МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ Т.Г.ШЕВЧЕНКА

КІЛОЧИЦЬКА ТЕТЯНА ВАЛЕНТИНІВНА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ)

2010

Навчально-методичний посібник «Вища математика. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» написаний з використанням елементів історії математики. Він містить розроблені тестові завдання, підібрані з урахуванням технологічного напряму спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів (зокрема зі спеціальності 6.010104 „Професійна освіта).

Кожна лекція містить стисло викладений теоретичний матеріал з прикладами, малюнками, зразками розв'язування типових завдань.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів зі спеціальності 6.010104 „Професійна освіта, істориків математики, методистів і всіх тих, хто цікавиться історією науки.

Рекомендовано до друку та використання в електронному вигляді Вченою радою ЧНПУ імені Т.Г.Шевченка (Протокол № 7 від 23 лютого 2011 року)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Ю.О.Храмов, завідувач відділу історії науки Центру досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г.М.Доброва НАН України;

доцент, кандидат фізико-математичних наук М.М.Мурач, Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка

Зміст

Розділ IV. ***Аналітична геометрія на площині***

Розділ V. ***Аналітична геометрія в просторі***

ВСТУП

Одна з провідних тенденцій розвитку сучасної освіти є її гуманізація та гуманітаризація. Ця тенденція зумовлена соціальним запитом, адже в наш час необхідно постійно стимулювати мислення студентів, спонукати їх до вироблення власної життєвої позиції.

Кожна професійна діяльність потребує від спеціаліста певних якостей і здібностей. Тому важливим є також адекватний вибір професії у відповідності з нахилами і здібностями людини. Якщо ж казати про гармонійний розвиток особистості, то математика займає не останнє місце. Математика є не лише засобом науково-технічного прогресу, що зміцнює матеріальний потенціал суспільства, але і потужним засобом духовного зростання. Використання елементів історизму при викладанні вищої математики сприяє більш гуманітарному спрямуванню математичної освіти.

Недостатня математична освіта, низька математична культура XXI ст. можуть стати серйозною перешкодою на шляху до формування професійних якостей майбутнього випускника вищого навчального закладу. В наш час відбувається постійне скорочення годин, виділених на вивчення математики, збільшується розрив між рівнем математичних знань випускників ВНЗ і об'єктивними потребами сучасної науки і техніки, існує певна невідповідність шкільного курсу математики з вимогами до знань студентів у вищій школі. Для того, щоб вирішити останню проблему треба удосконалювати методику викладання математики, використовувати у навчанні інформаційні технології.

На першому занятті з вищої математики доцільно провести 5-10 хвилинне тестування для виявлення рівня підготовки студентів. На лекціях слід використовувати елементи наочності: графіки, логічні схеми, таблиці (об'єм сприйняття – 5-7 об'єктів на таблиці). Доцільно використовувати контекстне навчання (мотивація до засвоєння знань досягається розв'язуванням практичних задач), міждисциплінарний підхід до навчання, навчання на основі аналізу реальних життєвих ситуацій. Цього можна досягти введенням елементів історизму в навчальні дисципліни, зокрема в навчальну дисципліну «Вища математика». Адже, чим вище рівень розвитку мислення і творча активність студента, тим вище рівень сформованості його особистих та професійних якостей.

Однією з проблем у викладанні вищої математики є велике навантаження навчальної програми. Наприклад, в першому семестрі 1 курсу студенти вивчають такі розділи математики: лінійна алгебра, векторна алгебра, алгебра і теорія чисел, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної. З метою мотивації навчання і для більш швидкого і тривалого запам'ятовування у студентів слід більшість математичних понять вводити, розглянувши спочатку історичну задачу. Крім того, у викладанні курсу вищої математики повинні бути присутні короткі відомості про історію окремих розділів математики в контексті розвитку світової науки з обов'язковим висвітленням основних надбань української науки.

Введення елементів історії математики має метою:

- підвищення інтересу студентів до вивчення вищої математики, до наукової творчості;

- посилення міжпредметних зв'язків, гуманізації освіти;

- поглиблення розуміння нового матеріалу, розвиток критичного мислення;

- з'ясування ролі і місця математики в практичній діяльності людей різних історичних епох;

- визначення передумов створення нових математичних теорій, методів доведення теорем.

Виклад історичного матеріалу повинен бути продуманим і органічно поєднуватись з викладом основного матеріалу навчального курсу, доповнювати і не заважати його вивченню. Цікавий, вдало введений історичний матеріал з даної теми сприяє естетичному вихованню студентів. Історичний підхід дозволяє також врахувати напрям спеціалізації студентів.

Доцільно історичний матеріал викладати коротким історичним повідомленням (5-10 хв.). Такі повідомлення можуть бути:

- з історії окремого напряму математики (фрагменти текстів праць видатних математиків, історичні задачі);

- бібліографічні відомості про окремого видатного математика, який працював в даному науковому напрямі (використання імені вченого в процесі вивчення матеріалів лекцій, виклад короткої бібліографічної довідки, висловлювання вчених про математику і математиків).

Короткі бібліографічні довідки про вчених доцільно викласти на початку лекції з метою мотивації і підвищення інтересу до навчання. Зокрема, при вивченні елементів алгебри слід пригадати Франсуа Вієта, юриста за освітою, який шляхом самоосвіти став батьком символічного числення. Він вперше став позначати буквами коефіцієнти рівнянь. Це дало можливість вивчати загальні властивості рівнянь і їх коренів.

Доцільно або зацікавити студентів і показати алгоритм міркувань, як вчений дійшов такого висновку, які методи використав при доведенні теореми.

При викладанні вищої математики слід також вказувати на роль наукових досліджень українських математиків та вихідців з України. Цінними для розвитку алгебри і геометрії є твори українського письменника, члена Кирило-Мефодіївського братства Миколи Івановича Гулака "Етюди про трансцендентні рівняння" (1852) та "Спроба геометрії чотирьох вимірів' (1877). Остання складається з двох частин: "Розмови про простір" та "синтетичної геометрії чотирьох вимірів" і є першою монографією з чотиривимірної евклідової геометрії в Російській імперії.

Можна дати студентам написати реферат про цих видатних вчених або коротко розповісти про цих видатних вчених. Творче життя вчених буде позитивним прикладом для студентів.

Доповідь на 5-10 хв. сприятиме виробленню життєвих пріоритетів студентів, мотивації навчання, гуманізації освіти.

При ознайомленні з історичним матеріалом треба обов'язково сказати студентам, що можна продовжувати наукове дослідження в цьому напрямі, узагальнити отримані результати. Це пробуджуватиме інтерес студентів до самостійного наукового дослідження, створюватиме перспективу у навчанні, забезпечуватиме умови для кращого розуміння і запам’ятовування нового матеріалу студентами, сприятиме формуванню у них математичної культури, усвідомленню логіки побудови математичних теорій.

В процесі подання історичного матеріалу (історична задача, теорема) слід створювати проблемну ситуацію. При введенні нового математичного поняття бажано, при можливості, розглянути еволюцію цього поняття, щоб воно не здалося студентам введеним штучно, без потреб практики.

Доцільно сказати, що становлення класичної науки, зокрема математичної, відбувалося в XVII ст. В цьому столітті швидко розвиваються диференціальне та інтегральне числення, теорія диференціальних та інтегральних рівнянь. Виникненню диференціального та інтегрального числення сприяли введення в математику змінної величини та методу координат, розвиток методів розв’язання задач на обчислення площ, об’ємів тіл, визначення центрів тяжіння, дотичних тощо. Зв'язок математики з механікою, астрономією, фізикою розширив уявлення про неперервні величини, функціональні залежності.

На сучасному етапі розвитку освіти постає завдання подальшої науково-практичної розробки сучасних проблем гуманізації навчання та широкого впровадження відповідних психолого-педагогічних і методичних надбань у практику роботи вищих навчальних закладів. Тут доцільним є введення елементів історизму при викладанні дисциплін фундаментального циклу, зокрема вищої математики.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Слово «алгебра» арабського походження. В математику воно ввійшло завдяки праці «Книга про відновлення і протиставлення» середньоазіатського математика Мухаммеда Бен-Муси ал-Хорезми (IX ст.) «Книга про відновлення і протиставлення», в якій алгебра вперше розглядається як самостійна галузь математики.

До початку XX ст. алгебра залишалася "наукою про розв'язування рівнянь". В середині XX ст. відбулося її розділення на вищу алгебру (операції з абстрактними об'єктами різноманітної природи) і лінійну, основа якої - матричне числення.

РОЗДІЛ І. МНОЖИНИ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

ЛЕКЦІЯ 1. МНОЖИНИ. МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

План лекції

1.1 Множина і її елементи.

1.2. Операції над множинами. Простіша логічна символіка.

1.3. Множина R дійсних чисел і її властивості. Зображення дійсних чисел на прямій. Абсолютна величина дійсного числа та її властивості.

1.4. Прямокутна система координат.

1.5. Тестові завдання

1.1. Множина і її елементи

Поняття множини відіграє велику роль у сучасних математичних дослідженнях. Воно є одним з неозначуваних математичних понять, як, наприклад, поняття величини, точки. Терміни «сукупність», «група» є лише синонімами терміну «множина». Німецький математик, один із засновників теорії множин у XIX ст., Г.Кантор під **множиною** розумів сукупність, групу об'єктів, об'єднаних за певною ознакою[*].

Наприклад, група студентів, множина автомобілів на даній стоянці.

Об'єкти довільної природи, з яких складається множина, називаються елементами цієї множини.

Множини позначаються великими латинськими літерами A, B, C, …, X, $У$, Z, а елементи множин — малими літерами a, b, c, …, x, y, z. Якщо множину A утворюють чотири елементи a, b, c, d, то записують $A = \{a, b, c, d\}$.

Твердження про те, що елемент $\boldsymbol{a}$ належить множині A, записують у вигляді $\boldsymbol{a \in A}$. Коли навпаки — елемент $\boldsymbol{a}$ не належить A, виконують такий запис: $\boldsymbol{a \notin A}$.

Наприклад, множина А={дні тижня} складається з елементів: понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя.

Субота $\in$ А, січень $\notin$ А.

Множина A називається *скінченною*, якщо вона складається зі скінченної кількості елементів.

[*] Множина – це багато чого, мислиме як єдине ціле.

Наприклад, множина відмінників в університеті, множина деталей в автомагазині.

Порожньою множиною $\varnothing$ називається множина, яка не містить жодного елемента.

Наприклад, множина людей, що мають зріст 0 м.

Кількість елементів цієї множини дорівнює нулю, тобто ця множина є скінченою.

Множина, яка не є скінченою, називається нескінченою. Наприклад, множина натуральних чисел.

Дві множини A та B називаються *рівними*, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки:

$A = B: \ x \in A \Leftrightarrow x \in B.$

Кількість елементів множини називають її *потужністю.*

Способи задання множини:

1) безпосереднім переліком елементів множини.

Наприклад,

1) якщо множина А складається з елементів 6; 14; 21, то її записують: А= {6,14,21};

2) множина простих чисел, менших від 15:

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13}.

2) за характеристичною ознакою елементів множин. Якщо A – множина, a – її елемент, то можна записати:

A = {a | опис властивостей довільного елемента}.

Наприклад,

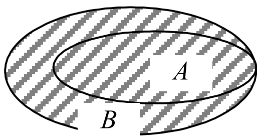
1) якщо N - множина натуральних чисел, то множину В таких чисел, більших 6, можна записати таким чином: В{x| x $\in$N, x>6}.

2) Множина чисел, менших 15: $P = \{x \mid x < 15\}$.

Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B

$A \subset B, \ x \in A \Rightarrow x \in B$

Геометрично множини зображають за допомогою діаграм (кругів) Ейлера-Венна.



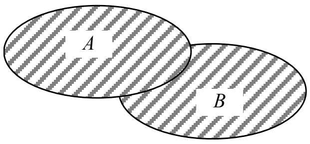
Мал.1

1.2. Операції над множинами

Простіша логічна символіка

Об'єднанням двох множин A та B називається множина $A\bigcup B$, яка складається з елементів, кожен з яких належить хоча б одній із цих множин і тільки з них:

$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A$ або $x\in B\}$.



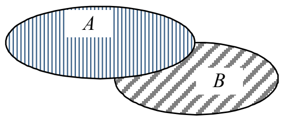
Мал. 2

Наприклад, якщо A = {1, 3, 4, 6}, B = {2, 3, 4, 5},

тоді $A\bigcup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Перерізом двох множин A та B називається третя множина $A\bigcap B$, яка складається з елементів, кожен з яких одночасно належить кожній з цих множин і тільки з них (мал.3):

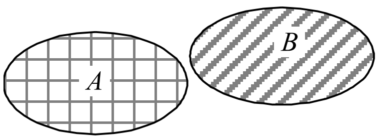
$$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A \text{ і } x\in B\}.$$



Мал. 3

Наприклад, якщо A = {-1, 1; 2; 3}; B = {1; 3; 5}, то $A\bigcap B$ = {1, 3}.

Якщо $A\bigcap B=\varnothing$, то ці множини не перетинаються:

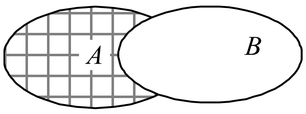


Мал.4

Наприклад, $\{7, 9, 10\}\cap\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}=\varnothing$.

Різницею множин A та B називають множину $A\backslash B$, що містить усі елементи A, які не належать B.

$C = \{x \mid x\in A$ та $x\notin B\}$



Мал.5

Наприклад, $\{1, 2, 5, 7, 9, 10\}\backslash\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{7, 9, 10\}$.

Для будь-яких скінченних множин A та B виконується рівність

$M(A\cup B)=M(A)+M(B)-M(A\cap B)$, де $M(A)$, $M(B)$, $M(A\cup B)$, $M(A\cap B)$ – кількість елементів відповідних множин.

Задача. Іспит з автосправи складали 160 студентів. Оцінку, нижчу за «відмінно», отримали 98 з них, здали іспит 146 абітурієнтів. Скільки абітурієнтів склали іспит на «добре» та «задовільно»?

Розв’язання.

Нехай A — множина студентів, які здали іспит; B — множина студентів, оцінка яких нижча за «відмінно». Тоді за умовою маємо:

$M(A)=146,\ M(B)=98,\ M(A\cup B)=160$.

Отже, абітурієнти, котрі отримали оцінки «задовільно» й «добре», становлять множину $A\cap B$. За попередньою формулою знаходимо знаходимо:

$$M(A\cap B)=M(A)+M(B)-M(A\cup B)=146+98-160=84.$$

1.3. Множина дійсних чисел. Зображення дійсних чисел на прямій. Абсолютна величина дійсного числа та її властивості

В основі математики лежить поняття числа. Лише в XIX ст. було запропоновано таке означення: число – це нескінчений дріб.

Давньогрецькі математики вважали «справжніми» тільки натуральні числа, які застосовувались при лічбі. Поступово утворилось уявлення про нескінченність множини натуральних чисел. Перші теоретичні відомості про число наведені в «Початках» Евкліда та III ст. н. е. в «Арифметиці» Діофанта В Київській Русі також були поширені елементарні відомості про числа, зокрема дії з дробами.

Півтори тисячі років тому в Індії використовували нуль і десятковий запис натуральних чисел, бо люди звикли рахувати на пальцях (за кількістю пальців на руках). В Європі ці числа, які називали арабськими, стали відомі завдяки працям хорезмського математика Мухаммада ібн Муси, відомого як ал-Хорезмі. Пізніше, коли стало відомо, що ал-Хорезмі в основу нумерації поклав практику індійських обчислювачів, цифри почали називати індійськими.

Поряд з натуральними числами застосовували дробові - числа, складені із цілого числа часток одиниці. У практичних розрахунках дроби застосовувалися ще дві тисячі років до н.е. у Стародавньому Єгипті та Стародавньому Вавілоні. Точно, коли саме виникли дроби, невідомо, але дослідження показують, що стародавні єгиптяни, шумери та китайці вміли виконувати найпростіші арифметичні дії над дробами.

Довгий час думали, що результат вимірювань завжди записується або у вигляді натурального числа, або у вигляді дробу. Давньогрецький філософ і математик Піфагор вважав, що елементи чисел є елементами всіх речей і увесь світ в цілому є гармонією і числом. Однак, піфагорійці дійшли висновку, що натуральних чисел і дробів недостатньо для вимірювання довжини діагоналі квадрата зі стороною 1. Але вони не ввели поняття ірраціональних чисел. В праці індійського астронома і математика «Аріабхатіам» (VI ст.) вперше сформульовано правило добування квадратного і кубічного коренів (майже не відрізняється від сучасного). До введення ірраціонального числа прийшли вчені Близького та Середнього Сходу. На початку XIII ст. ірраціональні числа з'являються в працях західноєвропейських учених, зокрема у Леонарда Пізанського, але розглядаються вони лише з геометричної точки зору. Більшість математиків вважали, що ірраціональне число є корінь деякого степеня з цілого або дробового числа, який не може бути виражений точно.

