УДК 531.3 (091): 001.89

Т.В. КІЛОЧИЦЬКА, кандидат історичних наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін та креслення, Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, вул. Гетьмана Полуботка 53, м. Чернігів, Україна,
ID: https://orcid.org/0000-0003-4471-0904,
e-mail: kilocht@gmail.com

ЕВОЛЮЦІЯ ЕРГОДИЧНОЇ ТЕОРІЇ

В статті розглянуто передісторію ергодичної теорії, шляхи розвитку комплексу понять та ідей, які привели до формування і розвитку цієї теорії. Проаналізовано відкриття з ергодичної теорії динамічних систем А.М. Колмогорова, його учнів та послідовників. Показано роль українських вчених М.М. Боголюбова та М.М. Крилова у формуванні цієї теорії. Розглянуто праці харківської школи з ергодичної теорії. Проаналізовано основні напрями досліджень та праці видатних вчених, пов'язані з розвитком ергодичної теорії. Продемонстровано, що ергодична теорія виникла при спробі отримати макроскопічний опис фізичних систем виходячи з мікроскопічного опису за допомогою рівнянь руху; застосування ергодичної теорії до обґрунтування статистичної фізики звелось до задачі встановлення метричної транзитивності; ергодичні теореми дають можливість розглядати граничні часові середні або часові середні на нескінченному проміжку часу, тобто має місце регулярність поведінки динамічних систем, яка пов'язана з усередненням.

Ключові слова: *ергодичність, ергодична теорія, ергодична гіпотеза, динамічна система, інваріантна міра.*

На початку XX ст. у різних галузях науки і техніки виникла необхідність створення методів, придатних для побудови вищих наближень; методів для якісного та кількісного вивчення процесів, що не є суто періодичними (так званих квазіперіодичних і майже періодичних), які дозволяють досліджувати нестаціонарні процеси, процеси становлення, перехідні процеси. Прикладні задачі 1930-х рр. сприяли формуванню теорії нелінійних коливань, становленню основ ергодичної теорії.

Зараз ергодична теорія розвивається як суто математична теорія в межах загальної теорії динамічних систем і вивчає перетворення з інваріантною мірою. Дослідження умов, за яких системи з невеликою кількістю степенів свободи, які мають статистичні властивості, є ергодичними, класифікація різних типів потоків у фазовому просторі та вивчення їх властивостей є тією частиною ергодичної теорії, що увійшла в математичну основу нелінійної динаміки.

Результати, отримані з ергодичної теорії, знайшли широке застосування в різних галузях науки і техніки, зокрема в динаміці рідин, теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, якісній теорії диференціальних рівнянь, теорії кодування, комплексній динаміці тощо.

Розглянемо шляхи розвитку комплексу понять та ідей, які привели до становлення та розвитку ергодичної теорії.

Французький вчений А.Пуанкаре у творах «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» (1881—1885) та «Нові методи небесної механіки» (1892—1899) провів дослідження характеристик на поверхні тора, отримавши перші топологічні теореми: про індекс циклу і кількість особливих точок, про співвідношення між кількістю особливих точок і родом поверхні.

У третьому томі праці «Нові методи небесної механіки», розділі «Стійкість за Пуасоном» А. Пуанкаре виклав ідею про вивчення поведінки динамічних систем «у цілому» та сформулював першу ергодичну теорему — теорему про повернення. Доведення цієї теореми було вдосконалено німецьким математиком К. Каратеодорі у 1919 р. Узагальнювали теорему Пуанкаре Х. Хопф, М.Г. Четаев у 1930—1933 рр.

У 1932 р. дослідження А. Пуанкаре доповнив французький математик Л. Данжуа стосовно відображення тора на себе. Він довів існування і розглянув властивості квазіперіодичних розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Результати Л. Данжуа у 1930-х рр. використав український вчений М.М. Боголюбов при дослідженні нормальних структур точних розв'язків рівнянь (топологічні методи). Він дійшов висновку, що майже періодичність є скоріше за все винятком, аніж правилом. При цьому виникла потреба вивчення різних середніх значень динамічних змінних, які розглядаються як функції часу [1].

В 1930-х рр. ідеї А. Пуанкаре поклали початок ергодичній теорії (Дж. Біркгоф; Дж. фон Нейман; М.М. Крилов, М.М. Боголюбов). Вона виникла при спробі отримати макроскопічний опис фізичних систем виходячи з мікроскопічного опису за допомогою рівнянь руху. Основоположники статистичної фізики Д.У. Гіббс і Л. Больцман розглядали фазовий простір гамільтонових систем, утворених сукупністю великого числа мікрочастинок. За законом збереження енергії, полишена сама на себе система повинна залишатися весь час на деякій гіперповерхні в цьому просторі, що задається умовою сталості енергії. Система, в якій фазові середні збігаються з часовими, називається ергодичною. З'ясування умов, за яких система є ергодичною, є основною задачею ергодичної теорії.

