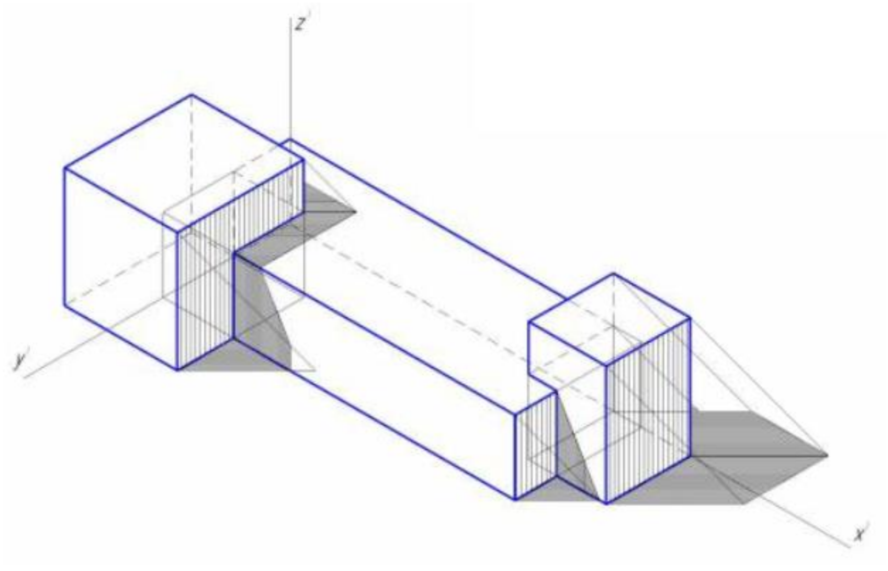
**Національний університет «Чернігівський колегіум»
імені Т.Г. Шевченка**

Кафедра ЗТД та креслення

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ



Чернігів – 2019

Національний університет
«Чернігівський колегіум»
імені Т.Г. Шевченка

Бондар Н.О., Дрозденко Н.М., Коляда А.М., Люлька В.С.

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Чернігів – 2019

УДК 514.18 (076.5)

Н28

Рецензенти:

Коваленко Світлана Василівна кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою навчально-наукового інституту будівництва Чернігівського національного технологічного університету.

Гетта Василь Григорович кандидат педагогічних наук, професор кафедри технологічної освіти та інформатики Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка

Укладачі: Бондар Н.О., Дрозденко Н.М., Коляда А.М., Люлька В.С.

Н28 Нарисна геометрія: Навчально-методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт [для студентів технологічного факультету] / Укл. Бондар Н.О., Дрозденко Н.М., Коляда А.М., Люлька В.С. – Чернігів: НУЧК імені Т.Г.Шевченка, 2019. – 76с.

У навчально-методичних рекомендаціях висвітлено питання організації і проведення лабораторних робіт з дисципліни «Нарисна геометрія», розглядаються приклади виконання завдань, надано необхідну інформаційну базу, вимоги до виконання і захисту графічних робіт, завдання для самостійного виконання, контрольні запитання.

УДК 514.18 (076.5)
Н28

Рекомендовано до друку вченою радою технологічного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т.Г.Шевченка
(Протокол №… від… 2019року)

ВСТУП

У підготовці вчителя трудового навчання важливу роль відіграють предмет і методи нарисної геометрії.

Мета курсу – дати студенту знання, вміння і навички, що знадобляться майбутньому вчителю для викладу технічних думок за допомогою креслень, а також для розуміння за кресленням конструкції та принципу дії технічних виробів, що зображуються на кресленні.

Вивчення нарисної геометрії розвиває і тренує просторову уяву студента, що необхідно не тільки в професійній діяльності вчителя трудового навчання, але й для успішного оволодіння такими дисциплінами, як вища математика, технічна механіка, опір матеріалів, деталі машин та ін.

У процесі вивчення нарисної геометрії також розширюється загальнонауковий світогляд студентів, розвиваються навички логічного мислення, уважність, спостережливість, акуратність та інші якості.

Завдання курсу «Нарисна геометрія»:

1. Навчити за допомогою законів проекціювання зображувати на площині тривимірні геометричні об’єкти (виконувати креслення).
2. Розвивати здатність уявного сприйняття просторового геометричного образу за його зображенням на площині (читати креслення).
3. Дати знання про методи вирішення на площині просторових метричних і позиційних задач.

Обов'язковою умовою засвоєння курсу нарисної геометрії є самостійне виконання студентом низки графічних завдань, що охоплюють матеріал основних розділів курсу.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ

Графічні роботи повинні відповідати вимогам ДСТУ 3321-96.

1. Індивідуальні завдання виконуються на креслярському папері формату А3 (297×420), розташованому горизонтально або вертикально. Рамку, що обмежує поле креслення, необхідно проводити, відступаючи 20 мм зліва і по 5 мм зверху, справа і знизу від країв формату.

2. Побудови повинні виконуватися за параметрами, зазначеними у таблицях індивідуальних завдань, в масштабі 1:1 (у завданнях, де немає вказівок щодо розмірів, побудову варто виконувати так, щоб раціонально використати поле формату – 75% повинно бути заповнено зображеннями і текстом).

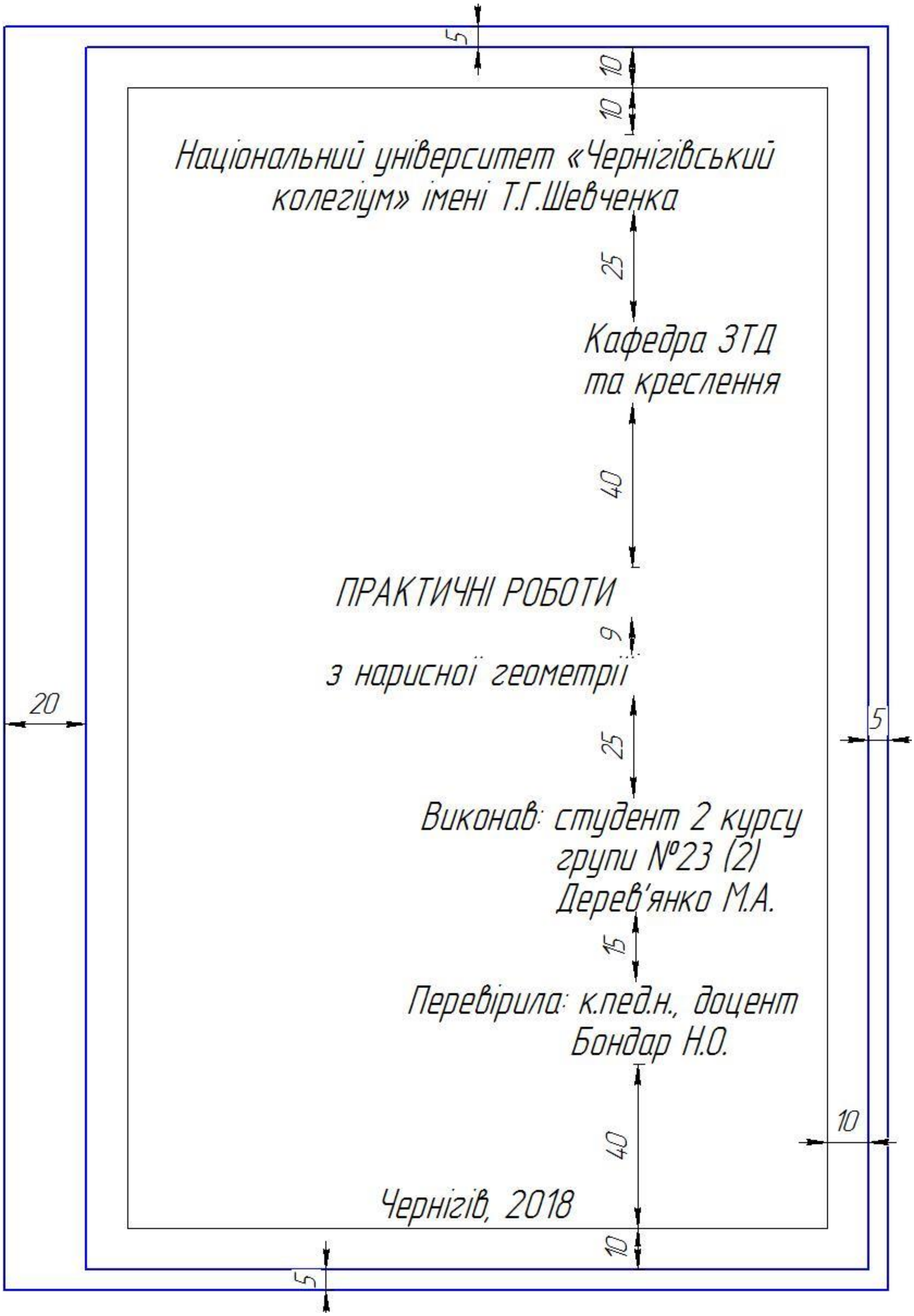
3. Всі побудови потрібно виконувати простим олівцем із дотриманням товщини ліній за стандартом ДСТУ ISO 128-24:2005 за допомогою креслярських приладь чітко і охайно, тому що задача, виконана графічно неточно – вирішена невірно. Товщина ліній кожного типу повинна бути однаковою для всіх зображень на даному кресленні.

Задані на епюрі проекції точок, а також точки, отримані в результаті побудови варто обводити циркулем або за допомогою трафарету колом діаметром 2-3 мм.

4. На форматі А3 у правому нижньому куті необхідно зазначити номер варіанта, групу, прізвище та ініціали студента креслярським шрифтом.

5.Умова, завдання і позначення повинні бути виконані креслярським шрифтом (тип Б з нахилом 75° відповідно до ДСТУ ISO 3098-2:2006.

6. Виконані графічні роботи згортаються до формату А4(210×297) і зшиваються в альбом, що має титульний аркуш, виконаний за зразком. Він виконується шрифтом № 7, за винятком слів "Практичні роботи", які виконуються прописними літерами шрифтом №10.


Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка
Кафедра ЗТД
та креслення
ПРАКТИЧНІ РОБОТИ
з нарисної геометрії
Виконав: студент 2 курсу
групи №23 (2)
Дерев'янко М.А.
Перевірила: к.пед.н., доцент
Бондар Н.О.
Чернігів, 2018
5
10
10
25
40
9
20
25
5
15
40
10
10
5

Завдання № 1
ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ ТОЧКИ. ЕПЮР

Умова. За заданими координатами точок (Табл. 1) побудувати їх просторове та комплексне креслення (епюр).

Проекцією точки на площину є основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину.

Наприклад, задана точка *A* з координатами: *OX=60 мм, OY=20 мм, OZ=65 мм* (рис. 1.1). Щоб побудувати просторове зображення, треба побудувати відповідний октант (так як всі три координати точки *A* додатні, то сама точка розташовується в першому октанті) і відповідно на осях *X,Y,Z* відкласти зазначені розміри. На перетинах відрізків, паралельних до осей, отримаємо проекції точки *A* (A_1, A_2, A_3) і саму точку у просторі.

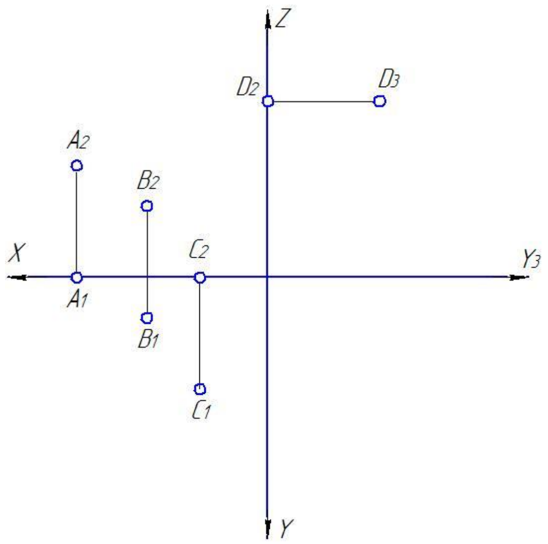
Задані координати заносять в таблицю, розташовану у правому верхньому куті креслення (розміри таблиці 40×50 мм).

Далі за наочним зображенням будуються епюри точок. Так, для побудови епюра точки *A* (60, 20, 65) потрібно відкласти на координатних осях відрізки, що відповідають координатам точки: по осі *X*- 60 мм, *Y*- 20 мм, *Z*- 65 мм.

Через отримані точки проводять перпендикулярно до осей координат лінії зв'язку, на перетині яких відмічають шукані проекції точки: A_1 – горизонтальна проекція, A_2 – фронтальна і A_3 -профільна.

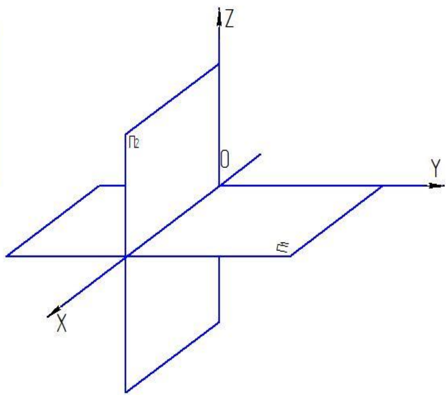
Завдання для самостійного опрацювання

1.1. За двома заданими проекціями побудувати треті проекції точок A,B,C,D. Визначити, яка з точок: найвища; найнижча; найближча до спостерігача; надалі від спостерігача.



1.2. Задані координати точок A,B,C,D. Побудувати їх просторове зображення, а також горизонтальні і фронтальні проекції.

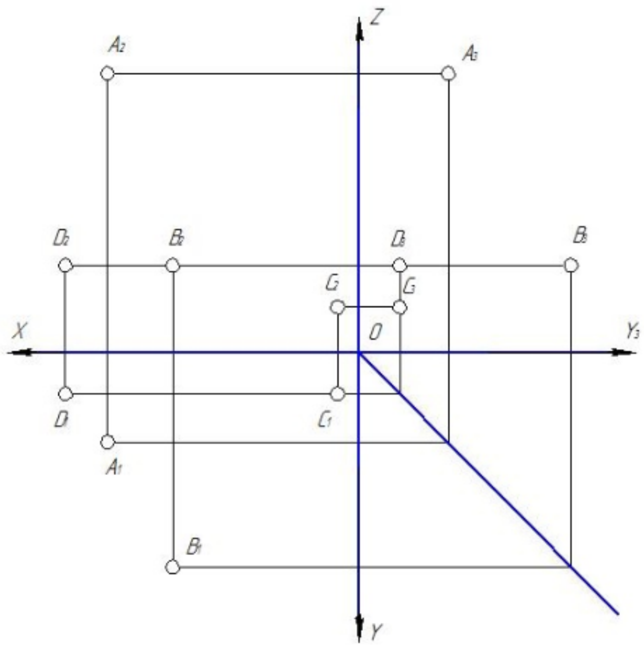
Точка	Координати		
	X	Y	Z
A	10	20	20
B	20	-30	10
C	30	-20	-20
D	30	15	-25



Контрольні питання

1. Що називається епюром точки?
2. Яка пряма на епюрі Монжа називається постійною прямою?
3. Як визначити положення координатних осей, якщо відомі три проекції точки?

	X	Y	Z
A	60	20	65
B	45	50	20
C	5	10	10
D	70	10	20



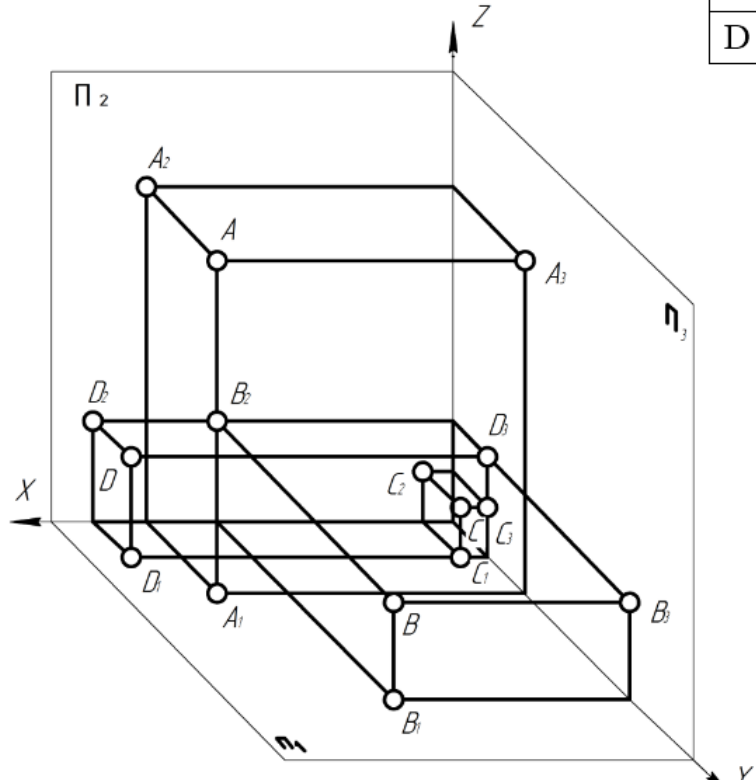


Рис. 1.1. Просторове і комплексне зображення точки

Таблиця 1.1
Варіанти до завдання 1

№ варіанта	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	80	28	25	60	13	64	13	89	0	70	0	10
2	75	25	43	70	78	92	19	35	10	44	0	84
3	90	37	23	50	70	45	17	31	0	78	55	22
4	70	50	30	64	0	68	15	30	13	53	6	5
5	67	55	66	47	10	71	19	50	15	114	29	26
6	93	12	48	76	69	15	0	32	64	100	41	27
7	107	17	33	65	61	63	22	80	0	90	7	9
8	70	20	70	16	60	47	0	31	8	86	45	17
9	90	0	15	49	63	71	14	20	28	66	17	38
10	100	57	69	79	0	9	0	45	30	105	65	7
11	78	46	36	72	68	66	16	12	0	90	32	14
12	59	0	26	56	0	73	0	60	16	102	24	15
13	65	37	11	51	7	69	0	60	33	80	25	50
14	70	62	66	53	57	73	38	0	12	102	73	25
15	81	21	0	33	53	57	4	7	28	90	54	24
16	82	28	20	34	45	16	5	27	6	93	25	54
17	70	25	28	60	64	13	13	0	89	70	10	0
18	73	27	26	7	13	73	30	70	5	69	12	0
19	45	26	57	56	73	0	0	16	59	70	17	24
20	95	36	46	72	66	28	16	0	12	85	14	32
21	40	59	14	79	9	0	0	30	45	80	7	65
22	100	15	0	49	7	63	14	28	20	94	38	16
23	90	7	17	16	47	50	0	62	30	80	17	61
24	80	33	15	65	68	80	22	0	8	71	9	7
25	83	48	12	76	15	69	0	64	32	60	26	42
26	102	60	54	47	71	10	19	15	50	68	32	29
27	76	30	50	64	68	0	15	13	48	93	5	6
28	92	15	33	55	0	12	22	26	69	21	91	0
29	104	17	28	35	14	77	51	0	74	39	16	36
30	64	30	25	40	67	0	42	61	21	87	45	20
31	58	33	72	57	54	0	15	0	52	65	39	0
32	49	16	27	22	74	29	6	24	0	57	21	16
33	100	0	44	52	63	70	4	48	12	49	15	8
34	78	24	30	46	58	37	42	25	10	62	47	12
35	59	37	20	61	4	60	26	60	18	38	0	52
36	72	0	29	17	55	0	14	49	70	81	45	0
37	96	40	48	50	15	74	8	0	16	57	42	16
38	86	26	33	64	12	9	17	13	34	45	8	45
39	60	40	20	50	70	39	22	35	0	39	90	13
40	93	28	41	62	14	83	16	25	81	42	12	59
41	58	0	32	17	6	36	19	0	50	67	26	7
42	99	6	27	42	75	0	26	64	15	33	24	60
43	80	39	0	56	27	29	18	36	19	81	16	21
44	75	15	5	68	5	47	13	0	22	64	90	8
45	96	24	73	16	52	60	15	87	45	60	27	12
46	102	0	14	51	10	43	13	79	0	72	0	7
47	89	13	46	80	0	17	78	35	28	93	26	16
48	96	8	34	14	5	85	70	14	40	67	12	0
49	112	0	21	77	64	8	93	12	51	54	7	5
50	82	31	19	67	18	29	68	9	0	100	23	17
51	71	45	36	73	0	9	59	7	57	84	12	0
52	90	26	19	66	13	50	98	42	85	16	19	27

№ варіанта	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
53	0	63	30	72	34	46	93	5	10	89	24	80
54	83	24	57	64	0	19	14	18	0	17	14	52
55	78	37	14	56	0	82	18	30	16	75	0	14
56	95	34	46	70	60	73	0	28	39	64	9	10
57	75	26	27	50	67	7	15	14	30	90	24	28
58	106	15	33	62	54	60	0	32	7	75	14	4
59	80	0	20	28	54	40	38	0	15	70	8	0
60	100	28	43	7	16	68	0	8	30	67	24	50
61	68	30	22	65	72	0	16	11	43	98	8	6
62	76	27	26	84	10	0	26	0	8	53	13	8
63	98	37	41	67	64	5	20	15	50	83	18	58
64	80	0	20	65	70	0	18	16	48	69	13	0
65	76	21	26	51	66	72	14	33	21	62	10	4
66	95	37	47	45	66	12	20	15	30	102	20	15
67	76	0	16	54	59	73	0	16	55	89	17	24
68	105	54	68	80	12	0	13	27	19	79	16	61
69	84	47	13	48	68	50	24	0	9	71	8	6
70	59	26	40	33	52	59	17	0	12	85	14	30
71	82	36	19	47	67	11	22	7	0	90	6	10
72	40	70	60	30	50	60	27	10	0	100	30	25
73	81	24	26	59	14	66	13	88	0	68	0	13
74	79	0	21	65	0	67	20	50	15	92	23	56
75	98	29	49	16	52	19	17	13	5	64	14	0
76	52	56	57	0	14	62	19	0	9	96	4	5
77	70	18	84	57	67	0	20	16	53	80	6	56
78	83	0	24	9	12	33	39	0	12	66	17	27
79	96	13	45	75	67	14	18	29	8	94	26	53
80	77	37	82	63	59	78	13	28	18	80	7	64
81	83	26	29	78	8	0	0	30	40	71	9	40
82	92	61	72	57	0	75	21	0	9	86	59	16
83	77	33	16	48	70	8	15	10	54	96	0	27
84	96	38	48	77	18	81	18	0	8	94	39	14
85	74	24	42	15	50	48	0	47	38	90	33	25
86	80	30	20	60	65	0	15	10	40	90	5	6
87	72	25	29	49	65	72	0	20	46	72	27	43
88	94	35	46	61	72	83	27	0	9	71	40	0
89	81	32	16	49	67	0	39	10	12	88	32	35
90	85	47	12	75	15	60	21	0	5	90	60	20

Завдання №2
ПРЯМА. ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

Умова. Встановити положення ребер багатогранника щодо площин проекцій. Визначити натуральний розмір одного з ребер загального положення та його кути з площинами проекцій. Знайти горизонтальний слід $M(M_1M_2)$ і фронтальний слід $N(N_1N_2)$ одного з ребер загального положення. Точкою $K(K_1,K_2)$ розділити одне з ребер загального положення у відношенні 2:3.

Дослідження просторового розташування ребер щодо площин проекцій починається з позначення вершин багатогранника (завдання – див. рис 2.1). У процесі позначення кожне ребро подумки виділяється, аналізуються особливості розташування горизонтальної та фронтальної проекції ребра і записується його положення: горизонтальне, фронтальне, профільне , проектуючи до однієї з площин проекцій або загального положення.

Визначити натуральний розмір і кути нахилу до площин проекцій ребра загального положення можна, наприклад, способом прямокутного трикутника. Натуральний розмір відрізка прямої загального положення дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція цього відрізка на одну з площин проекцій, а іншим – різниця відстаней кінців відрізка від цієї ж площини. Отримані кути α і β (рис.2.2) визначають відповідно куги нахилу даного ребра до площин проекцій Π_1 і Π_2.

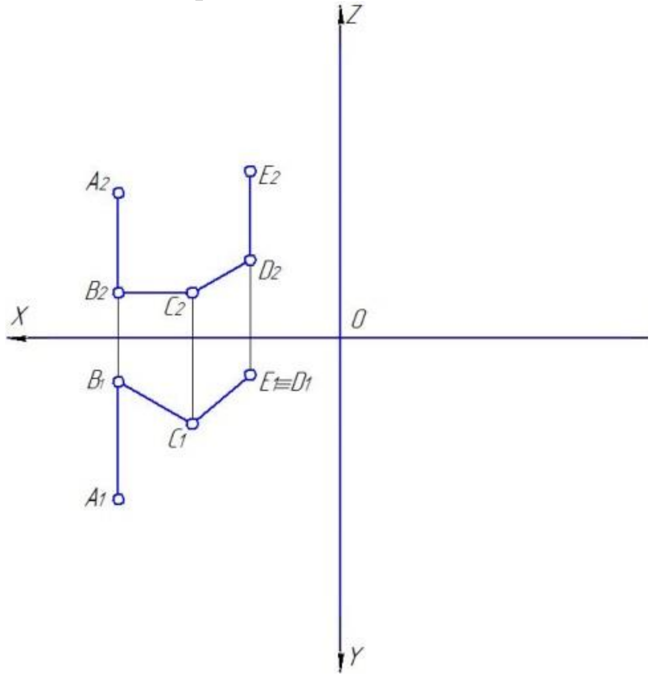
Для того щоб знайти горизонтальний слід ребра, наприклад, AS необхідно продовжити фронтальну проекцію A_2S_2 до перетину з віссю X, потім через точку перетину (фронтальну проекцію горизонтального сліду) провести перпендикуляр до осі X до перетину з продовженням горизонтальної проекції A_1S_1. Точка перетину M_1 і буде горизонтальною проекцією горизонтального сліду, вона співпадає з самим слідом M.

Для знаходження фронтального сліду необхідно продовжити горизонтальну проекцію A_1S_1 до перетину з віссю проекцій X, через точку N_1 (горизонтальну проекцію фронтального сліду) провести перпендикуляр до перетину з продовженням фронтальної проекції A_2S_2. Точка N_2 буде фронтальною проекцією фронтального сліду, вона збігається із самим слідом N.

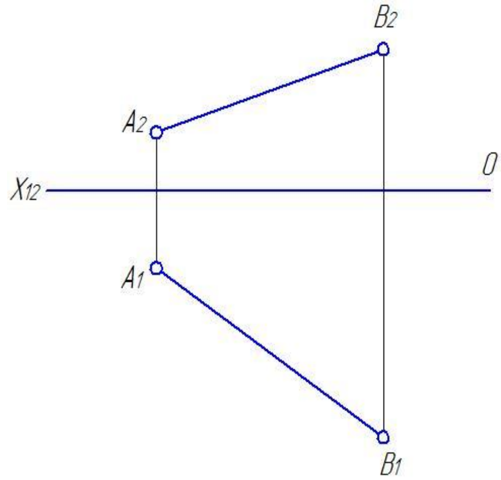
На рис. 2.2 відрізок AS розділений у відношенні 2:3. З точки A_1 проведена під довільним кутом допоміжна пряма, на якій відкладені п'ять (2+3) відрізків довільної довжини, але рівних між собою: A_1K_0=2, K_0S_0=3. З'єднавши точку S_0 із проекцією S_1 і провівши з точки K_0 пряму, паралельну до S_0S_1 отримаємо точку K_1 (причому $A_1,K_1 : K_1S_1$ = =2:3) і потім за проекційним зв’язком знаходимо K_2. Точка K поділятиме відрізок AS у відношенні 2:3.

Завдання для самостійного опрацювання

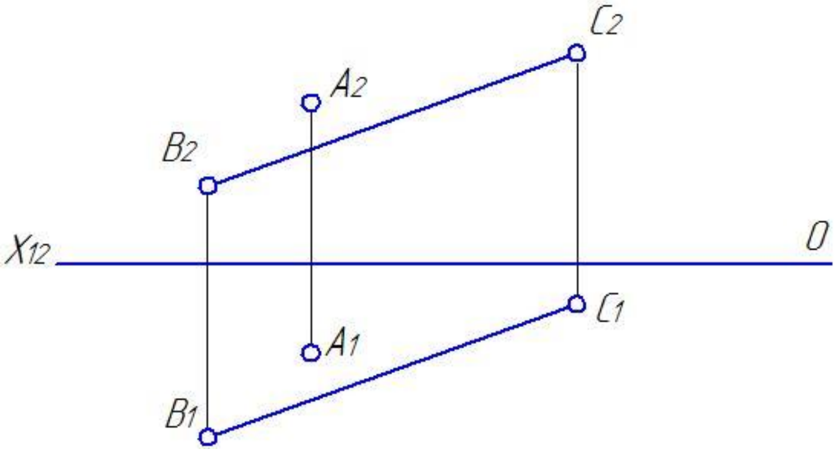
2.1. Побудуйте профільну проекцію ламаної лінії *ABCDE*. Визначте положення кожного відрізка щодо площин проекцій.