Наступним важливим етапом у розвитку поняття про число було введення від'ємних чисел. Від'ємні числа застосував грецький математик Диофант, що знав уже правила дії над ними, а в VII столітті властивості цих чисел вивчали індійські вчені, які порівнювали такі числа з боргом. У XVII ст. Р. Декарт дав від'ємним числам геометричне тлумачення. Після його праць у від'ємні числа починають використовувати у світовій науці.

Подальший розвиток числа відбувся у XVII ст. при його визначенні. У «Загальній арифметиці» І. Ньютон дав таке означення числа: «Під числом ми розуміємо не стільки множину одиниць, скільки відношення деякої величини до іншої величини того самого роду, що й узята нами за одиницю». Це є загальним означенням дійсного числа — як раціонального, так і ірраціонального.

Побудова числової системи (***R)*** було здійснено Дедекіндом, Вейерстрасом, Больцано, Кантором та іншими математиками у 70-х рр. XIX ст.

Позначення, які зараз використовуються:

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

I – множина ірраціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел.

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$; $\boldsymbol{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in Z, q \in N\}$; $\boldsymbol{R}$ = {Дійсні числа}; $\boldsymbol{C} = \{a + bi \ | a, b \in R\}$. Тоді $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

{Раціональні числа} $\cap$ {Ірраціональні числа} $= \varnothing$.

Усі підмножини множини R називають лінійними множинами:

1. Закритий інтервал, відрізок або сегмент:

   $[a, в] = \{x \mid a \le x \le в\}$.

2. Відкритий інтервал:

   $(a, в) = \{x \mid a < x < в\}$.

3. Напіввідкриті інтервали:

   $[a, в) = \{x \mid a \le x < в\}$.

   $(a, в] = \{x \mid a < x \le в\}$.

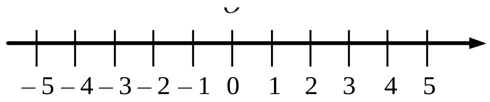
Множини, кожний елемент яких є впорядкова двійка (трійка), позначають R^2 (R^3):

$R^2 = \{(a, в) | \ a \in R$ та $в \in R\}$,

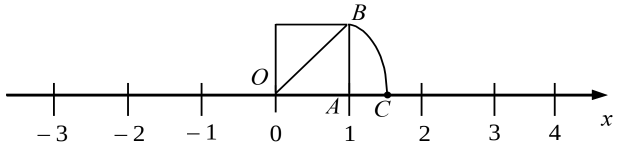
$R^3 = \{(a, в, c)|\ a \in R, в \in R, c \in R\}$.

Дійсні числа, як і раціональні, зображають на числовій осі. Кожному дійсному числу відповідає єдина точка числової осі та навпаки.

Числову ось задають початковою точкою, одиничним відрізком і напрямом.



Зобразимо на числовій осі точку, що відповідає ірраціональному числу $\sqrt{2}$. Для цього на відрізку ОА добудуємо одиничний квадрат, його діагональ $OB = \sqrt{2}$. Накреслимо дугу кола з центром в точці O і радіусом OB. Тоді точка C перетину дуги кола з віссю Ox є геометричним зображенням числа $\sqrt{2}$.



Абсолютна величина дійсного числа, її властивості

Абсолютною величиною (модулем) дійсного числа x називають число, яке позначається $|x|$ і задовольняє умові

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Наприклад: $|-52| = 52$; $|7| = 7$.

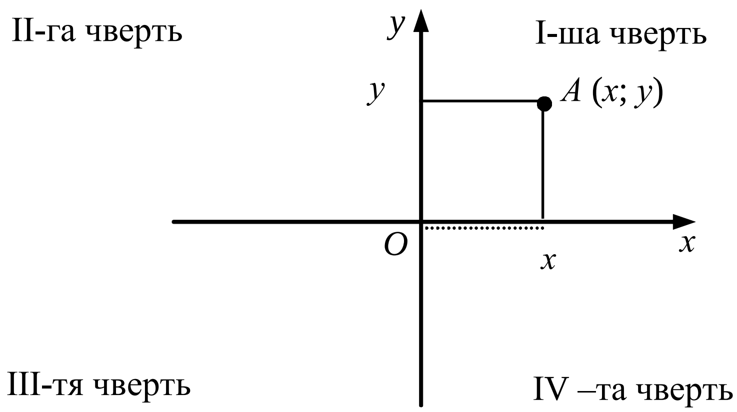
Властивості модулів дійсних чисел:

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
4. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

1.4. Прямокутна система координат

Візьмемо на площині дві взаємно перпендикулярні координатні осі Ox і Oy, які перетинаються в точці O. Ці осі утворюють *прямокутну систему координат Oxy*. Вісь Ox називається віссю абсцис, вісь Oy — віссю ординат.

Абсциса та ордината точки A називаються координатами цієї точки на площині. Кожній точці на площині відповідає пара дійсних чисел і навпаки.



Наступний етап у розвитку поняття числа — поява комплексних чисел у процесі розв'язування квадратних та кубічних рівнянь (наприклад, виду $x^2 + 1 = 0$), які не мають дійсних коренів.

1.5. Тестові завдання

1. Яка з наведених рівностей правильна:

A) $\{2, 4, 6, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

B) $\{2, 4, 6, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$.

C) $\{2, 4, 6, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 5\}$.

2. Яка з наведених рівностей правильна:

A) $\{-2, 4, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8\} = \{-2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

B) $\{-2, 4, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8\} = \{4, 6\}$.

C) $\{-2, 4, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6, 8\} = \{-2, 7\}$.

3. Завод 1 випускає такі деталі машин, які можна символічно записати у вигляді множини $A = \{a, b, c, d\}$. Завод 2: $B = \{b, c, d\}$. Фірма по ремонту машин закупає деталі обох заводів.

Множина деталей, які виробляє завод 1 і не виробляє завод 2:

A) $A \backslash B = \{a\}$.

B) $A \backslash B = \{b, c, d\}$.

C) $A \backslash B = \{a, b, c, d\}$.

Множина деталей, які виробляє завод 2 і не виробляє завод 1:

A) $A \backslash B = \{\varnothing\}$.

B) $A \backslash B = \{a\}$.

C) $A \backslash B = \{b, c, d\}$.

4. Різниця множин $A \backslash B$, де $A = \{1; 2; 3, 4\}$ і $B = \{0, 1; 3; 5\}$ дорівнює:

A) $\{2, 4\}$.

B) {1, 3}.

C) {0, 5}.

5.Описати словесно множину {(x, y) $\in$ R, y=x}:

A) множина складається з усіх точок прямої – бісектриси 1-го і 3-го координатних кутів.

B) множина складається з усіх точок параболи.

C) множина складається з усіх точок прямої - бісектриси 2-го і 4-го координатних кутів.

6. Модуль числа 7 дорівнює:

A) 7.

B) -7.

C) 0, бо числу 7 відповідає точка числової прямої.

ЛЕКЦІЯ 2. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

План лекції

2.1. Поняття комплексного числа. Зображення комплексних чисел.

2.2. Арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі.

2.3. Модуль і аргумент комплексного числа.

2.4. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

2.5. Тестові завдання.

2.1. Поняття комплексного числа. Зображення комплексних чисел

Поняття комплексного числа виникло з потреб практики та внаслідок внутрішнього розвитку математики – в процесі пошуку формул вираження коренів кубічних рівнянь. При знаходженні висоти зрізаної правильної чотирикутної піраміди з довжинами основ 28 і 4 і ребром 15 також виникла потреба обчислити квадратний корінь з від'ємного числа. Ця задача міститься в праці Герона Олександрійського «Стеріометрія» (бл.50). В ній $\sqrt{81-144}=\sqrt{-63}$ замінюється на $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$.

В праці Діофанта «Арифметика» (бл. 275 року) (6 книга, задача 22) є ще одна задача: знайти сторони прямокутного трикутника з периметром 12 і площею 7. В результаті її розв'язання Діофант отримав рівняння $172x=336x^2+24.$ Він робить висновок, що дискримінант цього рівняння від'ємний і тому не може бути квадратом і робить висновок, що розв'язок не існує. Про неможливість операції добування квадратного кореня з від'ємного числа зазначали індійські математики Магавіра (бл. 800-бл.870) і Бгаскара (1114-бл.1185).

Італійський математик Лука Пачолі у 1494 р. зауважував, що квадратне рівняння має розв'язок лише тоді, коли його дискримінант невід'ємний.

Задачі, що призводять до кубічних рівнянь, зустрічаються у китайського астронома і математика Ван Сяо Туна (VII ст.) в його праці «Математичний трактат про продовження давніх методів» (625 р.) містить 18 задач на кубічні рівняння.

При розв'язуванні рівнянь четвертого степеня італійський інженер-гідравлік Рафаель Бомбеллі в праці «Алгебра» (1572 р.) описав правила дії над числами, які виникають в результаті добування кореня з від'ємного числа.

Сформулюємо означення комплексного числа.

Комплексним числом називається число виду $a + b\ i$, де $a,\ b \in R$ (R – множина дійсних чисел).

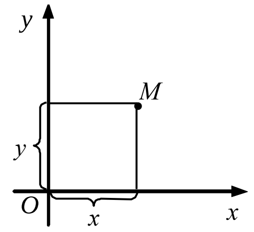
Число a називається дійсною частиною комплексного числа $a + ib$, число b — його уявною частиною, Число i - уявною одиницею ($i^2 = -1$).

Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *рівними,* якщо $a = c$ і $b = d$.

Два комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називаються спряженими.

Р. Бомбеллі у 1572 р. на прикладі $x^3 = 15x + 4$ показав, що дійсний корінь можна отримати як суму двох комплексних чисел $a + bi$ та a - bi.

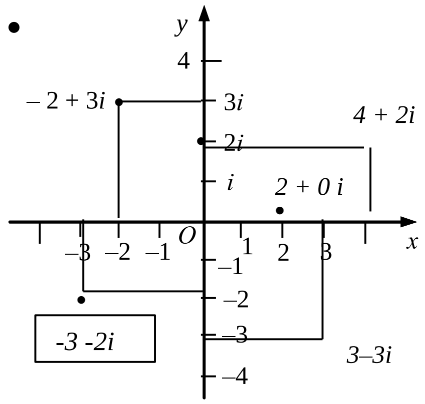
Комплексні числа зображають на числовій площині в прямокутній системі координат. Комплексне число $a+ib$ зображується точкою M (a, b) (абсциса дорівнює дійсній частині комплексного числа $x = a$, ордината – його уявній частині $y = b$)).



Мал. 6

Наприклад, зобразити на площині комплексні числа:

3–3i; – 2+3i; – 3–2i; 4+2i; 0+2i=2i.



2.2. Арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$.

Наприклад,

1) $(-4 + 6i) + (2 - 7i) = (-4 + 2) + (6 - 7)i = -2 - i$;
2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

Різницею двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $(a - c) + (b - d)i$.

Наприклад,

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.
2) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

Добутком двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Дійсно, $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bidi + bci = ac + adi - bd + bci = ac - bd + (ad + bc)i$.

Отже, можна не користуватися формулою множення комплексних чисел, а комплексні числа множити, як двочлени.

Наприклад: $(1 - 4i)(5 + 6i) = 5 - 20i + 6i - 24i^2 = 29 - 14i$;
$(1 + 3i)(1 - 3i) = 1^2 + 3^2 = 10$.

Часткою двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число

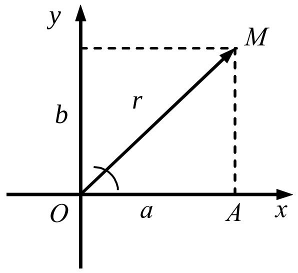
$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

Дійсно, $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Наприклад, $\dfrac{5-3i}{4+2i} = \dfrac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{20-12i-10i+6i^2}{16+4} = \dfrac{14-22i}{20} = \dfrac{7}{10} - \dfrac{11}{10}i.$

2.3. Модуль і аргумент комплексного числа

Модулем комплексного числа $a + bi$ називається вираз $\sqrt{a^2+b^2}$, який позначається $|a + bi|$ або r.



Мал. 7

Наприклад,

$$r = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

Кут φ, який утворює радіус-вектор точки M з додатнім напрямом осі *Ox*, називається *аргументом* комплексного числа $a + bi$ (малюнок).

Аргумент φ *комплексного числа* $a + bi$ *визначається формулами:*

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a}, x > 0, \\ arctg\,\dfrac{b}{a} + \pi, x < 0, y \ge 0, \\ arctg\,\dfrac{b}{a} - \pi, x < 0, y < 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a \ne 0.}$$

Або $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}; \quad a \ne 0.$

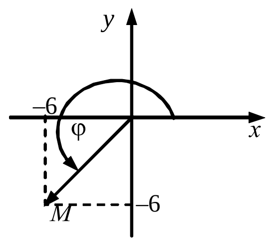
Кожне комплексне число (крім нуля) має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Для числа нуль аргумент не визначений.

Значення аргументу, яке належить проміжку (– π; π), називається *головним*.

Наприклад, знайти аргумент комплексного числа –6 – 6*i*.

За формулою маємо

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-6}{-6} = 1$, φ = 45°, φ = 225° і т. д.



Але кут 45° не є аргументом числа за означенням аргументу – 6 – 6*i* (кут φ між додатнім напрямом віссі *Ox* і радіус-вектором точки *M*, яка зображає комплексне число).

Аргументами будуть 45°+180°=225°; – 135°=225°-360°; 225°+360°=585° і т. д.

Головні значення аргументу спряжених комплексних чисел мають одну й ту саму абсолютну величину, але протилежні знаки. Наприклад, головні значення аргументу спряжених чисел – 6 + 6*i* та – 6 – 6*i* дорівнюють відповідно 135° і – 135°.

2.4. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі

Розглянемо трикутник *OAM* (мал. 7):

$\frac{a}{r} = \cos\varphi$; $\frac{b}{r} = \sin\varphi$.

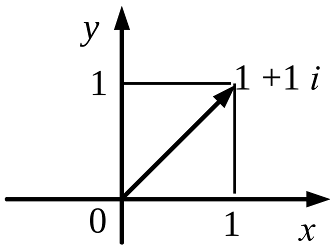
Звідси $a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$.

Підставимо в алгебраїчний запис комплексного числа

$\boxed{z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ – *тригонометрична форма комплексного числа*.

Модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = r$.

Наприклад, записати комплексне число 1 + *i* у тригонометричній формі.



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Підставимо у тригонометричну форму комплексного числа, отримаємо:

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для множення і ділення зручніша тригонометрична форма.

Добуток двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)$ можна записати так:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2))].$$

Ділення двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)$ можна записати так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2))]$$

Степенем p комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ є число $z^p = r^p(\cos p\,\varphi + i\sin p\,\varphi)$, де p — будь-яке ціле число. Ця формула виводиться за означенням добутку комплексних чисел.

Знайти z^6, якщо $z = 3(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)$.

$$z^6 = 3^6(\cos 6\cdot 5^\circ + i\sin 6\cdot 5^\circ) = 729\left(\sqrt{3}/2 + 1/2\,i\right).$$

Якщо $p = n$ (n — ціле число), дістаємо *формулу Муавра:*

$$\boxed{(r\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).}$$

Якщо $p = 1/n$, маємо:

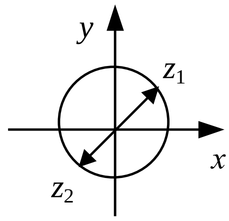
$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2\pi k}{n}\right)\right],\\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.\end{array}}$$

Наприклад, знайти $z=\sqrt{i}$.

Треба знайти корінь квадратний з комплексного числа, тобто $n= 2$, $k = 0, 1$. Матимемо два розв'язки (при $k = 0$ і $k = 1$). За формулою $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Далі:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{(при } k = 0\text{)},$$

$$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{(при } k = 1\text{)}.$$



2.5. Тестові завдання

1. Комплексним числом називається…

A) число виду $a + b$, де $a, b \in Q$ (множина раціональних чисел).

B) число виду $a + ib$, де $a, b \in R$ (множина дійсних чисел).

C) число виду $a - b$, де $a, b \in Z$ (множина цілих чисел).

2. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *рівними,* якщо:

A) $a = c$ і $b = d$.

B) $a = d$ і $b = c$.

C) $a = c$ і $b = -d$.

3. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *спряженими,* якщо:

A) $a = c$ і $b = d$.

B) $a = d$ і $b = c$.

C) $a = c$ і $b = -d$.

4. Можна встановити взаємно однозначне відображення між множиною всіх комплексних чисел та множиною

A) всіх точок площини;

C) всіх точок простору.

5. *Сумою* двох комплексних чисел $3 + i$ і $1-6i$ є комплексне число

A) $4-5i$.

B) $3-6i$.

C) $5+7i$.

6. *Різницею* двох комплексних чисел $(2–8i)– (4 + 3i)$ є комплексне число

A) $6-5i$.

B) *-2-11i.*

C) *2-5i.*

7. *Добутком* двох комплексних чисел *1+ 2i* і *3-i* є комплексне число

A) *5+5i.*

B) *1+5i.*

C) *5-5i.*

8. *Часткою* двох комплексних чисел *-1+2i* та *4+3i* є комплексне число

A) $-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$.

B) $\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$.

C) $\frac{2}{25}+\frac{5}{25}i$.

9. *Модулем* комплексного числа *3-4i* є

A) число *5*.

B) число *25*.

C) число *3+4=7*.

10. Головним аргументом комплексного числа 7 +7*i* є

A) 45°.

B) 30°.

C) 90°+45°=135°.

11. Тригонометрична форма комплексного числа 2+2*i* є

A) $\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

B) $\sqrt{4}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

C) $\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

12. Розв'язками рівняння $x^2+1=0$ є

A) -*i*.

B) $z_1=i$, $z_2=-i$.

C) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

РОЗДІЛ II. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ЛЕКЦІЯ 3. МАТРИЦЯ. ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ

План лекції

3.1. Поняття матриці. Основні типи матриць.

3.2. Дії над матрицями.

3.3.Тестові завдання.

3.1. Поняття матриці. Основні типи матриць

Ще з стародавніх часів виникла необхідність записувати вимірювання в наочній, більш простішій формі. Матриця вперше з'явилась в середині XIX століття в роботах ірландського математика У. Гамільтона і англійського математика А. Келі.

Матрицею розміру $n \times m$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір*. На першому місці в цьому записі зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 4×7 означає, що в ній чотири рядки і сім стовпців.

Види матриць(*):

1. Матриця рядка $A = (a_{11}a_{12} \dots a_{1n})$.

   Наприклад, $A = (1 \quad 3 \quad 5 \quad -1)$.

2. Матриця, яка має лише один стовпець, називається матрицею-стовпцем.

   Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

   Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Матриця називається квадратною, якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 12 & 1 & -4 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матриця, що має три рядки і три стовбці.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці.

Так, у матриці $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 12 & 1 & -4 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ на головній діагоналі містяться числа 7, 1, 0.

5. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то квадратна матриця називається *симетричною*.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 10 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця.

6. Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – трикутна матриця.

7. Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ & & . & . & . \\ & 0 & a_{ll} & & a_{ln} \\ & & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$ називається трапецевидною.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – трапецевидна матриця.

8. Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи крім елементів, які містяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця.

9. Діагональна матриця називається одиничною, якщо елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$ – одинична матриця.

10. Якщо рядки матриці A замінити стовпцями, то отримана матриця називається транспонованою і позначається A^T.

Наприклад, до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ транспонованою є матриця $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Для матриці $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ транспонована матриця $C^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

11. Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи цих матриць рівні між собою.

Наприклад, матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ рівні між собою.

3.2. Дії над матрицями

Сумою (різницею) матриць A=(a_{ij}*) і B=(* b_{ij}*) однакового розміру* називається матриця $C=A+B$; елементи якої знаходяться за формулою: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B)*. Наприклад, знайдемо суму матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$.

Обидві матриці мають однаковий розмір 2×2, тому за означенням $A+B=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$.

Суми матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ не існує (розмір не однаковий).

Добутком матриці A=(a_{ij}*) на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} находять за формулою $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ (елементи утворюються множенням відповідних елементів матриці *A* на α).

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=-3$; $C=\alpha A=-3\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & -3 & 12\\ -9 & 0 & -9\end{pmatrix}$.

Добутком матриці $A=($ $a_{ij}$$)$ *розміру* $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ *розміру* $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

В результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

Наприклад, дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Знайдемо добуток $A \cdot B$, $B \cdot A$, $C \cdot A$, $C \cdot B$.

За означенням:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 & -1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ 14 & 20 \\ 23 & 34 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 & -1 \cdot 6 + (-3) \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 5 + 6 \cdot 7 & 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -30 \\ 38 & 44 \\ 67 & 78 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць А·С та В·С не можливе за означенням множення матриць (матриця А має розмір 2×2, розмір матриці С 3×2; розмір матриці В 2×2, розмір матриці С 3×2).

Властивості дій над матрицями:

1) $A + B = B + A$;
2) $\alpha A = A\alpha$, де α – число.
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, де α – число.
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, де α , β – числа.
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, де α , β – числа.
6) *$AB \neq BA$, якщо $A \neq B$.*

3.3. Тестові завдання

1. Матрицею називається ...

A) число,

B) таблиця чисел,

C) геометрична фігура.

2. Для того, щоб помножити матрицю на число, потрібно

A) елементи довільного рядка матриці помножити на це число,

B) елементи довільного рядка чи стовпця матриці помножити на це число,

C) всі елементи матриці помножити на це число.

3. Дано дві матриці $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & -3 \\ -5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Які операції можна над ними виконати:

A) додавання, віднімання, множення A на B, множення B на A.

B) множення A на B,

C) додавання, віднімання.

4. Підприємство випускає щоденно вироби трьох видів: торти, печиво, цукерки. Витрати на виробництво наведені в таблиці:

Таблиця 1.

Вид виробу	Кількість виробів (кг)	Витрати сировини $\left(\frac{кг}{одиницю}\right)$
торт	20	5
печиво	10	7
цукерки	30	2

4.1.Добова матриця кількості виробів, якщо кількість усіх товарів збільшилась на 30 %:

A) $\begin{pmatrix} 26 \\ 13 \\ 39 \end{pmatrix}$. B) $\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$. C) $\begin{pmatrix} 22 \\ 11 \\ 33 \end{pmatrix}$

4.2. Матриця добових витрат сировини S , якщо витрати зменшились на 20 %:

A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5{,}6 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$. B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. C) $\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6{,}3 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$.

5. Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони

A) мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

B) відповідні елементи на головній діагоналі рівні.

C) мають однаковий розмір.

ЛЕКЦІЯ 4. ВИЗНАЧНИКИ

План лекції

4.1. Визначники другого та третього порядків. Обчислення визначників

4.2. Властивості визначників.

4.3. Мінори і алгебраїчні доповнення.

4.4. Визначник n- го порядку. Ранг матриці. Обернена матриця.

4.5. Тестові завдання

4.1. Визначники другого і третього порядків, їх властивості. Обчислення визначників

Введення визначників пов'язано з розв'язанням систем лінійних рівнянь. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \text{ де } a_{ij}, b_i \text{ - числа, } i, j \in \{1,2\}.$$

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \text{ де } a_{ij}, b_i \text{ - числа, } i, j \in \{1,2\}.$$

Визначником другого порядку Δ називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \text{ де } |\ | \text{ — знак визначника} \qquad (4.1)$$

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$$

Визначником третього порядку Δ називається число, яке знаходиться за формулою:

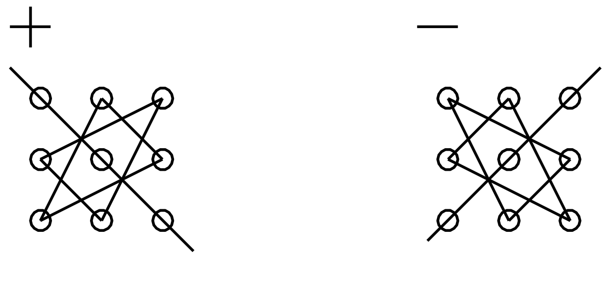
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (4.2)$$

Позначають визначник Δ або |A|.

Якщо визначник відмінний від нуля, то матриця називається *невиродженою (неособливою)*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *вироджена (особлива*).

Формулу (4.2) отримують з правила обчислення визначників третього порядку (правило трикутника):



Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, які стоять на головній діагоналі, перемножуються і додаються до добутків елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі (малюнок зліва); до них зі знаком «мінус» додаються доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на побічній діагоналі визначника, та у вершинах трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33} (малюнок справа).

Наприклад, знайти визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3*2*1+2*1*1+1*3*(-2)-1*1*1-2*2*(-2)-3*3*1=6+2-6-1+8-9=0.$$

Правило Саррюса обчислення визначників третього порядку:

У визначнику за третім рядком запишемо ще раз перший і другий рядок:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника слід записати зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника та на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на побічній діагоналі, і на діагоналях, паралельних їй.

4.2. Властивості визначників

Властивості визначників:

1. Визначник матриці А і визначник транспонованої до неї матриці рівні:

$|A|=|A^T|$.

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Якщо один із рядків (стовбців) визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Наприклад, $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені на деяке число.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$

Перший рядок визначника додамо з другим і запишемо на місце другого рядка (перший рядок без змін):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 .$$

З цієї властивості випливає, що визначник, який має два однакові (або пропорційні) рядки, дорівнює нулю.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$,

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 16 \end{vmatrix} = 0 .$$

4.1 Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число, то і визначник помножиться на це число (спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника).

Наприклад, $\begin{vmatrix} 6\cdot(-2) & 6\cdot 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ k & l \end{vmatrix}.$$

Наприклад, у визначнику $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ елементи першого рядка представимо у вигляді двох доданків довільним чином (-2=-5+3, 4=-6+10). За даною властивістю матимемо:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5+3 & -6+10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

4.3. Мінори та алгебраїчні доповнення

Мінором M_{ij} *матриці n-го порядку* називається визначник цієї матриці *n-1*-го порядку, утворений викреслюванням *i*-го рядка та *j* –го стовпця цієї матриці.

Приклад. Утворити мінори другого порядку першого рядка матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Викреслимо перший рядок і перший стовпець матриці *A* і утворимо визначник:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 3\cdot 1 = -9.$$

Викреслимо перший рядок і другий стовпець матриці *A* і утворимо визначник:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot 3 = -6.$$

Аналогічно,

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-2)\cdot 3 = 7.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} матриці *A* є мінор M_{ij} цієї матриці, взятий зі знаком + або – в залежності від розташування елемента a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення знаходиться за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 3\cdot 1 = -9.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(1\cdot 3 - 3\cdot 3) = 6.$$

4.4. Визначник n-го **порядку. Ранг матриці. Обернена матриця**

Визначником n-го порядку називається число, яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{ij}A_{ij}+\dots+a_{in}A_{in}=$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{ij}A_{ij}+\dots+a_{nj}A_{nj}.$$

Отже, обчислення визначника *n*-го порядку зводиться до обчислення *n* визначників (*n–1)*-го порядку (алгебраїчних доповнень).

З формули випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно (добуток нульових елементів на відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює нулю).

Згідно з властивістю 4, яка справджується для визначників будь-якого порядку, можна визначник перетворити так, щоб у його рядках або стовпцях усі елементи, крім одного, дорівнювали нулю.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -2 & -3\end{vmatrix}=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{42}\cdot A_{42}=$$

$$=2\cdot A_{42}=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1+3\cdot(-2)\cdot1-(1\cdot1\cdot1+3\cdot3\cdot1+(-2)\cdot2\cdot2))=$$

$$2(6+2-6-(1+9-8))=2\cdot(2-2)=2\cdot0=0.$$

Ранг матриці

Рангом матриці А розміром $m\times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Позначають ранг матриці: r або rang A.

При обчисленні рангу матриці слід переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків.

Наприклад, ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ дорівнює 2, бо $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\neq0$.

Елементарними перетвореннями матриці А називаються такі її перетворення*:

1) перестановка місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Матриці, які мають рівні ранги, називаються *еквівалентними* матрицями.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Для матриці $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (перший і другий рядок додали і записали на місці другого рядка (елементарні перетворення не змінюють рангу матриці)). Визначник цієї матриці дорівнює нулеві, отже ранг матриці менше двох. Серед мінорів першого порядку (елементів матриці) є відмінні від нуля. Таким чином, ранг $r(A) = 1$.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (другий рядок помножили на 2 і відняли від третього рядка, записали на місці третього рядка (елементарні перетворення матриці)).

Визначник матриці A (мінор третього порядку) дорівнює нулеві отже ранг матриці менше трьох. Серед мінорів другого порядку є такі, що не дорівнюють нулю. Наприклад, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 9 \neq 0$. Таким чином, ранг $r(A) = 2$.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею до* <u>*квадратної*</u> *невиродженої* ($|A| \neq 0$) *матриці A*, якщо виконується рівність: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Якщо A – невироджена матриця, то для неї існує обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Доведемо методом від супротивного, що для матриці A обернена матриця A^{-1} – єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C, така що AC = CA = E. Тоді

$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C$,

і

$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$, звідси $C = A^{-1}$.

Отже, початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Наприклад, обчислити обернену матрицю A^{-1} до заданої $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Зробити перевірку, обчисливши добуток $A \cdot A^{-1}$.

Знайдемо визначник матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-2)\cdot 0+4\cdot 3\cdot 3+1\cdot 1\cdot 2-3\cdot(-2)\cdot 2-1\cdot 3\cdot 1-1\cdot 4\cdot 0=47\neq 0,$$

отже A^{-1} існує.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-2)\cdot 0-3\cdot 1=-3,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-[1\cdot 0-3\cdot 3]=9,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-2)\cdot 3=7,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-[4\cdot 0-1\cdot 2]=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-3\cdot 2=-6,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-[1\cdot 1-4\cdot 3]=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-(-2)\cdot 2=16,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-[1\cdot 3-1\cdot 2]=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-4\cdot 1=-6,$$

За формулою записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{47}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 16\\ 9 & -6 & -1\\ 7 & 11 & -6\end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку за означенням оберненої матриці, для цього обчислимо добуток $A^{-1}\cdot A$:

$$\frac{1}{47}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 16\\ 9 & -6 & -1\\ 7 & 11 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{47}\begin{pmatrix}-3\cdot 1+2\cdot 1+16\cdot 3 & -3\cdot 4+2(-2)+16\cdot 1 & -3\cdot 2+2\cdot 3+16\cdot 0\\ 9\cdot 1-6\cdot 1-1\cdot 3 & 9\cdot 4+(-6)\cdot(-2)+(-1)\cdot 1 & 9\cdot 2+(-6)\cdot 3+0\cdot(-1)\\ 7\cdot 1+11\cdot 1+(-6)\cdot 3 & 7\cdot 4+11\cdot(-2)+(-6)\cdot 1 & 7\cdot 2+11\cdot 3+0\cdot(-6)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{47}\cdot\begin{pmatrix}47 & 0 & 0\\ 0 & 47 & 0\\ 0 & 0 & 47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Так як $A^{-1}A=E$ і $A\cdot A^{-1}=E$, то A^{-1} знайдена правильно.

4.5. Тестові завдання

1. Визначником матриці називається:

A) число,

B) таблиця чисел,

C) площа геометричної фігури.

2. Визначник $\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ дорівнює

A) -2.

B) 2.
C) 10.

3. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ дорівнює

A) 16.
B) 8.
C) 0.

4. Мінором M_{21} матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ є число

A) 5,
B) 10,
C) -3.

5. Алгебраїчним доповненням A_{32} матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ є число:

A) 19,
B) -19,
C) -11.

6. Визначник $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ дорівнює:

A) 12,
B) -12,
C) 0.

6. Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ дорівнює:

A) 2,
B) 1.
C) 3.

7. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної невиродженої матриці A, якщо
A) виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
B) виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A$.
C) виконується співвідношення: $AA^{-1} = E$.

8. Як зміниться значення визначника матриці при її транспонуванні?
A) зміниться на протилежне,
B) не зміниться,
C) буде дорівнювати нулю.

9. Як зміниться значення визначника матриці, якщо до елементів одного її рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число λ?
А) не зміниться.
В) значення помножиться на λ,
С) зміниться на протилежне.

ЛЕКЦІЯ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З N-НЕВІДОМИМИ

План лекції

5.1. Поняття системи лінійних рівнянь.
*5.2. Метод оберненої матриці **р**озв'язування систем лінійних рівнянь*
5.3. Формули Крамера.
5.4. Метод Гауса.
5.5. Тестові завдання

5.1. Поняття системи лінійних рівнянь

В вавилонських текстах часто зустрічаються лінійні системи, особливо з двома невідомими.

