механіка" (1799—1805) він включив мемуар Ж. Лагранжа "Щодо виправлення методів наближеного розв'язання рівнянь руху планет" [5, с. 149]. П. Лаплас представив взаємні збурення планет у вигляді математичних рядів і довів, що Ж. Лагранж відкинув члени ряду, які не можна було відкидати.

У 1784 р. П. Лаплас знов звернувся до цієї задачі. Він виявив періодичні члени ряду, які далеко стоять від його початку і величиною яких нехтувати не можна, знайшов їх період — понад 900 років. П. Лаплас довів стійкість руху Сонячної системи протягом великого проміжку часу завдяки малим ексцентриситетам і малим взаємним нахилам орбіт і руху всіх планет в одну сторону.

У 1809 р. С. Пуассон, знайшовши збурення великих півосей планетних орбіт з точністю до членів другого порядку відносно збурених мас, теж зацікавився питанням стійкості Сонячної системи. Він вказав, що стійкість існує, якщо враховувати квадрати мас і нехтувати їх кубами, які містять вікові члени. Тобто, коли параметри, які визначають конфігурацію системи, не мають вікових членів, то має місце стійкість. За наявності вікових членів амплітуда коливань необмежено зростає і стійкість порушується.

Ф. Міндінг в курсі механіки (1838) удосконалив доведення Ж. Лагранжем теореми про стійкість стану рівноваги консервативної системи, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії. Г. Діріхле в праці "Про стійкість рівноваги" (1846) дав точне доведення цієї теореми [6, С. 538]. Він без розкладу в ряди показав, що строгий висновок щодо стійкості можна отримати з інтегралу рівнянь руху (точне доведення цього призвело до виникнення методу функцій Ляпунова). Г. Діріхле також довів, що висновки щодо стійкості необхідно робити, провівши дослідження на всьому інтервалі руху (це поставило під сумнів можливість застосування методу лінеаризації[1]).

Неточність доведення Ж. Лагранжа пояснили і виправили К. Вейерштрасс у 1858 р. та О.І. Сомов у 1859 р. У статті "Про алгебраїчне рівняння, за допомогою якого визначаються малі коливання системи матеріальних точок" (1859) О.І. Сомов довів, що корені вікового рівняння комплексні й додатні. Кратні корені не приводять до нестійкості руху, оскільки розглядається не одне рівняння, а система рівнянь. Він довів, коли корінь дорівнює нулю, то шукана функція зростає з часом і рівновага не є стійкою. Теорему Лагранжа для цього випадку не можна застосувати, оскільки потенціальна енергія не має при нульових значеннях координат ізольованого мінімуму.

Дослідженням стійкості Сонячної системи займався й У. Леверр'є. У 1839 р. він провів дослідження вікових змін планетних орбіт, у 1845 р. почав вивчати нерівності в русі планети Уран, а в 1855—1877 рр. методом послідовних наближень отримав розв'язок рівнянь довгот, широт і радіус-векторів планет з точністю до членів першого і частково другого порядків відносно збурюючих мас. Виходячи з цього, він передбачив існування планети Нептун.

Першу спробу побудувати загальну теорію стійкості руху зробили У. Томсон і П. Тет у спільній праці "Курс натуральної філософії" (1867). Вони вважали рух системи під дією сил, які мають силову функцію, консервативним, при якому повна енергія системи не змінюється. Приймаючи за незалежну змінну одну з координат системи, У. Томсон і П. Тет склали диференціальні рівняння для визначення інших координат у збуреному русі й дослідили стійкість руху системи у просторі. На основі різноманітності окремих прикладів і загальних міркувань вони знайшли зв'язок стійкості руху з інтегралом дії, визначили роботу в час удару і показали, що мінімум руху на траєкторії визначає її стійкість (стаціонарність руху на траєкторії залишає це питання відкритим).