2.2. Знайдіть натуральну величину відрізка *AB* способом прямокутного трикутника, а також кути його нахилу до площин проекцій $П_1$ та $П_2$.



2.3. Через точку А проведіть пряму, яка перетинатиме відрізок *BC* і буде паралельною до горизонтальної площини проекцій.



Контрольні питання

1. Як зображуються на епюрі прямі загального і окремого положення?
2. Які прямі зображуються на проекціях у натуральну величину?
3. Що являє собою слід прямої лінії?
4. Які точки називаються конкуруючими? Як визначити видимість ребер багатогранника?
5. Як визначити за кресленником – чи належить точка прямій?

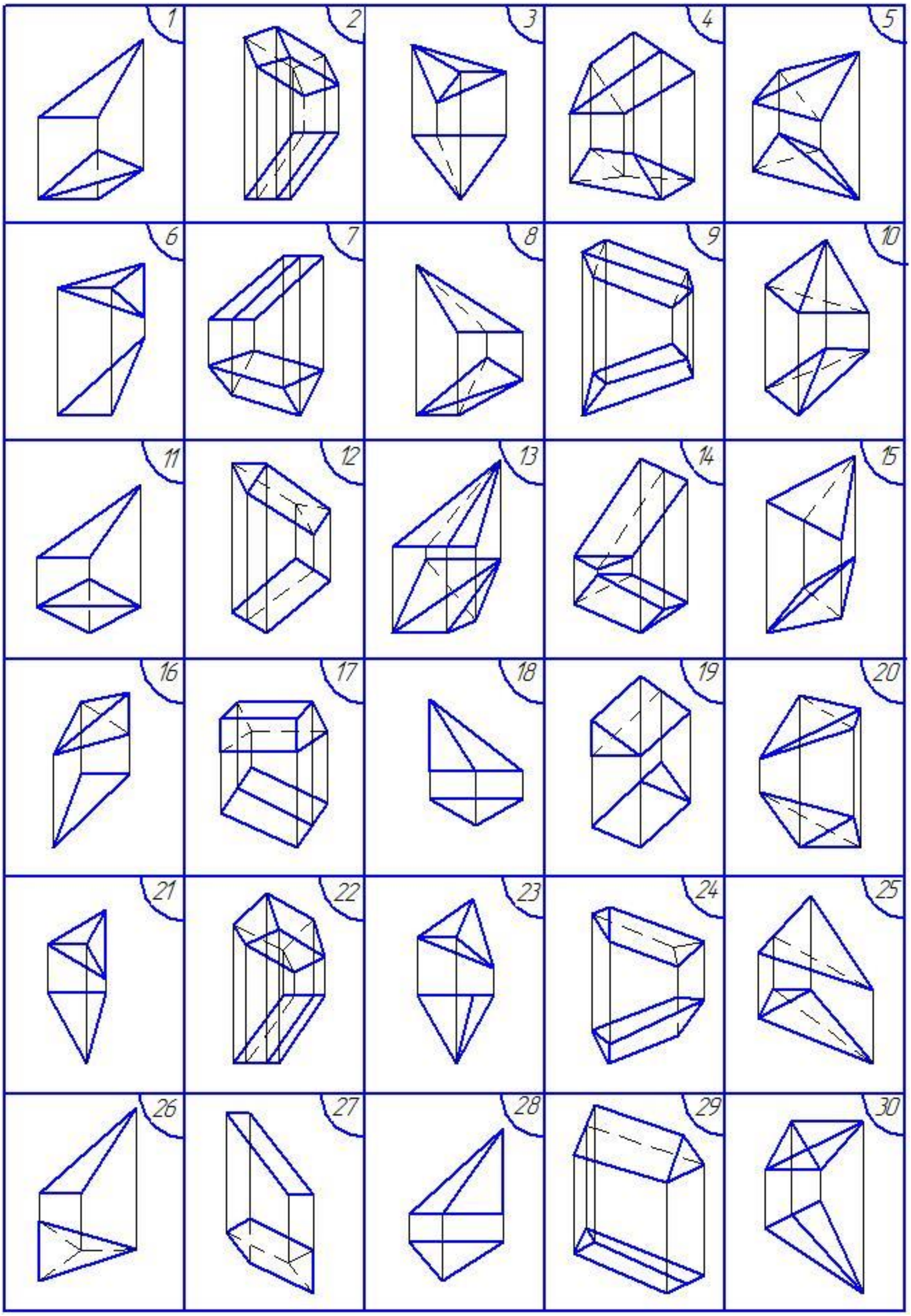


Рис. 2.1. Варіанти до завдання 2

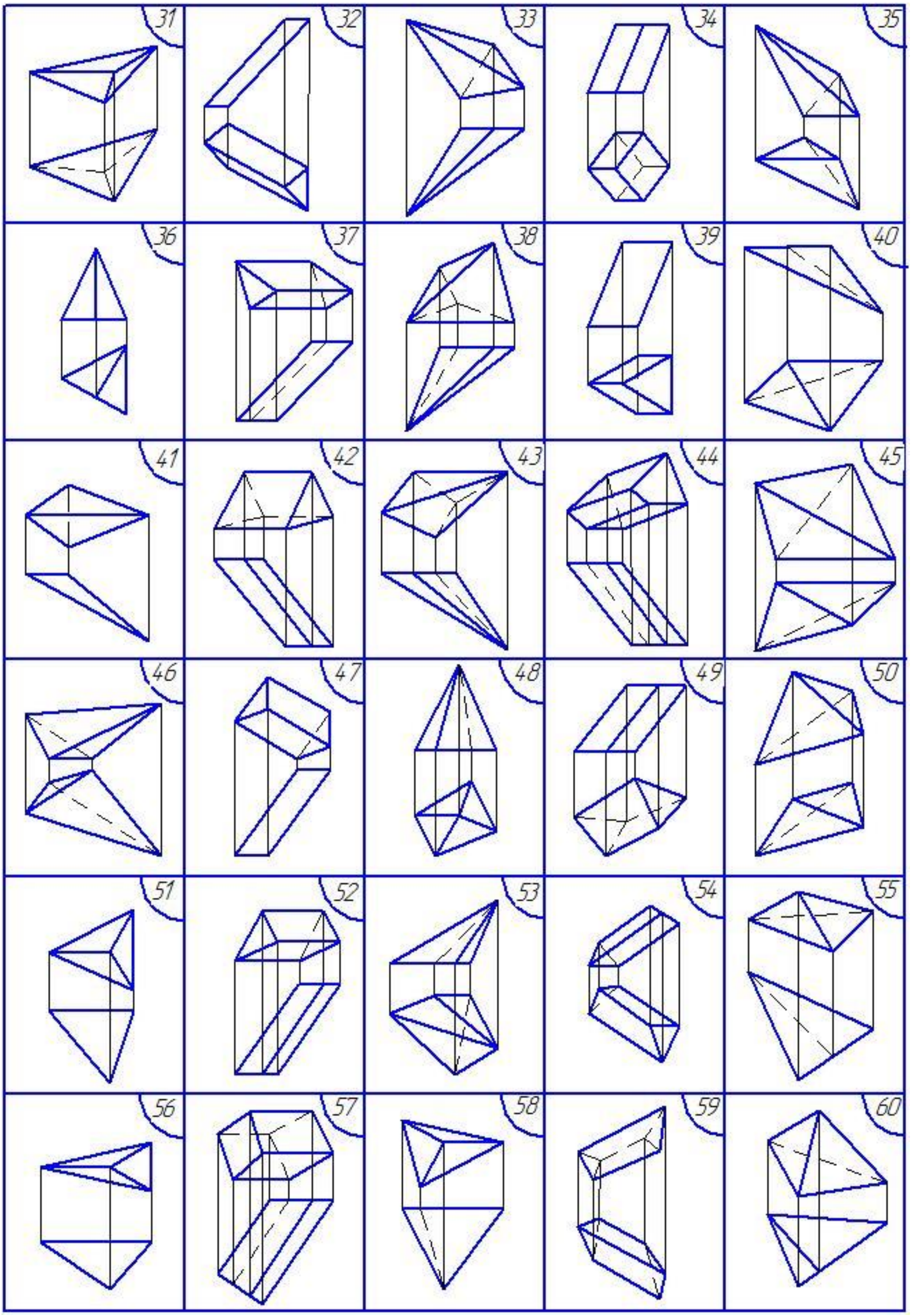


Рис. 2.1. Варіанти до завдання 2

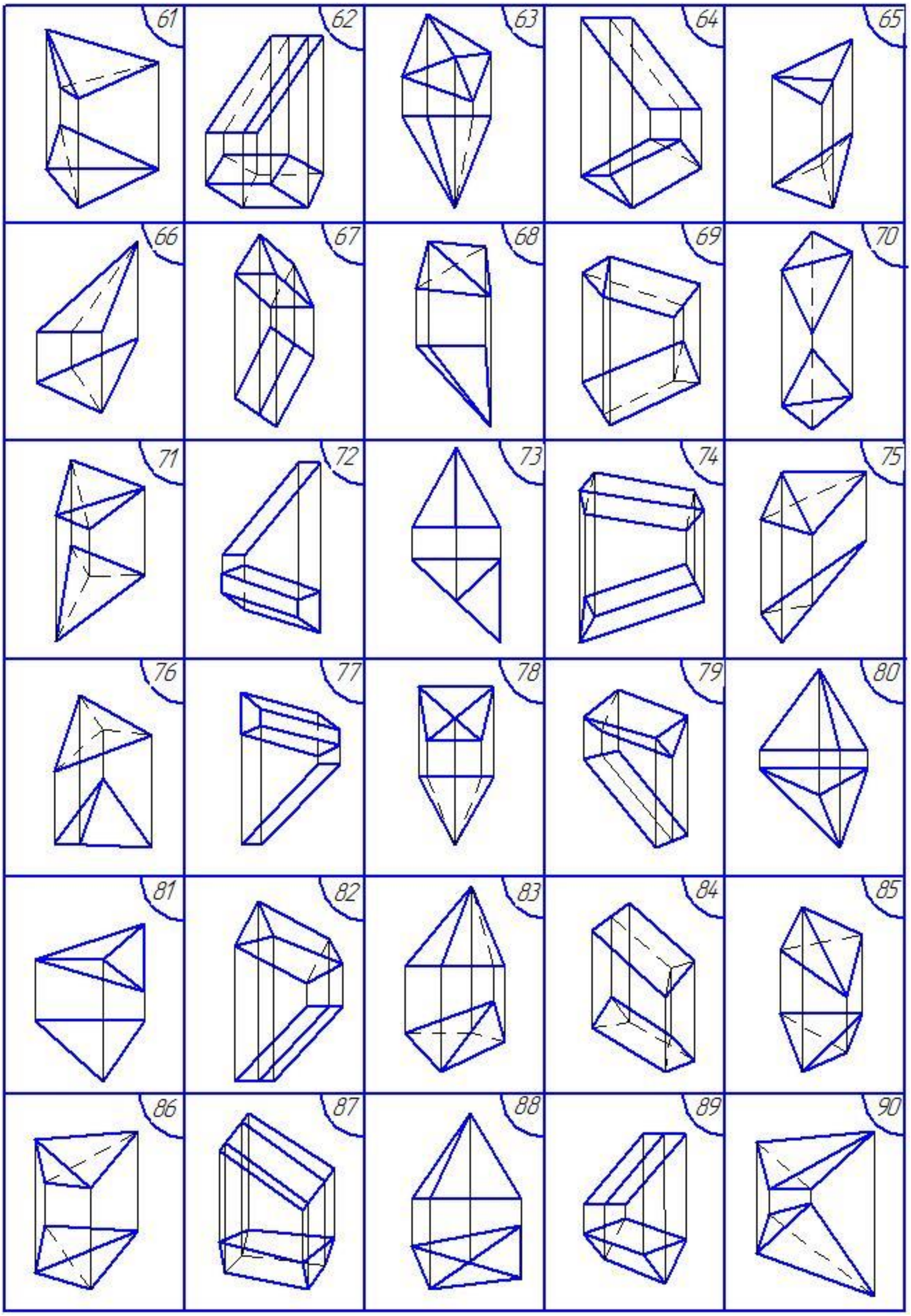


Рис. 2.1. Варіанти до завдання 2

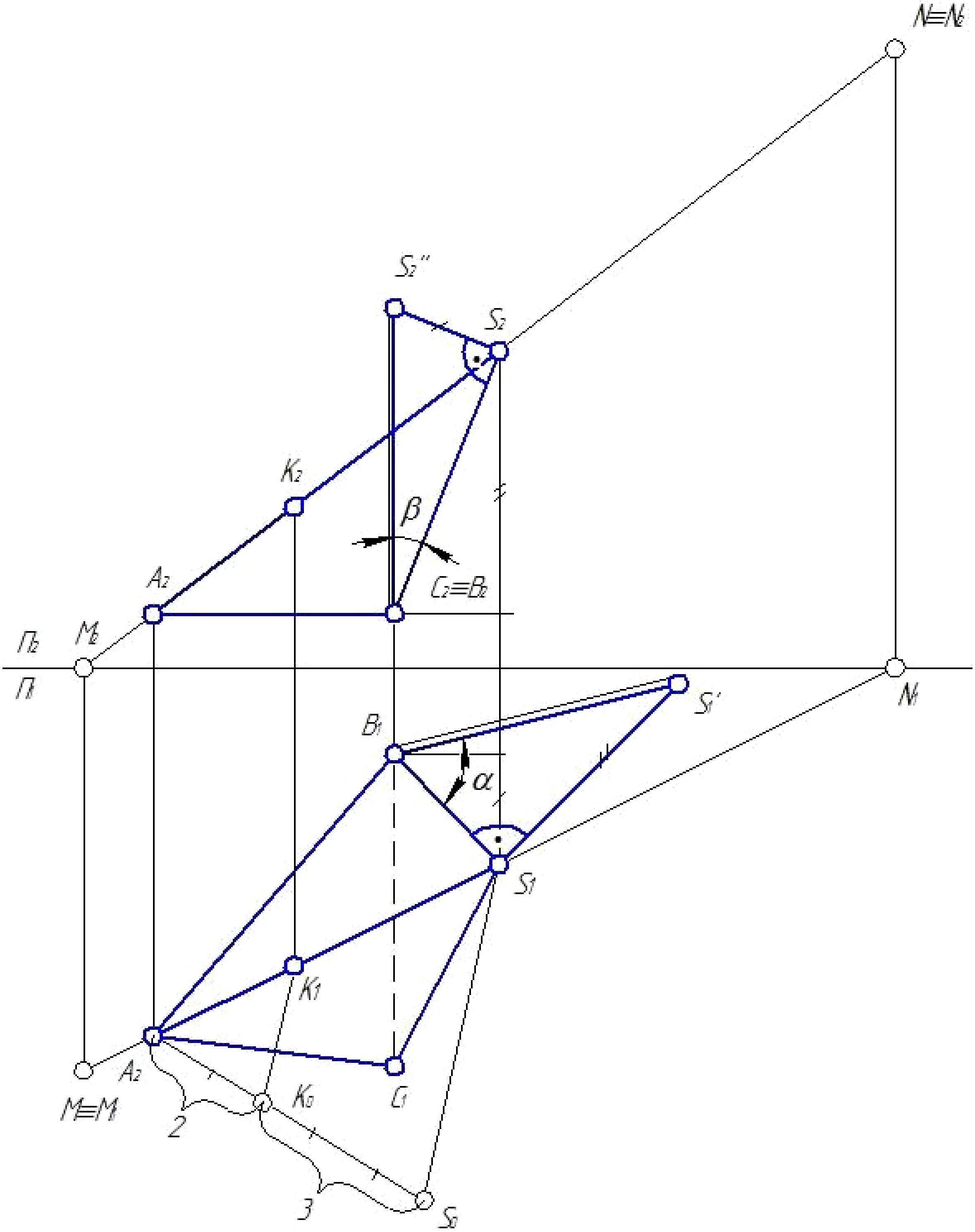


Рис. 2.2. Приклад виконання завдання 2

Завдання № 3

ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Умова. Визначити точку перетину прямої з площиною загального положення. Встановити видимість прямої на проекціях (рис. 3.1, табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Кут \ №	1	2	3
α^0	30	45	60
β^0	60	30	45

Розв’язання задач на побудову точки перетину прямої і площині в загальному випадку виконують в наступній послідовності:

1. Пряму *l* заключають у допоміжну площину *Q* (рис. 3.2).
2. Визначають лінію перетину заданої площини *P* з допоміжною площиною *Q* (пряма *EF*)
3. Знаходять точку перетину заданої прямої і площини (точка *K)* як точку перетину прямої *l* і лінії перетину заданої і допоміжної площин (*EF*).

Приклад 1. Визначити точку перетину прямої *l* з площиною, заданою трикутником $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$. Встановити видимість на проекціях (рис.3.3).

1. Проводимо через пряму *l* допоміжну площину. В якості допоміжної приймаємо фронтально-проектуючу площину *T* (*h* – горизонтальний слід цієї площини, *f*-фронтальний). Оскільки площина *T* фронтально-проектуюча, фронтальна проекція будь-якої прямої, що їй належить, збігається з фронтальним слідом цієї площини.

2. Визначаємо лінію перетину площини трикутника *ABC* і допоміжної площини *T*. Для знаходження лінії перетину двох площин досить визначити дві точки, загальні для цих площин (тому що площини перетинаються по прямій, а дві точки визначають пряму). Загальними для двох зазначених площин є точки перетину сторін *AB* і *AC* трикутника *ABC* з допоміжною площиною *T.*

Точка M_2 є фронтальною проекцією точки перетину сторони *AC* трикутника з допоміжною площиною *T,* а точка N_2 – сторони *AB.* Провівши з цих точок лінії зв'язку до перетину з горизонтальними проекціями відповідних сторін трикутника *ABC,* отримаємо горизонтальні проекції цих точок (M_1 і N_1). Відрізок M_1N_1, визначає горизонтальну проекцію лінії перетину заданої і допоміжної площин.

3. Горизонтальною проекцією шуканої точки перетину заданої прямої і площини є точка K_1 – точка перетину з горизонтальної проекції лінії перетину заданої і допоміжної площин M_1N_1 з горизонтальною проекцією заданої прямої l_1.

За лінією проекційного зв'язку визначаємо фронтальну проекцію цієї точки K_2.

Для встановлення "видимості" використовуємо спосіб конкуруючих точок. У точці $N_2 \equiv 1_2$ збігаються фронтальні проекції точок *1* і *N (фронтально-конкуруючі)*, перша з яких належить прямій *l*, а друга – стороні *AB* трикутника. Використовуючи лінії проекційного зв’язку за горизонтальною проекцією визначаємо, що точка *N* має більшу координату *У*, а отже, розташована ближче до спостерігача і буде при проекціюванні на фронтальну площину закривати точку*1* (т.*N* – видима; т.*1*- конкуруюча). Отже, точка *1* (точка прямої) розташована ближче до площини проекцій $П_2$ ніж точка *N*, і на фронтальній проекції в цьому місці сторона трикутника перекриває пряму.

Аналогічно, на фронтальній проекції, рухаючись по лінії зв'язку вгору від точки $2_1 \equiv 3_1$

визначаємо, що точка *3* сторони *BC* трикутника лежить вище точки *2* прямої *l* і на горизонтальній проекції сторона трикутника в цьому місці перекриває пряму.

Приклад 2. Визначити точку перетину прямої *l* із площиною загального положення *Q*, заданою слідами ($h_1,f_1; h_2,f_2$) (рис. 3.4). Визначити "видимість" прямої на проекціях.

План розв'язку цієї задачі такий самий, як і в прикладі 1.

Спочатку заключаємо задану пряму *l* у допоміжну фронтально-проектуючу площину *T* (її сліди h_0, f_0). Потім будуємо лінію перетину заданої і допоміжної площин. Ця лінія визначається двома точками, загальними для обох площин. Перша точка *(M)* лежить на перетині горизонтальних слідів заданої і допоміжної площин. Вона знаходиться в площині $П_1$, і збігається зі своєю горизонтальною проекцією M_1. Фронтальною проекцією цієї точки є точка M_2.

Друга загальна для двох площин точка лежить на перетині фронтальних слідів площин *Q і T*. Це точка *N*, що лежить у фронтальній площині проекцій і тому співпадає зі своєю фронтальною проекцією. Горизонтальна проекція цієї точки – точка N_1,. З'єднаючи точки M_1 і N_1, отримаємо горизонтальну проекцію лінії перетину заданої і допоміжної площин (пряма M_1N_1).

Точка перетину цієї проекції з горизонтальною проекцією заданої прямої і є горизонтальною проекцією шуканої точки перетину прямої і площини (точка K_1). За лінією проекційного зв'язку визначаємо фронтальну проекцію цієї точки (K_2).

Видимість на кресленику можна встановити виходячи з наступних міркувань. Точка *1* горизонтального сліду площини *Q* збігається з горизонтальною проекцією точки *2* прямої *l*. На фронтальній проекції видно, що в цьому місці пряма розташована над горизонтальною площиною проекцій $П_1$, і, відповідно, частина прямої аж до точки її перетину з площиною *Q* при погляді зверху буде видима. Аналогічно можна встановити видимість на фронтальній проекції.

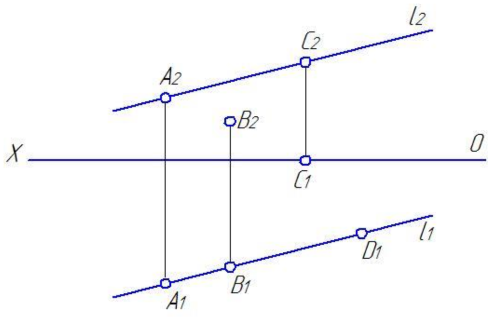
Приклад 3. Умова. Площина задані двома прямими *c* (c_1,c_2) та *d* (d_1,d_2), що перетинаються в т. *A* (A_1, A_2). Знайти точку перетину прямої $l(l_1,l_2)$ з заданою площиною (рис. 3.5).

Умовно проводимо через пряму $l(l_1,l_2)$ горизонтально-проектуючу площину (на горизонтальній проекції співпадатиме з проекцією прямої l_1) . Знаходимо лінію перетину двох площин – заданої і допоміжної. Для цього достатньо мати дві спільні точки: на горизонтальній площині проекцій відмічаємо точки 1_1 і 2_1. Знаходимо їх фронтальні проекції 1_2 і 2_2 за лініями проекційного зв'язку. На фронтальній проекції відмічаємо т.K_2 як точку, що належить прямій і лежить на лінії перетину двох площин, а отже, належить і заданій площині. За лінією проекційного зв'язку позначаємо горизонтальну проекцію точки перетину K_1 на проекції прямої l_1.

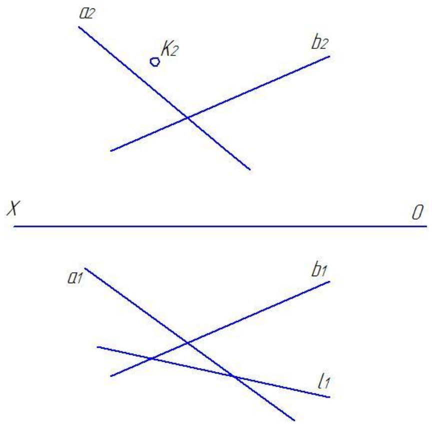
Приклад 4. На рис. 3.6 показане знаходження точки перетину прямої *l* (l_1,l_2) і площини, заданої паралельними прямими $c(c_1, c_2)$ та *d(d1, d2)*. Для встановлення видимості прямої на проекціях використано спосіб конкуруючих точок. На фронтальній проекції точка 4_2 (що належить прямій *l*) збігається з проекцією точки 5_2 (що належить прямій *c* площини). Аналізуючи проекції цих точок на горизонтальній проекції приходимо до висновку, що проекція т.5_1 розташована нижче, отже т.*5* у просторі буде ближчою до спостерігача, ніж т. *4*, відповідно, до точки перетину на цій ділянці на фронтальній проекції площина буде закривати пряму, пряма – невидима. Аналогічно визначають видимість на горизонтальній площині проекцій, розглядаючи точки *2* і *3*.

Завдання для самостійного опрацювання

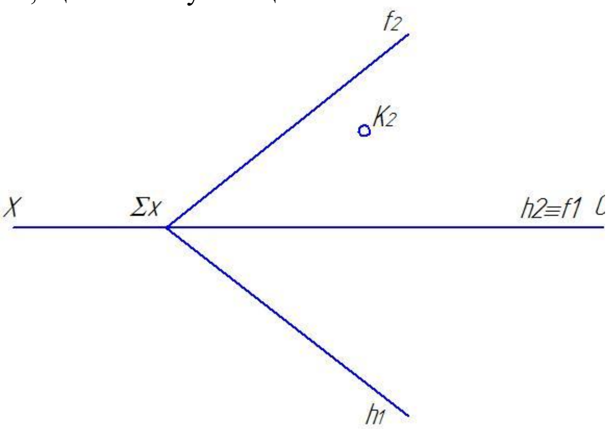
3.1. Чи лежать точки *A,B,C* на прямій *l*? Побудуйте фронтальну проекцію точки *D* так, щоб вона лежала на прямій *l*.



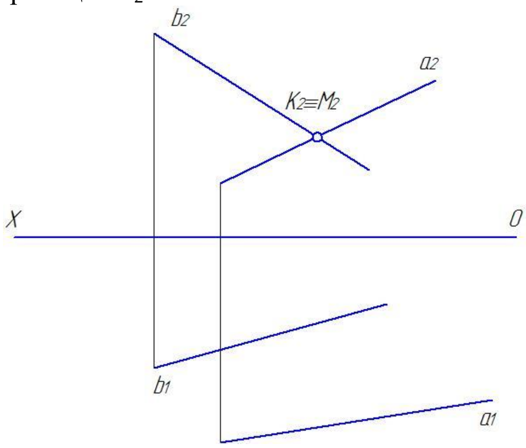
3.2. Побудуйте проекції, яких не вистачає, точки *K* та прямої *l*, що належать площині загального положення, задані прямими $a(a_1;a_2)$ та $b(b_1;b_2)$.



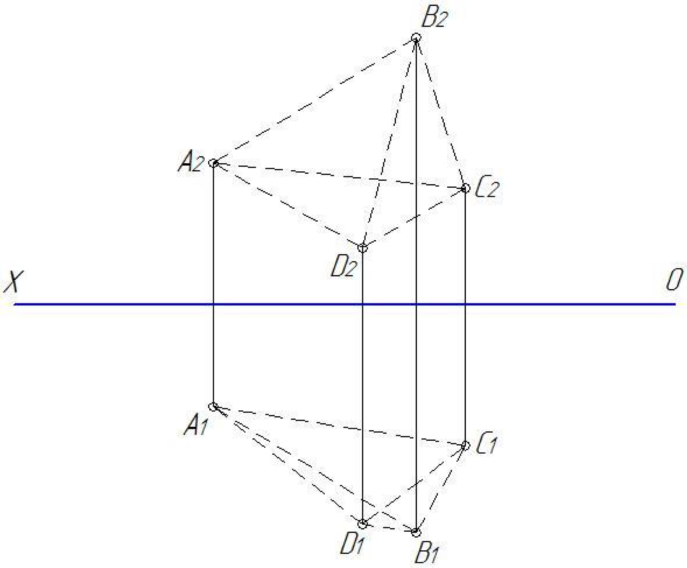
3.3. Побудуйте горизонтальну проекцію точки *K*, що лежить у площині *Σ*.



3.4. Точка *K* – належить прямій *b*, точка *M* – належить прямій *a*. Визначте – яка з них видима, а яка конкуруюча на фронтальній проекції Π_2.



3.5. Встановіть видимість ребер піраміди відповідно на проекціях:



Контрольні питання

1. Яким способом може бути задана площина на епюрі?
2. Дайте визначення прямих загального та окремого положення.
3. Дайте визначення площин загального та окремого положення.
4. Поясніть послідовність розв'язування задач на перетин прямої і площини.
5. Поясніть сутність способу конкуруючих точок для встановлення видимості елементів на кресленику?