Згодом цю працю під назвою «Algebra» перекладено латинською мовою. В праці середньоазіатського математика Мухаммеда Бен-Муси ал-Хорезми (IX ст.) розглядаються рівняння 1-го і 2-го степенів за допомогою слів без символів. Засновником символічної алгебри вважають Вієта. В праці «Вступ до аналітичного мистецтва» (1591) він намагався створити потужне алгебраїчне числення. Він поділяє алгебру на три частини: мистецтво розв'язування рівнянь, мистецтво доведення правильності одержаних розв'язків, загальна теорія рівнянь. Відомі Вієт позначав приголосними В, С, …, а невідомі – голосними А, Е, О. Крім символів змінних, він вперше ввів символи для параметрів, а також увів термін «коефіцієнт». Отже, можна було вже досліджувати не лише корені рівняння, а й самі рівняння. При розв'язуванні рівнянь він широко застосовував метод підстановки. Подальшого розвитку алгебра набула в працях Р.Декарта. Він удосконалив буквену символіку до сучасного вигляду. У третій книзі «Геометрія» (1637) висловлена думка, що кожне алгебраїчне рівняння має стільки коренів, скільки одиниць у найвищому показнику степеня невідомого.

Дамо спочатку означення лінійного рівняння.

Лінійним (відносно невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$) називають алгебраїчне рівняння першого степеня, тобто рівняння виду $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, де $a_1, ..., a_n, b$ – числа. Причина такої назви тому, що рівняння першого степеня з двома невідомими $ax + by = c$ визначає на площині пряму.

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами системи*; числа b_i – *вільними членами*; $x_1, x_2, ..., x_n$ – *невідомими*.

Якщо всі $b_i = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Розв'язком системи рівнянь є така упорядкована множина чисел k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

Кількість рівнянь системи може не дорівнювати кількості невідомих цієї системи.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більше одного.

В китайському математичному творі «Математика в дев'яти книгах» (II ст. до н.е.) розв'язуванню систем лінійних рівнянь присвячені VII і VIII книги. Найдавніший метод розв'язання систем двох лінійних рівнянь – «надлишок і недостача». Записуючи сучасною символікою, цей метод застосовувався до рівнянь виду $\begin{cases} ax = y + c, \\ bx = y - d \end{cases}$, де a, b – норми, c – надлишок, d – нестача. На дошці пишуть норми, під ними відповідно надлишок і нестачу, перемножують їх навхрест і складують суму цих добутків, суму надлишку і недостачі, різницю більшої і меншої норм:

$$x = \frac{c + d}{a - b}, y = \frac{ad - bc}{a - b}.$$

В книзі VIII міститься метод «фан-чен» розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими. На дошці зображали відповідну таблицю і перетворювали її послідовним виключенням невідомих. Цей метод пізніше було перевідкрито в Європі і дістав він назву методу Гауса чи методу послідовного виключення невідомих.

Приклад.

1) Система

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 7y = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x + 7(1 - x) = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ -5x = -10, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ x = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

має єдиний розв’язок $x = 2$, $y = -1$.

Геометричною інтерпретацією системи є дві прямі, які перетинаються в точці з координатами $x = 2$, $y = -1$.

2) Система

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 4y = -12 \end{cases}$$

розв’язку не має.

Геометричною інтерпретацією системи є дві паралельні прямі (не мають спільних точок).

3) Система

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

має безліч розв’язків. Геометричною інтерпретацією системи є дві паралельні прямі, які співпадають.

5.2. Метод оберненої матриці розв’язування систем лінійних рівнянь (матричний метод)

Позначимо матрицю системи A – матриця, що складається із коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

B – матриця-стовпець вільних членів

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

X – матриця-стовпець невідомих системи

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати в матричному вигляді: $AX=B$.

Її розв’язок знайдемо помноживши зліва обидві частини рівності на A^{-1}:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B$, тобто

$X = A^{-1}B$ – розв’язок системи.

Для розв’язання системи матричним методом необхідно:

1) знайти матриці: A – матриця системи; X – матриця- стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів;

2) знайти матрицю A^{-1} – обернену матриці A;

3) знайти матрицю X, помноживши обернену матрицю A^{-1} на матрицю B:

$X = A^{-1}B$.

Приклад. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

1) Знайдемо матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Знайдемо обернену матрицю до матриці A.

Для цього знайдемо визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) \cdot 4 = 9.$$

Алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 2 = -16;$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(-12 + 1) = 11;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-9 - 8) = 17;$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 = -27;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 16) = 18;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

За формулою обернена матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 11 & 2 \\ 17 & -10 & -1 \\ -27 & 18 & 0 \end{pmatrix}$;

Зробимо перевірку обчислень. За означенням оберненої матриці:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-16 & 11 & 2\\ 17 & -10 & -1\\ -27 & 18 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-16\cdot 2+11\cdot 3+2\cdot 4 & -16\cdot 4+11\cdot 6+2\cdot(-1) & -16+11\cdot 2-6\\ 17\cdot 2-10\cdot 3-4 & 17\cdot 4-60+1 & 17\cdot 1+(-10)\cdot 2+3\\ -27\cdot 2+18\cdot 3 & 4\cdot(-27)+18\cdot 6 & -27+18\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

- одинична матриця.

3) За формулою $X = A^{-1}B$ знайдемо розв'язок системи. помноживши обернену матрицю A^{-1} на матрицю B, складену з вільних членів:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-16 & 11 & 2\\ 17 & -10 & -1\\ -27 & 18 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}(-16)\cdot 4+11\cdot 4+2\cdot 1\\ 17\cdot 4+(-10)\cdot 4+(-1)\cdot 1\\ -27\cdot 4+18\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-64+46\\ 68-41\\ -108+72\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-18\\ 27\\ -36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=-2, x_2=3, x_3=-4.$

5.3. Формули Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i\\ \ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами Крамера:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\ j=\overline{1,n}.$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих системи;

Δ_j — визначник, який утворюється заміною *j*-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Щоб розв'язати систему за формулами Крамера, необхідно:

1. Скласти з коефіцієнтів при невідомих і обчислити головний визначник системи Δ.

а) Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна, має єдиний розв'язок.

б) Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$, то система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і Δ_j – числа, відмінні від нуля, то система немає розв'язків.

2. Скласти із головного визначника системи (заміною стовпця коефіцієнтів при відповідній невідомій стовпцем вільних членів) і обчислити визначники Δ_j системи (їх кількість дорівнює кількості невідомих системи).

3. За формулами Крамера обчислити значення невідомих x_j.

4. Виконати перевірку розв'язку системи (при підстановці знайдених розв'язків замість змінних в кожне рівняння системи повинні отримати правильну числову рівність).

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>

1. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot(-2)\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 = 13.$$

Система сумісна і має єдиний розв'язок.

2. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2 + (-2)\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 7 - 7(-2)\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 9 = -13;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 21 + 27 + 18 - 18 - 14 = 26;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 18 - 6 + 54 - 7 + 8 = 39.$$

3. Використовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

4. Перевірка:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1) + 2 + 3\cdot 3 = 9, \\ -1 - 2\cdot 2 + 3 = -2, \\ 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 7. \end{cases}$$

Отже, система розв'язана правильно.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

5.4. Метод Гауса[†] розв'язування систем лінійних рівнянь

Історично першим, найбільш поширеним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є метод Гауса, або метод послідовного виключення невідомих. Його відкрив К.Гаус у 1849 р., тому і названий в його честь. Однак, ще за 2000 років до Гауса у Стародавньому Китаї цей алгоритм розв'язання систем лінійних рівнянь міститься в праці "Дев'яти книгах про математичне мистецтво".

Суть методу Гауса полягає в тому, що задану систему лінійних рівнянь зводять (за допомогою виконання елементарних перетворень[*]) до еквівалентної системи шляхом послідовного вилучення невідомих так, щоб одержати систему, в якій одне із рівнянь має лише одну невідому, потім знайти цю невідому і, застосовуючи метод підстановки, знаходити значення останніх невідомих.

Щоб розв'язати систему, необхідно:

1) серед всіх невідомих систем вибрати ведучу невідому (краще всього невідому, що має коефіцієнт ±1);

2) рівняння, в яке входить вибрана ведуча невідома (ведуче), в системі записати на перше місце;

3) шляхом множення рівнянь на стале число і додавання до другого рівняння, вилучити ведучу невідому із всіх рівнянь системи крім ведучого;

4) серед неведучих рівнянь одержаної системи знову вибрати ведучу невідому і ведуче рівняння, вилучити другу ведучу невідому з неведучих рівнянь і т.д. до тих пір, поки не одержимо рівняння з одним невідомим;

5) використовуючи метод підстановки і виконуючи зворотний шлях (знизу вверх), знайти значення всіх невідомих.

Наприклад, розв'язати систему методом Гауса:

(-2) (-3)

[†] ***Карл Фрідріх Гаус** (1777-1855)– німецький математик, іноземний член Петербурзької АН (1824). Його праці з вищої алгебри, диференціальної геометрії, математичної фізики, геодезії, астрономії, особливий внесок у теорію електрики й магнетизму.*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 0 \cdot x_1 + 5x_2 + x_3 = 13, \quad (+) \\ 0 \cdot x_1 + 8x_2 - x_3 = 13; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_2 + x_3 = 13, \\ 13x_2 + 0 \cdot x_3 = 26; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 2x_2 - x_3, \\ x_3 = 13 - 5x_2, \\ 13x_2 = 26; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 2x_2 - x_3, \\ x_3 = 13 - 5 \cdot 2 = 3, \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 2 \cdot 2 - 3 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

Метод Гауса використовують при будь-якій кількості невідомих і рівнянь.

При розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса можливі наступні випадки:

а) розширена матриця системи зведена до трикутного виду (див. типи матриць (Лекція 4.1.)) – існує єдиний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

в) розширена матриця зведена до трапецевидного виду – існує безліч розв’язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

с) в результаті елементарних перетворень отримали рядок чи стовпець, у якому всі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю – система розв’язків не має.

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

<u>*Теорема.*</u> Для того, щоб система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими була сумісною (мала розв’язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи *A* дорівнював рангу розширеної матриці системи *B*: *r(A) = r(B).*

Якщо ранги рівні і дорівнюють числу невідомих, то система має єдиний розв’язок: *r(A) = r(B) = n.*

Якщо ранги рівні, але менші кількості невідомих, то система має нескінченну множину розв’язків, тобто невизначена: *r(A) = r(B) < n.*

Наприклад, $\begin{cases} 2 \cdot x + 5 \cdot y = 1, \\ 4 \cdot x + 10 \cdot y = 2 \end{cases}$

Ранг розширеної матриці системи $B=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \end{array}\right)$ дорівнює одиниці (рядки матриці пропорційні).

Ранг основної матриці системи $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ теж дорівнює одиниці. Отже, ці ранги рівні – система сумісна (має хоча б один розв’язок). Так, як *rangA=rangB=1* – менше кількості невідомих системи (1<2), то система має безліч розв’язків.

5.5. Тестові завдання

1) Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо

А) принаймні один з вільних членів системи дорівнює нулю,

В) всі вільні члени системи дорівнюють нулю,

С) принаймні один з коефіцієнтів при змінних системи дорівнює нулю.

2. Розв'язком системи рівнянь є

А) множина таких чисел k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

В) множина таких чисел k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n у кожне з рівнянь системи принаймні одне з них перетворюється на правильну числову рівність.

С) множина таких k_1, k_2, ..., k_n, у результаті підстановки якого замість відповідних невідомих x_1, x_2, ..., x_n у перше рівняння системи воно перетворюється на правильну числову рівність.

3. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона

А) не має жодного розв'язку,

В) має хоча б один розв'язок,

С) має лише один розв'язок.

4. Система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона

А) має єдиний розв'язок.

В) має принаймні один розв'язок,

С) немає розв'язків.

5. Система $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x+9y=6 \end{cases}$ має:

А) один розв'язок,

В) не має розв'язку,

С) безліч розв'язків.

6. Система $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x+9y=3 \end{cases}$ має:

А) один розв'язок,

В) не має розв'язку,

С) безліч розв'язків.

7. Система $\begin{cases} 5x-y=3, \\ 15x+9y=6 \end{cases}$ має:

А) один розв'язок,

В) не має розв'язку,

С) безліч розв'язків.

8. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь $\Delta \neq 0$, то система

А) сумісна, має єдиний розв'язок,

В) має безліч розв'язків;

С) немає розв'язків (якщо Δ_j – числа, відмінні від нуля).

9. Якщо при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса розширена матриця зведена до трикутного виду, то

А) існує єдиний розв'язок системи;

В) існує безліч розв’язків системи,

С) система немає розв’язків.

10. Якщо в результаті елементарних перетворень матриці отримали рядок чи стовпець, у якому всі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система

А) розв’язків не має.

В) має безліч розв’язків,

С) немає розв’язків.

11. Якщо в результаті елементарних перетворень розширена матриця зведена до трапецевидного виду, то система

А) розв’язків не має.

В) має безліч розв’язків,

С) немає розв’язків.

12. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих системи, то система має

А) єдиний розв’язок,

В) безліч розв’язків,

С) немає розв’язків.

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Після великих географічних відкриттів (Америки – в 1492 р, морського шляху в Індію – в 1498 р.) активізувався розвиток виробництва, торгівлі. Мореплавство вимагало розробки і вдосконалення складання географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць. Дослідження Галілея та Кеплера стимулювало створення аналітичної геометрії в середині XVII ст.

Походження назви “аналітична геометрія” пов’язують з тим, що французький математик Ф.Вієт буквену алгебру називав “аналітичним мистецтвом”. Термін “аналітична геометрія” введено французьким математиком С.Лакруа в четвертому виданні книги “Курс математики” (1807). Першою книгою “Аналітична геометрія” був підручник француза Г.Гарньє (1808).

Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше міститься у другому томі швейцарського математика Л.Ейлера “Вступ до аналізу” (1748), який вважається першим курсом аналітичної геометрії.

У XVIII ст. завершено формування аналітичної геометрії як науки і як навчального предмету. Тут варто пригадати класичний підручник французького академіка С.Лакруа. З кінця XIX ст. до неї увійшли також поняття і операції векторної алгебри.

РОЗДІЛ ІІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

ЛЕКЦІЯ 6. ВЕКТОРИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З НИМИ

План лекції

6.1. Системи координат.

6.2. Вектор. Колінеарні й компланарні вектори. Проекція вектора на вісь. Координати вектора і точки. Дії над векторами, що задані своїми координатами. Довжина вектора. Лінійні операції над векторами (додавання, віднімання і множення на число).

6.3. Розклад вектора на складові в просторі.

6.4. Поділ відрізка у заданому відношенні.

6.5. Тестові завдання

6.1. Системи координат

Основи координатного методу були вже у Стародавньому Вавілоні.

У ІІ ст. до н.е. грецький дослідник Гіппарх запропонував визначити положення точки на земній поверхні географічними координатами (довгота і широта). Аполлоній Пергський (262 до н.е. – 190 до н.е.) у трактаті "Конічні перерізи" використав прямокутні координати і визначив відомі на той час лінії другого порядку: еліпс, гіперболу, параболу.

Розгляд складніших рухів за допомогою простіших призвів до створення системи координат, яку пізніше назвали декартовою. В праці французького математика Р.Декарта «Геометрія» застосовується ортогональна[‡] система координат (але без від'ємних абсцис), введено поняття змінної величини у двох розуміннях: 1) як відрізок змінної довжини, координати точки, яка своїм рухом описує плоску криву або 2) як числову змінну, яка виражає довжину.

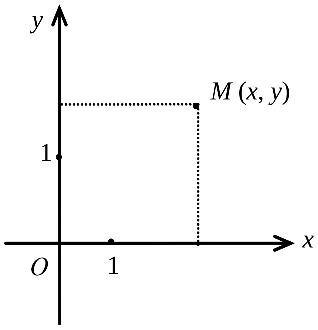
Основоположником координатного методу і аналітичної геометрії вважають французького математика Р.Декарта. Він у праці "Геометрія" (1637) виклав основи цього методу. Ця праця є в основному алгебраїчною, але в ній міститься ідея аналітичної геометрії – алгебраїчний спосіб дослідження геометричних об'єктів за допомогою методу координат. Великий внесок у розвиток аналітичної геометрії зробив французький математик П.Ферма. Він раніше і точніше за Р.Декарта ввів прямолінійні координати. Однак праці Р.Декарта мали пріоритет, бо були опубліковані раніше. П.Ферма вивів рівняння прямої і кривих другого порядку, розглянув задачу про перенесення системи координат. Він вважав, що якщо два рівняння з двома невідомими відрізняються лише сталими коефіцієнтами, то вони виражають криві одного характеру.