У 1875 р. Кембриджський університет запропонував на здобуття премії Адамса задачу про стійкість руху. Вона була присуджена 1877 р. Е. Роусу. Основні результати його досліджень з доповненнями ввійшли до книги "Удосконалена частина динаміки системи твердих тіл" (1877). У ній розглядалися диференціальні рівняння відхилень координат системи від їх значень (рівняння збуреного руху). Е. Роус вважав, що ці відхилення спричинено миттєвими збуреннями. Він розглянув випадок, коли коефіцієнти лінійних диференціальних рівнянь збуреного руху є сталими, і провів повне дослідження стійкості. За допомогою методу лінеаризації Е. Роус показав, як за певних умов рівнян-

[1] Метод полягає в тому, що малі нелінійні члени диференціального рівняння відкидаються без обґрунтування.

ня збуреного руху зі змінними коефіцієнтами за допомогою лінійних підстановок можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для загального випадку він установив критерій стійкості для визначення знаків дійсних складових коренів характеристичного рівняння, якщо для розглядуваного руху відомі характеристична або головна функції. Визначення стійкості у Е. Роуса не було строгим, воно ґрунтувалося на понятті малих збурень, яке є нечітким. Він писав про стандарт малих величин, не вказуючи, як його ввести. Е. Роус підкреслював відносність стійкості: рух може бути стійким для одного роду збурень і нестійким для іншого. Е. Роус, як до нього і С. Пуассон, намагався удосконалити метод лінеаризації, розглядаючи рівняння другого наближення. Критерій стійкості стаціонарного руху Е. Роуса є аналогічним критерію Ж. Лагранжа для стійкої рівноваги. У праці "Елементарний трактат з динаміки системи твердих тіл" (1877) він розглянув стійкість обертального руху рівностороннього трикутника у випадку дії сил, пропорційних будь-яким степеням відстані.

Питанням стійкості руху займався й М.Є. Жуковський. У докторській дисертації "Про стійкість руху" (1882) він почав дослідження шляхом, указаним У. Томсоном і П. Тетом, оскільки ще не був знайомий з працею Е. Роуса [7, с. 67—160]. М.Є. Жуковський довів, що в стійкому русі консервативне збурення викликає нескінченно малу зміну часу, неконсервативне — нескінченну зростаючу [7, с. 70]. Він описав збурений рух низкою диференціальних рівнянь [7, с. 86—87], сформулював критерій стійкості з використанням додатності функції, яку назвав мірою стійкості [4, с. 91]. Учений зробив висновок щодо стійкості консервативного та неконсервативного збурення зі зміною часу [7, с. 93], систематизував і доповнив результати У. Томсона і П. Тета [7, с. 67—160], встановив критерій стійкості збуреного руху, коли коефіцієнти диференціальних рівнянь руху сталі, розширив дослідження Е. Роуса [7, с. 129—160]. У праці "Умови скінченності інтегралів рівняння" (1892) він довів, чому умови стійкості [7, с. 85] при додатному значенні параметру не виконуються у випадку періодичності функції і вивів для цього випадку деякі достатні ознаки скінченності інтегралу [7, с. 246—253]. Отримана ознака була знайдена ще О.М. Ляпуновим [7, С. 253].

У. Томсон і П. Тет, Е. Роус і М.Є. Жуковський користувались першим наближенням і відкидали члени нелінійних рівнянь вище першого порядку, отримуючи лінійні рівняння (метод лінеаризації). Правильність цих дій не доводилася.

Отже, математичний апарат, який можна було застосувати до дослідження стійкості руху, в середині XIX ст. існував, але не був узагальнений. Для стійких станів руху, малі відхилення від яких приводять до малих коливань фізичних величин навколо деяких середніх значень, використовували метод лінеаризації і нехтували малими нелінійними членами. Цього робити не можна, коли відхилення не є малими або стан руху, поблизу якого вони розглядаються, стає нестійким і малі відхилення необмежено зростають. Крім того, вплив нелінійних членів може істотно змінити характер руху, коли вони є малими в порівнянні з лінійними. Це призводить до явищ, які не можна описати лінійною теорію. Тому метод зведення нелінійних задач до лінійних працює в тому випадку, коли нелінійність не є суттєвою і нею можна знехтувати для даної конкретної задачі.