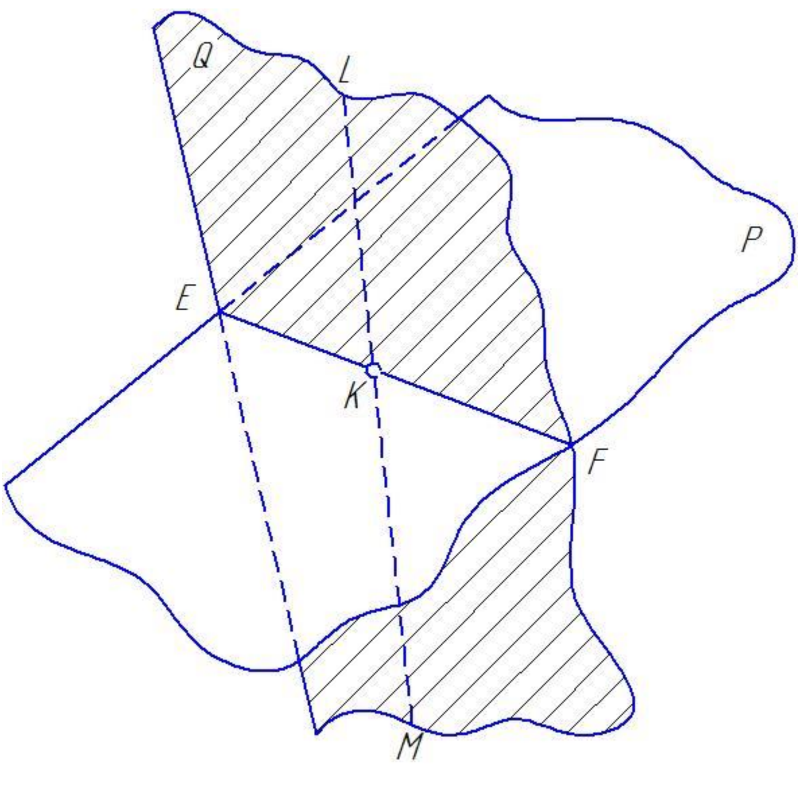


Рис. 3.2. Алгоритм розвязання задачі на перетин прямої і площини

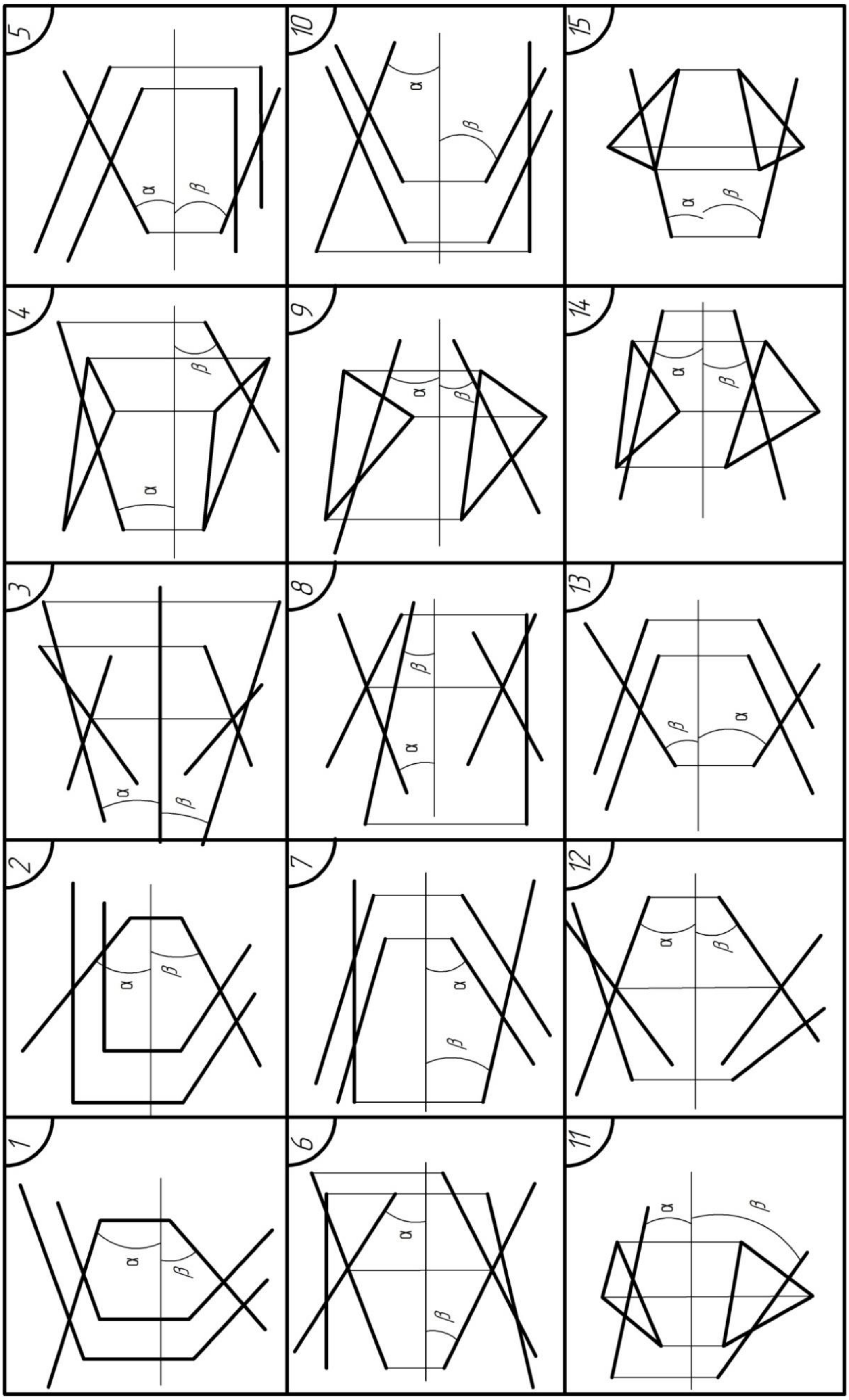


Рис. 3.1. Варіанти до завдання 3

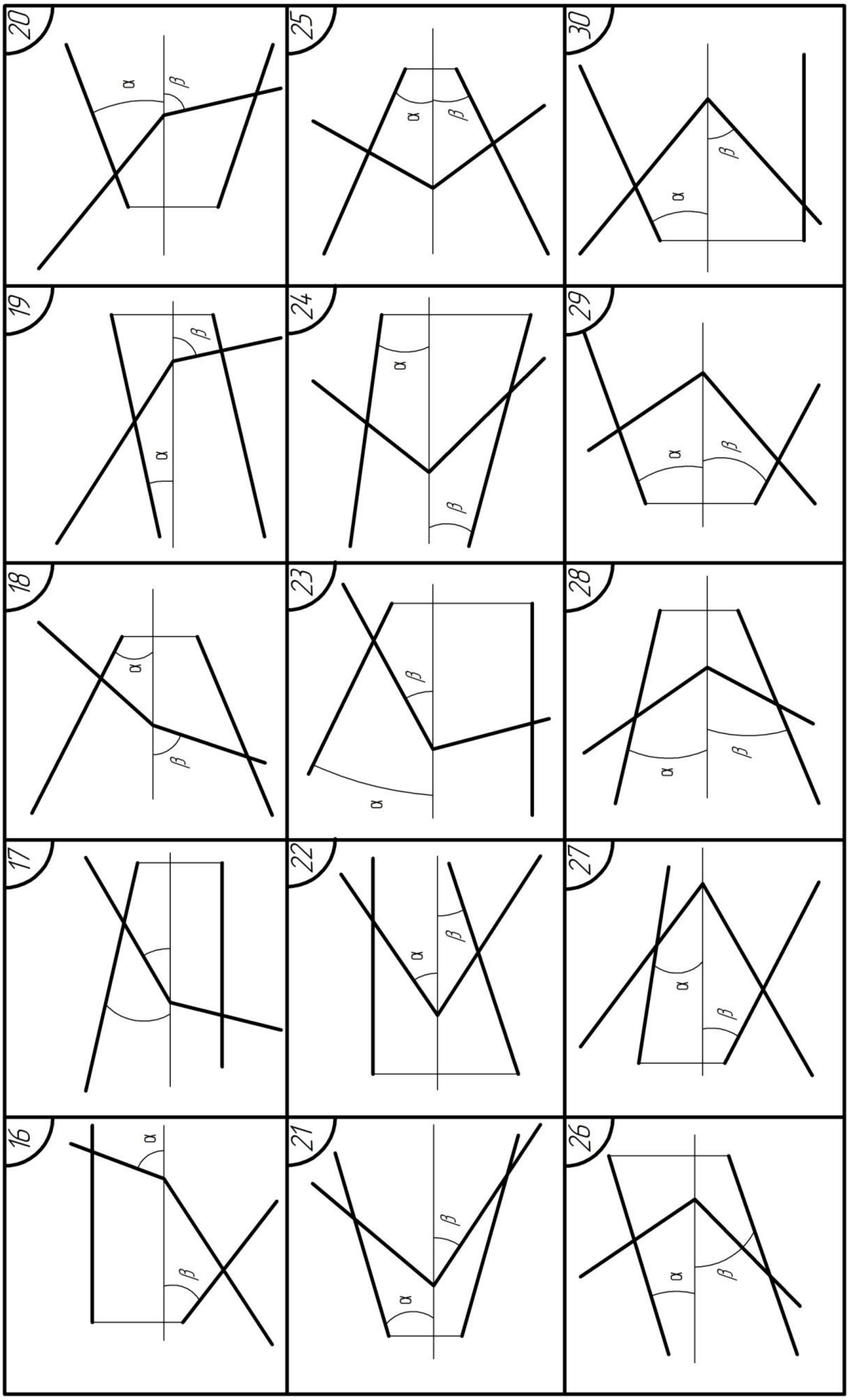


Рис. 3.1. Варіанти до завдання 3

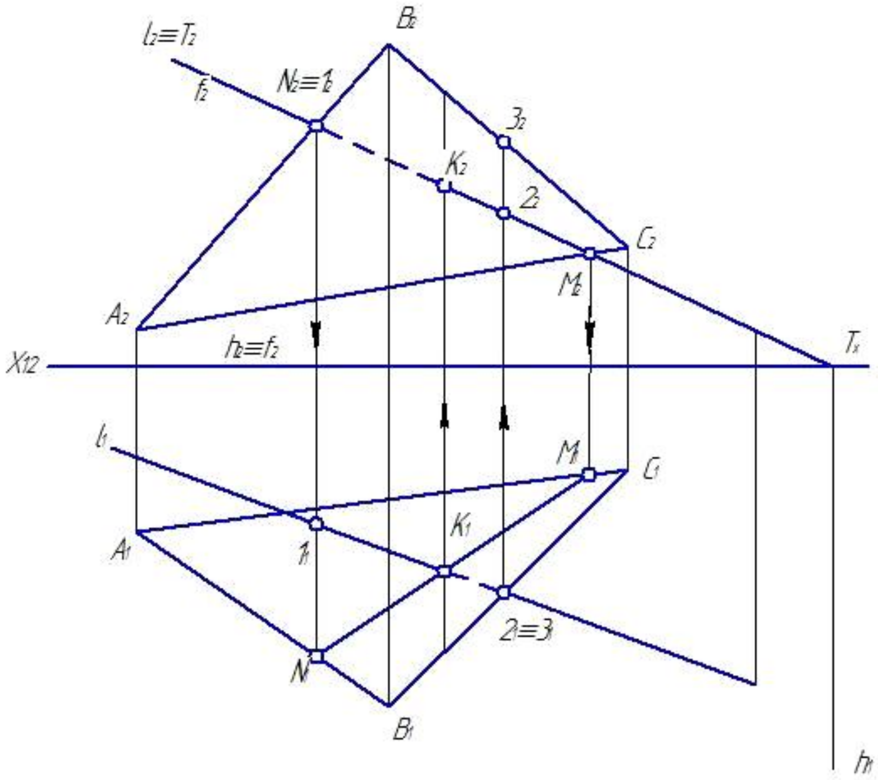


Рис. 3.3. Знаходження точки перетину прямої і площини, заданої трикутником

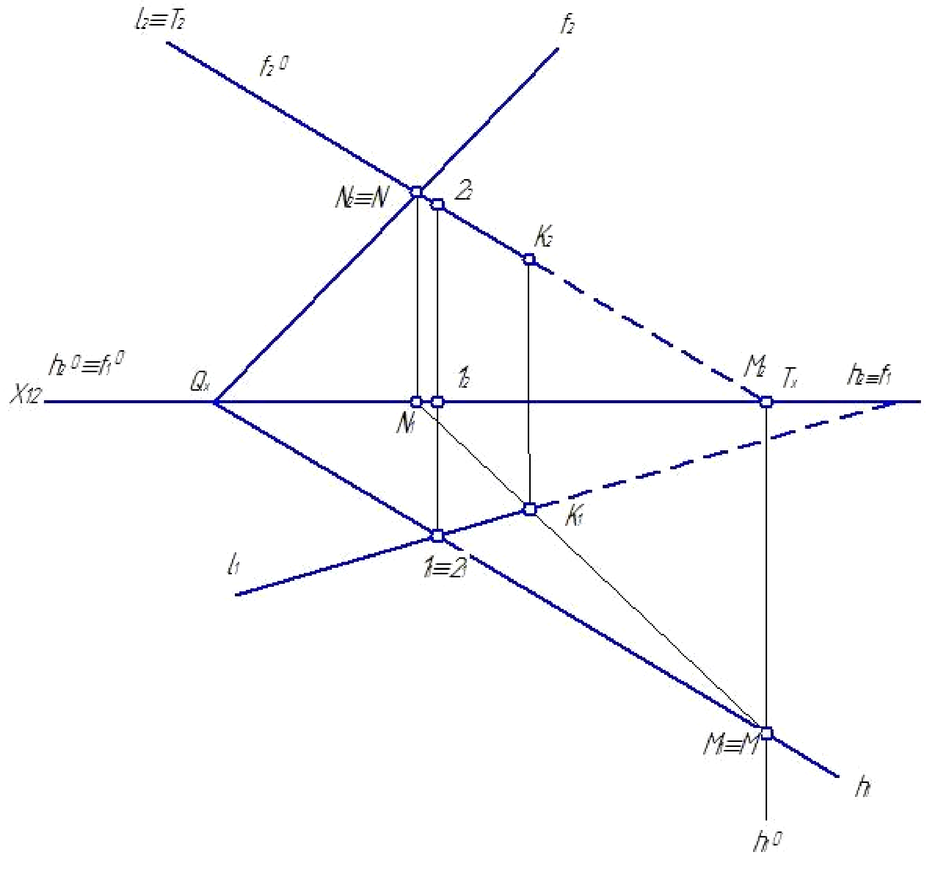


Рис. 3.4. Знаходження точки перетину прямої і площини, заданої слідами

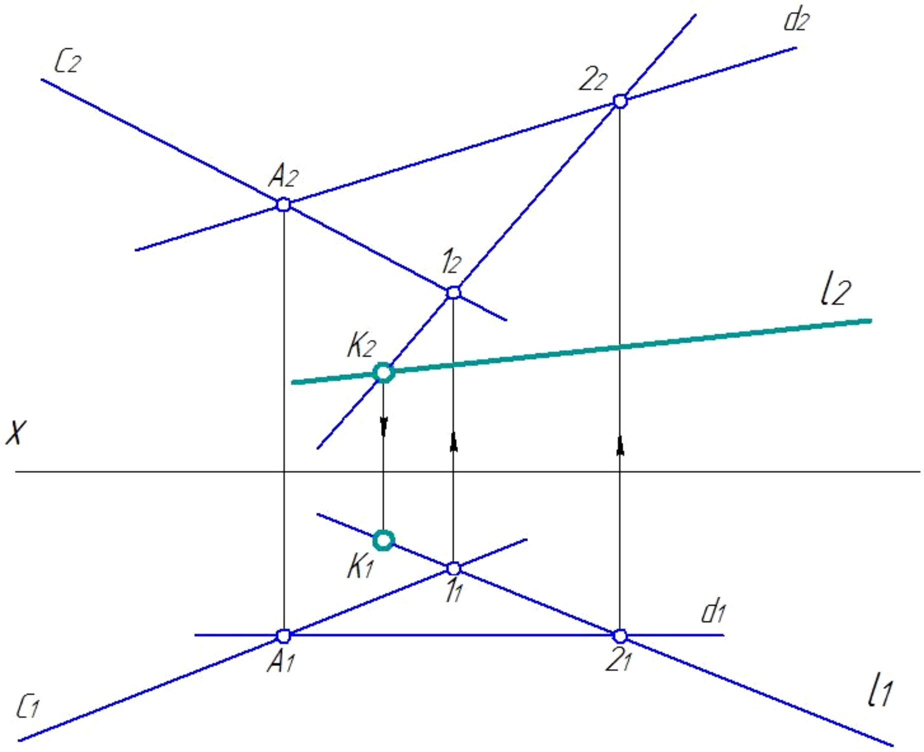


Рис. 3.5. Знаходження точки перетину прямої і площини, заданої двома прямими, що перетинаються

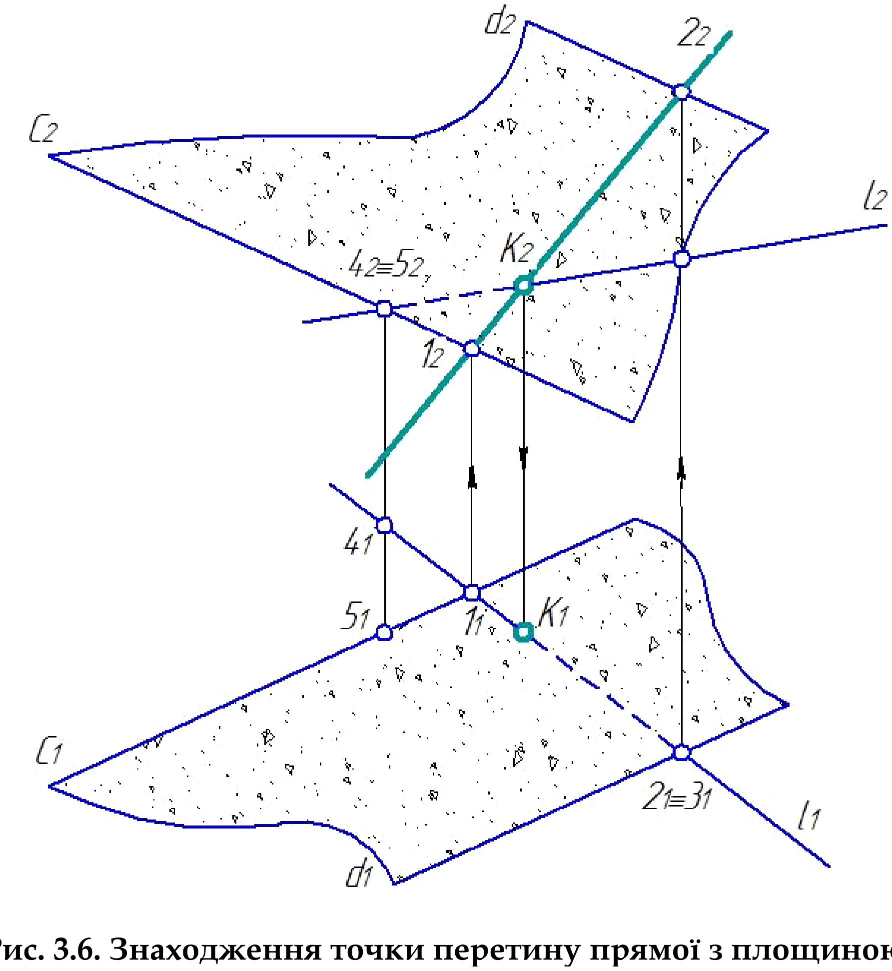


Рис. 3.6. Знаходження точки перетину прямої з площиною, заданою двома паралельними прямими.

Завдання №4
ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ. СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Умова. На заданому багатограннику визначити найкоротшу відстань між вказаними мимобіжними ребрами (див рис. 3).

Найкоротшою відстанню буде перпендикуляр між цими ребрами. Для визначення перпендикуляра одне з ребер повинно спроекціюватись спочатку на паралельну площину, а потім – на перпендикулярну.

У побудові, показаній на рис.4.1, одне з мимобіжних ребер *(CS)* двома замінами спроекційовано в точку на іншу площину проекцій $П_5$ в наступній послідовності:

1. Від системи площин проекцій $П_1П_2$ переходимо способом заміни площин проекцій до системи $П_1$ $П_4$, де $П_4 \perp П_1$ і $П_4 // C_1S_1$.
2. Від системи $П_1П_4$ способом заміни площин проекцій переходимо до системи $П_4П_5$, де $П_5 \perp П_4$ і $П_5 \perp C_4S_4$. Отримавши на площині проекцій $П_5$ проекцію ребра *CS* та провівши із C_5S_5 перпендикуляр до A_5B_5 знаходимо шукану відстань між заданими мимобіжними ребрами *AB* і *CS.*

На рис.4.1 показана побудова проекцій загального для *AB* і *CS* перпендикуляра.

Слід пам'ятати – якщо одна зі сторін прямого кута паралельна до деякої площини, проекція даного прямого кута на цю площину являє собою також прямий кут. Тому проекція на $П_5$ прямого кута, сторонами якого є згаданий перпендикуляр до мимобіжних прямих і пряма *AB* також повинна являти собою прямий кут.

Крім того, варто враховувати, що будь-яка точка прямої *CS* проекціюється на $П_5$ у точку ($C_5 \equiv S_5$), у тому числі і точка *F*, що належить шуканому перпендикуляру до мимобіжних прямих.

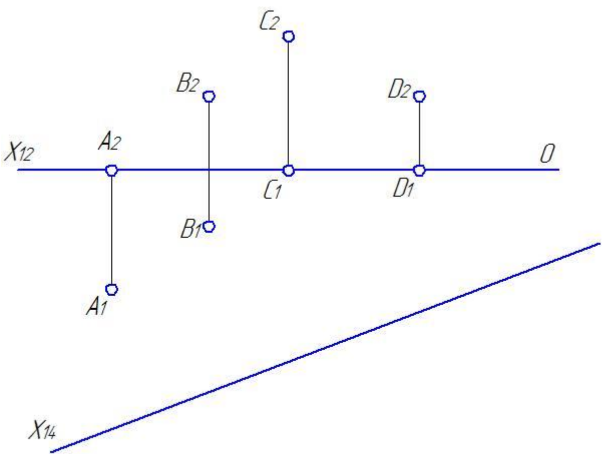
На цій підставі опускаємо з точки $C_5 \equiv S_5 \equiv F_5$ перпендикуляр на A_5B_5. Отриманий прямий кут F_5 K_5 A_5 і є проекцією на $П_5$ прямого кута між перпендикуляром до обох мимобіжних прямих - і *CS* і прямої *AB*.

Хід побудови позначений стрілками, проекція K_4F_4 проведена перпендикулярно S_4C_4.

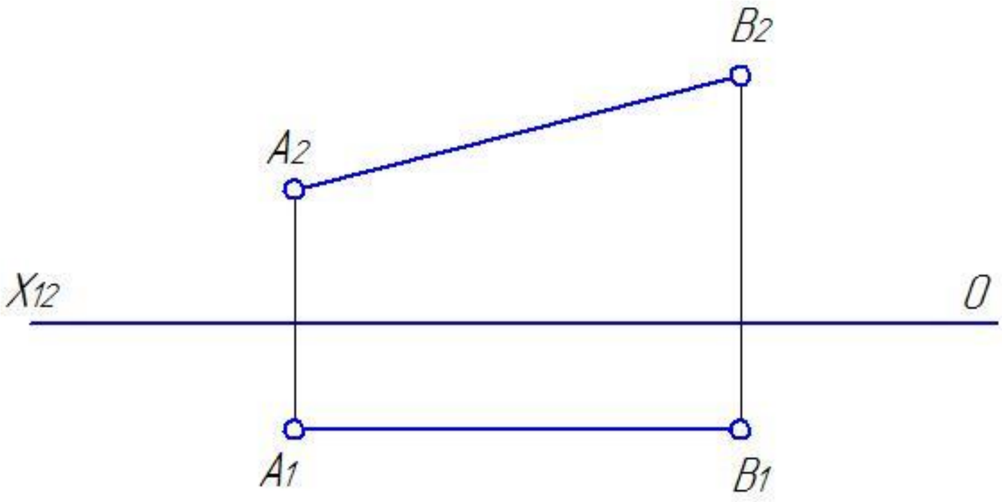
Довжина перпендикуляра *FK* і є шуканою відстанню між мимобіжними ребрами *AB* та *CS.* Побудова горизонтальної і фронтальної проекцій цього перпендикуляра F_1K_2 і F_2K_2 виконується за допомогою ліній проекційного зв'язку по стрілках, як зазначено на рис 4.1.

Завдання для самостійного опрацювання

4.1. Побудуйте проекції точок *A,B,C,D* на площину *П4.*



4.2. Побудуйте нову площину проекцій так, щоб пряма *AB* спроекціювалась в точку.



Контрольні питання

1. Розкрийте сутність способу заміни площин проекцій, у якому взаємозв'язку повинні бути наявна і нова площини проекцій?.
2. Які перетворення необхідно виконати, щоб зробити пряму загального положення – проектуючою?
3. Які перетворення необхідно виконати, щоб зробити площину загального положення – площиною рівня?

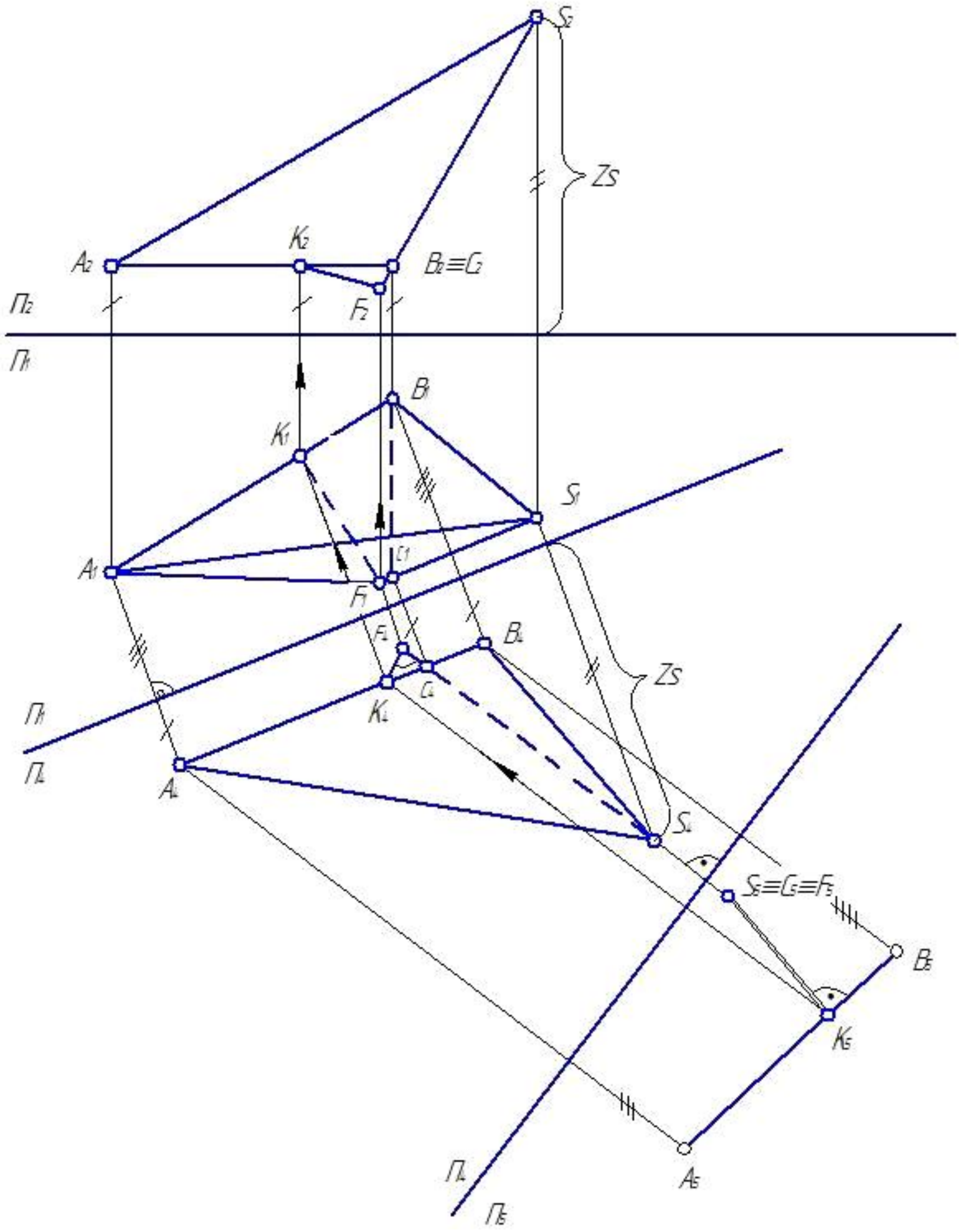


Рис. 4.1. Приклад визначення найкоротшої відстані між ребрами багатогранника

Завдання № 5

ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ СПОСОБОМ ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ

Умова. У заданому багатограннику визначити натуральний розмір двогранного кута при ребрі загального положення (у прикладі – *AS),* (завдання -див. рис. 3).

Мірою двогранного кута є кут, сторони якого розташовані відповідно на гранях двогранного кута і перпендикулярні до його ребра. Для визначення розміру двогранного кута його необхідно спроекціювати на площину, перпендикулярну до його ребра. При цьому лінійний кут при даному ребрі виявиться паралельним до площини проекцій і спроекціюється на неї в натуральну величину.

Площину, перпендикулярну до ребра, можна побудувати так само, як, наприклад, у завданні №4 – методом заміни площин проекцій, при якому положення самого тіла змінюється. Але можна, навпаки, залишити нерухомими площини проекцій, а переміщати тіло до потрібного положення. У даному випадку можна перемістити двогранний кут у положення, при якому його ребро виявиться перпендикулярним до однієї з площин проекцій шляхом двох послідовних плоскопаралельних переміщень.