Ідеї Р.Декарта і П.Ферма розвивалися іншими дослідниками, зокрема англійським вченим І.Ньютоном. Він в праці "Перелік кривих третього порядку" (1704) удосконалив метод координат, ввівши рівноправні осі координат. Швейцарський математик Г.Крамер у праці "Вступ до аналізу алгебраїчних кривих" (1750) ввів вісь ординат, вважаючи її рівноправною віссю і використав поняття двох координат точки на площині. В 1731 р. французький мате-

---

[‡] Вісі системи координат перпендикулярні

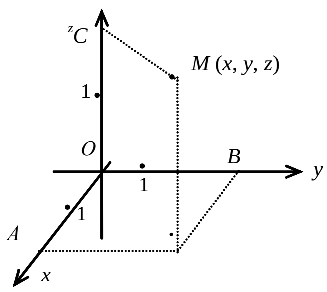
матик А.Клеро в книзі "Дослідження про криві подвійної кривини" розпочав систематичне використання просторових координат.



Дамо означення декартової системи координат.

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox*, *Oy*, які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють <u>*прямокутну декартову систему координат*</u> *на площині*.

Якщо таких осей три: *Ox* і *Oy*, *Oz*, то маємо прямокутну декартову систему координат у просторі.



Осі *Ox, Oy, Oz* називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка *O* — *початок системи координат*. Декартовими координатами *x, y, z* довільної точки *M* у просторі є відповідно довжини *OA, OB, OC*.

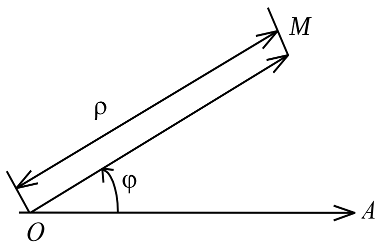
Кожній точці площині можна поставити у відповідність впорядковану двійку чисел (*x*, *y*), а в просторі — впорядковану трійку чисел (*x*, *y*, *z*).

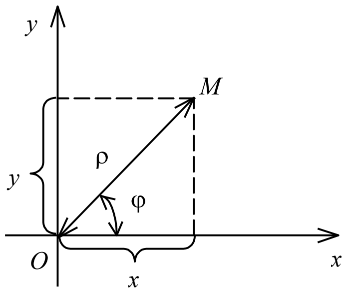
Французький математик Лагранж у творі «Аналітична механіка» (1788) показав застосування методу координат в фізиці. У першій главі цього тому вводиться система декартових координат у просторі, знаходиться відстань точки простору до початку координат, у другій главі виводяться рівняння циліндричних і конічних поверхонь, у третій досліджуються плоскі перерізи кругового циліндра і конуса, у п'ятій главі виведено рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, параболоїдів.

Метод координат сприяв використанню в математиці змінних величин. На основі двовимірної та тривимірної геометрії була створена багатовимірна аналітична геометрія.

В геометрії набула широкого застосування полярна система координат.

<u>*Полярна система координат*</u> складається з деякої точки площини *O* (*полюса 0)*, і *полярної осі* (променя *OA,* що виходить з цієї точки) і одиниці масштабу.





Полярними координатами точки M є число ρ — відстань від полюса *O* до точки *M (полярний радіус)* і φ — кут між полярною віссю *OA* і радіусом *OM (*проти годинникової стрілки). $M(\rho\ ,\ \varphi)$.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Наприклад, знайти полярні координати точки M (2, 2).

З останніх формул маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\arccos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Отже, полярні координати точки $M\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6.2. Вектор. Лінійні операції над векторами

В архіві болонського математика XVI ст. Р.Бомбеллі було знайдено його праці з геометрії. Зокрема, він виконував арифметичні операції над геометричними величинами, вводячи одиничний відрізок, досліджував нульові і від'ємні площі.

Термін «вектор» (vector – тягти) введено Гамільтоном у 1846 році. Вперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо.

Більш глибоке застосування вектора було пов'язане з його детальним вивченням. Праці К.Весселя (1745-1818), Аргана (1768-1822), К.Гауса (1777-1855) з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами у площині.

Відомі математики В.Гамільтон (1805-1865), Мебіус (1790-1868), Г.Грассамана (1809-1877) займалися застосуванням векторів у тривимірному і багатовимірному просторах. На початку XX ст. відбувався подальший розвиток векторного числення. Створені векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля, тензорний аналіз. На векторній основі викладено лінійну алгебру, аналітичну та диференціальну геометрії.

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначають малими латинськими літерами $\vec{a}, \vec{b}$, ... , або $\overrightarrow{AB}$, де точка A — початок вектора, а точка B — його кінець.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ вважається заданим, коли відома його довжина $|\overrightarrow{AB}|$ (модуль) і напрям.

Два вектори вважаються рівними, якщо їх модулі рівні, і напрямки збігаються.

Два паралельних, однакових за довжиною, але протилежно направлених вектори $\overline{a}$ та $-\overline{a}$ називаються протилежними векторами.

Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, вектор називають одиничним.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Щоб знайти координати вектора $\vec{AB}$, треба від координат кінця цього вектора відняти координати початку. Якщо $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координати вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Наприклад: *A (2,-1,3) , B (3, 4, 5),* $\overline{AB} = (3-2;\ 4-(-1);5-3)$*=(1; 5; 2).*

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів координат цього вектора:

Якщо $\overline{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

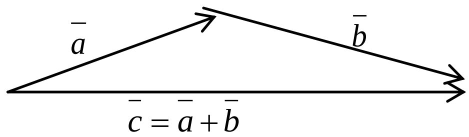
Наприклад $\overline{a} = (-3;\ 0;\ 4)$, $|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5$..

Дії з векторами, що задані своїми координатами

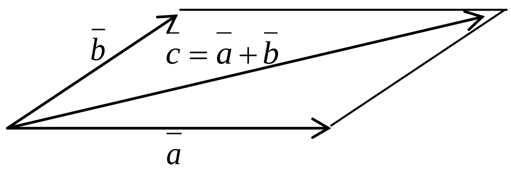
Над векторами $\overline{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\overline{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ означені такі операції:

1. *Додавання*:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.



Правило трикутника



Правило паралелограма

Віднімання векторів.

Щоб від вектора $\overline{a}$ відняти вектор $\overline{b}$, необхідно до вектора $\overline{a}$ додати вектор, протилежний $\overline{b}$ $(-\overline{b})$.

2. *Множення вектора* $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *на дійсне число* α:

$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Щоб помножити вектор $\overline{a}$ на число α треба кожну координату вектора множимо на це число.

Властивості лінійних операцій над векторами:

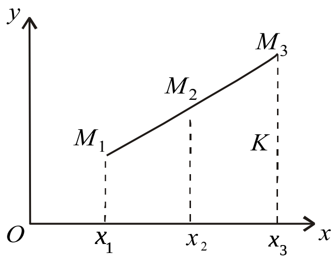
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.
4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

6.3. Розклад вектора на складові в просторі

Візьмемо вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і по модулю дорівнюють одиниці: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Такі вектори називаються *одиничними* векторами осей системи координат (ортами). Тоді вектор $\bar{a}=(x;\ \ y;\ \ z)$ можна подати у вигляді:

$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ – розклад вектора за одиничними векторами.

6.4. Поділ відрізка в заданому відношенні



Нехай задано координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_3(x_3, y_3)$.

Число μ — називається відношенням, в якому точка $M_2(x_2, y_2)$ ділить відрізок M_1M_3, якщо

$$\mu=\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|}. \qquad (*)$$

Нехай μ – відоме число і треба знайти координати точки $M\,(x, y)$.

З теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, маємо:

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|}=\frac{|x_2-x_1|}{|x_3-x_2|}=\mu.$$

Оскільки числа $x_2 - x_1$ і $x_3 - x_2$ при $x_1 < x_3$ додатні, а при $x_1 > x_3$ — від’ємні, то знак модуля в останній рівності можна опустити:

$$\frac{|x_2-x_1|}{|x_3-x_2|}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\mu.$$

Звідси:

$$x_2=\frac{x_1+\mu\cdot x_3}{1+\mu}.$$

Аналогічно, формула для знаходження ординати:

$$y_2=\frac{y_1+\mu\cdot y_3}{1+\mu}.$$

Наслідок. Якщо точка $M_2\ (x, y)$ — середина відрізка $M_1\ M_3$, то $\mu = 1$ (див.*) і

$$x_2=\frac{x_1+x_3}{2}, y_2=\frac{y_1+y_3}{2}.$$

Наприклад. Дано координати точок $M_1(3,-1)$ і $M_3(1,7)$. Середина відрізка $M_1\,M_3$ є точка $M_2(\frac{3+1}{2},\frac{-1+7}{2})=M_2(2,3)$.

6.5. Тестові завдання

1. Вектором називається:

А) напрямлений відрізок,

В) пара точок,

С) пряма

2. Сумою векторів $\bar{a}$(-1, 2, 0) і $\bar{b}$(3, 4, 1) є вектор:

А) (2, 6, 1),

В) (4, 2, -1),

С) (2, 8, 0).

3. Різницею ($\bar{a}$-$\bar{b}$) векторів $\bar{a}$(-1, 2, 0) і $\bar{b}$(3, 4, 1) є вектор:

А) (-4, -2, -1),

В) (2, 6, 1),

С) (-3, 8, 1).

4. Довжина вектора $\bar{a}$(-1, 2, 0) дорівнює

А) $\sqrt{5}$,

В) $\sqrt{3}$,

С) 2.

5. Два вектори називаються колінеарними, якщо вони:

А) лежать в одній площині,

В) лежать на одній прямій,

С) лежать на одній прямій або паралельних прямих.

ЛЕКЦІЯ 7. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

План лекції

7.1. Скалярний добуток векторів.

7.2. Векторний добуток векторів.

7.3. Мішаний добуток трьох векторів.

7.4. Кут між двома векторами.

7.5. Тестові завдання

7.1. Скалярний добуток

Скалярним добутком векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ називається число $\bar{a}\cdot\bar{b}$, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між цими векторами: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.   .
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ або хоча один з векторів нульовий ($\vec{a}=0,\vec{b}=0$).

Якщо відомі координати векторів $\bar{a}=\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$, $\bar{b}=\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ (сума добутків відповідних координат векторів).

З цієї формули і властивості (4) *умова перпендикулярності векторів*: $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

З означення скалярного добутку можна визначити кут φ між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Приклад, знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}=(-3;-2;\ 1)$, $\bar{b}=(2;-3;1)$ та кут між ними.

Довжини цих векторів

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14},$$

$$\left|\bar{b}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-3)*2+(-2)*(-3)+1*1=-6+6+1=1.$$

Кут між векторами знайдемо за означенням скалярного добутку:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{14}.$$

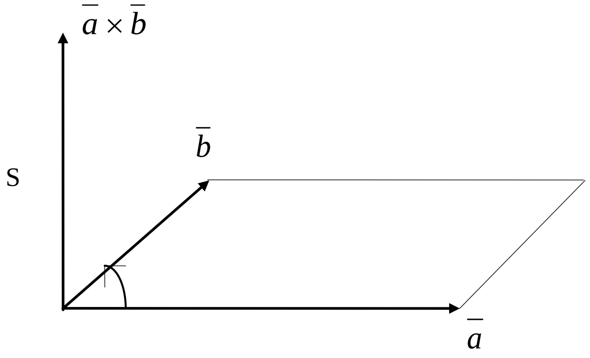
7.2. Векторний добуток

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]$, який задовольняє таким умовам:

1*) довжина вектора* знаходиться за формулою $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, де φ — кут між векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$;.

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Це означає, що $\vec{c}$ направлений так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається проти годинникової стрілки:



Геометричний зміст векторного добутку

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах (див. означення векторного добутку):

$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні або хоча б один з них нульовий.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – не комутативна властивість множення (переставна властивість не виконується).

3. $\left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами $\overline{a} = \left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ та $\overline{b} = \left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$, то векторний добуток обчислюється за допомогою визначника третього порядку:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a} = (-1; -2;\ 1)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$.

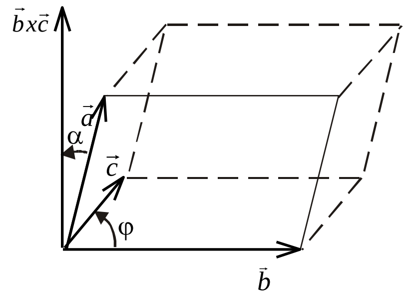
$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}(2+0) - \overline{j}(-3-0) + \overline{k}(6+2) = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 8\overline{k} = (2; 3; 8).$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+64} = \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

7.3. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, позначають $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.



Геометричний зміст мішаного добутку

Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $V=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

З цього можна записати умову компланарності трьох векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ (лежать в одній площині, отже об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах V=0):

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0.$$

Якщо відомі координати векторів

$\overline{a}=\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$, $\overline{b}=\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$, $\overline{c}=\left(x_3;\ y_3;\ z_3\right)$, то мішаний добуток цих векторів знаходять за формулою:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$ – не комутативна властивість (переставна властивість не виконується).

2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$, то вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ компланарні або хоча б один з них нульовий.

Приклад. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a}=(-1;-1;\ 1)$, $\overline{b}=(2;5;1)$, $\overline{c}=(4;3;-2)$. $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$ та об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Мішаний добуток $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-1(-10-3)+1(-4-4)+1(6-20)=-9$.

Об’єм піраміди дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $V_{nip.}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot 9=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

7.4. Тестові завдання

1. Скалярним добутком векторів є

А) вектор,

В) число,

С) косинус кута між векторами.

2. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ = (-1, 2, 3), $\overline{b}$ = (4, 0,-5) дорівнює

А) -19,

В) 11,

С) (-4, 0, -15).

3. Векторним добутком векторів є

А) вектор,

В) число,

С) синус кута між векторами.

4. Векторний добуток векторів $\bar{a}$ = (-1, 2, 3), $\bar{b}$ = (4, 0,-5) є

А) -19,

В) (-10, 7, -8),

С) (-10, -7, -8).

5. Мішаний добуток векторів $\bar{a}$ = (-1, 2, 3), $\bar{b}$ = (4, 0,-5), $\vec{c}$ =(1,-2,0) є

А) 24,

В) (-24, 0, 0),

С) -24.

6. Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює

А) об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

В) площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

С) площі трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

РОЗДІЛ V. *АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ*

ЛЕКЦІЯ 8. ЛІНІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

План лекції

8.1. Поняття лінії на площині.

8.2. Різні види рівняння прямої.

8.3. Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

8.4. Тестові завдання

8.1. Поняття лінії на площині

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

8.2. Види рівнянь прямої на площині.

1) Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай задано деяку пряму, точку $M(x_0; y_0)$, що належить цій прямій, вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярний до неї.

Візьмемо точку $A(x, y)$ –довільну точку прямої.

Побудуємо вектор $\overrightarrow{MA} = (x - x_o, y - y_0)$, який буде перпендикулярний вектору $\vec{n}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0$ або в координатній формі:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – *нормальне рівняння прямої*, заданої точкою $M(x_0; y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A; B)$.

2) Якщо в цьому рівнянні розкриємо дужки, то маємо $Ax + By + C = 0$ – ***загальне рівняння прямої на площині***, А, В, С – числа, причому $C = -Ax_0 - By_0$.

Ми бачимо, що в прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y. Навпаки, це рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

<u>Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння A і B.</u>

В загальному рівнянні прямої коефіцієнти A і B – це координати векторів:

$\vec{p} = (-B; A)$ – напрямленого вектора даної прямої,

$\vec{n} = (A; B)$ – нормального (перпендикулярного вектора даної прямої).

Наприклад, рівняння $6(x-3) - 2(y+5) = 0$ визначає пряму, що проходить через точку $A(3, -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (6; -2)$.

Дослідимо загальне рівняння прямої:

1. $C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ – пряма, що проходить через початок системи координат ($O(0, 0)$ лежить на цій прямій).

2. $B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\dfrac{C}{A}$ – пряма, паралельна осі Oy. Якщо ще і $C = 0$, то маємо $x = 0$ – рівняння осі Oy.

3. $A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$, тоді $By + C = 0$, або $y = -\dfrac{C}{B}$ – пряма, паралельна осі Ox, якщо ще і $C = 0$, то маємо $y = 0$ — рівняння осі Ox.

3) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Побудуємо вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Ці вектора колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ **- рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.**

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2, 4)$ і $M_2(-3, 5)$:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-4}{5-4}, \text{ тобто } \frac{x-2}{-5} = y - 4.$$

4) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$ паралельно заданому вектору $\overline{q} = \{l, m\}$.

Точка $M(x, y)$ лежить на цій прямій тоді, коли вектори $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ і $\overline{q} = \{l, m\}$ колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$$ ***– канонічне рівняння прямої.***

З цього рівняння можна отримати ***параметричне рівняння прямої:***

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l}=t, \\ \dfrac{y-y_1}{m}=t, \end{cases} \quad t\in R, \text{ де } t-\text{параметр.}$$

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(-3,4)$ паралельно заданому вектору $\bar{q}=\{5,6\}$ є рівняння $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-4_1}{6}$.

Наприклад, задані точки $A_1(-1,3)$, $A_2(7,2)$, $A_3(-6,0)$. Знайти: 1) рівняння прямої A_1A_2; 2) рівняння прямої A_3H, паралельної до прямої A_1A_2.

1) Запишемо рівняння прямої A_1A_2 (рівняння прямої, що проходить через дві задані точки):

$$\frac{x+1}{7+1}=\frac{y-3}{2-3}.$$

Тобто $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-3}{-1}$ – канонічне рівняння прямої A_1A_2.

З цього рівняння можна знайти вектор, паралельний до цієї прямої. Він має координати $\vec{a}(8,-1)$.

2) Знайдемо рівняння прямої A_3H паралельної до прямої A_1A_2.

Вектор $\vec{a}(8,-1)$ буде паралельний і до прямої A_3H. Підставимо в канонічне рівняння прямої координати точки A_3 і вектора $\vec{a}$:

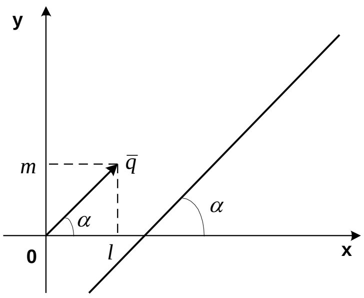
$$\frac{x+6}{8}=\frac{y-0}{-1}, \text{ або}$$

$\dfrac{x+6}{8}=-y$ – канонічне рівняння прямої A_3H.

3) Рівняння прямої, що задана точкою $M_1(x_1,y_1)$ і кутовим коефіцієнтом $k=tg\alpha$ (тангенсом кута нахилу прямої до осі ох).

Для прямої, паралельної осі, кутовий коефіцієнт дорівнює нулю, а для прямої, перпендикулярної осі, кутовий коефіцієнт не існує (нескінченність).

Помножимо обидві частини канонічного рівняння прямої (п.4) на m і врахуємо, що $\dfrac{m}{l}=k$. Отримаємо рівняння



$y-y_1=k(x-x_1)$ – *рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1,y_1)$ з кутовим коефіцієнтом k.*

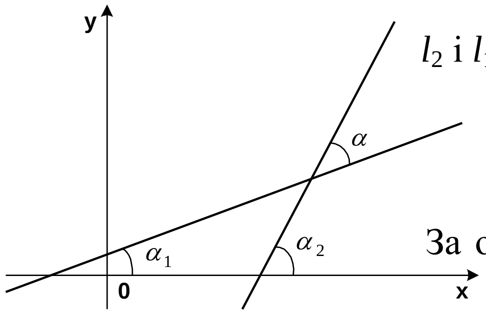
$y-y_1=kx-kx_1$, або $y=kx+y_1-kx_1$.

Якщо ввести позначення $b=y_1-kx_1$, то маємо інший вигляд ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:*** $y=kx+b$.

8.3. *Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.*

Прямі можуть перетинатися, бути паралельними або співпадати.

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається такий кут φ, поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до співпадання цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.



Зрозуміло, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1.

Нехай маємо прямі $y = k_1x + b_1$ ***і*** $y = k_2x + b_2$***. Треба знайти кут*** α ***між ними.***

За означенням кутового коефіцієнта прямої $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, крім того $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Отже:

$$tg\,\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) =$$
$$\frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$tg\,\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Кут між прямими, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ визначається за формулою $\cos\varphi = \dfrac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Наприклад, якщо прямі задані рівняннями *3x+4y-2=0* та *–x+y+8=0*, то

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot(-1) + 4\cdot 1}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями *y=5x-1, y=6x-8,* то

$$tg\,\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{6-5}{1 + 6\cdot 5} = \frac{1}{31}.$$

Якщо кут φ — це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

З цієї формули легко отримати умови *паралельності* і *перпендикулярності* двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Умова паралельності:

Прямі l_1 і l_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$tg\,\varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$,

або $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

Коли $k_1 = k_2$ і $b_1 = b_2$ (або $A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$) прямі співпадають.

Наприклад, прямі *3x+4y=-1* та *6x+8y=-2* співпадають.

Прямі *y=7x+6* і *3y=21x+18* співпадають.

Прямі *3x+4y=-1* та *6x+8y=-10* паралельні.

Прямі *y=7x+6* і *3y=21x+5* паралельні.

Умова перпендикулярності:

Прямі l_1 і l_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), коли $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1}$.

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо:

$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ – умова перпендикулярності двох прямих.

Нехай задано деяку точку M_0 (x_0, y_0) і пряму l: $Ax + By + C = 0$. Якщо M_0 лежить на прямій, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$. В іншому випадку ***відстань від точки*** $\boldsymbol{M_0}$ **(*x*₀, *y*₀)** ***до прямої*** $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Наприклад, відстань від точки *M(1, 2)* до прямої *3x+4y-1=0* $d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$

8.4. Тестові завдання

1.Рівняння прямої, що проходить через точку М(1, -2), перпендикулярно вектору (-3, 4):

A) $-3x + 4y + 11 = 0$,

B) $x - 2y + 5 = 0$,

C) $-3x - 4y - 5 = 0$

2. Рівняння прямої, що проходить через точку М(1, 2), паралельно вектору (-3, 4):

A) $-3x + 4y - 5 = 0$,

B) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{4}$,

C) $-3(x-1) + 4(y-2) = 0$.

3. Рівняння прямої, що проходить через точки A(1, 2) і B(-5, 3):

A) $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{1}$,

B) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{5}$,

C) $-6(x-1)=y-2$.

4. Прямі $x-3y-5=0$ і $2x-6y+5=0$:

A) перпендикулярні,

B) паралельні,

C) перетинаються.

5. Прямі $x-2y+5=0$ і $2x+y+5=0$:

A) перпендикулярні,

B) паралельні,

C) співпадають.

6. Відстань від точки M(-1,3) до прямої $-3x+4y-5=0$

дорівнює

A) 2,

B) 0,

C) $\frac{4}{5}$.

ЛЕКЦІЯ 9. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

План лекції

9.1. Поняття про лінії другого порядку.

9.2. Коло.

9.3. Еліпс, його канонічне рівняння; дослідження форми еліпса за його рівнянням.

9.4.Гіпербола, її канонічне рівняння; дослідження форми гіперболи за її рівнянням.

9.5. Парабола.

9.6. Тестові завдання.

9.1. Поняття про лінії другого порядку.

Лінії другого порядку можна виявити в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети Сонячної системи, по гіперболі або параболі — комети. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою; космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

Більшість типів ліній другого порядку відомі давно, їх вивчав ще Аполлоній. Він утворював основні типи ліній другого порядку як плоскі перерізи кругового конуса, тому в математичній літературі лінії другого порядку відомі ще як конічні перерізи.

В основній праці Аполлонія із Перги «Конічні перерізи» вперше розглянуто еліпс, параболу і гіперболу як довільні перерізи площиною довільного кругового конуса. Він дослідив властивості цих фігур, що мало великий вплив на подальший розвиток астрономії, механіки, оптики і сприяли подальшим дослідженням Р.Декарта і П.Ферма з формування аналітичної геометрії. Так, у другій книзі «Геометрії» Р.Декарта міститься спроба класифікації кривих ліній. Він вважав, що в геометрії слід вивчати лінії, які описані неперервним рухом або декількома такими послідовними рухами. Такі лінії Декарт називав геометричними. Цей принцип класифікації в подальшому заклав основу важливої теореми кінематики механізмів (за допомогою плоских шарнірних механізмів, у яких рух перших ланцюжків повністю визначає рух інших, можна описувати дуги довільних алгебраїчних кривих).

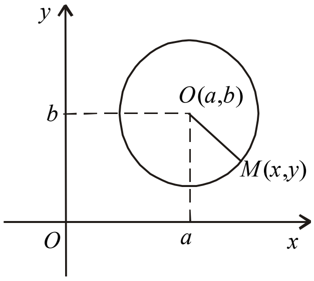
І.Ньютон також в праці «Перелік кривих третього порядку» (1704) створив основи дослідження властивостей кривих за властивостями рівнянь, що їх описують, ввів класифікацію рівнянь на основі показників степенів цих рівнянь. У нього порядок кривих був пов'язаний з можливою кількістю точок перетину кривої з прямою. І.Ньютон досліджував нові складні типи кривих. Він отримав, що при проектуванні з точки, яка є джерелом світла, на нескінчену площину тіні круга можна отримати всі конічні перерізи. Для кривих вищих порядків можна знайти простіші криві, які породжують їх за допомогою своєї тіні.

Рівняння довільної лінії другого порядку на площині в загальному випадку сучасною математичною мовою записується у вигляді:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

9.2.Коло

Відомі праці Архімеда «Книга про круги, що дотикаються», «Книга про будову круга, поділеного на сім рівних частин», «Книга лем».



Аполлоній із Перги ((262 — 190 до н. е., давньогрецький математик, один з представників александрійської школи) показав, що коло можна також задати як множину точок на площині, які мають однакове відношення відстаней до двох фокусів А і В. Про таке коло іноді кажуть, що воно задане двома точками.

Дамо означення кола.

Коло – це множина точок, розміщених на однаковій відстані від заданої точки *O* (центра). За означенням *OM* = *R*.

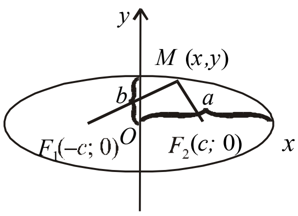
В координатній формі: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$. Піднесемо праву і ліву частину до квадрата і отримаємо *канонічне рівняння кола з центром в точці O (a,b) і радіусом R:*

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Наприклад, записати рівняння кола з центром в точці *O(-1,1)*, яке проходить через точку *M(2,3)*.

Знайдемо радіус кола: $\left|\overrightarrow{OM}\right|=R=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$. Підставимо в канонічне рівняння кола і отримаємо канонічне рівняння кола $(x+1)^2+(y-1)^2=13$.

9.3. Еліпс – це множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок (*фокусів*), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша відстані між фокусами).



Нехай F_1 $(-c, 0)$, F_2 $(c, 0)$ — фокуси еліпса, M $(x,\ y)$ — точка еліпса, тобто за означенням $|MF_1|+|MF_2|=2a,$ причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді, підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - канонічне рівняння еліпса (з центром в початку координат), де $b^2 = a^2 - c^2$, a – велика півось еліпса, b – мала півось.

Один з приладів для механічного креслення еліпса – еліптичний циркуль сконструював італійський вчений Леонардо да Вінчі наприкінці XV ст.

Числові характеристики еліпса:

Ексцентриситет еліпса — це відношення відстані між фокусами до довжини великої осі:

$\varepsilon=\frac{c}{a}\langle 1$; (за означенням $c < a$).

Ексцентриситет характеризує ступінь витягнутості еліпса. Для кола $a=b\Rightarrow\varepsilon=0$. Якщо ε наближається до одиниці, то еліпс витягується вздовж осі Ox (a – велика півось еліпса, b – мала півось).

Дві прямі, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{e}$, називаються *директрисами еліпса*. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса.

Наприклад, записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ox симетрично початку координат, якщо відомі півосі еліпса a =3, b =2. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис.

Підставимо a =3, b =2 в канонічне рівняння еліпса, маємо $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ – рівняння еліпса.

Ексцентриситет еліпса

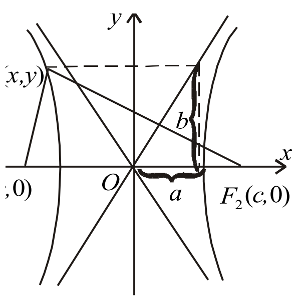
$c^2 = a^2 - b^2 = 9-4=5$.

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1,$

Рівняння директрис еліпса: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

9.4. Гіпербола **-** множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша відстані між фокусами).

Нехай точки F_1 ($-c$, 0) і F_2 (c, 0) — фокуси гіперболи, точка M (x, y) належить гіперболі. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a<c$. Підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо канонічне рівняння гіперболи (з центром в початку координат):



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2 = c^2 - a^2$, a – дійсна півось гіперболи, b – уявна півось.

Властивості гіперболи:

1.Не перетинає вісь Oy.

2. Точки перетину з віссю Ox: при y = 0; $x = \pm a$. Отже, це точки ($-a$, 0); (a, 0).

3. Симетрична відносно осей ox і oy.

Числові характеристики гіперболи:

Ексцентриситет гіперболи відстані між фокусами до довжини $\varepsilon=\frac{c}{a}\rangle 1$ (c>a).

$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує нахил віток гіперболи до осі Ox.

Асимптоти гіперболи – прямі, які наближаються до віток гіперболи, але ніколи їх не перетинають. У гіперболи їх дві.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот гіперболи.

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, рівняння яких $x=-\frac{a}{\varepsilon}$; $x=\frac{a}{\varepsilon}$. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять між вітками гіперболи.

Наприклад, записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *ox* симетрично початку координат, якщо відомо відстань між фокусами 2c =8 і мала півось b=2. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис, асимптот.

З умови 2c =8 мала півось b=2.

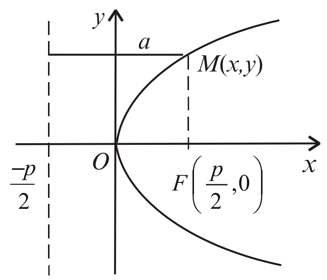
З рівняння $c^2 = a^2 + b^2$ знайдемо $a^2 = c^2 - b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *ox* симетрично початку координат $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Ексцентриситет гіперболи знайдемо за формулою $e = \frac{4}{\sqrt{12}} > 1$,

Рівняння директрис гіперболи: $x = \pm\frac{\sqrt{12}}{\frac{4}{\sqrt{12}}} = \pm 3$.

Асимптоти гіперболи:

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{12}}x.$$



9.5. Парабола - множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

Якщо це записати в координатній формі, то матимемо:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Після перетворень:

$y^2 = 2px$ – рівняння параболи з центром в початку координат, симетричної відносно осі *ox*.

Проводячи аналогічні міркування, можна отримати

$x^2 = 2py$ – рівняння параболи з центром в початку координат, симетричної відносно осі *oy*.

Директриса параболи описується рівнянням $x = -\frac{p}{2}$.

Наприклад, записати рівняння параболи, що проходить через точку *M (2,3)* симетрично осі *ox* з вершиною в початку координат.

В рівняння параболи підставимо координати даної точки *M (2,3)* і знайдемо параметр *p* :

$3^2 = 2p2$, або $p = \frac{9}{4}$. Підставимо в рівняння параболи:

$y^2 = 2\frac{9}{4}x = 4{,}5x$.

$y^2 = 4{,}5x$ – рівняння параболи.

Директриса цієї параболи $x = -\frac{4{,}5}{2} = -\frac{9}{4}$.

9.6. Тестові завдання

1. Траєкторія руху точки, яка при русі залишається на одній і тій же відстані *R* від заданої точки *O* є

А) коло,

В) пряма,

С) еліпс.

2. Еліпс – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

3. Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *ox* симетрично початку координат, півосі еліпса $a = 4$, $b = 3$:

А) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

В) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

С) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

4. *Гіпербола* – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

5. Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі *ox* симетрично початку координат, якщо велика півось $a=3$ і мала півось $b=2$.

А) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$,

C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6. *Парабола* – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

7. Рівняння параболи, що проходить через точку М (2, 4) симетрично осі ox з вершиною в початку координат

А) $y^2 = 8x$,

В) $y^2 = 4x$,

С) $x^2 = 8y$.

Розділ V. *Аналітична геометрія в просторі*

В праці французького математика А.К.Клеро «Дослідження ліній двоякої кривини» (1731) вперше систематично і широко використано метод координат в просторі і виведено рівняння площини.