Першу спробу розв'язати задачу про стійкість руху в першому наближенні зробив А. Пуанкаре. У його праці "Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями" (1885) розглянуто деякі окремі випадки задачі про стійкість руху [8]. Він досліджував питання стійкості для випадку систем диференціальних рівнянь другого порядку. У працях "Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями" (1885) і "Нові методи небесної механіки" (1892) А. Пуанкаре створив теорію якісних методів дослідження диференціальних рівнянь, яка містила також узагальнений метод Лагранжа [8, 9]. Він запропонував визначати характер руху за видом правої частини диференціального рівняння, не інтегруючи його, та з множини інтегральних кривих знаходити криві, які відповідають періодичним розв'язкам. А. Пуанкаре розробив метод визначення цих кривих — геометричний метод якісного описання руху у фазовому просторі. Досліджуючи фазові траєкторії, він шукав відповідь на питання, чи може задана система перебувати в рівновазі або періодичному русі. Важливе значення для визначення поведінки системи мають введені А. Пуанкаре поняття особливої точки та граничних циклів, зв'язок між якими він установив за допомогою поняття індексу.

У третьому томі "Нові методи небесної механіки" (1892—1899) А. Пуанкаре розглянув інтегральні інваріанти (визначені інтеграли, які залишаються сталими при зміні області інтегрування) та їх застосування до дослідження стійкості за Пуассоном для систем з скінченним об'ємом фазового простору; періодичні розв'язки другого роду; двояко асимптотичні розв'язки та їх зв'язок з стійкістю за Лагранжем.

Ж. Лагранж довів, що коли знехтувати квадратами мас, то розклади великих осей орбіт не міститимуть вікових членів. Це є повна стійкість у його розумінні, що відрізняється від її розуміння С. Пуассоном (враховувати квадрати мас і нехтувати кубами). А. Пуанкаре сформулював умови для визначення повної стійкості: “1) щоб жодне з тіл не віддалялося необмежено; 2) щоб два тіла не співударялися і щоб відстань між цими двома тілами не змогла стати меншою за деяку межу; 3) щоб система приходила нескінченно багато разів як завгодно близько від її початкового положення. Якщо виконано тільки третю умову і невідомо, чи виконані перші дві, то я буду казати, що існує стійкість за Пуассоном” [9, т. 2, с. 131].

Загальну якісну теорію А. Пуанкаре розвивали А. Данжуа (Франція), І. Бендіксон (Швеція), А. Кнезер (Німеччина), С. Лефшец (США), Дж. Біркгофф (США) та інші. У СРСР якісні методи розвивалися і широко застосовувалися в працях О.О. Андронова, О.А. Вітта, С.Е. Хайкіна, Л.С. Понтрягіна, В.В. Немицького, М.О. Леонтовича та інших.

А. Пуанкаре провів ґрунтовні дослідження з проблем стійкості. Створення ж загальної теорії стійкості належить О.М. Ляпунову — на той час приват-доценту Харківського університету. Ця проблема зацікавила його у зв’язку з задачею про форми обертальних рідких мас. У 1888—1889 рр. він опублікував дві праці: “Про сталі гвинтові рухи твердого тіла в рідині” та “Про стійкість руху в одному окремому випадку задачі трьох тіл”.