У 1871 р. Л.Больцман увів ергодичну гіпотезу — припущення про те, що є фактично тільки одна фазова траєкторія, яка проходить через всі точки ергодичної поверхні (в ізольованій системі фазова траєкторія пройде через кожну точку гіперповерхні постійної енергії). У 1911 р. П. Еренфест і Т. Еренфест запропонували замінити ергодичну гіпотезу Больцмана квазіергодичною гіпотезою, згідно з якою траєкторії проходять через окіл кожної точки ергодичної поверхні, утворюючи всюди густу множину.

В 1923 р. Е. Фермі в праці з ергодичної теорії намагався довести квазіергодичну гіпотезу [2]. В своєму доведенні він використовував теорему Брунса — Пуанкаре про неіснування у канонічної нормальної системи однозначних, аналітичних, незалежних від часу інтегралів, крім інтеграла енергії. Доведення Фермі не було суворим. Він вказував, що будь-яка нелінійність у системах з великою кількістю степенів свободи приводить до повного руйнування інтегралів руху і система стає неінтегровною. Ця гіпотеза Е. Фермі довгий час була єдиним механізмом, покладеним в основу статистичної механіки.

В 1931 р. Дж. Біркгоф довів, що система є ергодичною тоді і тільки тоді, коли її фазовий простір не можна розбити на суму двох інваріантних (які складаються з цілих траєкторій) множин, кожна з яких має додатний об’єм.

У 1931 р. учень Дж. Біркгофа Б. Купман розглянув оператор заміни координат у просторі L2 квадратично інтегрованих комплексних функцій, який відповідає перетворенню, що зберігає міру, і встановив, що група автоморфизмів у цьому просторі породжує групу унітарних операторів. Це дозволило застосовувати теорію самоспряжених та унітарних операторів до вивчення динамічних систем.

У 1932 р. Дж. Біркгоф у загальному вигляді довів існування часових середніх уздовж окремої траєкторії.

Дослідження Біркгофа узагальнені Дж. Нейманом, який займався вивченням математичних моделей квантової та класичної механіки (довів статистичну ергодичну теорему), А.Я. Хинчиним (відкинув зайві припущення, надав їй сучасного вигляду), М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим. При доведенні ергодичних теорем Дж. Біркгоф та Дж. Нейман припустили наявність у динамічній системі інваріантної міри. Для гамільтонових систем такою мірою, згідно з теоремою Ліувілля, є звичайний об’єм фазового простору. Чи існує інваріантна міра у довільної динамічної системи, тоді було невідомо.

Загальна теорія міри в нелінійній механіці зумовила подальший розвиток теорії динамічних систем і дозволила пояснити властивості стаціонарних рухів, такі як рекурентність, тобто сильну стійкість за Пуасоном, спектральність тощо. Розвиток ергодичної теорії відбувався паралельно з розвитком теорії операторних алгебр.

Результати досліджень з ергодичної теорії було використано в монографії М.М. Крилова і М.М. Боголюбова «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934) при створенні методу інтегральних багатовидів у нелінійній механіці. У цій монографії М.М. Боголюбов і М.М. Крилов ввели поняття інтегрального багатовиду [3, с. 323—337]. В теорії інтегральних багатовидів розглядаються не індивідуальні розв'язки, а інтегральні багато види — не криві, а гіперповерхні, досліджуються деякі функціональні рівняння, що визначають функції, які характеризують багатовиди.

У вересні 1935 р. на I Міжнародній топологічній конференції у Москві М.М. Боголюбов виступив з доповіддю «Загальна теорія міри та її застосування до вивчення динамічних систем нелінійної механіки», в якій використав важливі результати з теорії міри та функціонального аналізу. Професор Вейль (Франція) свою доповідь «Про характеристики на торі і замкнені поверхні» присвятив застосуванню теорем М.М. Крилова та М.М. Боголюбова в цій галузі.

У 1937 р. М.М. Крилов та М.М. Боголюбов довели існування інваріантних мір для широкого класу динамічних систем. Цей важливий результат відомий як теорема Крилова — Боголюбова: в компактному фазовому просторі динамічної системи існує інваріантна міра [4]. В праці «Інваріантні і транзитивні міри в нелінійній механіці» (1936) М.М. Крилов та М.М. Боголюбов ввели важливе поняття ергодичної множини і довели, що в компактному просторі існує множина, яка може бути розбита на ергодичні множини, які є інваріантними при перетвореннях групи, і на кожному з них можна визначити нормовану, інваріантну і транзитивну міри. Вони довели ряд теорем розбиття інваріантної міри на міри, локалізовані в ергодичних множинах.