ЛЕКЦІЯ 10. ПЛОЩИНА

План лекції

10.1.Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору. Загальне рівняння площини.

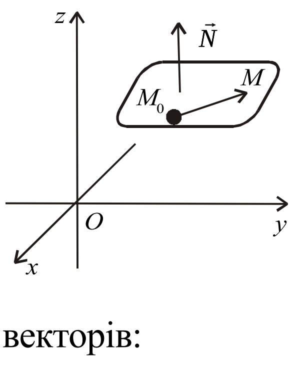
10.2. Рівняння площини, що проходить через три точки.

10.3. Кут між площинами.

10.4. Відстань від точки до площини.

10.5. Тестові завдання.

10.1. Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору



Нехай в декартовій системі координат задано своїми координатами вектор $\vec{N} = (A,\ B,\ C)$, який перпендикулярний до деякої площини α, $\vec{N} \perp \alpha$, і точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, яка належить площині. Знайдемо рівняння цієї площини.

Візьмемо точку $M\ (x,\ y,\ z)$ — довільну точку площини. Ця точка належить площині лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні. Умова перпендикулярності векторів:

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$ - векторне рівняння площини.

Запишемо це рівняння в координатній формі.

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Підставимо координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ в векторне рівняння площини і розпишемо скалярний добуток:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - *рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору.*

Розкривши дужки і позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, дістанемо *загальне рівняння площини:*

$Ax + By + Cz + D = 0.$

Розглянемо, як розміщена площина α відносно системи координат $Oxyz$.

1. $D = 0$. У цьому випадку рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Площина проходить через початок системи координат (точка O (0, 0, 0) задовольняє це рівняння).

2. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді рівняння має вигляд $Ax + By + D = 0$ - площина α паралельна осі Oz.

A=0, $C \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$ - площина α паралельна осі Ox.

$B = 0$, $C \neq 0$, $A \neq 0$, $D \neq 0$ - площина α паралельна осі Oy.

3. $D = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то площина $Ax + By = 0$ містить вісь Oz (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

$D = 0$, $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то площина $By + Cz = 0$ містить вісь Ox (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

$D = 0$, $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, то площина $Ax + Cz = 0$ містить вісь Oy (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

4. Коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю.

Нехай $A = B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді площина $Cz + D = 0$ паралельна відразу осям Ox і Oy, а це означає, що вона паралельна площині Oxy. Якщо додатково і $D = 0$, то $z = 0$ — рівняння координатної площини Oxy.

$B = C = 0$, $A \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді площина $Ax + D = 0$ паралельна відразу осям Oz і Oy, а це означає, що вона паралельна площині Oyz. Якщо додатково і $D = 0$, то $x = 0$ — рівняння координатної площини Oyz.

$A = C = 0$. $B \neq 0$, $D = 0$. Тоді площина $By + D = 0$ паралельна одночасно осям Oz і Ox, а це означає, що вона паралельна площині Oxz. Якщо додатково і $D = 0$, то $y = 0$ — рівняння координатної площини Oxz.

10.2. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$, яка належить цій площині і побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$,

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

Ці вектори компланарні (лежать в одній площині), отже умова компланарності: мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ - *рівняння площини, що проходить через три точки*.

Наприклад, знайти рівняння площини, що проходить через точки *$M_1(1;2;3)$, $M_2(4;-1;-2)$* і *$M_3(4;0;3)$*.

Підставимо в рівняння площини, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4-1 & -1-2 & -2-3 \\ 4-1 & 0-2 & 3-3 \end{vmatrix}=0.$$

або

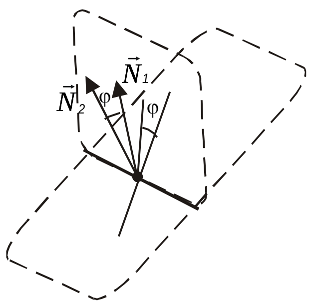
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Або

$10x+15y-3z-31=0$- ***рівняння площини, що проходить через три точки.***

10.3. Кут між площинами

Розглянемо дві площини α і β, які задано відповідно рівняннями



α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Двогранний кут φ між площинами α і β дорівнюватиме куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, перпендикулярними до цих площин, тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}.$$

Умова перпендикулярності двох площин (скалярний добуток векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ дорівнює нулю):

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

10.4. Відстань від точки до площини

За аналогією з формулою знаходження відстані від точки до прямої (див. Л.8, п.3) на площині можна записати формулу знаходження відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Наприклад, відстань від точки *M(0, 4, 5)* до площини *3x+4y-5z+1=0*

$$d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 4+5\cdot(-5)+1|}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}}=\frac{8}{\sqrt{50}}.$$

10.5. Тестові завдання

1. Рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(3;2;-1)$ і $M_3(4;0;3)$.

A) $$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

B) $$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

C) $$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

2. Вектор (3, 2, -1)

A) перпендикулярний до прямої $3x+2y-z-5=0$,

B) паралельний прямій $3x+2y-z-5=0$,

C) перпендикулярний до прямої $-3x-2y+z-5=0$,

3. Дві площини α: $x+2y+3z+4=0$, і β: $-2x+y+1=0$

A) паралельні,

B) перпендикулярні,

C) перетинаються.

4. Дві площини α: $x+2y+3z+4=0$, і β: $2x+8y+1=0$

А) паралельні,

В) перпендикулярні,

С) перетинаються.

5. Дві площини α: $x+2y+3z+4=0$, і β: $4x+8y+12z+1=0$

А) паралельні,

В) перпендикулярні,

С) перетинаються.

6. Відстань від точки М(-2, 1, 0) до площини β: $4x-y+2z+1=0$

А) $\frac{8}{\sqrt{21}}$,

В) $-\frac{8}{\sqrt{21}}$,

С) $\frac{10}{\sqrt{21}}$.

ЛЕКЦІЯ 11. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

План лекції

11.1. Загальне рівняння прямої в просторі.

11.2. Канонічне рівняння прямої в просторі.

11.3. Параметричне рівняння прямої в просторі.

11.4. Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.

11.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

11.6. Кут між прямою і площиною.

11.7. Тестові завдання.

11.1. Загальне рівняння прямої в просторі

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — не колінеарні. Ця система називається ***загальним рівнянням прямої.*** Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

11.2. Канонічне рівняння прямої в просторі

Нехай у системі координат $Oxyz$ задано пряму l і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s}$ заданий координатами $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$. Тоді довільна точка M $(x,\ y,\ z)$ належатиме прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні (відповідні координати цих векторів пропорційні):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ – канонічне рівняння прямої у просторі. (2)

11.3. Параметричне рівняння прямої в просторі

У останньому рівнянні прямої позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\,.$$

Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої. (3)

11.4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

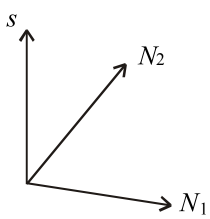
Нехай дві точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ (теж є напрямним вектором цієї прямої) у рівнянні (2), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Маючи кілька рівнянь однієї й тієї ж прямої, поміркуємо, як дістати зв'язок між ними. Розглянемо, як із загального рівняння (1) вивести канонічне рівняння (2). Для цього потрібно знайти точку, яка лежить на прямій, і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої.

Щоб знайти точку, яка лежить на прямій, треба розв'язати систему (1).

Щоб знайти напрямний вектор $\vec{s}$ прямої, пригадаємо геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні площини. Запишемо вектор $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ — перпендикулярний до першої площини, і $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ —перпендикулярний до другої.



Напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний до обох цих векторів (мал.). Таким чином, $\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$. Використовуючи запис векторного добутку через визначник, дістаємо:

$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)=(m,\ n,\ p).$$

Знайшовши точку, яка лежить на прямій, і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої, залишається підставити їх координати в рівняння (2).

11.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

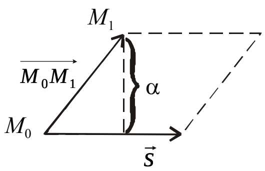
З останньої формули випливає умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.



Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рис. 2.23). Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

11.6. Кут між прямою і площиною

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax+By+Cz+D=0$ у просторі.

Якщо

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C},$$

то пряма перпендикулярна до площини.

Якщо

$$Am+Bn+Cp=0,$$

то пряма паралельна площині.

Нехай пряма паралельна площині, тобто $Am+Bn+Cp\neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до параметричного рівняння прямої

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt$$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0.$$

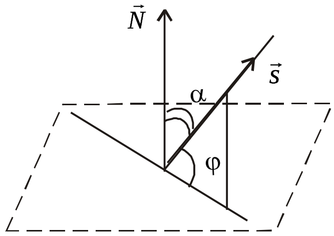
Звідси знайдемо значення параметра

$$t_0=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp},\quad Am+Bn+Cp\neq 0.$$

Підставимо знайдений параметр в параметричне рівняння прямої (3) і знайдемо координати точки перетину:

$$x=x_0+mt_0,\quad y=y_0+nt_0,\quad z=z_0+pt_0.$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.



Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину. Вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ — перпендикулярний до площини, а кут α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°: α + φ = 90°.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha<90^\circ$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=\sin\varphi$, а якщо $\alpha>90^\circ$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=-\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi=|\cos\alpha|$. Отже,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Тестові завдання

1. Рівняння прямої, що проходить через точку M(3,4,5) паралельно вектору (2, -1, 3)

A). $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-5}{3}$,

B). $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{5}$,

C) $\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+5}{3}$

2. Рівняння прямої, що проходить через дві точки A(1,2,3) і B (3,4,5)

A) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$, В) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{2}$,

С) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

3. Пряма $\frac{x-4}{6}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+9}{-3}$ і площина $-12x+-2y+6z+8=0$

А) перпендикулярні,

В) паралельні,

С) перетинаються під непрямим кутом.

4. Пряма $\frac{x-4}{6}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+9}{-3}$ і площина $-3x-6z+8=0$

А) перпендикулярні,

В) паралельні,

С) перетинаються під непрямим кутом.

5. Кут між прямою $\frac{x-4}{6}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+9}{-3}$ і площиною $-12x-2y+6z+7=0$ дорівнює

А) нулю;

В) перпендикулярний;

С) гострий.

.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

Курс вищої математики має загальноосвітнє значення і сприяє формуванню системи теоретичних знань і практичних навичок студентів з основ математичного апарату.

Мета навчальної дисципліни „Вища математика“ —допомогти студентам оволодіти необхідними математичними знаннями та навичками і вміти їх вільно застосовувати при вивченні загальної фізики, теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, опору матеріалів, гідравліки, теплотехніки та ін.; ознайомити студентів з сучасними математичними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичних методів і моделей, що сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Завдання вивчення навчальної дисципліни:

— дати необхідні теоретичні знання з вищої математики та навчити застосовувати їх на практиці;

— сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач; виробити вміння при розв’язуванні задач самостійно розробляти і використовувати необхідні методи і засоби, а також спеціальну літературу;

— навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне і алгоритмічне мислення, інтуїцію в питаннях застосування математики.

Вимоги до знань та вмінь

Знати: основні поняття вищої математики такі як матриці, визначники, вектори, границя та неперервність функції, похідна, диференціал, еластичність функції, інтеграли, розв’язки диференціальних рівнянь.

Вміти: вибирати математичні методи та моделі, методичні прийоми математичного аналізу для дослідження систем; застосовувати сучасні математичні методи для розв'язання практичних задач та набути навичок самостійного використання і вивчення математичної літератури.

Важливим елементом засвоєння математики й оволодіння її методами є самостійна робота студентів. Ця робота є неперервною складовою виконання поточних домашніх завдань і циклічної роботи з виконання індивідуальних модульних завдань. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, яка включає опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, розв'язування задач біля дошки, захист індивідуальних модульних робіт.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна "Вища математика" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр".

Система контролю знань та умови складання заліку та іспиту

Дисципліна „Вища математика“ вивчається протягом трьох семестрів. У зв'язку з переходом до кредитно-модульної системи навчання вся дисципліна розбита на 15 кредитів. Кожний кредит завершується написанням контрольної роботи.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою в кожному семестрі окремо.

Форми поточного контролю: оцінювання домашніх самостійних завдань (S_1); тестів та контрольних робіт виконаних студентами під час практичних занять (S_2).

Модульний контроль: модульні контрольні роботи.

В основу даної навчальної програми покладено:

— Програма навчальної дисципліни "Вища математика" (для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит" / Укл.: Якунін А.В. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 22 с.

— Программа „Высшая математика“ Для специальности № 2120 „Общетехнические дисциплины и труд“ //Программы педагогических институтов. Сб. № 18. – М.: Просвещение, 1979. – С.22 –28;

— Програми педагогічних інститутів: Вища математика. Для студентів спеціальності 03.02.00 „Праця“ / Уклад. І.П.Коваленко. – К., 1992

— та вимоги сучасних нормативних документів в галузі освіти:

— Закон України „Про освіту“;

— Закон України „Про загальну середню освіту“;

— Державна національна програма „Освіта“, Україна XXI століття.

СТРУКТУРА ПРОГРАМИ НАВЧАЛЬНОГОКУРСУ
„**ВИЩА МАТЕМАТИКА**“

1. ОПИС ПРЕДМЕТА КУРСУ

Курс: бакалавр (денна форма навчання)	Напрям, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчального курсу
Кількість кредитів: 15 ***Модулів:*** 20 Змістовних модулів: 20 Загальна кількість годин: 540 год. Тижневих годин: I семестр – 7 II семестр – 7 III семестр – 4	6.010104 Професійна освіта Бакалавр	Нормативний навчальний курс I –III семестри Лекції (теоретична підготовка): 50 + 54 + 34 Практичні: 68 + 72 + 34 год. Самостійна робота: 98 + 90 + 40 год. Індивідуальна робота: (індивідуальні модульні завдання) Вид контролю: I семестр – залік II семестр – залік III семестр – екзамен

2.АНОТАЦІЯ ДО НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ

Весь курс розділено на 20 змістових модулів:

Змістовий модуль I. *Множини. Комплексні числа*

Тема 1. *Множини. Множина дійсних чисел*. Множина і її елементи. Операції над множинами. Простіша логічна символіка. Множина *R* дійсних чисел і її властивості. Зображення дійсних чисел на прямій. Обмежені й необмежені числові множини. Абсолютна величина дійсного числа та її властивості. Прямокутна система координат.

Тема 2. *Комплексні числа. Дії над комплексними числами.* Поняття комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі. Модуль і аргумент комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

Змістовий модуль II. *Елементи лінійної алгебри*

Тема 3. *Матриця. Властивості матриці.* Поняття матриці. Основні типи матриць. Дії над матрицями.

Тема 4. *Визначники.* Визначники другого та третього порядків. Властивості. Способи їх обчислення. Визначник n- го порядку. Ранг матриці. Обернена матриця.

Тема 5. *Розв'язування системи рівнянь з n-невідомими.* Поняття системи лінійних рівнянь. Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним способом. Формули Крамера. Метод Гауса.

Змістовий модуль III. *Елементи векторної алгебри*

Тема 6. *Вектори і лінійні операції з ними*. Системи координат. Вектор. Операції над векторами (додавання, віднімання і множення на число. Колінеарні й компланарні вектори. Проекція вектора на вісь. Координати вектора і точки. Дії над векторами, що задані своїми координатами. Довжина вектора. Розклад вектора на складові в просторі. Поділ відрізка у заданому відношенні.

Тема 7. *Множення векторів.* Означення скалярного добутку векторів. Застосування скалярного добутку. Векторний добуток та його застосування. Мішаний добуток трьох векторів та його застосування. Кут між двома векторами.

Змістовий модуль IV. *Аналітична геометрія на площині.*

Тема 8. *Лінії першого порядку на площині.* Поняття лінії на площині. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Різні види рівняння прямої. Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

Тема 9. *Лінії другого порядку на площині.* Поняття про лінії другого порядку. Коло. Еліпс, його канонічне рівняння; дослідження форми еліпса за його рівнянням. Гіпербола, її канонічне рівняння; дослідження форми гіперболи за її рівнянням. Парабола, її канонічне рівняння; дослідження рівнянням параболи. Побудова точок еліпса, гіперболи і параболи за допомогою циркуля та лінійки.

Змістовий модуль V. ***Аналітична геометрія в просторі***

Тема 10. *Площина.* Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору. Рівняння площини, що проходить через три точки. Загальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

Тема 11. *Пряма в просторі.* Загальне рівняння прямої. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини. Кут між прямою і площиною.

Змістовий модуль VI. ***Границя та неперервність***

Тема 12. *Послідовності та їх границі.* Означення та приклади послідовності. Різні класи послідовностей. Поняття границі послідовності. Теореми про границі послідовностей. Число е. Натуральні логарифми.