15 березня 1891 р. Харківське математичне товариство заслухало доповідь О.М. Ляпунова “Загальна задача стійкості руху” [10]. Стійкість руху є однією з задач якісної теорії диференціальних рівнянь. У докторській дисертації (1892) і наступному циклі статей про стійкість (до 1902 р.) О.М. Ляпунов розробив оригінальний строгий математичний апарат, який дозволив дати повну відповідь на питання щодо стійкості руху. Він заміняв рівняння збуреного руху системи лінійними рівняннями, які отримуються з початкових відкиданням усіх членів вище першого порядку малості відносно змінних. Доведення цього О.М. Ляпунов не дав і вказував, що це заміна однієї задачі іншою, яка може бути не пов’язана з попередньою. Одним із основних результатів О.М. Ляпунова є розв’язання деякого класу систем нелінійних рівнянь та з’ясування поведінки інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги. У 1892—1902 рр. О.М. Ляпунов розв’язав деякий клас систем нелінійних рівнянь та визначив поведінку інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги.

30 вересня 1892 р. на засіданні фізико-математичного факультету Московського університету О.М. Ляпунов захистив докторську дисертацію “Загальна задача стійкості руху”. Офіційні опоненти М.Є. Жуковський та. Б.К. Млодзеєвський відзначили високий науковий рівень дисертації, що прирівнюється до кількох докторських. У ній за допомогою методів, запропонованих О.М. Ляпуновим, отримано важливі для застосування критерії стійкості руху. Він дав строге визначення поняття стійкості руху, яке виявилося вдалим і отримало назву стійкості за Ляпуновим. О.М. Ляпунов уперше довів теореми про стійкість, показав, коли можна досліджувати стійкість в першому наближенні, а коли ні.

У першій частині дисертації міститься з’ясування умов, за яких перше наближення дає точну відповідь на питання стійкості. О.М. Ляпунов увів поняття характеристичних чисел, яке в подальшому привело до формування показників Ляпунова, що є кількісною характеристикою нестійкості траєкторій. О.М. Ляпунов довів одну з основних теорем теорії стійкості: якщо система диференціальних рівнянь першого наближення правильна[2] і якщо всі її характеристичні числа додатні, то незбурений рух стійкий. При дослідженні стійкості в першому наближенні О.М. Ляпунов розробив загальну теорію диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Перший метод Ляпунова полягав у інтегруванні певної системи диференціальних рівнянь за допомогою рядів. Широке застосування отримав його другий метод, який називають прямим методом. Учений довів, що критерієм стійкості або нестійкості системи досліджуваних диференціальних рівнянь може бути певна функція (функція Ляпунова) узагальнених координат і часу, яка не є інтегралом цієї системи. У докторській дисертації він займався побудовою такої функції.

Для задач, в яких лінійне наближення не дає відповіді про стійкість нульового розв’язку системи, О.М. Ляпунов розробив теорію критичних випадків. Він виділив найважливіші критичні випадки, коли праві частини системи не залежать явно від часу, і запропонував пониження порядку системи (принцип зведення Ляпунова).

Отже, А. Пуанкаре і О.М. Ляпунов встановили явні критерії існування і стійкості періодичних розв’язків, які не пов’язані з

[2] Система з постійними або періодичними коефіцієнтами, що мають однаковий період.

обов'язковою консервативністю системи. У теорії Пуанкаре за породжуючий розв'язок прийнято розв'язок вихідної системи при малому параметрі, рівному нулеві, в теорії Ляпунова розглядається частинний розв'язок, але вже загальної системи (при ненульовому значенні малого параметра). У працях А. Пуанкаре і О.М. Ляпунова започатковано класичну теорію періодичних розв'язків диференціальних рівнянь. Докторська дисертація О.М. Ляпунова стала основою сучасної теорії стійкості рівноваги й руху механічних систем.

Усі наступні дослідження в цьому напрямі є розвитком методів Ляпунова. Методи Ляпунова-Пуанкаре точні, математично обгрунтовані, аналітичні, за їх допомогою можна проводити кількісне та якісне дослідження нелінійної коливальної системи з малим параметром.

Одним з перших застосував якісні методи Ляпунова-Пуанкаре до дослідження диференціальних рівнянь латвійський вчений П. Боль [11]. У магістерській дисертації (1893) він заклав основи теорії майже періодичних функцій (квазіперіодичних). У його працях, зокрема "Про деякі загальні диференціальні рівняння, які застосовуються в механіці" (1900), уперше зроблено спробу поширити результати А. Пуанкаре та О.М. Ляпунова на більш загальний клас квазіперіодичних розв'язків диференціальних рівнянь.