Результати цих досліджень викладено у їхній праці «Загальна теорія міри в нелінійній механіці» (1937) [5]. В ній М.М. Крилов і М.М. Боголюбов дали суворе обґрунтування методу усереднення виходячи з ергодичної теорії, у випадку, коли праві частини рівнянь, які усереднюють, є квазіперіодичними функціями часу. Ця праця є першим визначним результатом з функціонального аналізу в Україні.

М.М. Боголюбов та М.М. Крилов у праці «Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем» (1939) виклали стохастичні теореми для марковських ланцюгів з довільною кількістю станів і мемуар про рівняння Фоккера — Планка. В цьому мемуарі ці рівняння були отримані як рівняння першого наближення виходячи зі схеми теорії збурень, де не використана гіпотеза про існування ймовірностей переходів. Ці отримані наближені рівняння можна використовувати і в класичній, і в квантовій механіці.

В одній з праць 1939 р. М.М. Боголюбов вивчив поведінку механічної системи під дією термостата, тобто системи з такої великої кількості частинок, які довільно рухаються, що загальні закономірності поведінки цієї системи можна виразити лише за допомогою поняття температури. На прикладі цієї задачі можна було переконатися в тому, що опис властивостей системи визначається вибором шкали часу, в залежності від якої поведінка системи може бути або детермінованою, або повністю випадковою. Таким чином вперше було введено поняття про ієрархію часу, що стало одним із основних необоротних процесів у сучасній статистичній фізиці і задало напрямок її розвитку.

Дослідження умов, за яких такі системи з невеликою кількістю степенів свободи, які мають статистичні властивості, є ергодичними, класифікація різних типів потоків у фазовому просторі та вивчення їх властивостей є тією частиною ергодичної теорії, що увійшла в математичну основу теорії хаосу.

Ще у 1938 р. А.М. Колмогоров навів простіше доведення теореми Біркгофа [6]. Під час проведення спецкурсу він довів теорему стосовно зсувів Бернуллі, в якій досліджував квазірегулярні системи (пізніше почали називатися К-системами або системами Колмогорова). В працях А.М. Колмогорова 1958—1959 рр. з ергодичної теорії введено два фундаментальних поняття — К-системи та динамічної ентропії [7; 8]. За допомогою нового метричного інваріанта динамічної системи — ентропії він довів існування неізоморфних автоморфізмів простору Лебега з парно-кратним лебеговським спектром. Цей числовий інваріант автоморфізмів легко описати і обчислити. Виникло питання поширення поняття ентропії на весь клас динамічних систем. Одним із важливих наслідків відкриття А.М. Колмогорова став розподіл усіх динамічних систем на системи з додатною і нульовою ентропією.

У визначення ентропії вагомий внесок зробив Я.Г. Синай [9]. Він одним із перших знайшов можливість обчислювати ентропію для широкого класу динамічних систем. А.М. Колмогоров запропонував йому обчислити ентропію автоморфізму тора. На той час вважалось, що ентропія може бути додатною лише у динамічних систем ймовірнісного походження, а у класичних динамічних систем вона повинна дорівнювати нулю. Я.Г. Синай намагався довести, що ентропія автоморфізму тора дорівнює нулю, однак у нього це не виходило. Він показав свої дослідження Колмогорову, який одразу сказав, що ентропія повинна бути додатною. Після цього Я.Г. Синай отримав правильний результат. Ентропія Колмогорова — Синая (КС-ентропія) є мірою експоненціального зближення або розбиття траєкторій динамічної системи. К-системи описують динамічні системи з найслабшими властивостями регулярності та мають додатну ентропію. Ентропія пов’язана з іншою кількісною характеристикою нестійкості траєкторій — з показниками Ляпунова (Я.Б. Песин та ін., 1975). В основі їх використання — результати В.І. Оселедця (1968) та В.М. Милліонщикова (1969) (мультиплікативна ергодична теорема).

Подальші відкриття з ергодичної теорії динамічних систем під впливом досліджень А.М. Колмогорова були зроблені його учнями та послідовниками Д.В. Аносовим, І.В. Гирсановим, В.А. Рохліним, Я.Г. Синаем, С. Смейлом. В.А. Рохлін ознайомився з працями Колмогорова з ентропії та запропонував розв’язати задачі Л.М. Абрамову, А.М. Вершику.

З жовтня 1958 по травень 1959 р. на механіко-математичному факультеті Московського державного університету (МДУ) працював семінар з метричної теорії динамічних систем під керівництвом В.А. Рохліна. Після переїзду Рохліна семінар працював під керівництвом учнів Колмогорова В.М. Алексеева та Я.Г. Синая (60-ті рр.). Теорію міри на той час добре опанували А.М. Колмогоров та В.А. Рохлін.