Нагадаємо, що при плоскопаралельному переміщенні тіла його точки переміщуються в площинах, паралельних деякій площині, наприклад $П_1$. Проекція тіла на цю площину не змінює свою величину і форму, а змінює тільки положення, проекції точок тіла на перпендикулярну площину $(П_2)$ переміщуються по прямолінійних траєкторіях, паралельних вісі проекцій.

Відповідно до цього в прикладі на рис. 5.1 спочатку переміщуємо піраміду плоскопаралельно відносно $П_1$ до положення, при якому ребро *SA* виявиться паралельним $П_2$ (стане фронтальною прямою). При цьому його горизонтальна проекція S_1A_1, зберігши свій розмір, розташується паралельно до осі проекцій. Добудовуємо на ній горизонтальну проекцію піраміди в новому положенні – без зміни розмірів і форми.

Проводячи лінії зв'язку з отриманих вершин до перетину з горизонтальними траєкторіями переміщень фронтальної проекції вершин піраміди, одержуємо фронтальну проекцію піраміди в новому положенні.

Друге плоскопаралельне переміщення робимо щодо площини $П_2$ – до положення, в якому ребро *SA* виявиться перпендикулярним до площини $П_1$. При цьому його фронтальна проекція повинна бути перпендикулярна до осі проекцій, а горизонтальна буде являти собою точку. Тому вертикально креслимо відрізок $\overline{\overline{S}}_2\ \overline{\overline{A}}_2$, рівний за розміром $\overline{S}_2\ \overline{A}_2$ і на ньому без зміни величини і форми добудовуємо фронтальну проекцію піраміди у вигляді, який отримали після першого переміщення.

Горизонтальну проекцію після другого переміщення будуємо тільки для двогранного кута, який нас цікавить. Він утворюється, як і в першому випадку, за допомогою ліній зв'язку траєкторією переміщення горизонтальних вершин піраміди з положення, у якому він виявився після першого переміщення.

Як видно з побудови, горизонтальна проекція двогранного кута при ребрі *SA* перетворилась в кут α, рівний лінійному куту, що визначає розмір шуканого двогранного кута.

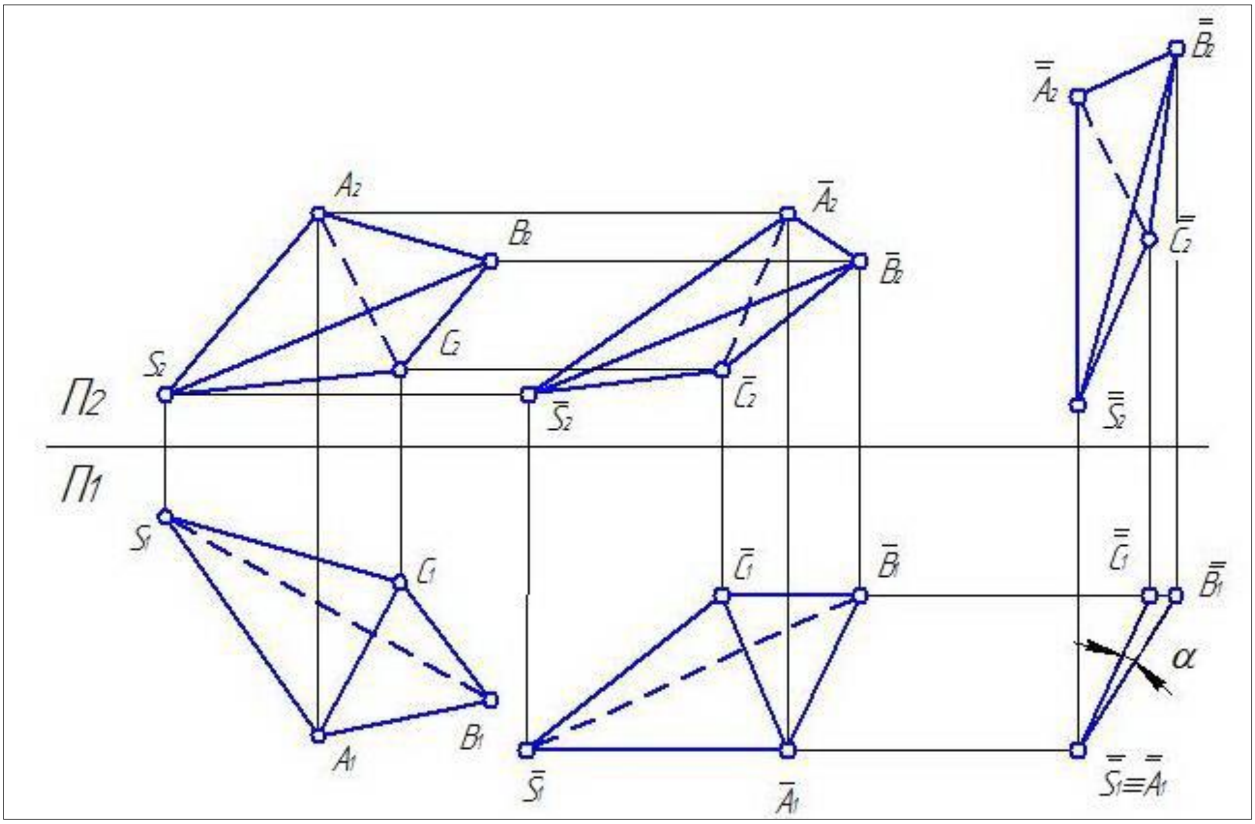
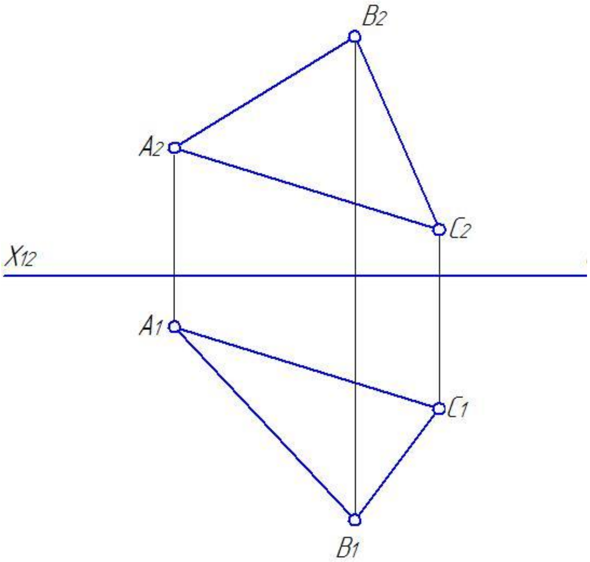


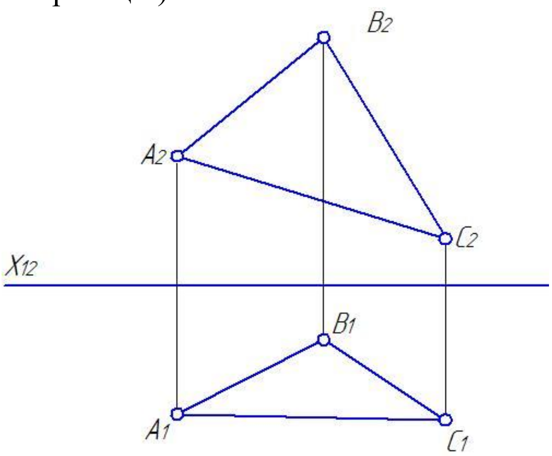
Рис. 5.1 Визначення розміру двогранного кута при ребрі *AS*.

Завдання для самостійного опрацювання

5.1. Проведіть лінії рівня (горизонталь і фронталь) у площині Δ*ABC*



5.2. Проведіть горизонталь Δ*ABC* через точку *A* та способом плоско-паралельного переміщення визначте натуральну величину трикутника (перевівши спочатку у положення, перпендикулярне до однієї з площин проекцій)



Завдання № 6

ДВІ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ

Умова. Через пряму l провести площину, перпендикулярну до заданої площини загального положення. Побудувати проекції куга між прямою і площиною (рис. 6.4, табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Кут / №	1	2	3
α^0	30	45	60
β^0	60	30	45

Завдання є комплексним. Воно включає задачі на побудову перпендикуляра до площини, на перетин прямої з площиною та перетин двох площин між собою.

Знаходження лінії перетину двох площин зводиться до знаходження двох точок, що визначають цю лінію. Кожна така точка є результатом перетину прямої однієї площини іншою площиною. Видимість частин відсіку площини визначають за уявою і перевіряють "конкуруючими" точками.

Дві площини будуть перпендикулярними, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до іншої або перпендикулярна до прямої, яка належить першій площині. Таким чином, побудова взємоперпендикулярних площин зводиться до побудови взаємоперпендикулярних прямої і площини.

На рис.6.1 показана побудова площини β через пряму l перпендикулярно до заданої площини α ($m /\!/ n$). Для побудови цього перпендикуляра в площині α ($m /\!/ n$) через довільну точку 1 проведені горизонталь і фронталь, перпендикулярно до яких проведено перпендикуляр площини β.

На рис 6.2 показані горизонтально-проекціююча площина α і площина загального положення β, у яких горизонтальні сліди перпендикулярні між собою. Якщо площина α перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій Π_1 і до площини β, то $\alpha \perp \beta^\circ_1$, як до лінії перетину площини β і площини Π_1, тому $\beta^\circ_1 \perp \alpha$, а значить $\beta^\circ_1 \perp \alpha^\circ_1$.

<u>Приклад.</u> Через пряму l провести площину, перпендикулярну до заданої трикутником AKL площини загального положення. (Рис. 6.3) Побудувати проекції куга між прямою і площиною.

Для побудови площини, перпендикулярної до заданої, проведемо пряму p, яка буде мати довільну спільну точку (а значить перетинатись) з заданою прямою l (візьмемо т. A) так, щоб горизонтальна проекція прямої була перпендикулярною до горизонтальної проекції горизонталі площини α, а фронтальна проекція – перпендикулярною до фронтальної проекції фронталі площини α. Для цього попередньо проводимо у площині α горизонталь $h(h_1h_2)$ та фронталь $f(f_1f_2)$

Кут AMN прямої l з площиною α утворено самою прямою та її прямокутною проекцією на площину α, тобто лінією перетину проведеної площини з даною. Для знаходження лінії перетину необхідно знати мінімум дві спільні точки для цих двох площин. На рис.6.1 для знаходження таких точок через пряму l проводять уявну фронтально-проектуючу площину δ ($\delta_2 \equiv l_2$), відмічають точки перетину B_2 і C_2 зі сторонами A_2L_2 та K_2L_2. За лініями проекційного зв’язку опускаємось вниз, на горизонтальну площину проекцій і на відповідних сторонах відмічаємо точки B_1 і C_1. На перетині прямої B_1C_1 з проекцією l_1 Отримуємо т. M_1 – горизонтальну проекцію першої спільної точки для двох перпендикулярних площин. За проекційним зв’язком отримуємо т. M_2. Проекції другої точки N знаходять аналогічно. Кут AMN і буде шуканим кутом між прямою і площиною.

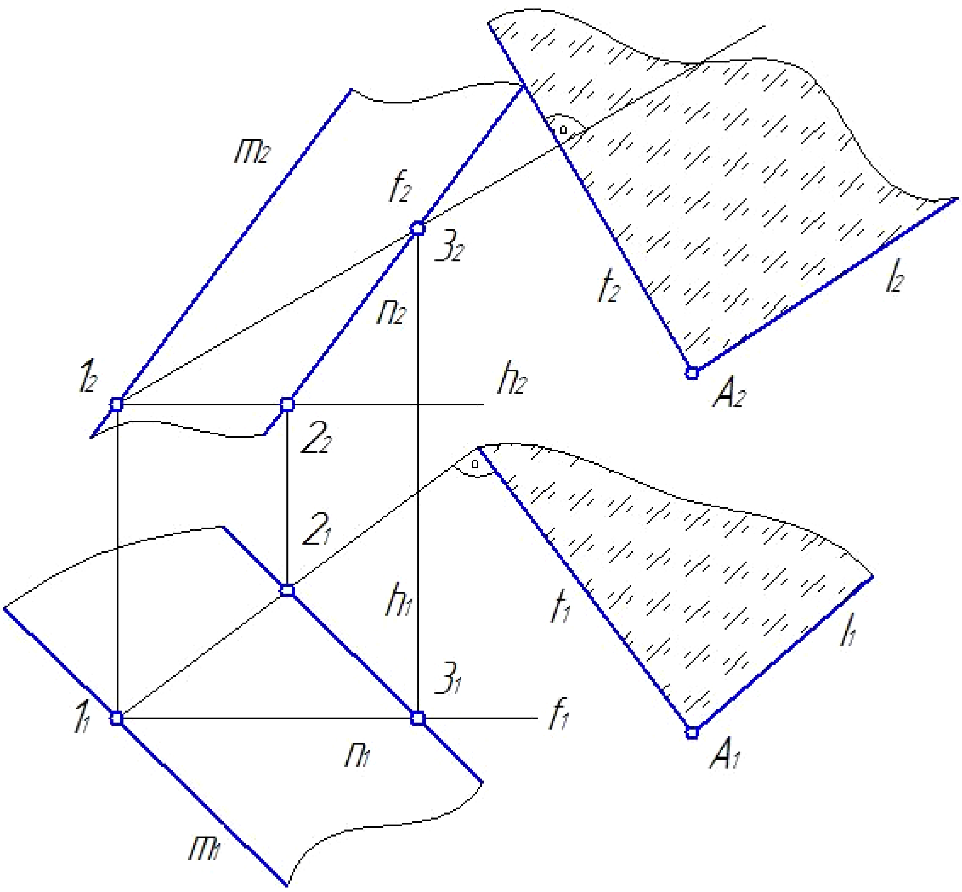


Рис. 6.1. Приклад побудови площини через пряму *l*
перпендикулярно площини, заданої двома паралельними прямими *a* (*m*∥*n*)

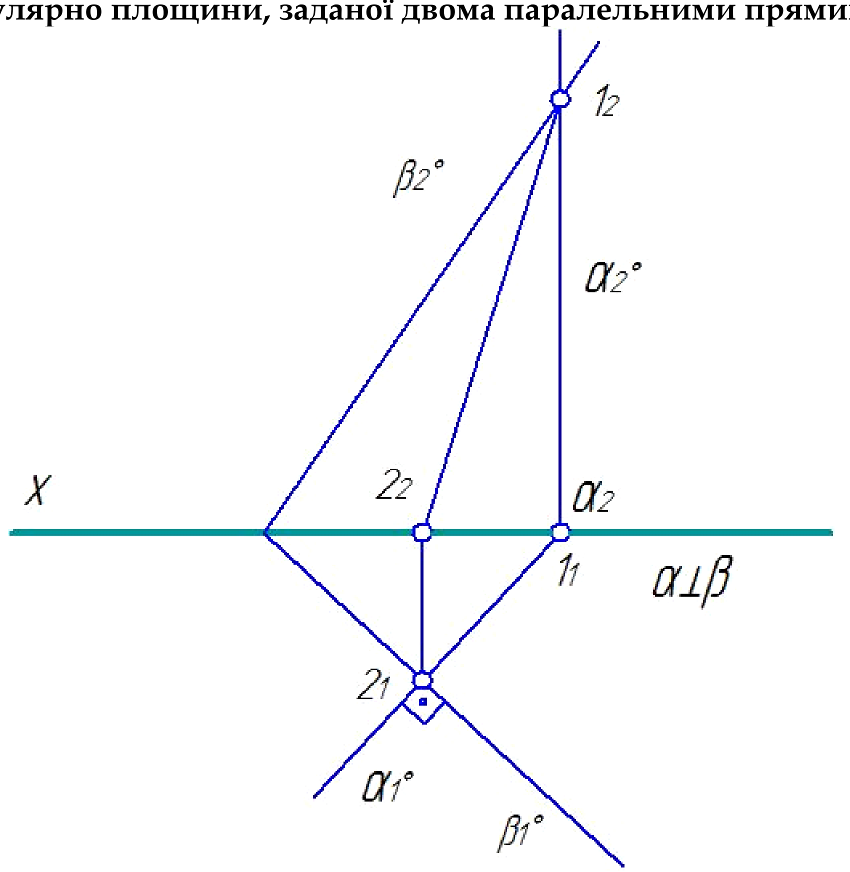
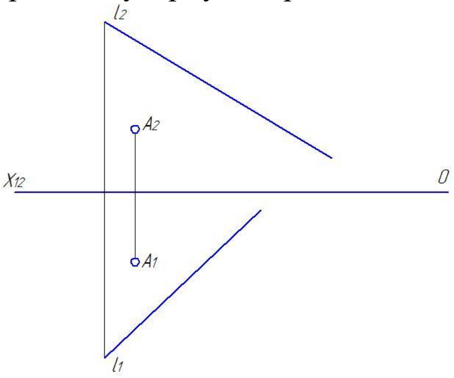


Рис. 6.2. Приклад побудови площини, перпендикулярної до площини,
заданої слідами

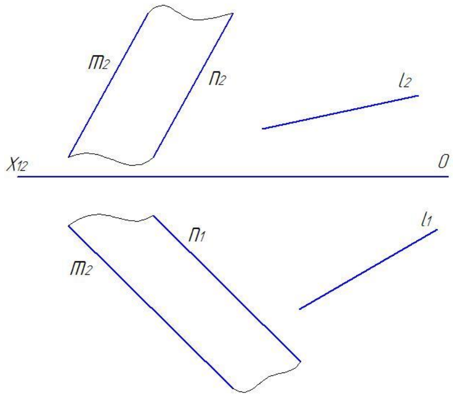
Завдання для самостійного опрацювання

6.1. Через точку *A* провести площину, перпендикулярну до прямої *l*.



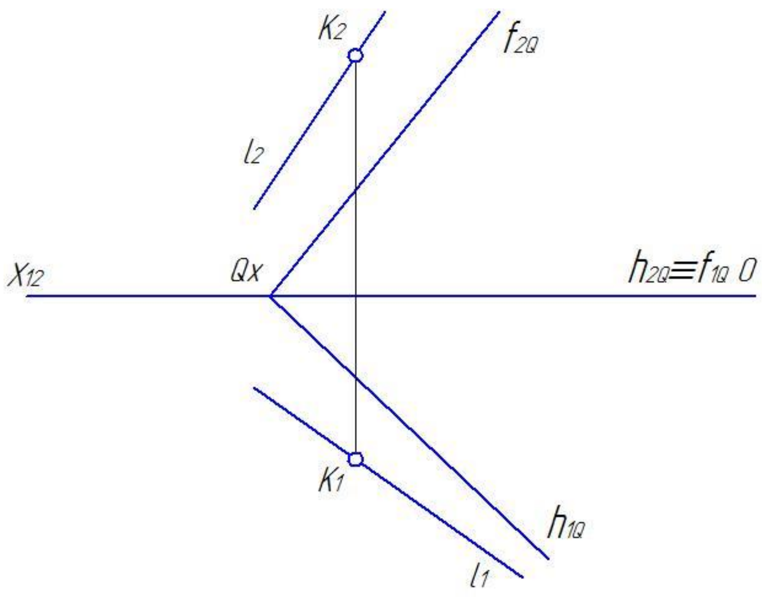
Площина, перпендикулярна до прямої, на епюрі задається горизонталлю і фронталлю, причому горизонтальна проекція горизонталі перпендикулярна до горизонтальної проекції прямої l_1, а фронтальна проекція фронталі до l_2.

6.2. Через пряму *l* провести площину, перпендикулярну до площини, заданої прямими $(m \,/\!/\, n)$



Для розв'язання необхідно побудувати горизонталь і фронталь площини.

6.3. Через пряму *l* провести площину, перпендикулярну до площини *Q*



Контрольні питання

1. Назвіть умову задання площини, перпендикулярної до даної?
2. Яка послідовність отримання проекції кута між прямою загального положення та площиною загального положення?
3. Вкажіть послідовність побудувати проекції перпендикуляра до заданої площини, проведеного з точки, що не належить цій площині?
4. Назвіть загальний алгоритм побудови проекції лінії перетину двох площин?

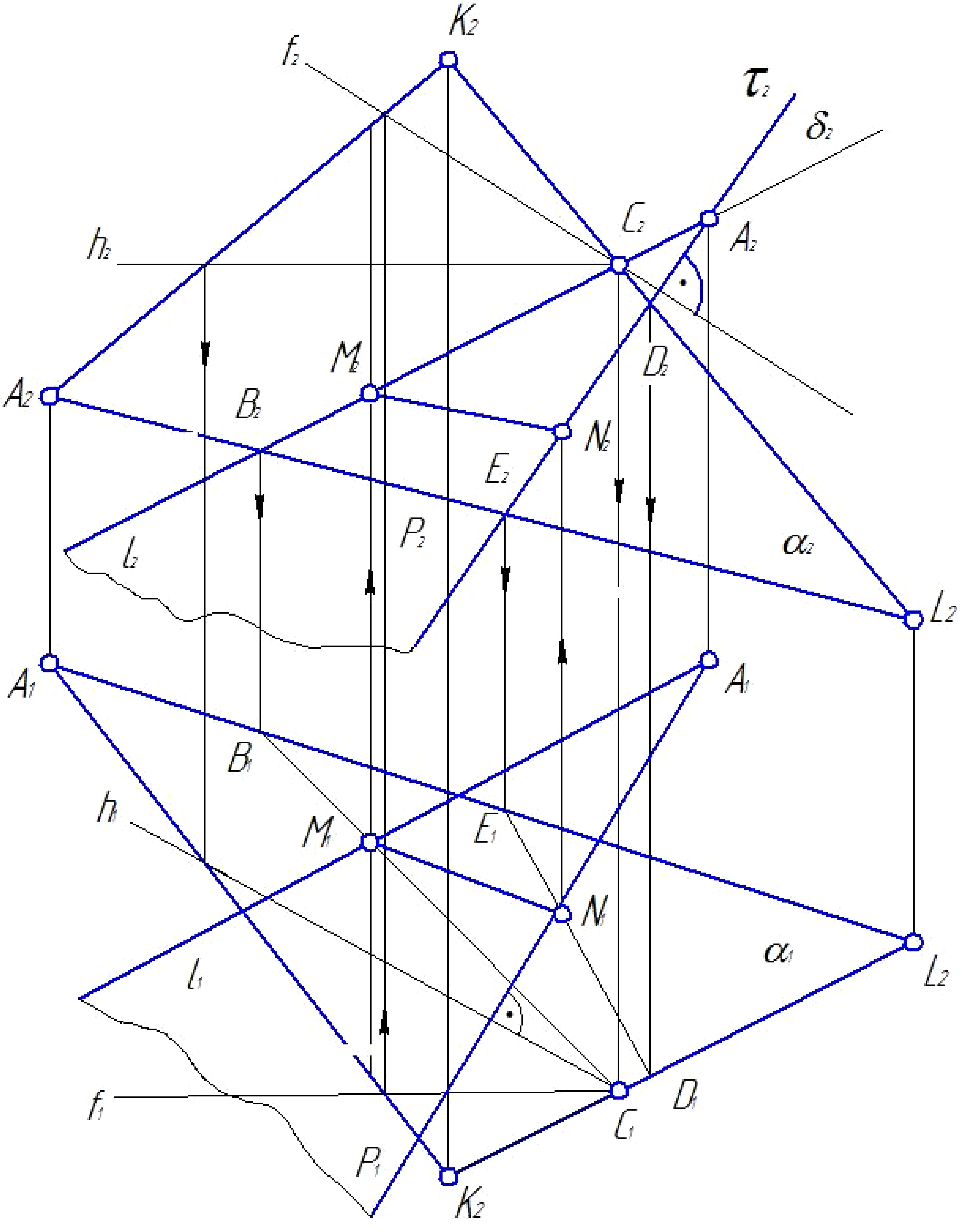


Рис. 6.3. Приклад побудови двох взаємно перепендикулярних площин

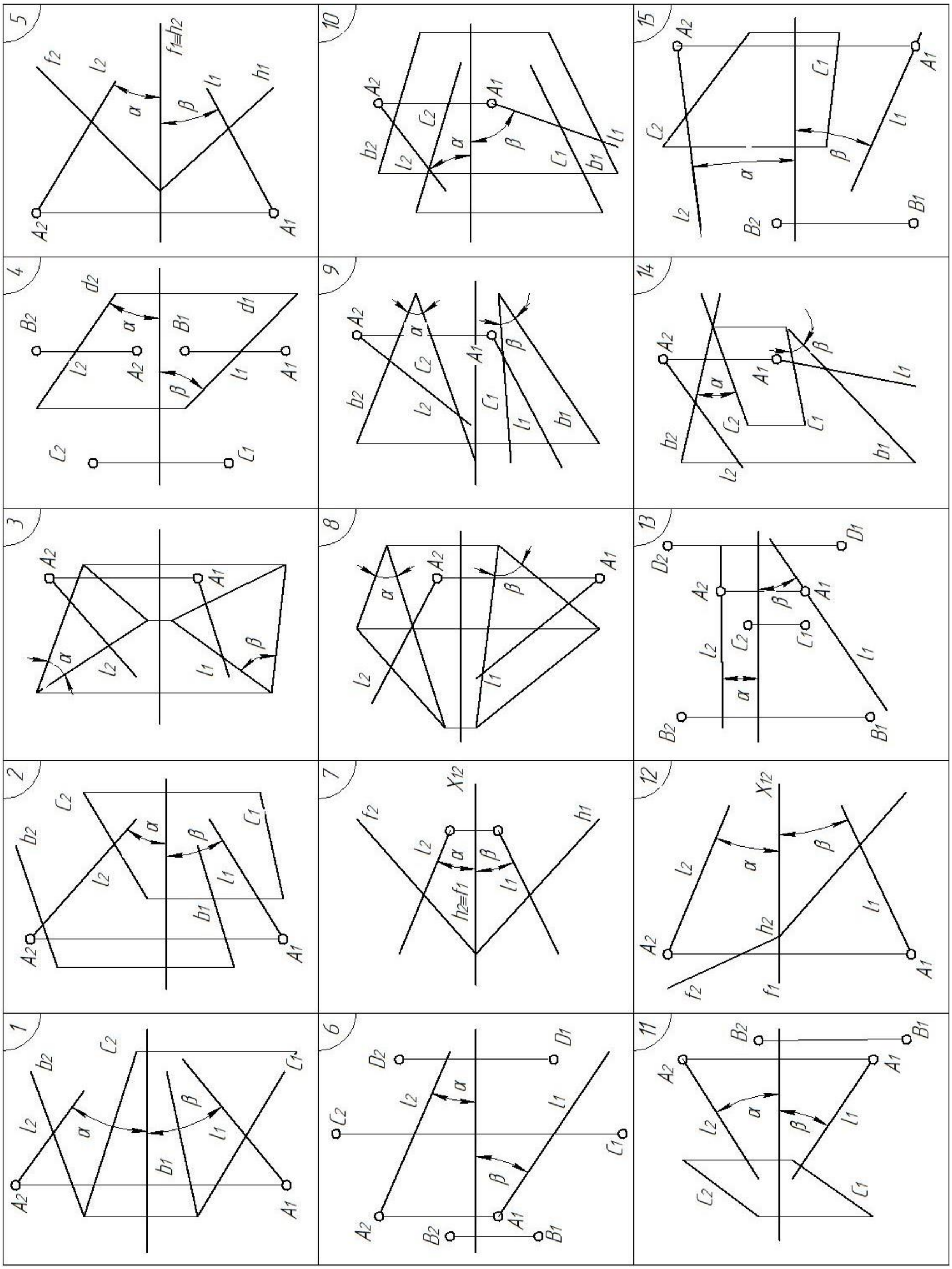


Рис. 6.4. Варіанти до завдання 6

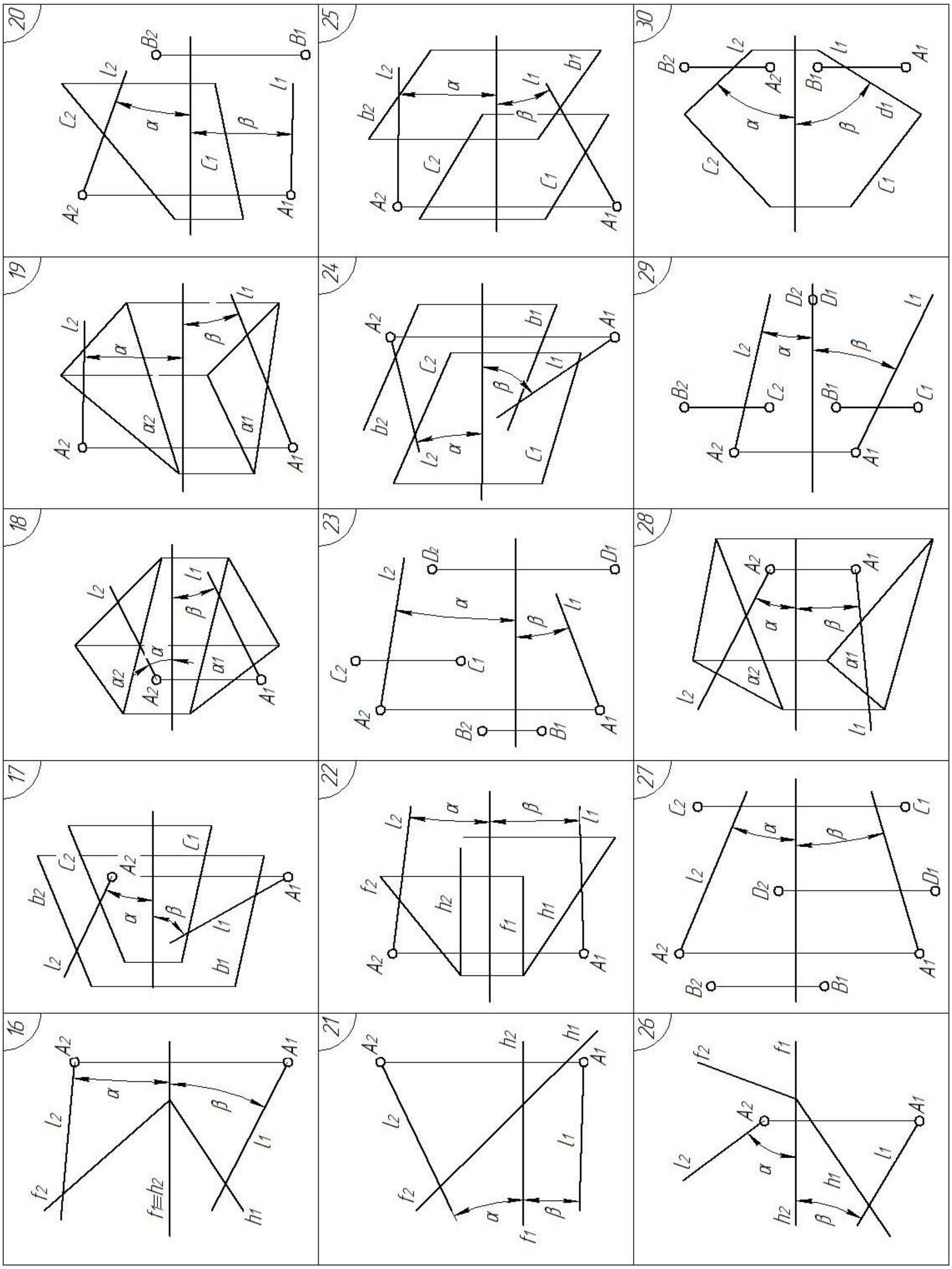


Рис. 6.4. Варіанти до завдання 6

Завдання №7

МЕТОД ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ЛІНІЙ РІВНЯ (ГОРИЗОНТАЛІ АБО ФРОНТАЛІ)

Умова. Методом обертання навколо лінії рівня встановити натуральну величину трикутника (рис. 7.1, табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Кут / №	1	2	3	4	5	6
α^0	30	45	60	45	30	30
β^0	30	30	45	45	60	45

При обертанні точки навколо осі, що є лінією рівня, наприклад, горизонталі, радіус обертання утворює з віссю обертання прямий кут, одна сторона якого (горизонтальна пряма) паралельна до площини проекцій $П_1$ і при обертанні залишається нерухомою.