Наприкінці 20-х рр. XX ст. виникають об'єднання вчених, які починають застосовувати на практиці теорію стійкості Ляпунова. Зокрема, це — групи вчених на чолі з М.Г. Четаєвим, Г.В. Каменковим, К.П. Персидським, І.Г. Малкіним, В.В. Степановим та В.В. Немицьким [12, 13]. Методи Ляпунова знайшли застосування в астрономії, теорії автоматичного регулювання, теорії коливань, теорії управління, теорії пружності.

Вперше застосувати точні методи Ляпунова і Пуанкаре в систематичному дослідженні нелінійних коливань і побудувати загальну теорію нелінійних коливань вдалося російським вченим Л.І. Мандельштаму (вихідцю з України), М.Д. Папалексі, О.О. Андронову та О.А. Вітту. Наприкінці 20-х — на початку 30-х рр. XX ст. Л.І. Мандельштам, його учень О.О. Андронов та О.А. Вітт застосували існуючі методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь до дослідження коливальних процесів, розробивши нові методи розв'язання нелінійних задач.

У 1927 р. О.О. Андронов показав, що граничні цикли А. Пуанкаре — це автоколивання, та переніс основи математичного апарату А. Пуанкаре і метод точкових відображень у теорію коливань. У 1930 р. О.О. Андронов і О.А. Вітт використали теорію стійкості О.М. Ляпунова при дослідженні стійкості періодичних розв'язків.

У 1937 р. О.О. Андронов і Л.С. Понтрягін у праці "Грубі системи" сформулювали вимогу стійкості за Ляпуновим [14]. О.О. Андронов писав, що рухи, які є реальними коливаннями, повинні бути стійкими по відношенню до малих змін початкових умов. Крім того, такі терміни, як "стійке положення рівноваги", "стійкі періодичні та квазіперіодичні рухи", "стійкість у великому та малому", запроваджено О.О. Андроновим, виходячи з понять Пуанкаре та Ляпунова. На основі введених понять грубої[3] (у 1937 р.) і негрубої[4] (у 1938 р.) систем О.О. Андронов розширив задачу Пуанкаре: не тільки з'ясування можливого характеру і поведінки окремої траєкторії, але і виявлення властивостей розбиття фазового простору динамічної системи на траєкторії. О.О. Андронова цікавив не тільки статистичний розгляд структури розбиття фазового простору динамічної системи, але і змін цієї структури розбиття при зміні самої системи.

Крім математичного апарату Пуанкаре, школою Л.І. Мандельштама в теорію коливань перенесено й методи О.М. Ляпунова. Застосування теорії стійкості руху Ляпунова стало можливим після доведення в 1930 р. О.О. Андроновим і О.А. Віттом нової теореми для з'ясування питання стійкості періодичних розв'язків [15]. Того ж року вони вперше застосували теорію стійкості Ляпунова до вивчення питання захоплення в регенеративному приймачі (дослідження стійкості періодичних розв'язків) [16].

Паралельно зі створенням загальної теорії нелінійних коливань школою Л.І. Мандельштама українські вчені М.М. Крилов та М.М. Боголюбов у 30-х рр. XX ст. у Києві розробляли асимптотичний напрям теорії нелінійних коливань — нелінійну механіку. У працях М.М. Крилова, М.М. Боголюбова та його учня Ю.О. Митропольського отримав розвиток метод інтегральних багатовидів [17, 18, 19]. Поняття інтегрального багатовиду використовується неявним чином у класичних працях О.М. Ляпунова з теорії стійкості при вивченні критичних випадків (шукана функція повинна задавати наближений інтегральний багатовид досліджуваної системи). М.М. Крилов та М.М. Боголюбов вказали, що "А. Пуанкаре і О.М. Ляпунов повинні розглядатися як засновники нового розділу механіки, який, як ми вважаємо, необхідно назвати

[3] Система, стійка до малих змін її правих частин.