В.А. Рохлін умовив Колмогорова відвідувати щотижневий семінар МДУ з ергодичної теорії. У 1959 р. А.М. Колмогоров на семінарі з метричної теорії динамічних систем висунув програму дослідження з теорії динамічних систем (1954) та її застосувань до гідродинамічної нестійкості [10]. На семінар приїздили з доповідями В.І. Оселедець, Г.А. Маргуліс, А.Б. Каток, А.М. Степін, А.Г. Кушніренко, Б.М. Гуревич, В.М. Алексеев, Д.В. Аносов, Д.К. Фадеев, Ю.В. Линник. Крім того, у 1958 р. А.М. Вершик з аспірантами (В.М. Судаков, Б.М. Макаров, А.М. Каган) організували домашній семінар з теорії міри, на якому вивчали лекції американського математика Пол Ричарда Халмоша з ергодичної теорії. На цьому семінарі був присутній і Л.М. Абрамов [11]. У жовтні 1968 р. В.А. Рохлін виступив з останньою доповіддю на семінарі, почав займатися топологією та алгебраїчною геометрією.

Крім ергодичного руху є більш складний вид руху — перемішування (Дж. Гібс, 1902, Е. Хопф, 1937). Властивість перемішування пов'язана з нестійкістю фазових траєкторій системи стосовно малих збурень початкових умов. З наявності перемішування слідує ергодичність, а не навпаки. Поняття перемішування було введено Дж.У. Гібсом при аналізі основ статистичної механіки.

М.С. Крилов займався дослідженнями перемішування при зіткненні пружних шарів. Він вказав на аналогію між розбіжністю з експоненціальною швидкістю геодезичних ліній (траєкторій вільного руху матеріальної точки), що виходять з однієї точки, та експоненціальною нестійкістю рухів шарів з пружними зіткненнями. Ці дослідження продовжив Я.Г. Синай у задачі про геодезичні потоки в просторах від'ємної кривини. У 1963 р. він довів ергодичність системи твердих шарів з пружними відображеннями [12]. У 1966 р. Синай опублікував працю «Класичні динамічні системи з парнократним лебеговським спектром» [13]. У 1970 р. Синай публікує перше доведення теореми розсіюючих більярдів [14]. У цій статті він провів ґрунтовний аналіз впливу малих регулярних компонент шарів і показав, що вони зустрічаються досить рідко. За допомогою основної теореми ергодичні властивості більярдів досліджуються значно простіше. Синай довів, що розсіюючий більярд є K-системою і навіть системою Бернуллі, а отже має властивості ергодичності і перемішування, експоненціальну нестійкість траєкторій. Вже при $N>2$ більярдний шар з часом має хаотичний рух. Було доведено, що в простій механічній системі з декількома степенями свободи має місце хаотична динаміка без будь-яких зовнішніх впливів, а тільки завдяки властивості самої системи — нестійкості руху. Цей результат є одним із основних при побудові теорії хаосу. Дослідженнями з ергодичної теорії займався американський математик Д. Орнстейн. Він довів, що ентропія є єдиним інваріантом у класі зсувів Бернуллі (Я. Синай довів слабкий ізоморфізм бернуллівських систем). Д. Орнстейн знайшов інваріантний опис автоморфізмів, ізоморфних зсувам Бернуллі, з використанням ентропії та деяких метрик, в термінах яких визначалась властивість перемішування відповідного випадкового процесу [15].

Кількісна характеристика нестійкості траєкторій відома як характеристичний показник Ляпунова — величина, введена О.М. Ляпуновим (1857—1918). У 1968 р. радянський математик В.І. Оселедець опублікував найважливіший результат — так звану мультиплікативну ергодичну теорему, яка дозволяє говорити про показники Ляпунова, визначені не для однієї фазової траєкторії, а для безлічі траєкторій.

Крім динамічної ентропії, відомої як ентропія Колмогорова — Синая (1959), у 1965 р. трьома американськими математиками введено поняття топологічної ентропії [16]. Загальні властивості цих двох ентропій досліджував Рієчан. У 1974 р. він увів загальну схему, частинним випадком якої є ці ентропії [17]. В 70-х рр. існували поняття ентропії (ентропія автоморфізмів фон неймановських алгебр), які були аналогами ентропії Колмогорова — Синая [18].

У роботі О. Браттелі 1972 р., присвяченій класифікації операторних алгебр, вперше з'явились нескінченні графи (пізніше їх було названо діаграмами Браттелі) [19]. У 80-х роках XX ст. А. Вершик увів перетворення на цих графах, яке пізніше було названо перетворенням Вершика [20]. Будь-який мінімальний і навіть аперіодичний гомеоморфізм канторівської множини можна реалізувати як перетворення Вершика на діаграмі Браттелі. Для мінімальних систем цей результат було отримано у роботі Р. Хермана, Є. Патнама та К. Скау в 1992 р. [21], тоді як для немінімальних аперіодичних систем відповідну реалізацію було отримано лише у 2006 р. у роботі К. Мединця [22].