Проекція плоского прямого кута, одна сторона якого паралельна до площини проекцій, являє собою також прямий кут. Тому прямий кут, утворений віссю обертання (в даному випадку це горизонтальна пряма) і радіусом обертання точки, у всіх положеннях при обертанні буде проектуватися на $П_1$ також у вигляді прямого кута, і тому траєкторія горизонтальної проекції точки при обертанні навколо горизонтальної прямої буде перпендикулярна до горизонтальної проекції цієї горизонтальної прямої.

Аналогічно, при обертанні точки навколо фронтальної прямої, траєкторія переміщення фронтальної проекції точки буде прямою, перпендикулярною до фронтальної проекції фронтальної прямої вісі обертання.

Обертання плоскої фігури навколо будь-якої горизонталі площини цієї фігури можна здійснити обертанням точок, що належать цій фігурі, наприклад вершин Якщо обертається трикутник, відповідно, положення площини можна визначити положенням трьох точок цієї площини.

Якщо потрібно встановити за двома заданими проекціям трикутника його натуральну величину – варто обертати його навколо лінії рівня, наприклад горизонталі, до положення, при якому площина цього трикутника виявиться паралельною до горизонтальної площині проекцій $П_1$.

<u>Приклад.</u> Обертанням навколо горизонталі площини ΔABC встановити натуральну величину цього трикутника (рис. 7.2).

Проведемо будь-яку горизонталь у площині ΔABC, наприклад, через вершину C горизонталь CD (C_2D_2, C_1D_1). Далі обертаємо послідовно вершини $\Delta\ ABC$ до положення, при якому радіуси обертання вершин займуть горизонтальне положення.

Очевидно, при цьому площина ΔABC виявиться горизонтальною, і трикутник спроекціюється на площину $П_1$ у натуральну величину.

Розглянемо побудову на прикладі обертання вершини B. Проведемо з точки B_1 пряму перпендикулярно до горизонтальної проекції h_1 горизонталі B_1D_1, що є віссю обертання, потім відповідно на фронтальній проекції. Відрізок B_1E_1 цієї прямої є горизонтальною проекцією радіуса обертання точки B. Фронтальну проекцію цього радіуса B_2E_2 будуємо, проводячи лінію зв'язку з точки E_1 до перетину з фронтальною проекцією вісі обертання C_2D_2. Точка E – центр обертання вершини B.

Як зазначено вище, при обертанні точки навколо горизонтальної прямої її горизонтальна проекція переміщується перпендикулярно до горизонтальної проекції осі обертання, тобто в даному випадку буде переміщуватись по прямій, що визначається відрізком B_1E_1. При повороті до положення, у якому радіус обертання точки B виявиться паралельним до $П_1$, цей радіус спроекціюється на $П_1$ у натуральну величину.

Отже, якщо на прямій, що є траєкторією переміщення горизонтальної проекції точки *B* при повороті, відкласти від горизонтальної проекції осі обертання C_1D_1, натуральну величину радіуса повороту, буде визначена горизонтальна проекція точки *B* у тому положенні, до якого ми прагнемо.

Натуральна величина радіуса повороту точки *B* за наявними двома його проекціями (B_1E_1 і B_2E_2) може бути отримана будь-яким відомим способом. На рис. 7.2 використаний спосіб прямокутного трикутника. На перпендикулярі до горизонтальної проекції радіуса повороту B_1E_1 відкладена різниця відстаней кінців його фронтальної проекції до осі проекцій Δz. Гіпотенуза отриманого прямокутного трикутника $B_1E_1B_0$ і буде натуральною величиною радіуса обертання точки *B*.

Цей розмір відкладений на траєкторії переміщення горизонтальної проекції точки *B* при повороті, і в такий спосіб отримана точка $\overline{B1}$ – горизонтальна проекція точки *B* при повороті її на необхідний кут.

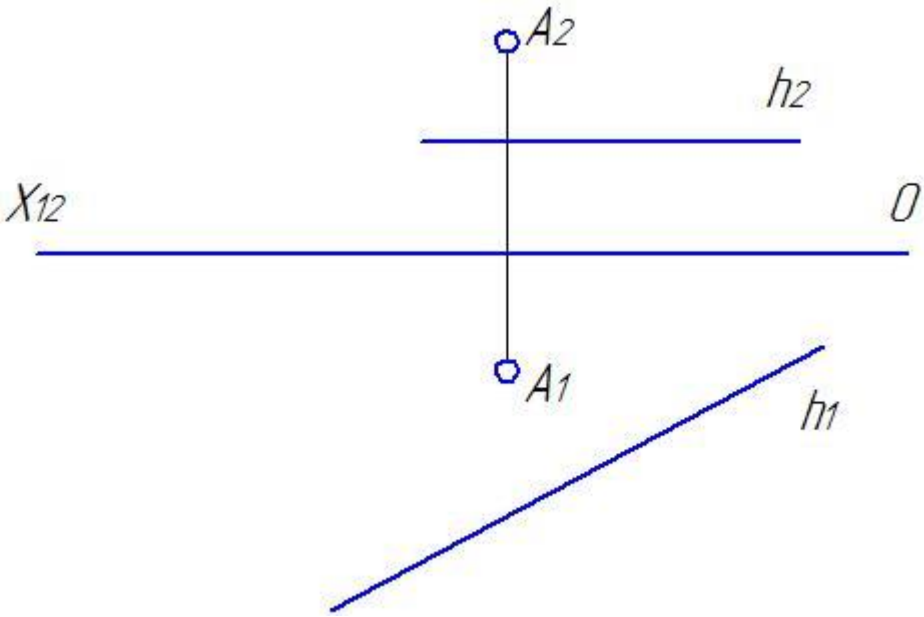
Аналогічними побудовами отримуємо точку $\overline{A1}$.

Точка C_1 лежить на осі обертання і тому при обертанні $\Delta\ ABC$ не переміщується.

З'єднуючи отримані точки отримуємо $\Delta\overline{A1B1C1}$, що являє собою горизонтальну проекцію $\Delta A_1B_1C_1$ у положенні, при якому його площина паралельна до площини Π_1 і, відповідно, визначає натуральну величину цього трикутника.

Завдання для самостійного опрацювання

7.1. Перевести точку *A* в нове положення шляхом обертання її навколо горизонталі *h*.



Контрольні питання

1. Яким способом можна визначити натуральну величину радіуса повороту точки при обертанні її навколо лінії рівня?
2. Як можна визначити траєкторію переміщення проекції точки, що обертається навколо лінії рівня, на площину проекцій, паралельну осі обертання?
3. Які типи задач, на Вашу думку, можна вирішувати методом обертання навколо ліній рівня?

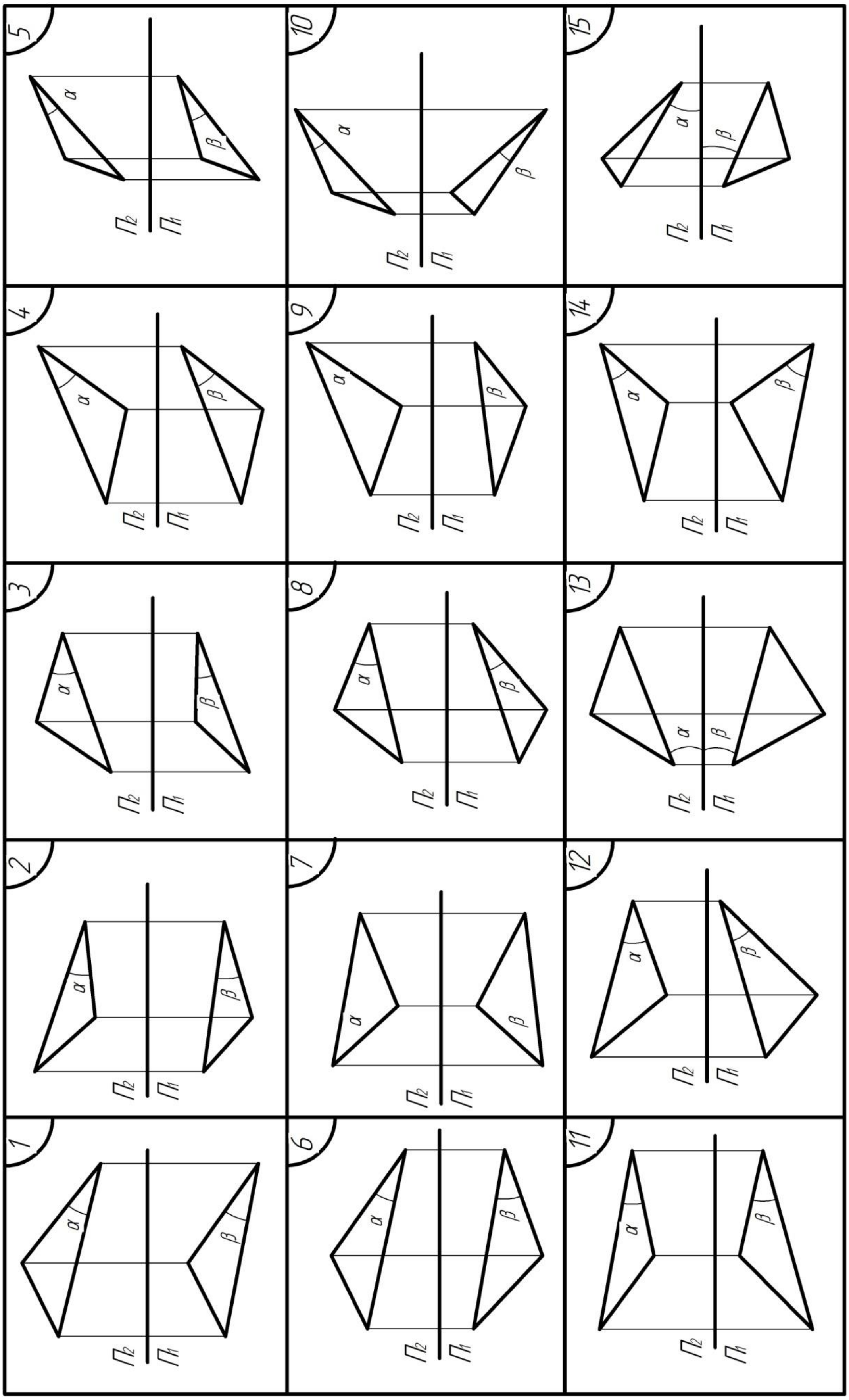


Рис. 7.1. Умова до завдання 7

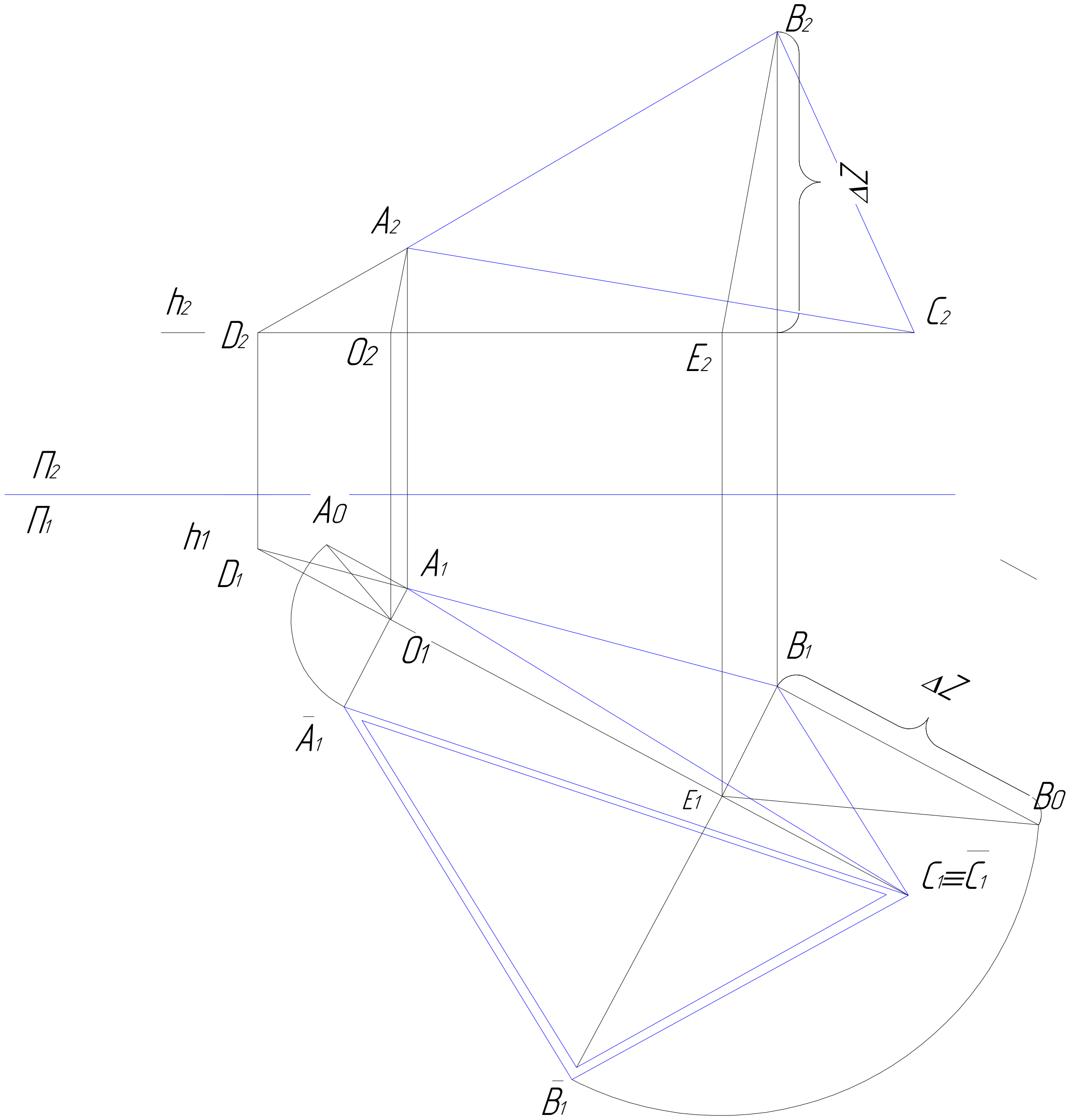


Рис. 7.2. Приклад знаходження натуральної величини трикутника щляхом обертання його навколо горизонталі

Завдання №8

ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННОЇ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ

Умова. Побудувати проекції ліній перерізу многогранної поверхні площиною загального положення. Визначити натуральну величину фігури перерізу (рис. 8.1, табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Кут / №	1	2	3	4	5	6
α^0	30	45	60	45	60	60
β^0	45	60	30	45	30	45

При перерізі многогранника площиною утворюється многокутник, який лежить у січній площині. Вершини цього многокутника належать ребрам, а сторони – граням многогранника.

Для побудови проекцій фігури перерізу многогранника використовується задача на знаходження точки перетину прямої з площиною або побудова лінії перетину двох площин.

В першому випадку задачу на знаходження проекцій фігури перерізу можна звести до багаторазового знаходження точок перетину ребер многогранника з січною площиною, а в другому – до задачі на знаходження ліній перетину площин (граней многогранника і січної площини).

Приклад 1. Побудувати проекції лінії перерізу поверхні піраміди площиною загального положення, заданою трикутником *ABC.* Визначити натуральну величину фігури перерізу (рис. 8.2).

Визначимо точки перетину ребер піраміди із січною площиною. В загальному випадку при побудові точки перетину прямої із площиною через цю пряму проводять допоміжну площину, знаходять лінію перетину заданої і допоміжної площин і визначають шукану точку як точку перетину знайденої лінії (перетину площин) із заданою прямою.

Проведемо, наприклад, через ребро *SD* допоміжну фронтально-проектуючу площину *T1* (f_{T1}- її фронтальний слід) і побудуємо лінію перетину цієї площини із січною площиною ΔABC. Точка M_2 – фронтальна проекція точки перетину площини *T1* зі стороною *AC* трикутника *ABC.* Горизонтальна проекція цієї точки M_2 визначається за допомогою лінії зв'язку на горизонтальній проекції відрізка *AC.*

Точки N_2 і N_1 – відповідно фронтальна і горизонтальна проекції точки перетину площини *T1* зі стороною *AB* трикутника *ABC.* Точки перетину сторін *AC* і *AB* цього трикутника з площиною *T1* належать прямій лінії перетину площини трикутника з площиною *T1.*

З'єднуючи горизонтальні проекції точок *M* і *N* прямою, одержуємо відрізок горизонтальної проекції лінії перетину (відрізок M_1N_1).

Точка K_1, у якій відрізок M_1N_1, перетинає горизонтальну проекцію ребра *SD* є горизонтальною проекцією шуканої точки перетину ребра *SD* з січною площиною ΔABC. Фронтальна проекція цієї точки K_2 визначається за лінією проекційного зв'язку.

Точки перетину ребер *SE* і *SF* із січною площиною (відповідно точки *P* і *L*) визначаються аналогічно. При знаходженні цих точок через ребра *SE* і *SF* проводять допоміжну площину *T2,* яка проходить через грань піраміди *ESF* (f_{T2}- фронтальний слід цієї площини). G_1H_1 – відрізок горизонтальної проекції лінії перетину площини *T2* із січною площиною. Враховуючи, що ребра *SE* і *SF* лежать у площині *T2*, точки перетину відрізка G_1H_1 з горизонтальними проекціями цих ребер є горизонтальними проекціями шуканих точок перетину ребер *SE* і *SF* із січною площиною (точки P_1 і L_1). Фронтальні проекції точок *P* і *L.* визначають за лініями проекційного зв’язку.

З'єднуючи горизонтальні проекції точок K, P і L прямими, отримуємо горизонтальну проекцію ліній перетину площини ΔABC з поверхнею піраміди ($\Delta K_1P_1L_1$) Фронтальну проекцію цієї лінії одержуємо при з'єднанні фронтальних проекцій зазначених точок ($\Delta K_2P_2L_2$).

Для визначення натуральної величини фігури перерізу (ΔKPL) проведемо фронталь площини ΔKPL. Лінія K_1R_1 – горизонтальна проекції цієї фронталі, а лінія K_2R_2 – її фронтальна проекція. Потім перемістимо ΔKPL плоскопаралельно відносно площини $П_2$ у положення, при якому ця фронталь виявиться перпендикулярною до площини $П_1$. При цьому її фронтальна проекція буде перпендикулярною до осі проекції.

При плоскопаралельному переміщенні проекція тіла (фігури) на площину проекцій, паралельно якій переміщується тіло (площина $П_2$), не змінює своєї величини і форми. Тому проводимо відрізок $\overline{K_2R_2}$ що дорівнює відрізкові K_2R_2 і перпендикулярний до осі проекцій, і на ньому будуємо без змін фронтальну проекцію $\Delta K_2P_2L_2$ у новому положенні цього трикутника ($\overline{\Delta K_2P_2L_2}$). При такому перенесенні трикутника ΔKPL горизонтальні проекції його вершин переміщаються по траєкторіях, паралельних до осі проекцій. Ця умова використана при побудові горизонтальної проекції ΔKPL у новому положенні. Враховуючи те, що в цьому положенні фронталь ΔKPL перпендикулярна до площини $П_1$, площина $\Delta\overline{KPL}$ також перпендикулярна до площини $П_1$ і проектується на площину $П_1$ у пряму лінію. Тому горизонтальні проекції вершин трикутника KPL (точки $\overline{K_1P_1L_1}$) у положенні після перенесення лежать на одній прямій.

Для визначення натуральної величини ΔKPL його варто повернути навколо якої-небудь осі, перпендикулярної до площини $П_1$ до положення, при якому його площина виявиться паралельною площині $П_1$. Тоді трикутник спроекціюється на площину $П_2$ у натуральну величину.

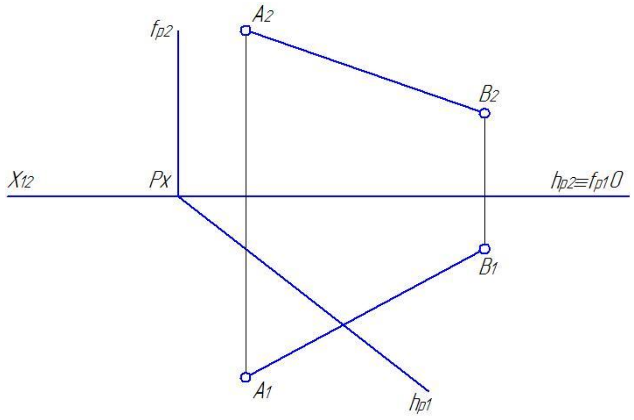
На кресленику (рис. 8.2) показаний поворот навколо осі, що проходить через вершину L перпендикулярно до площини $П_1$. При такому повороті горизонтальні проекції вершин трикутника переміщуються по колах відповідного радіуса, а фронтальні проекції – по прямих, паралельних до осі проекцій. Горизонтальна проекція ΔKPL зображена в положенні, паралельному до площини $П_2$ (відрізок $\overline{\overline{L_1P_1}}$), а його фронтальна проекція ($\overline{\overline{\Delta K2P2L2}}$) дорівнює натуральній величині трикутника (показана подвійною лінією). Точка $\overline{L1}$, що лежить на осі обертання, при повороті не переміщується.

Приклад 2. Знайти фігуру перерізу піраміди $ABCS$ площиною Σ, заданою слідами (Рис.8.3).

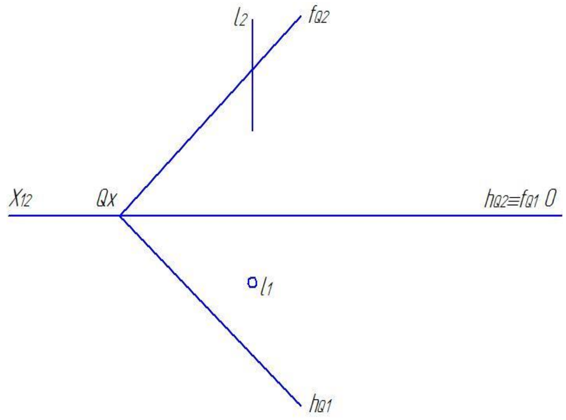
Горизонтальний слід січної площини не перетинає основу піраміди, отже перетинається бічна поверхня. Переріз буде мати форму трикутника, верщинами якого є точки перетину ребер піраміди з площиною. Точка перетину ребра SA піраміди з площиною β знайдена за допомогою додаткової фронтально-проектуючої площини τ, проведеної через це ребро. Знаходимо лінію 3-4 перетину двох площин (заданої β і допоміжної τ). Відповідно, т.M знаходиться на горизонтальній проекції $П_1$ як точка, що одночасно лежить на отриманій прямій 3-4 та на ребрі піраміди SA. Фронтальну проекцію M_2 отримуємо за допомогою ліній проекційного зв'язку на фронтальній проекції ребра S_2A_2. Інші дві точки перетину E та K можна отримати аналогічним способом.

Завдання для самостійного опрацювання

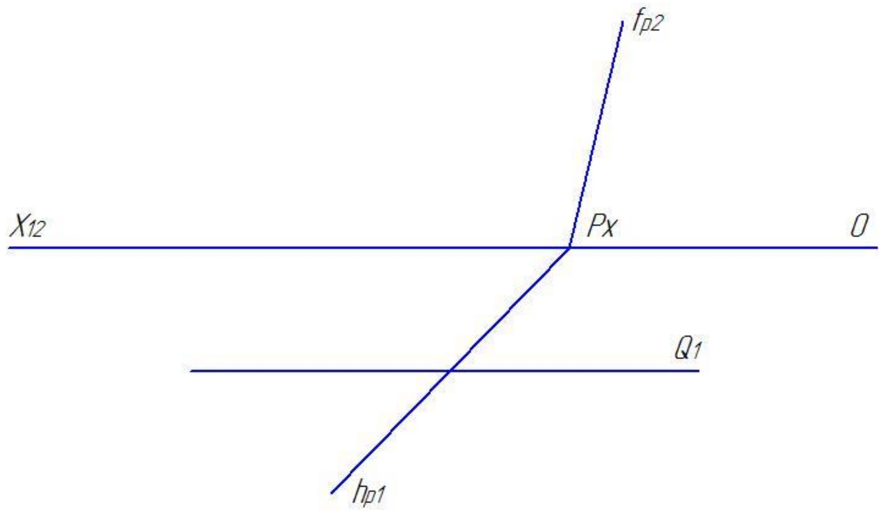
8.1. Знайти точку перетину прямої *AB* з горизонтально – проектуючою площиною *P*.



8.2. Знайти точку перетину прямої *l* із площиною *Q* (необхідно провести фронталь площини через шукану точку).



8.3. Побудувати пряму перетину площин *P* та *Q* (площина загального положення перетинається з площиною, паралельною до фронтальної площини проекцій, по фронталі).



Контрольні питання

1. Сформулюйте план розвязання розглянутої задачі.
2. Як визначається точка перетину прямої і площини (одного з ребер багатогранника із січною площиною)?
3. Як визначається в розглянутій задачі натуральна величина фігури перерізу, якими ще способами можна це зробити?