[4] Система, для якої малі зміни параметрів приводять до зміни структури розбиття її фазової площини на траєкторії.

нелінійною механікою і метою якого є створення загальної теорії нелінійних коливань” [20, С. 85]. Нелінійна механіка значно розширила можливості строгого вивчення нелінійних коливальних систем, дозволила відкрити й дослідити нові явища, які виникають у нелінійних системах. Згодом, з розширенням сфер застосування, вона переросла в фізику нелінійних явищ.

1. *Архимед.* Сочинения / Перевод, вступительная статья и комментарии И.Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда / Архимед. — М.: Физматгиз, 1962. — 640 с.
2. *Леонардо да Винчи.* Избранные естественно-научные произведения / Леонардо да Винчи. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — 600 с.
3. *Гюйгенс Х.* Три мемуара по механике / Х. Гюйгенс. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — 377 с.
4. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика / Ж. Лагранж. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950. —Т.1. — 594 с.; Т.2. — 440 с.
5. *Крылов А.Н.* Собрание трудов / А.Н. Крылов. — М.-Л. — Т.5. — 1936. — 574 с.
6. *Лежен-Дирихле Г.П.* Об устойчивости равновесия / Ж. Лагранж //Аналитическая механiка. Т. 1: Дополнения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — С. 538.
7. *Жуковський Н.Е.* О прочности движения / Н.Е. Жуковський. Собрание сочинений. [В 2-х кн.] — М. — Л.: Гостехиздат. Т.1 (общая механика, математика и астрономия). — 1948 — С. 67—160.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. — М. —Л.: Гостехтеориздат, 1947. — 392 с.
9. *Пуанкаре А.* Избранные труды. [В 2-х т.] / А. Пуанкаре — М.: Наука, 1971. — Т.1. — 771 с; 1972. — Т.2. — С. 9—457.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача устойчивости движения / А.М. Ляпунов— М.—Л.: ОНТИ, 1935. — 368 с.
11. *Боль П.* Собрание трудов / П. Боль. — Рига: Зинатие, 1974. — 517 с.
12. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения / И.Г.Малкин. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952. — 431 с.
13. *Академик Александр Михайлович Ляпунов*: К 150-летию со дня рождения: Монография / Л.Л. Товажнянский, К.В. Аврамов, Е.Е. Александров и др.; под общ. ред. Л.Л. Товажнянского. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. — 288 с.
14. *Андронов А.А.* Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР.— 1937. — Т. 14, №5. — С. 247—252. То же: Андронов А.А. Собрание трудов / Андронов А.А. — М: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 183—187.
15. *Андронов А.А.* Об устойчивости по Ляпунову / А.А. Андронов, А.А. Витт // Андронов А.А. Собрание трудов / Андронов А.А. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 140—141.
16. *Андронов А.А.* К математической теории захватывания / А.А. Андронов, А.А. Витт // Журн. прикл. физики. — 1930. — Т. 7, вып. 4. — С. 3—17, то же: Андронов А.А. Собрание трудов / Андронов А.А. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 70—84.
17. *Крылов Н.М.*, Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. — К.: Изд-во ВУАН, 1934. — 108 с.
18. *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский — [3-е изд.] — М.: Физматгиз, 1963. — 410 с.
19. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю.А. Митропольский. — М.: Наука, 1964. — 431 с.
20. *Крылов Н.М.* Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. — М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. — 243 с.

Т.В. Килочицкая

Формирование и развитие общей теории устойчивости (середина XVIII в. 30-е гг. XX в.)

В статье рассмотрена история изучения устойчивости (середина XVIII — начало XX в., мировой контекст). Исследован вклад французского ученого А. Пуанкаре и русского ученого А.М. Ляпунова в развитие общей теории устойчивости. Показано дальнейшее развитие их идей в трудах русских и украинских ученых.