Реалізація гомеоморфізму як перетворення Вершика на діаграмі Браттелі дає змогу ефективно розраховувати значення мір на різноманітних множинах, що відіграє основну роль при класифікації мір. Проблема класифікації борелівських мір на топологічних просторах сама по собі є важливою та актуальною. Вперше вона міститься в статтях відомих математиків Дж. Окстобі та С. Улама у 1941 р. [23]. Їх результати були поширені на випадки різних зв'язних багатовидів [24].

З 1979 р. в численних роботах розглядалася проблема класифікації мір на канторівських множинах, але вивчалися лише ймовірнісні міри, до того ж переважна більшість результатів стосувалася випадку мір Бернуллі [25—27]. Для класифікації канторівських динамічних систем основним є класифікація відповідних інваріантних мір з точністю до гомеоморфізму (топологічної еквівалентності). У 1995 р. Т. Жордано, Є. Патнама і К. Скау, використавши гомеоморфність інваріантних мір, отримали критерій орбітальної еквівалентності для мінімальних динамічних систем [28]. Вивчено випадок мір, інваріантних для підстановочних динамічних систем. Ф. Дюран, Б. Хост та К. Скау довели зв'язок для мінімальних систем [29], а для немінімальних аперіодичних систем зв'язок доведено у роботі С. Безуглого, Я. Квятковського та К. Мединця [30]. У 1999 р. І. Ейкін розпочав систематичне вивчення гомеоморфних мір на канторівських множинах [31].

У Фізико-технічному інституті низьких температур НАН України активізувалася харківська математична школа, в якій дослідження динамічних систем і споріднених із ними ергодичних систем велися не тільки традиційними методами, а і з використанням теорії операторних алгебр, зокрема алгебр фон Неймана.

Харківська школа відома розробкою топологічних і алгебраїчних методів в ергодичній теорії. Ергодичною теорією займаються С.І. Безуглий, О.І. Даниленко. Ними розроблено методи траєкторної теорії та абстрактні алгоритми «розрізання та стиковки» для розв'язання актуальних проблем ергодичної теорії. Розроблено нові методи дослідження якісних властивостей динамічних систем на нескінченновимірних просторах, які застосовано для вивчення нелінійних (детермінованих та стохастичних) рівнянь з частинними похідними та різницевих рівнянь з неперервним часом. С.І. Безуглий та О.І. Даниленко зробили класифікацію дії груп автоморфізмів на просторі з мірою, застосували ідею класичної ергодичної теорії для вивчення перетворень на борелівських та канторівських просторах.

У 1985 р. А. Конн та Е.Дж. Вудс при дослідженні проблеми класифікації факторів увели поняття апроксимативної транзитивності. Апроксимативно скінченні фактори розпадаються у такий нескінченний добуток, якщо і тільки якщо його потік задовольняє умові, яку вони назвали апроксимативною транзитивністю. Розв'язано проблему зовнішнього спряження для дій зліченних груп автоморфізмів вимірного відношення еквівалентності, яка сформульована видатним математиком А. Коном. Ця проблема споріднена проблемі ізоморфізму дій груп і у деяких випадках вирішується за допомогою тотожності числових інваріантів. Визначено та вивчено відношення еквівалентності на множині всіх дій аменабельних груп на просторі з мірою, яке є більш тонким, ніж загальновідома орбітальна еквівалентність. Це дозволило запропонувати детальнішу класифікацію груп автоморфізмів (С.І. Безуглий). Вперше розглянуто класифікацію нескінченних борелівських мір на канторівських просторах відносно гомеоморфізмів, уведено і досліджено поняття нескінченної недефектної міри, для класу нескінченних недефектних мір знайдено необхідні й достатні умови для гомеоморфності, узагальнено класифікацію мір на випадок некомпактного локально компактного канторівського простору, проведено класифікацію як скінченних, так і нескінченних мір на некомпактних канторівських множинах. Докладно вивчено клас орбітальної еквівалентності для підстановочних динамічних систем. Зокрема, побудовано нескінченний клас орбітальної еквівалентності серед класу мінімальних підстановочних динамічних систем. Для побудови такого класу використано апарат діаграм Браттелі, а також методи символічної динаміки. Зокрема, знайдено оцінки для функції складності символьних послідовностей, що виникають у підстановочних динамічних системах [32; 33; 34].

Разом із польськими та українськими вченими досліджено структуру інваріантних мір на просторі шляхів довільних діаграм Браттелі. Зокрема, знайдено опис піддіаграм, які є носіями скінченних ергодичних інваріантних мір, наведено деякі оцінки на кількість ергодичних інваріантних мір для широкого класу діаграм Браттелі. Ергодичні міри є крайніми точками у симплексі інваріантних мір, їх дослідження є вирішальним для вивчення довільних інваріантних мір. Ці результати мають важливе значення для класифікації мір, інваріантних відносно аперіодичних гомеоморфізмів канторівських просторів [35].