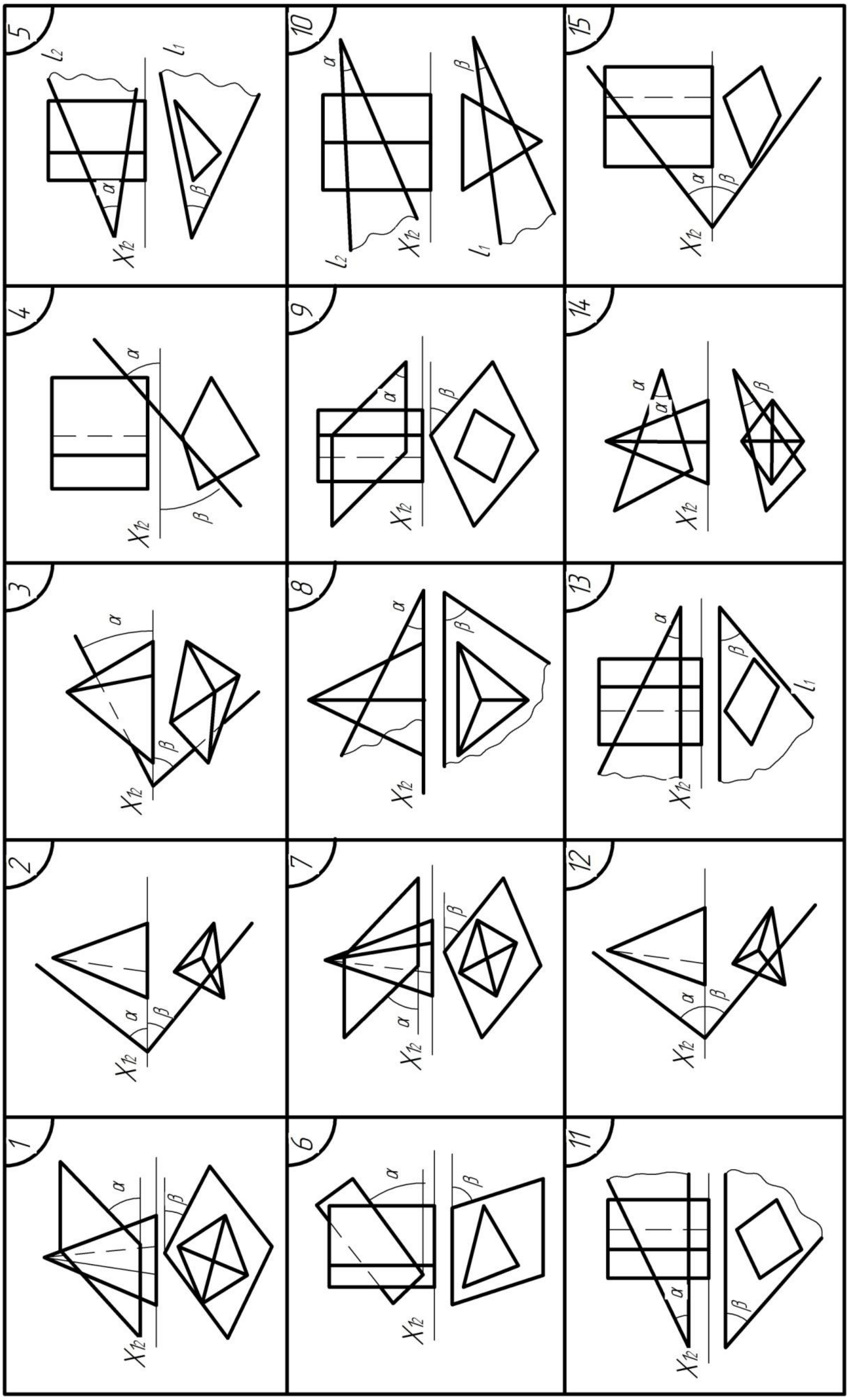


Рис. 8.1

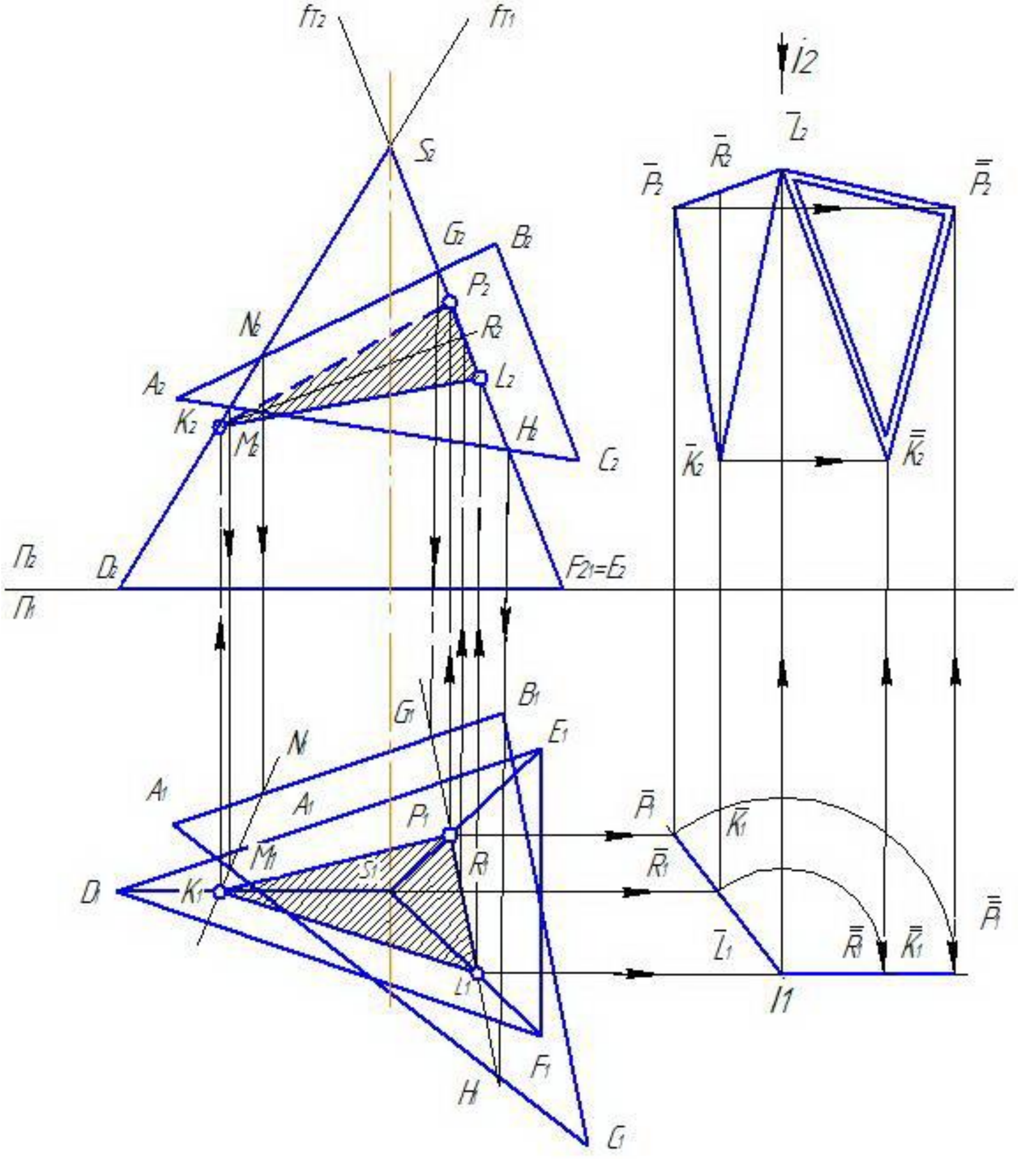


Рис. 8.2. Приклад знаходження фігури перерізу піраміди площиною, заданою трикутником.

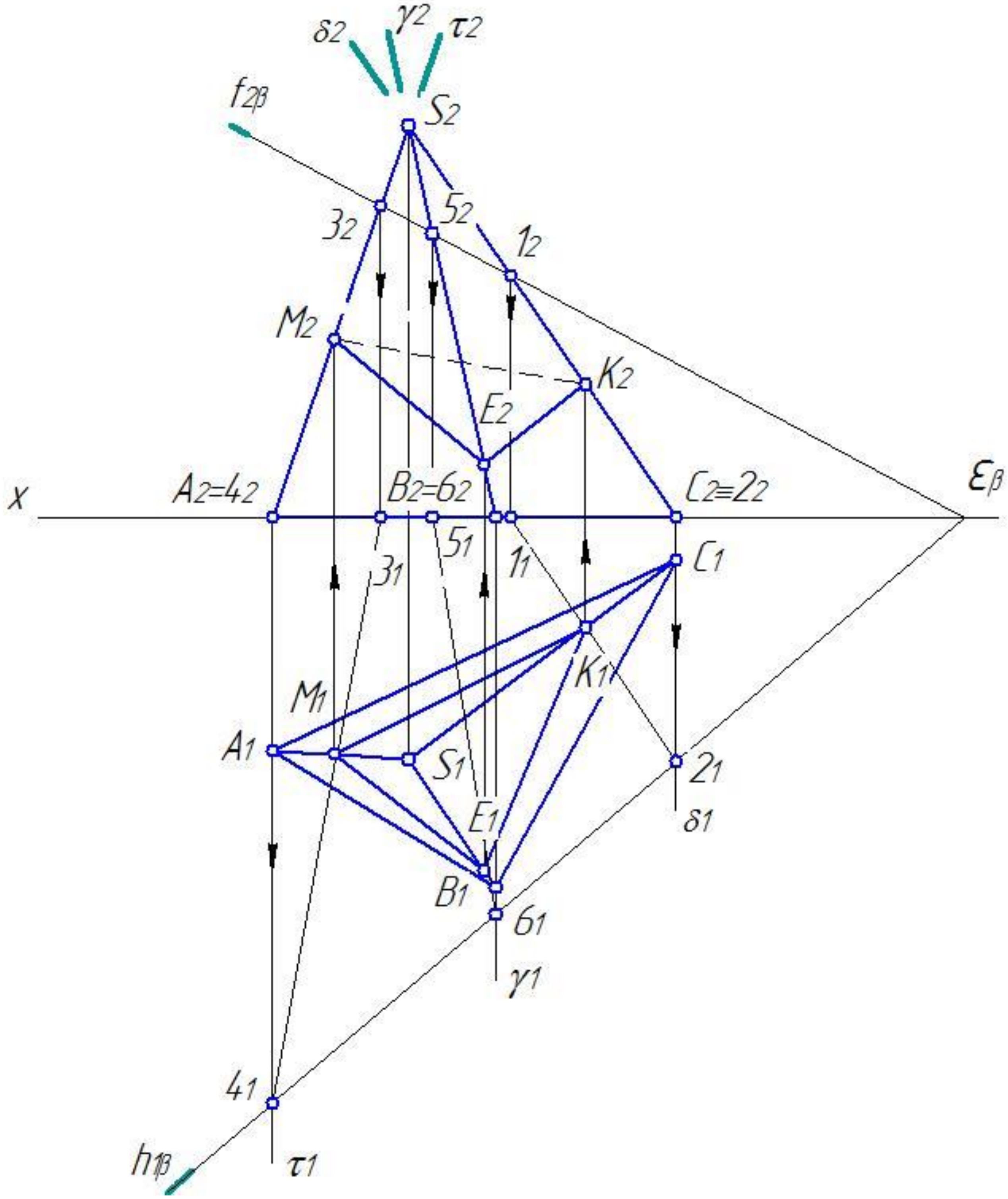


Рис. 8.3. Приклад знаходження фігури перерізу піраміди площиною, заданою слідами

Завдання № 9

ПЕРЕРІЗ КРИВОЛІНІЙНОЇ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Умова. Побудувати проекції ліній перерізу криволінійної поверхні площиною загального положення (рис. 9.1. табл. 9.1).

При рішенні задач такого типу на криволінійній поверхні потрібно провести ряд твірних, потім визначити точки перетину цих твірних із січною площиною. Ці точки будуть належати як січній площині, так і заданій поверхні, тобто будуть належати лінії перетину площини з заданою криволінійною поверхнею. Дані точки (якщо твірні – прямі лінії) можна знайти способом, зазначеним у завданні 3 (на перетин площини і прямої). При цьому криволінійна поверхня приблизно замінюється вписаною або описаною многогранною поверхнею, причому точність розв’язання зростає зі збільшенням числа граней.

Таблиця 9.1

Кут / №	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
α^0	30	45	60	45	60	60
β^0	45	60	30	45	30	45

Для знаходження точок перетину твірних криволінійної поверхні (ребер вписаної гранної поверхні) із січною площиною можна використовувати і інші способи, наприклад, спосіб заміни площин проекцій. На рис. 9.3 таким способом побудовані проекції лінії перерізу поверхні конуса площиною загального положення (при цьому допоміжну площину проекцій $П_3$ проводять перпендикулярно до січної площини). Січна площина стає проектуючою по відношенню до допоміжної площини проекцій і тому проекціюється на неї в пряму лінію, що збігається зі слідом цієї площини. На цю пряму проекціюється і шукана лінія перерізу, що лежить у січній площині. Потім проводять ряд твірних заданої поверхні (будують їх проекції на площини $П_1$,$П_2$, $П_3$). Точки перетину проекцій твірних на площину $П_3$ зі слідом січної площини (на площині $П_3$) являють собою проекції на площині $П_3$ шуканих точок лінії перерізу. Проводячи лінії зв'язку з цих точок до перетину з горизонтальними проекціями відповідних твірних, одержуємо проекції на площину $П_1$, а потім за лініями зв'язку – проекції на площину $П_2$.зазначених точок лінії перерізу. З'єднуючи отримані горизонтальні і фронтальні проекції цих точок плавними лініями, одержуємо відповідно горизонтальну і фронтальну проекції лінії перерізу криволінійної поверхні і площини.

Слід зазначити, що проекції характерних точок ліній перерізу, наприклад кінців осей еліпса перерізу (рис. 9.3), знаходять в окремих конкретних випадках аналогічними побудовами.

<u>Приклад1.</u> Побудувати проекції лінії перерізу поверхні прямого кругового конуса площиною загального положення, заданою двома паралельними прямими (рис. 9.3).

Проводимо допоміжну площину проекцій $П_3$ так, щоб вона була перпендикулярна до заданої, січної площини. Для цього проводимо горизонталь січної площини MN (M_1N_1 і M_2N_2). Вводимо додаткову горизонтально-проектуючу площину. При цьому вісь проекцій $П_1П_3$ буде перпендикулярною до горизонтальної проекції M_1N_1 горизонталі січної площини. Далі проектуємо конус і січну площину на допоміжну площину проекцій $П_3$. Оскільки січна площина перпендикулярна до площини $П_3$, вона (і лінія перетину, розташована в ній) проектується на площину $П_3$ у пряму лінію. Для побудови цієї прямої досить отримати проекції на площину $П_3$ будь-яких двох точок січної площини.

На кресленні, зображеному на рис. 9.3, обрані точки L і M. Для отримання проекції L_3 проводимо з горизонтальної проекції точки L лінію зв'язку, перпендикулярну до осі проекцій

$П_1/П_3$ і на ній відкладаємо відстань від фронтальної проекції цієї точки L до осі проекцій $П_2/П_1$. Аналогічно отримуємо проекцію M_3 точки M.

Як видно з креслення (проекція на площину $П_3$), січна площина перетинає всі твірні конуса, тобто лінією перерізу є еліпс, причому менша вісь еліпса розташована горизонтально. Якщо провести через вісь конуса площину, перпендикулярну до меншої осі еліпса перерізу (або до будь-якої горизонталі січної площини), то ця площина буде розсікати переріз по більшій осі еліпса. Дана площина буде паралельна допоміжній площині проекції $П_3$ (тому що обидві площини перпендикулярні до горизонталей січної площини), отже, велика вісь еліпса спроекціюється на площину $П_3$ у натуральну величину (відрізок 1_37_3). Потім через центр основи конуса (точку 0_1) проводимо лінію, паралельну до осі проекцій $П_1/П_3$. Ця лінія є горизонтальним слідом площини, яка проходить через вісь конуса. Очевидно, що горизонтальна проекція більшої осі еліпса перерізу лежить на цій лінії. Проводячи з точок 1_3 і 7_3 лінії зв'язку до перетину з зазначеною лінією одержуємо точки 1_1 і 7_1, що визначають горизонтальну проекцію більшої осі еліпса перетину (відрізок 1_37_3). З точок 1_1 і 7_1 проводимо лінії зв'язку перпендикулярно до осі проекцій $П_1/П_2$ і, відкладаючи на них відстані від точок 1_3 і 7_3, до осі проекцій $П_1/П_3$ (до площини $П_2$), одержуємо фронтальні проекції кінців більшої осі еліпса перерізу (точки 1_2 і 7_2). Мала вісь еліпса перерізу проекціюється на площину $П_3$ у точку 4_3 що поділяє навпіл проекцію перерізу на цю площину.

Горизонтальна проекція малої осі еліпса перпендикулярна до горизонтальної проекції великої його осі (за властивістю проекцій прямого куга, одна зі сторін якого паралельна до площини проекцій). Тому вона лежить на лінії зв'язку, проведеній з точки 4_3, що є проекцією малої осі еліпса на площину $П_3$. Точка перетину зазначеної лінії зв'язку з горизонтальною проекцією великої осі еліпса перерізу є горизонтальною проекцією центра еліпса (точка 0_1). Оскільки мала вісь еліпса перерізу горизонтальна, вона є хордою кола перетину конуса горизонтальною площиною, що проходить через неї. Це коло проекціюється на площину $П_3$ у вигляді відрізка 8_39_3, рівного його діаметру; а на площину $П_1$ – у натуральну величину. Побудуємо на площині $П_1$ коло з центром у точці O_1 діаметром, рівним відрізку 8_39_3. Кінці горизонтальної проекції малої осі еліпса повинні лежати на цьому колі. Очевидно, це будуть точки 4_1, у яких згадане коло перетинає лінію зв'язку, проведену з проекції малої осі еліпса на площину $П_3$ (точка 4_3). Фронтальні проекції кінців малої осі еліпса перетину (точки 4_2) отримуємо за допомогою ліній зв'язку так само, як фронтальні проекції кінців великої осі.

Таким чином, отримуємо побудовані проекції осей еліпса перерізу, кінці яких дають чотири точки шуканої лінії перерізу. Для отримання додаткових точок лінії перерізу поверхні конуса заданою площиною проводимо на площину $П_3$ проекції ряду твірних конуса.

Твірні конуса, що лежать у його фронтальній площині симетрії, проекціюються на площину $П_3$ у лінії S_33_3 і S_35_3. Твірні конуса, що лежать у його профільній площині симетрії, проекціюються в лінії S_32_3 і S_37_3. Точки перетину проекцій цих твірних на площину $П_3$ із проекцією площини перерізу (точки $2_3 \ldots 7_3$) являють собою проекції точок перетину зазначених твірних із січною площиною, тобто точок шуканої лінії перерізу. Проводячи з точок $2_3 \ldots 7_3$ лінії проекційного зв'язку до перетину з проекціями відповідних твірних на площину $П_1$ одержуємо горизонтальні проекції цих точок (точки $2_1, 3_1, 5_1, 6_1, 7_1$). Аналогічно отримуємо фронтальні проекції цих точок.

На горизонтальній площині проекцій уся лінія перерізу буде видима На фронтальній площині проекцій видима лише та частина лінії перерізу, яка розташована перед фронтальною площиною симетрії конуса, тобто частина лінії перерізу, що включає точки *5,7,6,4,3*. Невидима частина лінії перерізу показана штриховою лінією.

Приклад 2. Знайти натуральну величину фігури перерізу похилого конуса площиною, заданою слідами (Рис.9.4)

Використаємо спосіб заміни площин проекцій. Вводимо нову площину $П_4$ (так, щоб площина зайняла проектуюче положення). Будуємо a_4– новий слід площини (точку K вибираємо довільно) та проекцію конуса на площину $П_4$. Як видно з отриманої побудови –

переріз сліду з поверхнею конуса утворює переріз 1_4-2_4-3_4-4_4-5_4. За проекційним зв'язком знаходимо на відповідних твірних та колі основи горизонтальну, а потім фронтальну проекції фігури перерізу.

Натуральну величину фігури перерізу можна визначити теж способом заміни площин проекцій (розташувавши нову площину так, щоб фігура перерізу зайняла паралельне до неї положення).

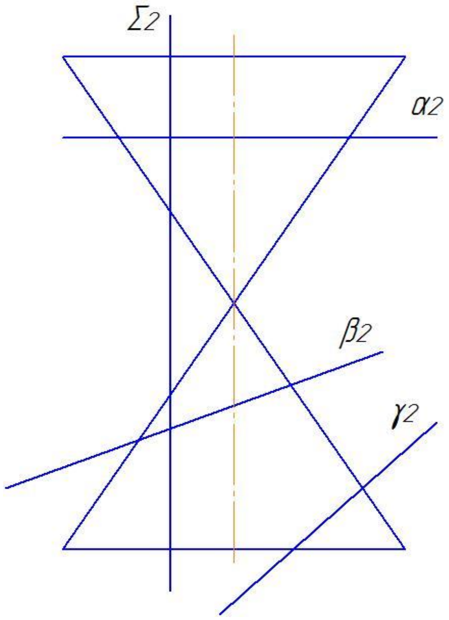
Приклад 3. Знайти натуральну величину фігури перерізу похилого циліндра площиною, заданою горизонталлю і фронталлю (Рис.9.5).

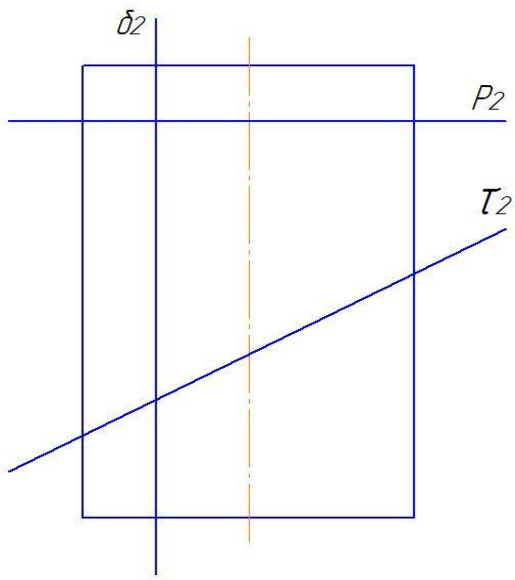
На рис наведена побудова фігури перерізу похилого циліндра площиною, заданою горизонталлю h (h_1,h_2) і фронталлю f (f_1, f_2). Фігурою перерізу буде еліпс. Для знаходження його проекцій змінюють положення площин проекцій так, щоб січна площина стала в новій проекції фронтально- проектуючою. Для цього проводять нову вісь перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі площини h_1 , будують нову слід-проекцію площини використавши будь-яку довільну точку, що належить цій площині.

Еліпс, який отримується в перерізі, зобразиться на площину $П_4$ у вигляді прямої лінії, на якій відмічають характерні точки 3–9. Через характерні точки проводять систему площин, перпендикулярних до $П_4$ і паралельних до $П_1$. За проекційним зв'язком знаходять відповідні характерні точки еліпса на інших проекціях. Потім ці точки сполучають за допомогою лекала, враховуючи при цьому видимість фігури перерізу на площинах проекцій.

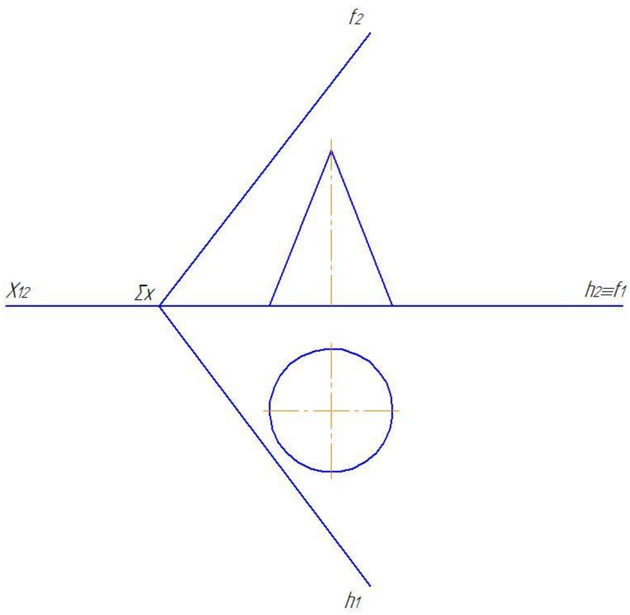
Завдання для самостійного опрацювання

9.1. Які лінії утворюють контур перерізу циліндра і конуса вказаними площинами?





9.2. Визначте – чи буде площина, задана слідами, перерізати конус?



Контрольні питання

1. Обґрунтуйте послідовність розв'язання задачі на побудову проекцій фігури перерізу криволінійної поверхні площиною загального положення.
2. Яка характерна ознака допоміжної площини проекцій при використанні в заданій задачі способу заміни площин проекцій?
3. Розкрийте правило встановлення "видимості" на побудованих проекціях фігури перерізу?
4. За яким принципом при розв'язанні задачі визначаються характерні точки фігури перерізу?

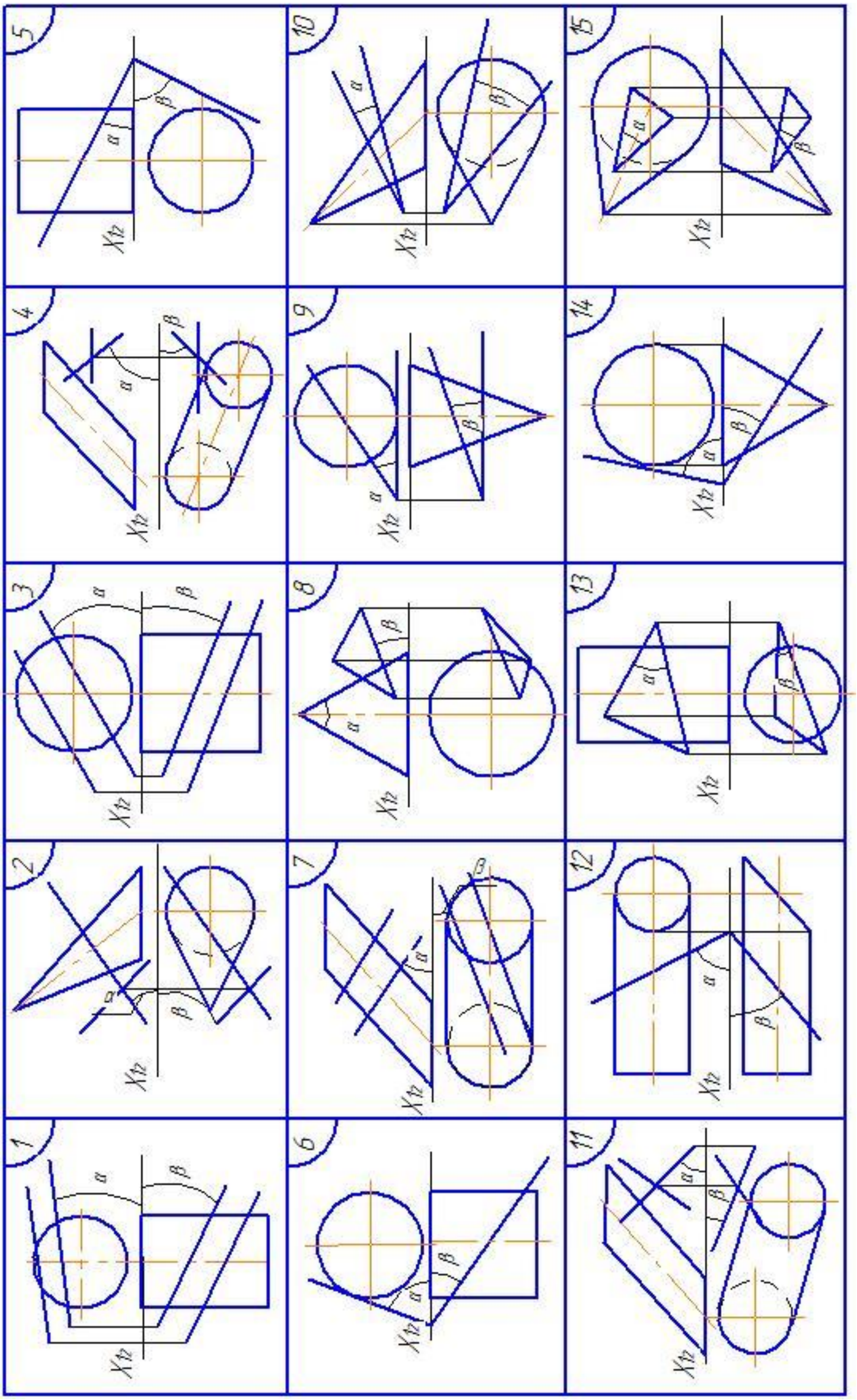


Рис. 9.1. Варіанти до завдання 9

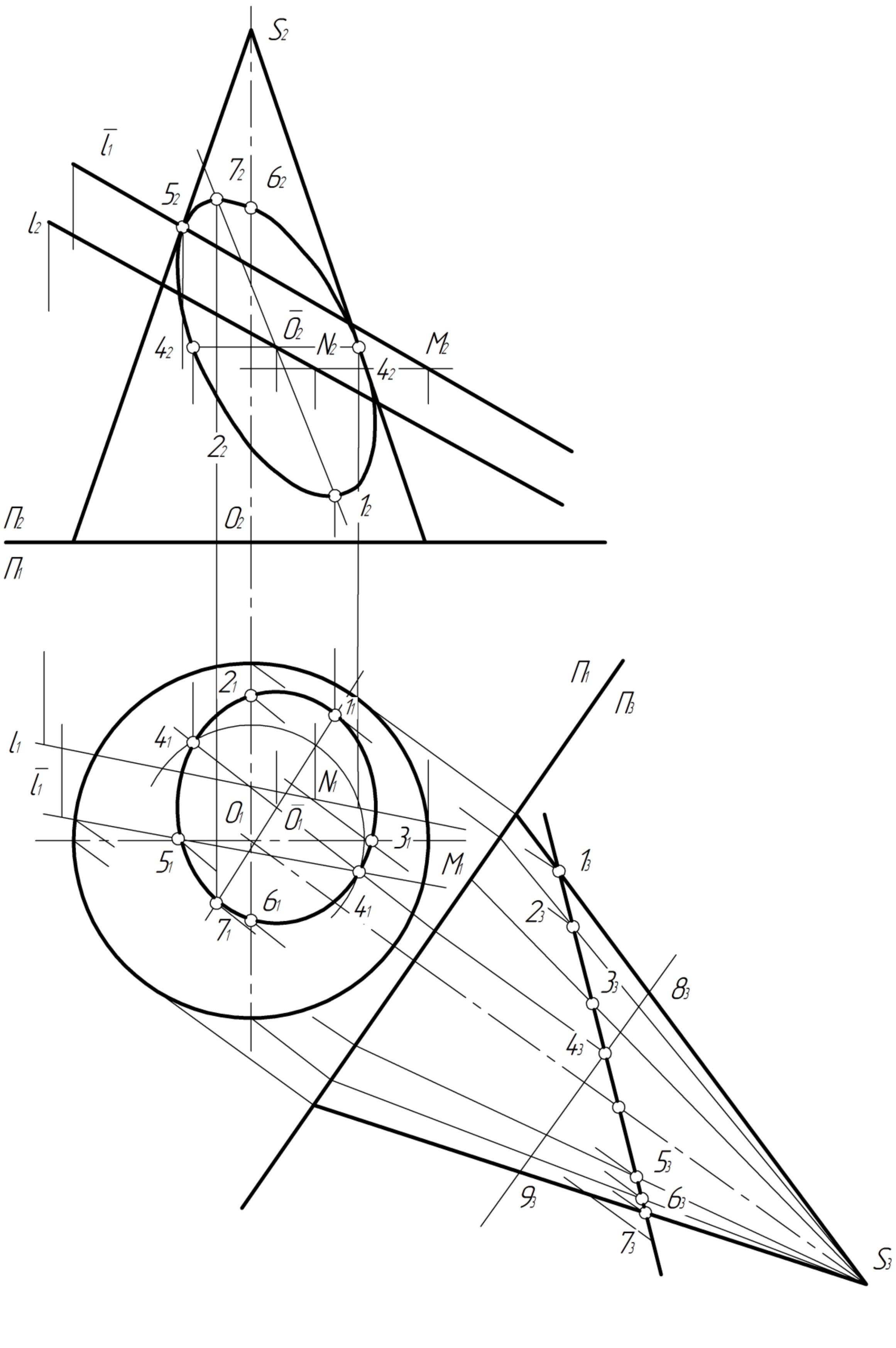


Рис. 9.3. Приклад побудови фігури перерізу конуса площиною, заданою двома паралельними прямими