Тема 13. *Функції та їх властивості.* Поняття функції. Числові функції та способи їх задання. Класифікація функцій за їх властивостями (монотонність, обмеженість, парність, непарність і періодичність функцій). Елементарні функції, їх властивості та графіки. Поняття про обернену та складену функцію.

Тема 14. *Границя функції та теореми про границі.* Поняття границі функції. Арифметичні властивості границь. Односторонні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Тема 15. *Неперервність функції.* Поняття неперервності функції в точці. Арифметичні операції над неперервними функціями. Неперервність складеної та оберненої функції /без доведення/. Одностороння неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація.

Тема 16. *Властивості функцій, неперервних на відрізку.* Поняття неперервності функції на відрізку. Основні властивості функцій, неперервних на відрізку (арифметичні дії над неперервними функціями).

Змістовий модуль VII. ***Похідна функції***

Тема 17. *Означення похідної та її обчислення.* Задачі, що приводять до поняття похідної (задача про швидкість рухомої точки, задача про лінійну густину неоднорідного стрижня, задача про дотичну до кривої). Означення похідної, її геометричний і механічний зміст Похідна складеної й оберненої функцій. Похідні основних елементарних функцій. Таблиця похідних. Похідна суми, добутку і частки. Правила диференціювання функцій.

Тема 18. *Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків.* Диференціал функції, його геометричний зміст і властивості Застосування диференціала до наближених обчислень. Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної. Диференціали вищих порядків. Диференціювання параметрично та неявно заданих функцій.

Змістовий модуль VIII. *Застосування похідної функції*

Тема 19. *Теореми про середнє значення.* Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коші.

Тема 20. *Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя.* Невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Інші види невизначеностей ($0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞).

Тема 21. *Формула Тейлора.* Теорема Тейлора. Розкладання деяких елементарних функцій за формулою Маклорена. Застосування формули Тейлора до наближених обчислень.

Тема 22. *Застосування похідної до дослідження властивостей функції.* Умови сталості та монотонності функції, екстремуми функцій. Опуклість кривої та точки перегину графіка функції. Поняття асимптот кривих. Схема дослідження та побудови графіка функції. Побудова графіків функцій. Найменше і найбільше значення функції на відрізку. Наближені методи розв'язування рівнянь.

Змістовий модуль IX. *Невизначений інтеграл*

Тема 23. *Первісна. Невизначений інтеграл.* Поняття первісної функції. Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.

Тема 24. *Основні методи інтегрування.* Безпосереднє інтегрування. Метод підстановки. Метод інтегрування частинами.

Тема 25. *Інтегрування раціональних функцій.* Інтегрування елементарних раціональних дробів. Розклад багаточленів на множники. Розкладання правильного дробу на суму елементарних раціональних дробів. Інтегрування раціональних функцій.

Тема 26. *Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій.* Універсальна тригонометрична підстановка. Частинні випадки знаходження інтегралів виду. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Інтегрування тригонометричних функцій виду $\sin^m x \cos^n x$. Інтеграли виду $\int tg^m x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$, $\int tg^m x \sec^n x\,dx$, $\int ctg^m x\, cosec^n x\,dx$. Тригонометричні підстановки. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

Змістовий модуль X. *Визначений інтеграл*

Тема 27. *Визначений інтеграл, його властивості та обчислення.* Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла (площа криволінійної трапеції, обчислення роботи змінної сили; обчислення маси неоднорідного лінійного стрижня). Означення визначеного інтеграла. Умови існування визначеного інтеграла. Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.

Тема 28. *Основні методи обчислення визначеного інтеграла.* Обчислення інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі (метод підстановки). Інтергування частинами. Наближені обчислення інтегралів.

Змістовий модуль XI. *Застосування визначеного інтеграла*

Тема 29. *Геометричне застосування визначеного інтеграла.* Площі плоских фігур у декартових і полярних координатах. Довжина дуги, диференціал дуги, поняття про кривизну плоскої кривої. Обчислення об'єму за площами паралельних перерізів. Об'єм тіла обертання. Площа поверхні обертання.

Тема 30. *Визначений інтеграл у задачах техніки.* Задачі на обчислення роботи змінної сили. Обчислення тиску рідини. Обчислення статичних моментів і координат центру мас. Теорема Гульдіна.

Змістовий модуль XII. *Невласний інтеграл*

Тема 31. *Невласний інтеграл.* Поняття невизначеного інтеграла з нескінченними межами. Ознаки збіжності невласних інтегралів. Невласний інтеграл від необмежених функцій.

Тема 32. *Застосування невласного інтеграла в техніці.*

Змістовий модуль XIII. *Диференціальне числення функцій багатьох змінних*

Тема 33. *Поняття функцій багатьох змінних, її границя і неперервність.* Поняття функцій багатьох змінних. Графік функції. Лінії рівня. Границя і неперервність функцій багатьох змінних.

Тема 34. *Частинні похідні, диференційованість та диференціал функції багатьох змінних.* Означення частинних похідних і знаходження їх. Геометричний зміст частинних похідних. Диференційованість функції. Диференціал функції. Поняття частинних похідних вищих порядків.

Тема 35. *Застосування похідних та диференціалу функції багатьох змінних.* Застосування диференціала до наближених обчислень. Рівняння дотичної і нормалі до поверхні. Екстремум функції декількох змінних - необхідні умови; достатні умови для випадку двох змінних.

Змістовий модуль XIV. *Поверхні другого порядку*

Тема 36. *Поверхні обертання другого порядку*: сфера, еліпсоїд, одно порожнинний параболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд. Рівняння циліндричної поверхні. Поняття про поверхні другого порядку.

Тема 37. Поверхні другого порядку: циліндр, конус і т.д. Дотична і нормаль до поверхні.

Змістовий модуль XV. *Звичайні диференціальні рівняння.*

Тема 38. *Поняття диференціального рівняння та його властивості.* Задачі, які приводять до поняття диференціального рівняння. Поняття диференціального рівняння. Загальні та частинні його розв'язки.

Тема 39. *Диференціальні рівняння першого порядку.* Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні функції й однорідні рівняння. Лінійні рівняння. Рівняння в повних диференціалах.

Змістовий модуль XVI. *Диференціальне рівняння другого порядку*

Тема 40. *Диференціальні рівняння другого порядку.* Диференціальні рівняння другого порядку. Загальні поняття.. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку. Диференціальні рівняння вищих порядків.

Тема 41. *Лінійні диференціальні рівняння.* Загальна теорія лінійних рівнянь другого порядку. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Тема 42. *Застосування диференціальних рівнянь до вивчення коливних процесів.* Рівняння гармонічних коливань. Вимушені коливання.

Змістовий модуль XVII. *Ряди*

Тема 43. *Числові ряди.* Поняття числового ряду, частинні суми ряду, сума і залишок ряду. Збіжність і розбіжність рядів. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами (порівняльні, Д'Аламбера, Коші). Абсолютна й умовна збіжність рядів. Теорема Лейбніца для знакозмінних рядів.

Тема 44. *Степеневі ряди.* Означення. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Властивості степеневих рідів. Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій у ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях. Степеневі ряди з комплексними членами.

Тема 45. *Функціональні ряди.* Збіжна та рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Змістовий модуль XVIII. *Інтегральне числення функцій багатьох змінних*

Тема 46. *Кратні інтеграли.* Задачі, що приводять до подвійного інтеграла. Означення подвійного інтеграла, його застосування, властивості. Обчислення подвійних інтегралів /геометричні міркування/. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Тема 47. *Застосування подвійних інтегралів.* Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійних інтегралів до задач фізики (обчислення статичних моментів, моментів інерції і координат центра маси пластинки).

Тема 48. *Потрійний інтеграл.* Означення потрійного інтеграла. Обчислення потрійного інтеграла. Застосування потрійних інтегралів.

Розділ XIX. *Криволінійні та поверхневі інтеграли*

Тема 49. *Криволінійні інтеграли.* Задачі, які приводять до поняття криволінійного інтеграла. Означення криволінійного інтеграла і його властивості. Криволінійний інтеграл першого роду. Криволінійний інтеграл другого роду. Зведення криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла. Формула Гріна та її застосування.

Тема 50. *Поверхневі інтеграли.* Задача про масу зігнутої пластини. Визначення поверхневого інтеграла першого роду.

Змістовий модуль XX. *Елементи теорії ймовірності*

Тема 51. *Елементи комбінаторики.* Поняття упорядкованої множини. Розміщення, перестановки, сполучення. Розміщення, перестановки, сполучення з повтореннями. Основні принципи комбінаторики.

Тема 52. *Випадкові події.* Стохастичний експеримент, простір елементарних подій. Випадкові події – підмножина простору елементарних подій. Відношення між подіями. Статичне та класичне означення ймовірності. Найпростіші властивості ймовірності.

Тема 53. *Властивості ймовірності.* Теорема про додавання ймовірностей для несумісних подій. Умовні ймовірності та теорема множення ймовірностей. Теорема додавання ймовірностей двох довільних подій. Формула повної ймовірності та формули Байєса.

Тема 54. *Випадкові величини.* Поняття дискретної випадкової величини та закону її розподілу. Математичне сподівання. Дисперсія. Поняття неперервної випадкової величини і функції її розподілу. Щільність розподілу неперервної випадкової величини. Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини. Два важливі розподіли випадкових величин(біномний розподіл, нормальний розподіл).

Тема 55. *Кореляційний зв'язок між випадковими величинами. Регресія.*

Встановлення залежності між випадковими величинами. Коваріація і коефіцієнт кореляції. Кореляційне поле, його побудова. Лінія регресії. Знаходження коефіцієнтів лінії регресії.

3. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

№	Змістовий модуль	Кількість годин			
		лекції	практ.	сам.роб.	всього
	І СЕМЕСТР				
	Змістовий модуль 1. *Множини. Комплексні числа*				
1.1	*Множини. Множина дійсних чисел.*	2		2	
1.2	*Комплексні числа. Дії над комплексними числами.*	2		4	
	Змістовий модуль 2. *Елементи лінійної алгебри*				
2.1	*Матриця. Властивості матриці.*	2		4	
2.2	*Визначники.*	2		4	
2.3	*Розв'язування системи n рівнянь з n-невідомими.*	2		4	
	Змістовий модуль 3. *Елементи векторної алгебри*				
3.1	*Вектори і лінійні операції з ними.*	2		4	
3.2	*Множення векторів.*	2		4	
	Змістовий модуль 4. *Аналітична геометрія на площині*				
4.1	*Лінії першого порядку на площині.*	2		4	

4.2	*Лінії другого порядку на площині.*	2		4	
Змістовий модуль 5. ***Аналітична геометрія в просторі***					
5.1	*Площина.*	2		4	
5.2	*Пряма в просторі.*	2		2	
Змістовий модуль 6 ***Границя та неперервність***					
6.1	*Послідовності та їх границі.*	3		4	
6.2	*Функції та їх властивості*	2		4	
6.3	*Границя функції та теореми про границі.*	2		4	
6.4	*Неперервність функції.*	2		4	
6.5	*Властивості функцій, неперервних на відрізку.*	3		4	
Змістовий модуль 7. ***Похідна функції***					
7.1	*Означення похідної та її обчислення.*	2		4	
7.2	*Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків.*	4		4	
Змістовий модуль 8. ***Застосування похідної функції***					
8.1	*Теореми про середнє значення.*	2		4	
8.2	*Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя*	2		4	
8.3	*Формула Тейлора*	2		4	
8.4	*Застосування похідної до дослідження властивостей функції.*	4		4	
	ВСЬОГО	**50**		**98**	
II СЕМЕСТР					
Змістовий модуль 9. ***Невизначений інтеграл***					
9.1	*Первісна. Невизначений інтеграл*	2		2	
9.2	*Основні методи інтегрування.*	4		4	
9.3	*Інтегрування раціональних функцій.*	4		2	
9.4	*Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій.*	4		2	
Змістовий модуль 10. ***Визначений інтеграл***					
10.1	*Визначений інтеграл, його властивості та обчислення.*	2		2	
10.2	*Основні методи обчислен-*	4		4	

	ня визначеного інтеграла				
Змістовий модуль 11. ***Застосування визначеного інтеграла***					
11.1	*Геометричне застосування визначеного інтеграла.*	2		2	
11.2	*Визначений інтеграл у задачах техніки.*	2		2	
Змістовий модуль 12. ***Невласний інтеграл***					
12.1	*Невласний інтеграл.*	2		2	
12.2	*Застосування невласного інтеграла в техніці*	2		4	
Змістовий модуль 13. ***Диференціальне числення функцій багатьох змінних***					
13.1	*Поняття функцій багатьох змінних, її границя і неперервність.*	2		4	
13.2	*Частинні похідні, диференційованість та диференціал функції багатьох змінних.*	4		4	
13.3	*Застосування похідних та диференціалу функції багатьох змінних.*	4		4	
Змістовий модуль 14. ***Поверхні другого порядку***					
14.1	*Поверхні обертання другого порядку*	2		4	
14.2	*Поверхні другого порядку: циліндр, конус і т.д.*	2		4	
Змістовий модуль 15. ***Звичайні диференціальні рівняння.***					
15.1	*Поняття диференціального рівняння та його властивості*	2		2	
15.2	*Диференціальні рівняння першого порядку.*	2		4	
Змістовий модуль 16 ***Диференціальні рівняння другого порядку***					
16.1	*Диференціальні рівняння другого порядку..*	2		4	
16.2	*Лінійні диференціальні рівняння.*	2		4	
16.3	*Застосування диференціальних рівнянь до вивчення коливних процесів.*	4		2	
	ВСЬОГО	**54**		**90**	
ІІІ СЕМЕСТР					
Змістовий модуль 17. ***Ряди***					
17.1	*Числові ряди.*	2		4	

17.2	*Степеневі ряди. вищих порядків.*	2		4	
17.3	*Функціональні ряди.*	2		2	
Змістовий модуль 18. ***Інтегральне числення функцій багатьох змінних***					
18.1	*Кратні інтеграли.*	2		2	
18.2	*Застосування подвійних інтегралів.*	2		2	
18.3	*Потрійний інтеграл.*	2		2	
Змістовий модуль 19. ***Криволінійні та поверхневі інтеграли***					
19.1	*Криволінійні інтеграли.*	4		2	
19.2	*Поверхневі інтеграли.*	2		2	
Змістовий модуль 20. ***Елементи теорії ймовірності***					
20.1	*Елементи комбінаторики.*	2		2	
20.2	*Випадкові події. Властивості ймовірності.*	2		2	
20.3	*Основні теореми теорії ймовірностей*	4		2	
20.3	*Випадкові величини. Характеристики випадкових величин*	4		2	
20.4	*Кореляційний зв'язок між випадковими величинами. Регресія.*	2		2	
	ВСЬОГО	**34**		**40**	

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михані Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. /Посібник. - К.,2002.-482 с.
2. Коваленко І.П. Вища математика. Підручник. – К., 2006.- 436 с.
3. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. – К., 2002. – 392 с.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних… - К,: Вища шк., 1986. – 348 с.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. - К.: Вища шк., 1984. – 274 с.

Додаткова:

1. Anthony M., Biggs N. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge University Press.
2. Андрощук А.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль VII. Ряди. Диференціальні рівняння. Навч.посібник. – К., 2005. – 150 с.
3. Антонечко В.Ф., Олешко Т. І., Паламарчук Ю.А. Вища математика.

Модуль І. Лінійна алгебра: Навч.посібник. – К., 2005. – 210 с.
4. Вища математика: Зб. задач. Ч. I, II /За ред. Гаврильченко К.І., Полушкін С.П., Овчіннікова . –К., 2004. – 420 с.
5. Ковтонюк І.Ю., Корнілович Є.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль VI. Інтегральне числення функції однієї змінної. Навч.посібник. – К., 2005. – 230 с.
6. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль IV.Диференціальне числення функції однієї змінної. Навч.посібник. – К., 2005. – 190 с.
7. Кремер Н. Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1998.
8. Грисенко М.В. Математика для економістів: Навч. посібник.- К.: ВПЦ « Київський університет», 2005.- 586с.
9. http://www.limm.mgimo.ru/LIMM/Lections/SemI.asp - Лекции по математике (линейная алгебра, математический анализ). А.В.Степанов.
10. http://www.ispu.ru/library/math/sem1/index.htm - Интерактивный компьютерный учебник: Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Первый семестр.
11. http://www.ispu.ru/library/math/sem2/index.htm - Интерактивный компьютерный учебник: Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Второй семестр.