Отже, розширення напрямів досліджень, дослідження динамічних систем, які діють на просторах різноманітної природи, є сучасною тенденцією. В харківській школі було започатковано дослідження аперіодичних систем на борелівських та канторівських просторах. С.І. Безуглий визначив топології на групі всіх перетворень цих просторів та розв'язав проблеми щодо щільності, типовості та замкнутості підгруп або деяких класів перетворень, використовуючи ідеї класичної ергодичної теорії. В докторській дисертації С.І. Безуглого знайдено повний опис структури коциклів гіперфінітної групи автоморфізмів простору з мірою, які приймають значення або в локально компактній абелевій групі, або в лічильній групі; визначено і повністю вивчено поняття слабкої еквівалентності гіперфінітних груп автоморфізмів; доведено, що асоційовані з ними дії утворюють повну систему інваріантів для слабкої еквівалентності; розв'язано задачу продовження та класифікації ергодичних дій локально компактних абелевих груп на групові розширення, які отримані за допомогою аменабельних груп.

Для розв'язання низки відомих проблем ергодичної теорії розроблено абстрактну апроксимативну схему групових дій, що зберігають міру. Ця схема залежить від зліченної множини параметрів, контроль над якими дозволив змоделювати низку нетривіальних властивостей відповідних групових дій. Серед них є властивості як асимптотичного характеру (ранг, перемішування, ентропія тощо), так і неасимптотичного (централізатор, самоприєднання, спектральні інваріанти і т. п.). Важливим застосуванням цього підходу стала побудова у явному вигляді ергодичних перетворень з однорідним спектром довільної кратності, що продовжило дослідження Рохліна. Ці результати сприяли подальшим дослідженням загальної проблеми реалізації спектральних кратностей, яка в цілому поки що залишається відкритою (О.І. Даниленко). У 2010 р. О.І. Даниленко (разом із С.І. Безуглим, С.Ф. Колядою, В.І. Коробовим, Ю.Л. Майстренком, О.Ю. Романенком, О.Ю. Теплінським, В.В. Федоренком, І.Д. Чуєшовим, О.М. Шарковським) нагороджено Державною премією України в галузі науки і техніки за цикл наукових праць «Теорія динамічних систем: сучасні методи та їх застосування».

Отже, ергодична теорія виникла при спробі отримати макроскопічний опис фізичних систем виходячи з мікроскопічного опису за допомогою рівнянь руху. Застосування ергодичної теорії до обґрунтування статистичної фізики звелось до задачі встановлення метричної транзитивності. Ергодичні теореми дають можливість розглядати граничні часові середні або часові середні на нескінченному проміжку часу. Тобто має місце регулярність поведінки динамічних систем, яка пов'язана з усередненням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bogoliouboff N. Sur l'approximation trigonometriques des fonctions dans l'intervalle infini. *Известия АН СССР*. 1931. № 1/2. С. 23—54.
2. Fermi E. Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist. *Phys. Zs.* 1923. B. 24. S. 261—265.
3. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. К.: Изд-во ВУАН, 1934. 108 с.
4. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie génèrale de la mesure dans son applications a l'étude des systéme dynamiques de la mécanique non linéaire. *Ann. Math*. 1937. Vol. 38. P. 65—113.
5. Крилов М.М., Боголюбов М.М. Загальна теорія міри в нелінійній механіці. *Збірник праць з нелінійної механіки*. К.: Вид-во АН УРСР, 1937. С. 55—112.
6. Колмогоров А.Н. Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина. *Успехи математических наук*. 1938. № 5. С. 52—56.
7. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега. *ДАН СССР*. 1958. Т. 119. Вып. 5. С. 861—864.
8. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов. *ДАН СССР*. 1959. Т. 124. Вып. 4. С. 754—755.
9. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы. *ДАН СССР*. 1959. Т. 124. Вып. 4. С. 768—771.
10. Абрамов Л.М., Синай Я.Г. О семинаре по метрической теории динамических систем в МГУ под руководством В.А. Рохлина. *Успехи математических наук*. 1959. Т. 14. Вып. 6(90). С. 223—225.
11. Рохлин В.А. Избранные работы. Воспоминания о Рохлине. Материалы к биографии. МЦНМО, 2010. 572 с.
12. Синай Я.Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики. *ДАН СССР*. 1963. Т. 153. № 6. С. 1261—1264.
13. Синай Я.Г. Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II. *Известия АН СССР. Серия математическая*. 1966. Т. 30. № 1. С. 1568.
14. Синай Я.Г. Динамические системы с упругими отражениями. *Успехи математических наук*. 1970. Т. 25. Вып. 4. С. 141—192.
15. Орнстейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978. 168 с.
16. Adler R.L., Konheim A.G., Andrew Mc. Topological entropy. Mc. Andrew — Trans. AMS., 1965. 114-309-319.
17. Riecan B. Abstract entropy. *Acta F.R.N. Univ. Comen. — Mat*. 1974. P. 55—67.
18. Отокар Грошек. Энтропия на алгебраических структурах. *Mathematica Slovaca*. 1979. Vol. 29. No 4. P. 411—424.