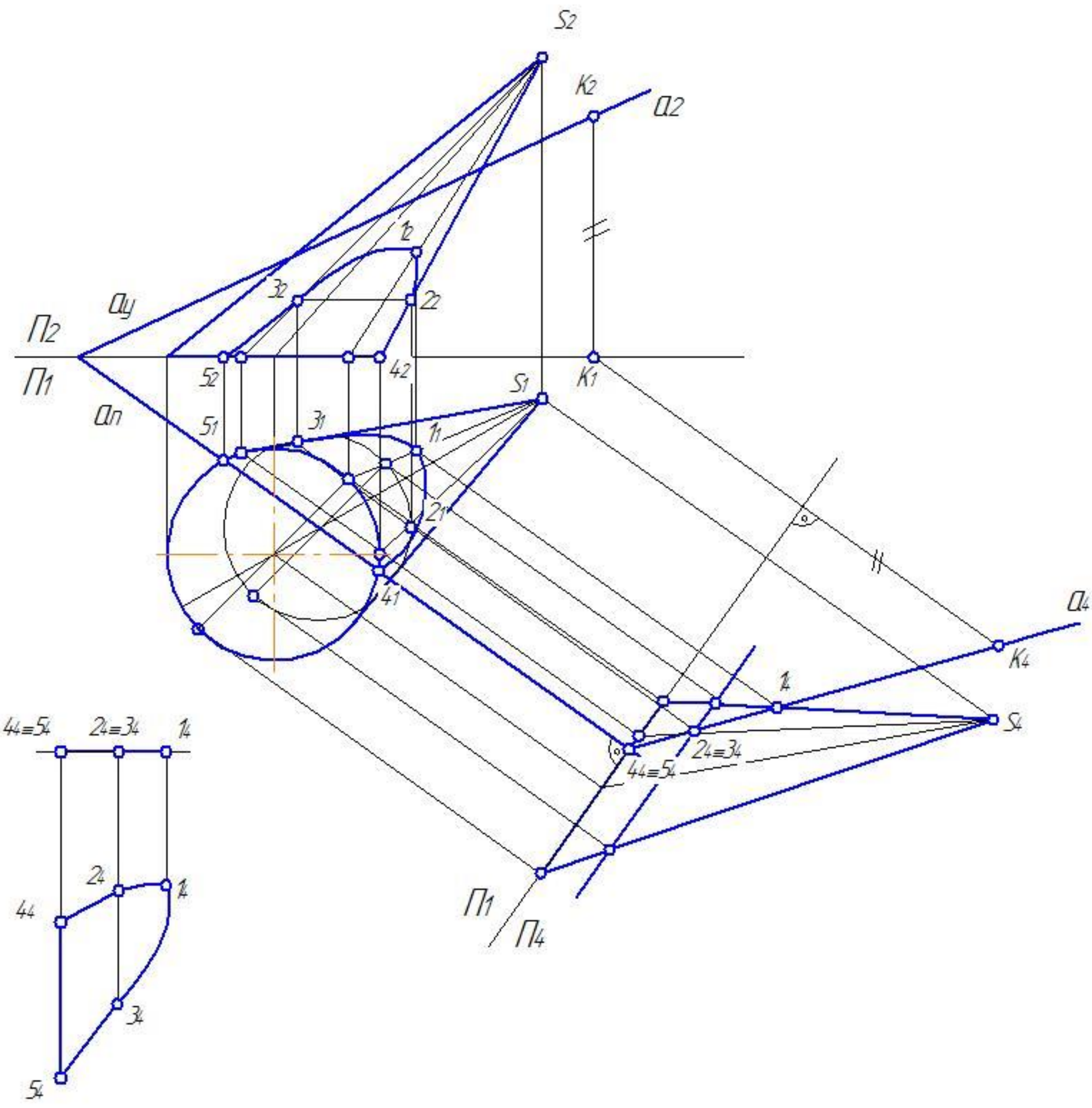


Рис. 9.4. Приклад побудови фігури перерізу конуса площиною, заданою слідами

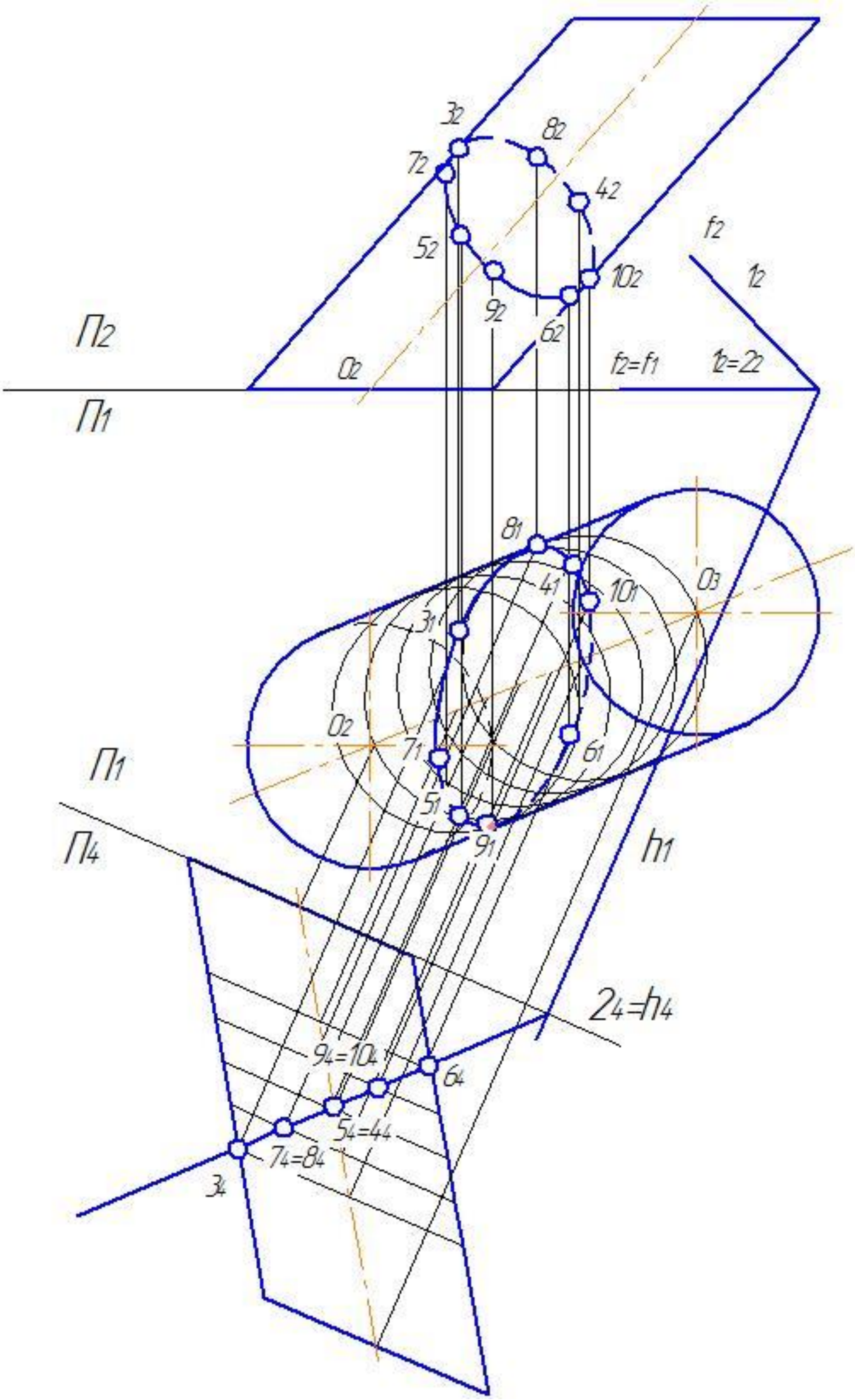


Рис. 9.5. Приклад побудови фігури перерізу циліндра площиною, заданою лініями рівня – горизонталлю і фронталлю.

Завдання № 10

ПОБУДОВА РОЗГОРТКИ ПОВЕРХНІ ТІЛА

Умова. Побудувати розгортку поверхні геометричного тіла (завдання № 9). Нанести на розгортку лінію перерізу поверхні тіла площиною.

Один зі способів наближеного розгортання кривих поверхонь полягає в тому, що криву поверхню тіла замінюють вписаною в неї (або описаною) многогранною поверхнею. Чим більше граней у вписаної поверхні, тим точніший результат. Для розгортки описаного многогранника можна визначити натуральні величини його ребер і за ними побудувати розгортку.

Приклад. Побудувати розгортку поверхні конуса, розглянутого в прикладі завдання 9. Нанести на розгортку лінію перерізу поверхні конуса і площини.

Замінюємо конус вписаною в нього правильною пірамідою, що має 12 бічних граней (рис. 10.1). Бічні ребра цієї піраміди збігаються з твірними заданого конуса.

Ребра *S1* і *S7* є відрізками фронтальних прямих, відрізки 1_2S_2 і 7_2S_2, , що визначають положення точок перетину на цих ребрах, проекціюються на площину Π_2 у натуральну величину. Для побудови розгортки проводимо дугу кола радіусом, рівним довжині твірної конуса. Від точки *1* відкладаємо *12* разів хорду, рівну стороні основи вписаної піраміди (відрізок 1_12_1). З'єднуючи точки *1-12* з центром кола, отримуємо розгортку бічної поверхні вписаної піраміди. Кожен трикутник на розгортці *(1S2, 2S3* і т.д.) являє собою натуральну величину бічної грані піраміди. Основа піраміди збігається зі своєю горизонтальною проекцією. Горизонтальна проекція основи і розгортки бічної поверхні являють собою розгортку поверхні вписаної в конус піраміди.

Бічна поверхня правильного прямого конуса може бути розгорнута в сектор кола радіусу *R,* рівного довжині твірної утворюючого конуса, з кутом при вершині

$$\alpha = (2r/R)360°$$

де r – радіус основи конуса. Однак для ілюстрації методу в розглянутому прикладі розгортку поверхні конуса замінили розгорткою вписаної піраміди.

Для нанесення на розгортку лінії перерізу потрібно показати на ній точки перетину, що лежать на ребрах *S1-S12*. Розташування точок перетину, що лежать на ребрах *S1* і *S7* визначається відрізками $\overline{S_2 1_2}$ і $\overline{S_2 7_2}$. Дня нанесення на розгортку точок перетину, що лежать на інших ребрах, визначимо натуральну величину відстаней від цих точок до вершини конуса уздовж відповідних ребер, тобто натуральну величину відрізків $S\overline{2}$, $S\overline{3}$ і так далі, обертаючи їх навколо осі, що збігається з віссю конуса (навколо осі, перпендикулярної до площини Π_1 до положення, паралельного фронтальній площині проекцій). При цьому зазначені відрізки будуть проекціюватися на площину Π_2 у натуральну величину.

Розглянемо, наприклад, відрізок $S\overline{3}$. При обертанні його навколо осі конуса до положення, паралельного фронтальній площині проекцій, горизонтальна проекція точки $\overline{3}$ буде переміщатися по дузі кола, радіуса $S_1 3_1$ до положення, при якому цей радіус виявиться паралельним до осі проекцій. Фронтальна проекція цієї точки буде, переміщатися по лінії, перпендикулярній до фронтальної проекції осі обертання (осі конуса). Частина нової проекції твірної від вершини S_2 до точки $\overline{3_2}$ буде являти собою натуральну величину відстані від вершини конуса до точки перетину, що лежить на твірній *S3*. Відкладаючи на розгортці від центра *S* цю відстань уздовж твірної *S-3*, знаходимо точку $\overline{3}$ (точку лінії перетину на цій твірній). Інші точки ліній перетину на розгортці визначаємо аналогічно. З'єднуючи точки $\overline{1-12}$ плавною кривою, одержуємо на розгортці лінію перерізу.

Контрольні питання

1. Як наноситься на розгортку лінія перерізу?
2. Чому отримана розгортка є наближеною?
3. **Від** чого залежить точність розв’язання задачі?

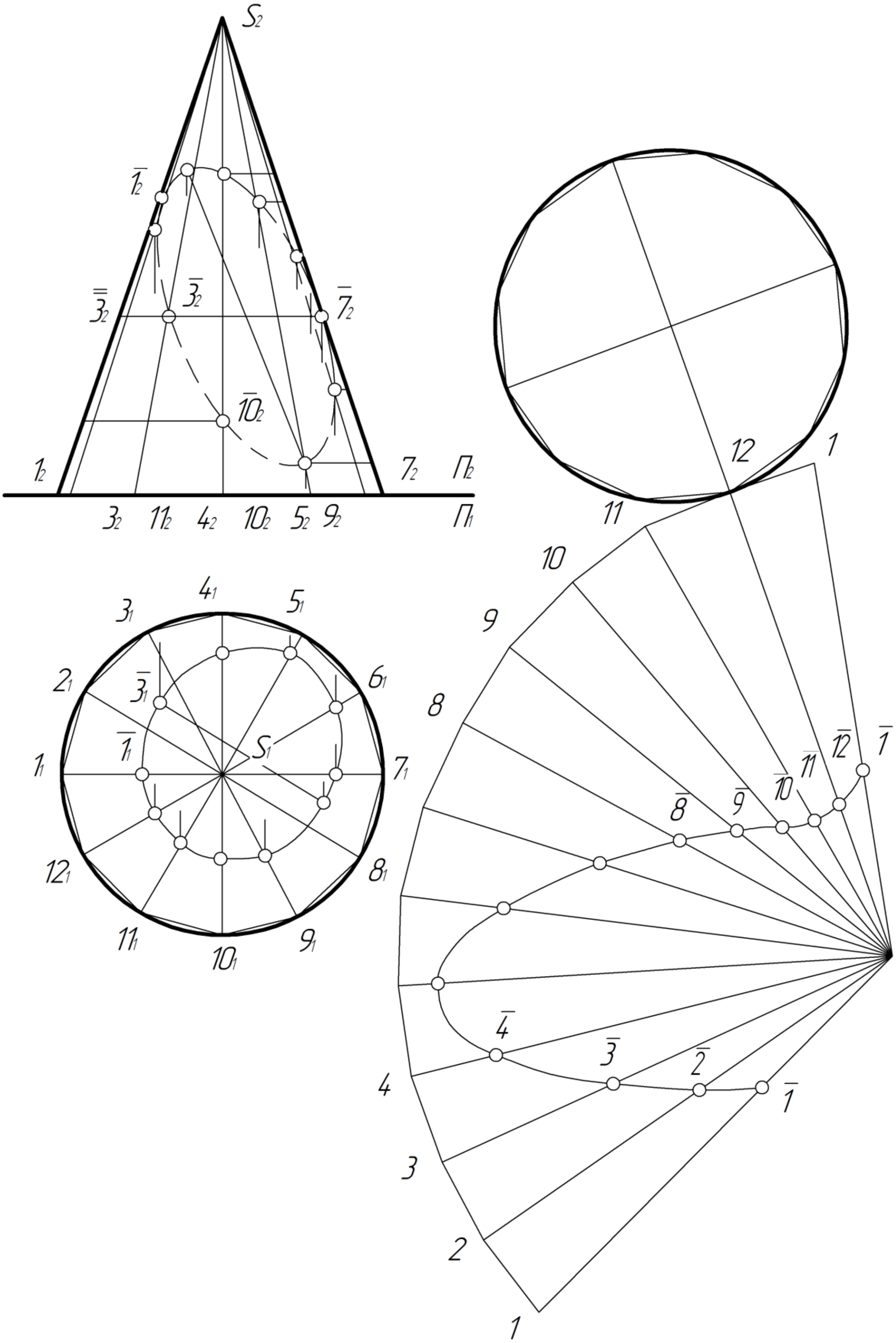


Рис. 10.1. Приклад побудови розгортки прямого конуса

Завдання № 11

ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ

Умова. Визначити точки перетину прямої лінії з поверхнею геометричного тіла (рис. 11.1, табл.11.1).

Таблиця 11.1

Кут \ №	1	2	3	4	5	6
α^0	30	60	45	60	45	45
β^0	60	45	30	30	45	60

В загальному випадку щоб визначити точки перетину прямої з поверхнею тіла, необхідно:

– через пряму провести допоміжну площину (як правило проектуючу);

– побудувати лінію перетину цієї площини з поверхнею тіла;

– визначити точки перетину заданої прямої з поверхнею тіла (як точки перетину з отриманою лінією перетину).

Приклад 1. Визначити точки перетину (точки входу і виходу) прямої l з поверхнею похилої призми ABC (рис. 11.2).

Проводимо через пряму l допоміжну фронтально-проектуючу площину T (f_{T2} – її фронтальний слід).

Точки 1_2, 2_2, 3_2, 4_2. є фронтальними проекціями точок перетину відповідних ребер з допоміжною площиною T. Горизонтальні проекції цих точок (точки 1_1, 2_1, 3_1, 4_1) знаходимо за лініями проекційного зв'язку.

Чотирикутник 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, являє собою горизонтальну проекцію фігури перерізу поверхні призми допоміжною площиною T. Точки N_1 і M_1 – горизонтальні проекції шуканих точок перетину поверхні призми з прямою l (проекції точок виходу і входу). Фронтальні проекції цих точок визначимо на фронтальній проекції прямої l. за лініями проекційного зв'язку.

"Видимість" на кресленні можна встановити способом конкуруючих точок. На горизонтальній проекції у точці $1_2 \equiv 5_2$ збігаються фронтальні проекції двох точок: точки 5, що належить прямій l, і точки 1, що належить ребру A призми. При переміщенні за лінією зв'язку униз від цієї точки на площині $П_1$ знаходимо проекції точок ребра і прямої. Точка 1 ребра розміщена ближче до площини $П_2$ ніж точка 5 прямої, тому пряма в цьому місці (якщо дивитися на площину $П_2$) перекриває ребро, у результаті чого відрізок прямої до точки N входу буде видимий на фронтальній проекції. Аналогічно можна встановити "видимість" на інших відрізках прямої відповідно на проекціях.

Приклад 2. Визначити точки перетину прямої з поверхнею конуса (рис. 11.3).

Як і в попередньому прикладі, можна через пряму провести допоміжну фронтально-проектуючу площину. Однак побудова лінії перетину цієї площини з поверхнею конуса (еліпс) досить складна і не забезпечує високої точності рішення. Допоміжну площину у даному випадку доцільно провести так, щоб вона перетнула поверхню конуса за прямими лініями (твірними конуса)

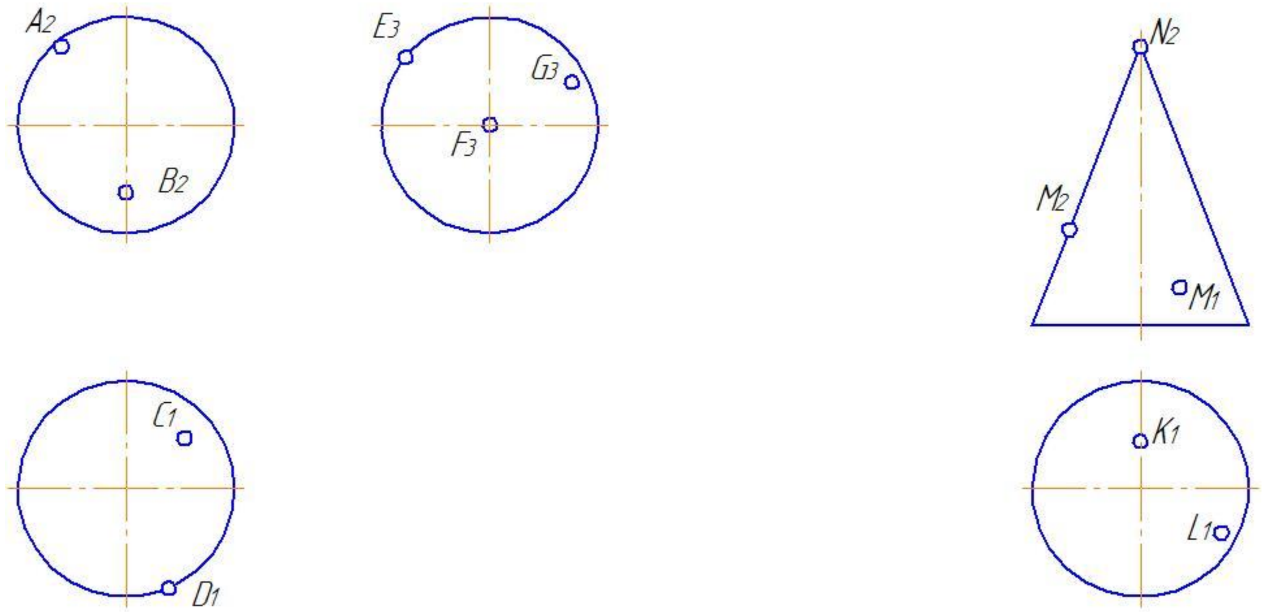
Спочатку проведемо допоміжну пряму через вершину конуса і яку-небудь точку прямої l, наприклад точки *1 і 2*. Тоді допоміжні прямі (відрізки *S1і S2)* визначать допоміжну площину, що проходить через задану пряму і перерізає поверхню конуса за прямолінійними твірними.

Для цього знаходимо горизонтальний слід площини (*3-4*) і в перетині його з основою конуса відмічаємо точки *5* і *6*. Сполучивши точки *5* і *6* з вершиною конуса, отримуємо твірні *5- S* і *6- S*, по яких площина перетинає поверхню конуса. В перетині з контуром трикутника *5-6-S* відмічаємо горизонтальні проекції точок (K_1, M_1) перетину прямої з поверхнею конуса. За проекційним зв'язком знаходимо їх фронтальні проекції і встановлюємо видимість відповідно на проекціях.

Аналогічно можна знайти точки перетину прямої з поверхнею циліндра (Рис. 11.4)

Завдання для самостійного опрацювання

11.1 Побудуйте відсутні проекції точок, які лежать на поверхні геометричних тіл



Контрольні питання

1. Складіть план розв'язання розглянутої задачі.
2. За яким принципом доцільно вибирати допоміжну площину?