19. Bratteli O. Inductive limits of finite-dimensional C*-algebras. *Trans. Am. Math. Soc*. 1972. № 171. P. 195—234.
20. Вершик А. М. Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1982. Т. 115. С. 72—82.
21. Herman R.H., Putnam I., Skau C. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups, and topological dynamics. *Int. J. Math*. 1992. Vol. 3. P. 827—864.
22. Medynets K. Cantor aperiodic systems and Bratteli diagrams. *Comptes Rendus Mathematique*. 2006. Vol. 342. Issue 1. P. 43—46.
23. Oxtoby J.C., Ulam S.M. Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. Math*. (2). 1941. Vol. 42. P. 874—920.
24. Alpern S., Prasad V.S. Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 240 p.
25. Navarro-Bermudez F.J. Topologically equivalent measures in the Cantor space. *Proc. Am. Math. Soc*. 1979. Vol. **77**. P. 229—236.
26. Akin E., Dougherty R., Mauldin R.D., Yingst A. Which Bernoulli measures are good measures? *Colloq. Math*. 2008. Vol. 110. P. 243—291.
27. Austin T.D. A pair of non-homeomorphic product measures on the Cantor set. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 2007. Vol. 142. P. 103—110.
28. Giordano T., Putnam I., Skau C. Topological orbit equivalence and C*-crossed products. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1995. Vol. 469, P. 51—112.
29. Durand F., Host B., Skau C. Substitutional dynamical systems. Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1999. Vol. 19. P. 953—993.
30. Bezuglyi S., Kwiatkowski J., Medynets K. Aperiodic substitution systems and their Bratteli diagrams. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2009. Vol. 29. No 1. P. 37—72.
31. Akin E. Good Measures on Cantor space. *Transactions of the American Mathematical Society*. 2005. Vol. 357. No 7. P. 2681—2722.
32. Karpel O. Infinite measures on Cantor spaces. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012. Vol. 18(4), P. 703—720.
33. Karpel O. Good measures on locally compact Cantor sets. *J. Math. Phys. Anal. Geom*. 2012. Vol. 8, No 3. P. 260—279.
34. Bezuglyi S., Karpel O. Orbit Equivalent Substitution Dynamical Systems and Complexity. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2014. Vol. 142. P. 4155—4169.
35. Bezuglyi S., Karpel O., Kwiatkowski J. Subdiagrams of Bratteli diagrams supporting finite invariant measures. *J. Math. Phys. Anal. Geom*. 2015. Vol. 11. No 1. P. 3—17.

Одержано 20.05.2019

REFERENCES

1. Bogoliouboff, N. (1931). Sur l'approximation trigonometriques des fonctions dans l'intervalle infini. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1(2), 23—54 [in Russian].
2. Fermi, E. (1923). Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist. *Phys. Zs.*, 24, 261—265.
3. Krylov, N.M. & Bogolyubov, N.N. (1934). *Applications of methods of non-linear mechanics to the theory of stationary vibrations*. Kyiv: All-Ukrainian Academy of Sciences, 108 [in Russian].
4. Kryloff, N. & Bogoliouboff, N. (1937). La théorie génèrale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non linéaire. *Ann. Math*., 38, 65—113.
5. Krylov, M.M., Boholiubov, M.M. (1937). The general theory of measure in non-linear mechanics. *Collection of works on non-linear mechanics*. Kyiv: the USSR Academy of Sciences, 55—112 [in Ukrainian].

6. Kolmogorov, A.N. (1938). A simplified proof of the ergodic Birgof — Klinchin theorem. *Advances of mathematical sciences*, 5, 52—56 [in Russian].
7. Kolmogorov, A.N. (1958). A new metric invariant of transit dynamic systems and automorphisms of the Lebed space. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 119(5), 861—864 [in Russian].
8. Kolmogorov, A.N. (1959). Entropy per time unit: a metric invariant of automorphisms. *Reports of the USSR Academy of Sciences,* 124(4), 754—755 [in Russian].
9. Sinay, Ya. G. (1959). The notion of the dynamic system's entropy. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 124/4, 768—771 [in Russian].
10. Abramov, L.M. & Sinay, Ya.G. (1959). A seminar devoted to the metric theory of dynamic system of Moscow State University, supervised by V.A. Rokhlin. *Advances of mathematical sciences,* 14/6(90), 223—225 [in Russian].
11. Rokhlin, V.A. (2010). *Selected works. Supplements to the biography.* MTsNMO [in Russian].
12. Sinay, Ya.G. (1963). Justification of the ergodic hypothesis for one dynamic system of the statistical mechanics. *Reports of the USSR Academy of Sciences,* 153(6), 1261—1264 [in Russian].
13. Sinay, Ya.G. (1966). Classical dynamic systems with the even Lebedev spectrum. II. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*. Series: Mathematics, 30(1), 1568 [in Russian].
14. Sinay, Ya.G. (1970). Dynamic systems with elastic reflections. *Advances of mathematical sciences*, 25(4), 141—192 [in Russian].
15. Ornsteyn, D. (1978). *The ergodic theory, randomness and dynamic systems*. Moscow: Mir. [in Russian].
16. Adler, R.L., Konheim, A.G. & Andrew, Mc. (1965). *Topological entropy*. Mc. Andrew — Trans. AMS., 114, 309—319.
17. Riecan, B. (1974). Abstract entropy. *Acta F.R.N. Univ. Comen. — Mat.*, 55—67.
18. Otokar, Grošek. (1979). Entropy on algebraic structures. *Mathematica Slovaca*. 29 (4), 411—424 [in Russian].
19. Bratteli, O. (1972). Inductive limits of finite-dimensional C*-algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 171, 195—234.
20. Vershik, A. M. (1982). The theorem on Markov periodic approximation in the egrodic theory. *Proceedings of scientific seminars of Leningrad Optical Mechanical Institute,* 115, 72—82 [in Russian].
21. Herman, R.H., Putnam, I. & Skau, C. (1992). Ordered Bratteli diagrams, dimension groups, and topological dynamics. *Int. J. Math.*, 3, 827—864.
22. Medynets, K. (2006). Cantor aperiodic systems and Bratteli diagrams. *Comptes Rendus Mathematique*, 342, issue 1, 43—46.
23. Oxtoby, J.C. & Ulam, S.M. (1941). Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. Math*. (2), 42, 874—920.
24. Alpern, S. & Prasad, V.S. (2000). *Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms.* Cambridge: Cambridge University Press, 240.
25. Navarro-Bermudez, F.J. (1979). Topologically equivalent measures in the Cantor space. *Proc. Am. Math. Soc.*, **77**, 229—236.
26. Akin, E., Dougherty, R., Mauldin, R.D. & Yingst, A. (2008). Which Bernoulli measures are good measures? *Colloq. Math.*, 110, 243—291.
27. Austin, T.D. (2007). A pair of non-homeomorphic product measures on the Cantor set. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 142, 103—110.
28. Giordano, T., Putnam, I. & Skau, C. (1995). Topological orbit equivalence and C*-crossed products. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 469, 51—112.
29. Durand, F., Host, B. & Skau, C. (1999). Substitutional dynamical systems. Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* 19, 953—993.

30. Bezuglyi, S., Kwiatkowski, J. & Medynets, K. (2009). Aperiodic substitution systems and their Bratteli diagrams. *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* 29(1), 37—72.
31. Akin, E. (2005). Good Measures on Cantor space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(7), 2681—2722.
32. Karpel, O. (2012). Infinite measures on Cantor spaces. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(4), 703—720.
33. Karpel, O. (2012). Good measures on locally compact Cantor sets. *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, 8(3), 260—279.
34. Bezuglyi, S. & Karpel, O. (2014). Orbit Equivalent Substitution Dynamical Systems and Complexity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142, 4155—4169.
35. Bezuglyi, S., Karpel, O. & Kwiatkowski, J. (2015). Subdiagrams of Bratteli diagrams supporting finite invariant measures. *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, 11(1), 3—17.

Received 20.05.2019

Т.В. Килочицкая, кандидат исторических наук, доцент,
доцент кафедры высшей и прикладной математики,
доцент кафедры общетехнических дисциплин и черчения,
Национальный университет «Черниговский коллегиум» имени Т.Г. Шевченко,
ул. Гетмана Полуботко 53, г. Чернигов, Украина,
ID: https://orcid.org/0000-0003-4471-0904,
e-mail: kilocht@gmail.com

ЭВОЛЮЦИЯ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В статье рассмотрена предыстория эргодической теории, пути развития комплекса понятий и идей, которые привели к формированию и развитию этой теории. Проанализировано открытие из эргодической теории динамических систем А.М. Колмогорова, его учеников и последователей. Показана роль украинских ученых М.М. Боголюбова и М.М. Крылова в формировании этой теории. Рассмотрены труды харьковской школы по эргодической теории. Проанализированы основные направления исследований и работ выдающихся ученых, связанные с развитием эргодической теории. Продемонстрировано, что эргодическая теория возникла при попытке получить макроскопическое описание физических систем исходя из микроскопического описания с помощью уравнений движения; применение эргодической теории к обоснованию статистической физики свелось к задаче установления метрической транзитивности; эргодические теоремы дают возможность рассматривать предельные часовые средние или часовые средние на бесконечном промежутке времени, то есть имеет место регулярность поведения динамических систем, которое связано с усреднением.

Ключевые слова: *эргодичность, эргодическая теория, эргодическая гипотеза, динамическая система, инвариантная мера.*