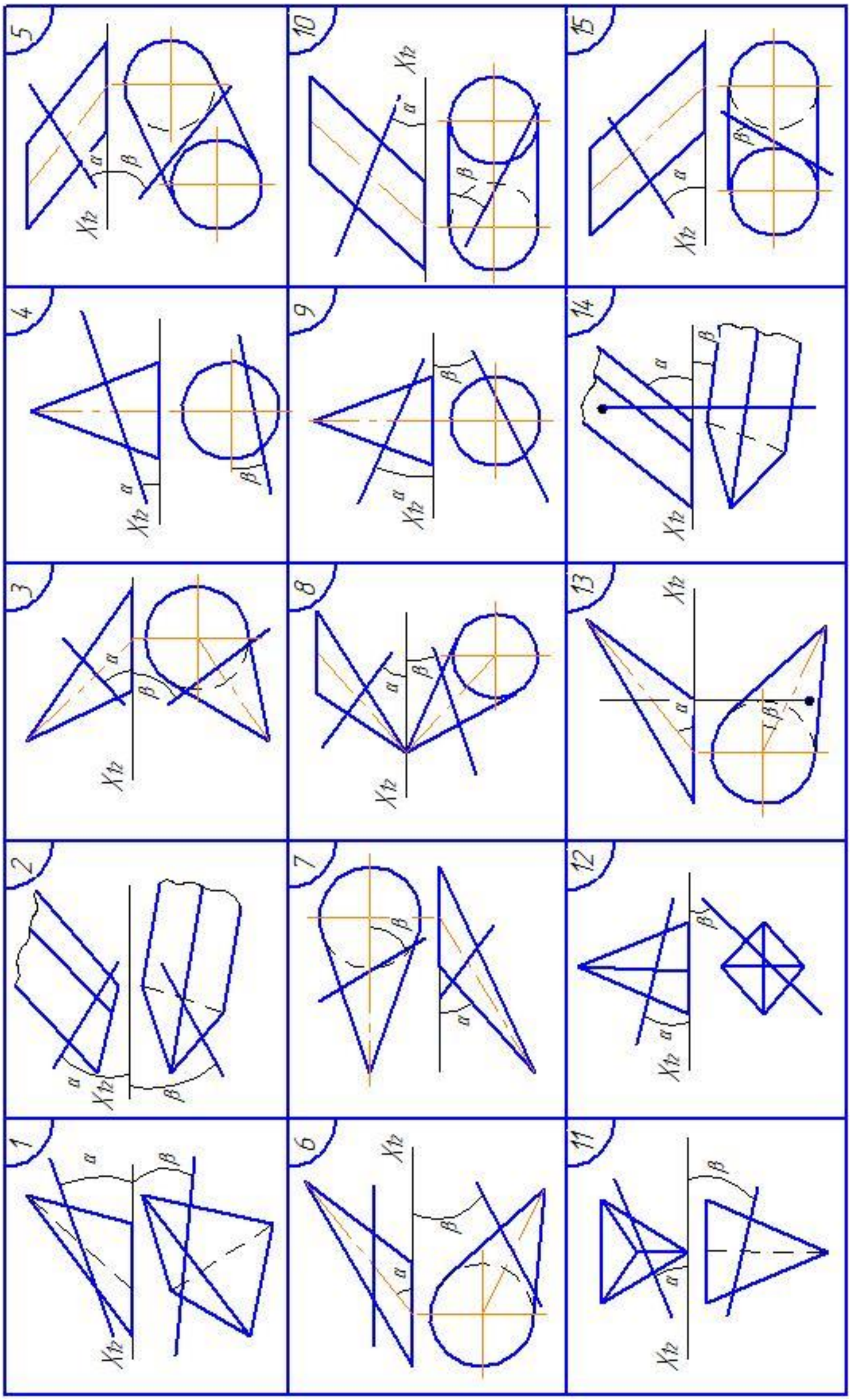


Рис. 11.1. Варіанти до завдання 11

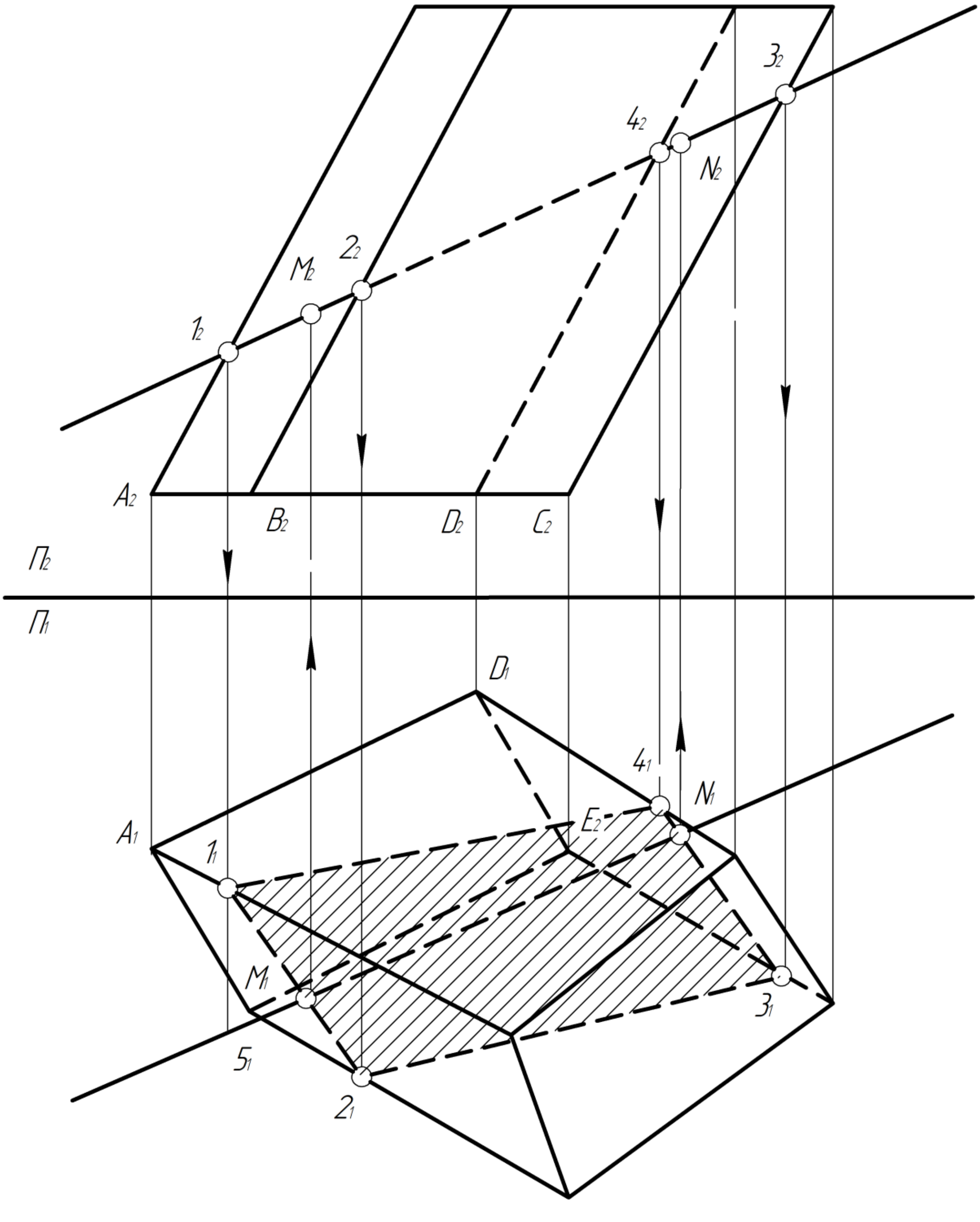


Рис. 11.2. Приклад знаходження точок перетину поверхні призми і прямої

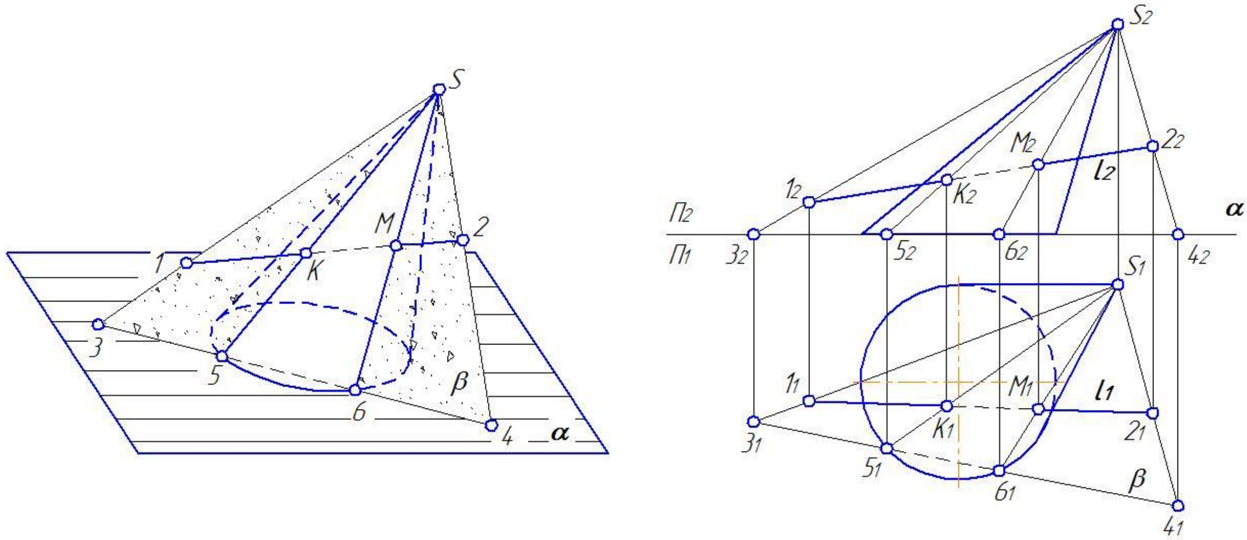


Рис.11.3. Приклад знаходження точок перетину поверхні конуса і прямої

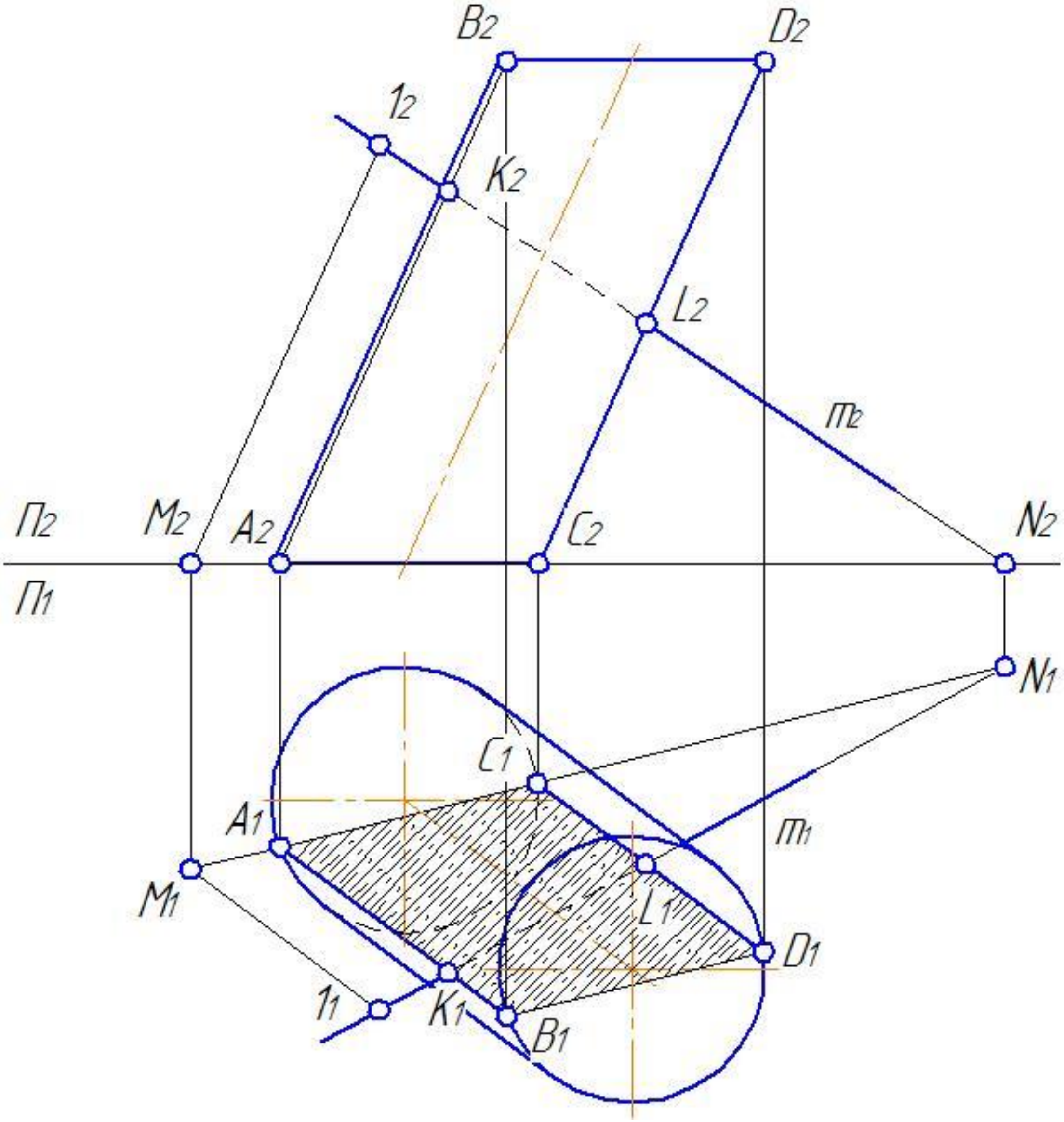


Рис. 11.4. Приклад знаходження точок перетину прямої з поверхнею циліндра

Завдання № 12

ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Умова. Побудувати проекції лінії перетину поверхонь двох геометричних тіл (рис. 12.1, табл. 12.1)

Таблиця 12.1

Діаметр	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
d_1	30	45	60	45	30	30
d_2	30	30	45	45	60	45

d_1, d_2 – діаметр або основи, або екваторіального перерізу заданих тіл.

Через тіла, що перетинаються, проводять допоміжні січні поверхні (зазвичай площини або сфери). Варто прагнути того, щоб допоміжні поверхні перетинали поверхні заданих тіл по простих лініях – прямих або колах. На рис. 12.2 через тіла *A* і *B,* що перетинаються, проведена допоміжна площина *Q*. Ця площина перетинає поверхню тіла *A* по кривій *1*, а тіла *B* – по кривій *2*. Очевидно, що точки *M* і *N* взаємного перетину кривих *1* і *2* належать одночасно поверхням обох тіл, тобто лежать на лінії перетину поверхонь цих тіл. Проводячи нові січні площини, можна одержати допоміжні точки лінії перетину (у кількості, яка необхідна для побудови цієї лінії).

Приклад 1. Побудувати лінію перетину конуса і циліндра (рис. 12.3).

Проводимо систему допоміжних горизонтальних січних площин Q_1,-Q_{12}, що перетинають конус по колах, площини яких паралельні до площини $П_1$, і проекціюються на неї в натуральну величину.

Площини Q_1-Q_{12} перетинають бічну поверхню циліндра за двома прямолінійними твірними, паралельними до площини $П_1$. Наприклад, площина Q_4 перетинає бічну поверхню циліндра по двох твірних *44* і $\overline{44}$. Точки перетину горизонтальної проекції твірної *44* з горизонтальною проекцією кола радіусом O_1A_1, за яким площина Q_4 перетинає конус, є горизонтальними проекціями точок, що належать одночасно поверхням конуса і циліндра, тобто точок лінії перетину поверхонь двох цих тіл (точки 4_1, і $4_1'$).

Твірна циліндра $\overline{44}$ не перетинає поверхню конуса, і на ній відсутні точки, загальні для поверхонь заданих тіл.

Слід зазначити, що площини Q_1 і Q_{12} не перетинають циліндр, лише дотикаються до нього по крайніх, відповідно верхній і нижній твірним.

Одержавши достатню кількість горизонтальних проекцій точок, загальних для поверхонь конуса і циліндра, і з'єднавши їх плавною лінією, визначимо горизонтальну проекцію лінії перетину.

Оскільки бічна поверхня циліндра є фронтально-проектуючою, фронтальна проекція лінії пережну збігається з колом, у яке проектується бічна поверхня циліндра.

Фронтальні проекції точок *1* і *9*, у яких права твірна конуса перетинає поверхню циліндра, відмічаємо безпосередньо (на кресленні). Горизонтальні проекції цих точок отримуємо за допомогою ліній зв'язку, проведених із точок 1_2 і 9_2 до перетину з горизонтальною проекцією цієї ж твірної.

Приклад 2. Побудувати проекції ліній перетину поверхонь усіченого конуса і циліндра (рис. 12.4).

У деяких випадках, наприклад, коли тіла, що перетинаються, мають осі обертання, паралельні до однієї з площин проекцій (і ці осі перетинаються між собою), у якості допоміжних січних поверхонь зручно приймати концентричні сфери з центром у точці перетину осей.

Розглянемо сферичну поверхню, лінії перетину якої з конусом і циліндром являють собою кола, площини яких перпендикулярні до площини $П_2$. Тому вони проектуються на площину $П_2$ у вигляді відрізків прямих (відрізки відповідно A_2B_2 і C_2D_2). Точки перетину зазначених кіл між собою (2 точки) належать водночас поверхням і конуса, і циліндра, тобто лежать на лінії перетину цих поверхонь. Тому точки перетину відрізків A_2B_2 і C_2D_2 (точки K_2 та K_2') визначають фронтальні проекції точок перетину цих кіл (кола перетинаються в двох точках K, проекції яких на площину $П_1$ збігаються).

Для визначення горизонтальних проекцій точок K та K' в даному випадку варто побудувати горизонтальну проекцію того кола, за яким сфера, що розглядається, перетинає конус. Це коло паралельне до площини $П_1$ і проекціюється на неї в натуральну величину, тобто в коло діаметру , що дорівнює A_2B_2.

Горизонтальні проекції точок K та K' лежать на цьому колі і визначаються за допомого ліній проекційного зв'язку. Отже, побудовані точки належать шуканій лінії перетину поверхонь конуса і циліндра. Нові точки цієї лінії (у кількості, необхідній для її побудови) можна отримати аналогічно за допомогою допоміжних сферичних поверхонь іншого радіусу з тим самим центром.

Побудову зручно починати зі сфери найменшого можливого для побудови радіуса O_2G_2, перпендикулярного до твірної конуса. Сфера цього радіуса торкається поверхні конуса по колу, не перетинаючи його. Далі будують інші сферичні поверхні, збільшуючи радіус.

На фронтальній проекції верхня E і нижня C точки проекції лінії перетину одержують безпосередньо як точки перетину проекцій нарисових твірних циліндра з нарисовою твірною конуса. Горизонтальні проекції цих точок отримують за лініями проекційного зв'язку. Враховуючи те, що задані в умові конус та циліндр мають фронтальну площину симетрії, фронтальні проекції видимої і невидимої (що лежить за цією площиною) частин лінії перетину збігаються.

При проекціюванні на площину $П_1$ невидимою є частина лінії перетину, що знаходиться нижче фронтально-проектуючої площини, яка проходить через вісь циліндра.

<u>Приклад 3</u> Знайти лінію перетину циліндра з коловим кільцем (Рис. 12.5).

Для розв'язання використаний спосіб ковзних сфер (його використовують, коли осі поверхонь обертання не перетинаються). Спочатку знайдені опорні точки (*1* і *6*), отримані внаслідок перетину обрисних твірних поверхонь. Для знаходження проміжних точок через вісь обертання кільця проводять фронтально-проекціюючу площину *P1*, яка перетне кільце по колу діаметра A_2B_2 з центром в точці C_2. З точки C_2 проводять пряму, перпендикулярну до сліду площини *P1*, яка перетнеться з віссю конуса в точці D_2. З цієї точки проводять сферичну поверхню радіусом D_2A_2 , яка перетне конус по колу, що на фронтальній проекції спроектується в пряму E_2F_2. На перетині A_2B_2 і E_2F_2 отримують першу проміжну точку лінії перетину – точку 2_2. Аналогічно отримують точки 3_2 і 5_2. Горизонтальні проекції знаходять за проекційним зв'язком. Проміжні точки сполучають плавною кривою.

<u>Приклад 4.</u> Побудова лінії перетину двох поверхонь, що мають загальну площину симетрії (паралельну до $П_2$) – прямого кругового циліндру та похилого кругового конусу.(Рис.12.6) Для побудови проводять ряд кругових паралельних перерізів, центри яких лежать на одній прямій (що перетинає вісь обертання циліндра). Визначають опорні точки *a* і *b*. Проводять переріз конуса *1-1* паралельно до основи конуса. З його центру C_1 встановлюють перпендикуляр до перетину з віссю циліндра – отримують точку O_1. З точки O_1 описують сферу *1* радіусом O_1-*1*, яка перетинає циліндр по лінії *2-2*. На перетині *1-1 і 2-2* отримують точку *d* лінії претину поверхонь. Аналогічно отримують інші проміжні точки.

Контрольні питання

1. Обґрунтуйте план розв'язання розглянутої задачі.
2. Яким умовам повинні задовольняти допоміжні січні поверхні?
3. Як визначають проекції характерних точок побудованої лінії перетину?

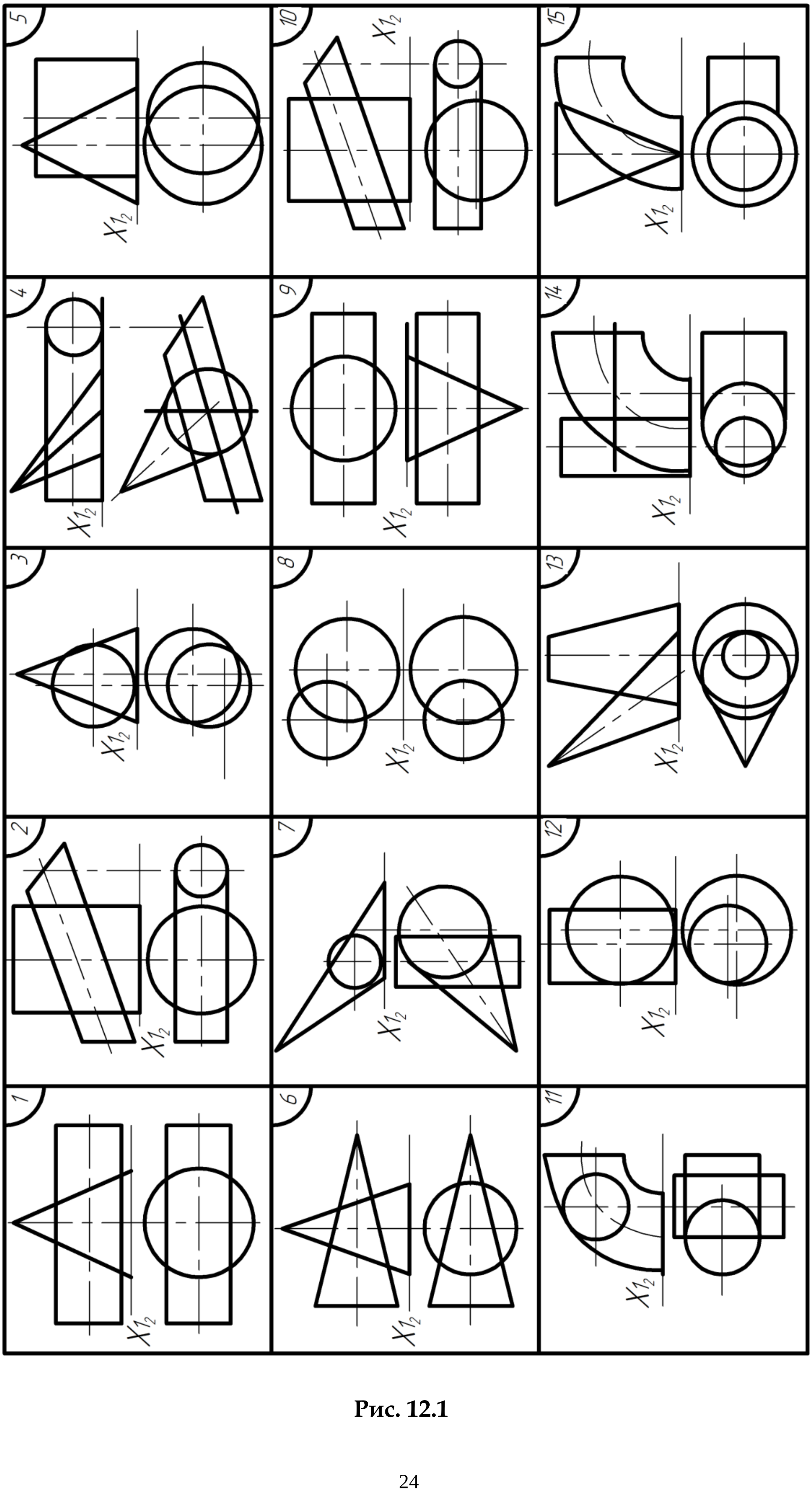

5
X_{12}
10
X_{12}
15
X_{12}
4
X_{12}
9
X_{12}
14
X_{12}
3
X_{12}
8
X_{12}
13
X_{12}
2
X_{12}
7
X_{12}
12
X_{12}
1
X_{12}
6
X_{12}
11
X_{12}

Рис. 12.1

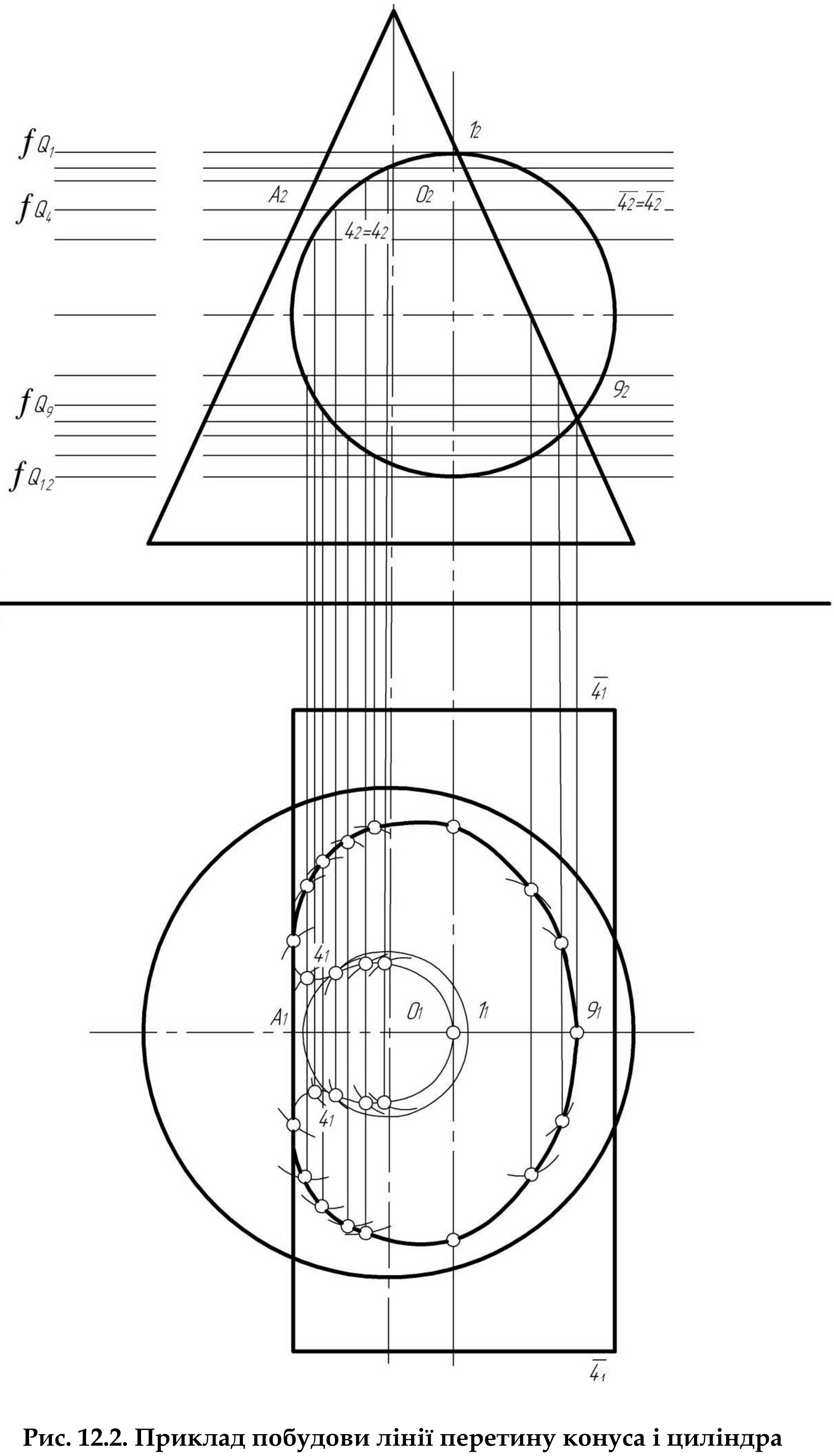


Рис. 12.2. Приклад побудови лінії перетину конуса і циліндра

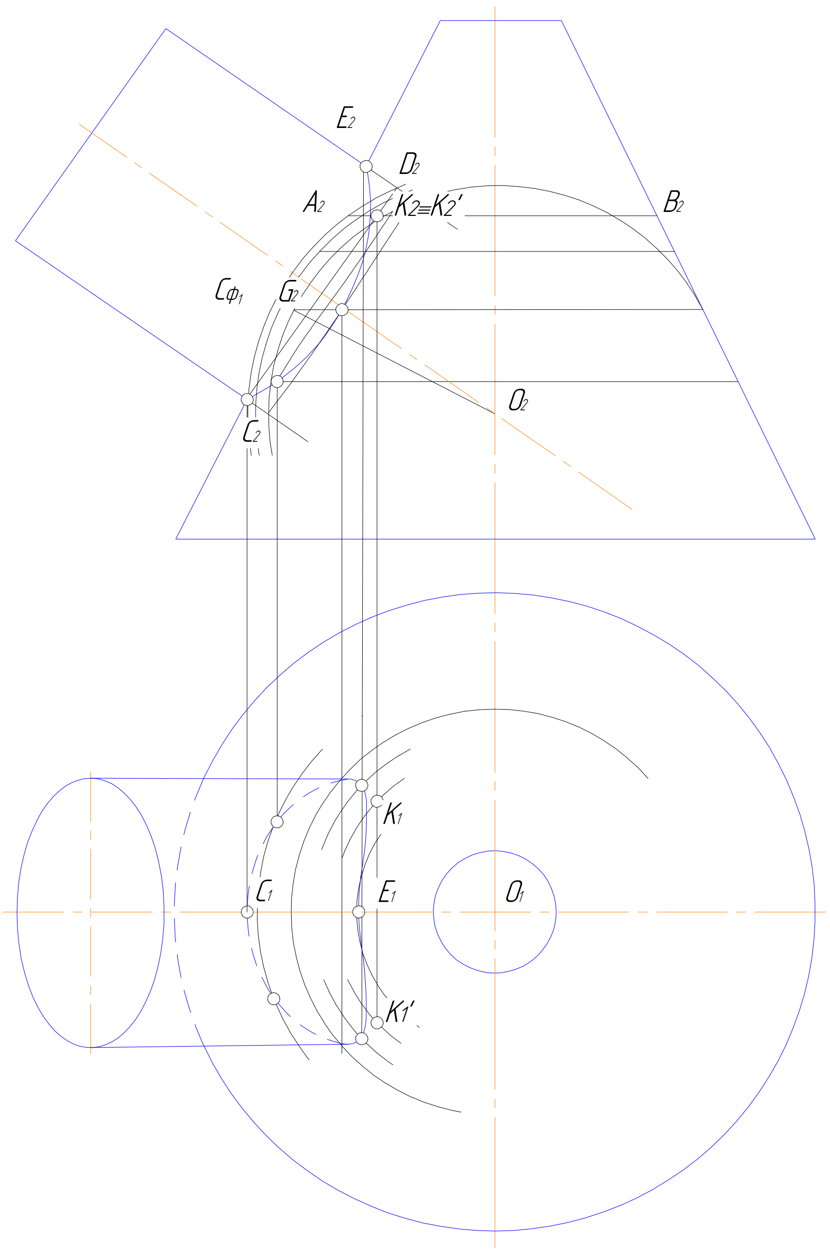


Рис. 12.3. Приклад знаходження лінії перетину конуса і циліндра за допомогою допоміжних площин посередників

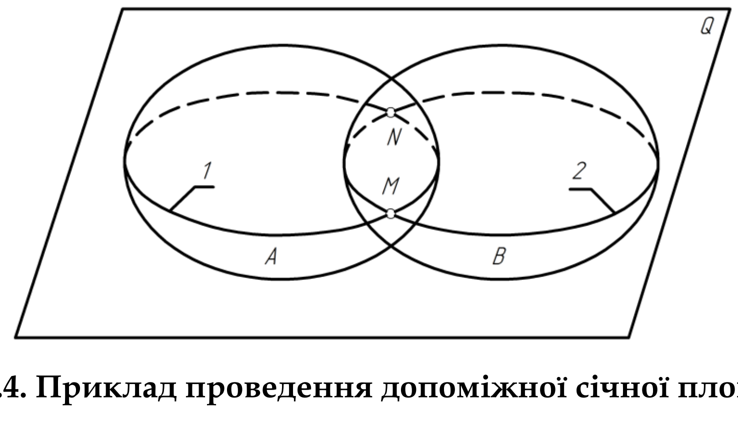


Рис. 12.4. Приклад проведення допоміжної січної площини

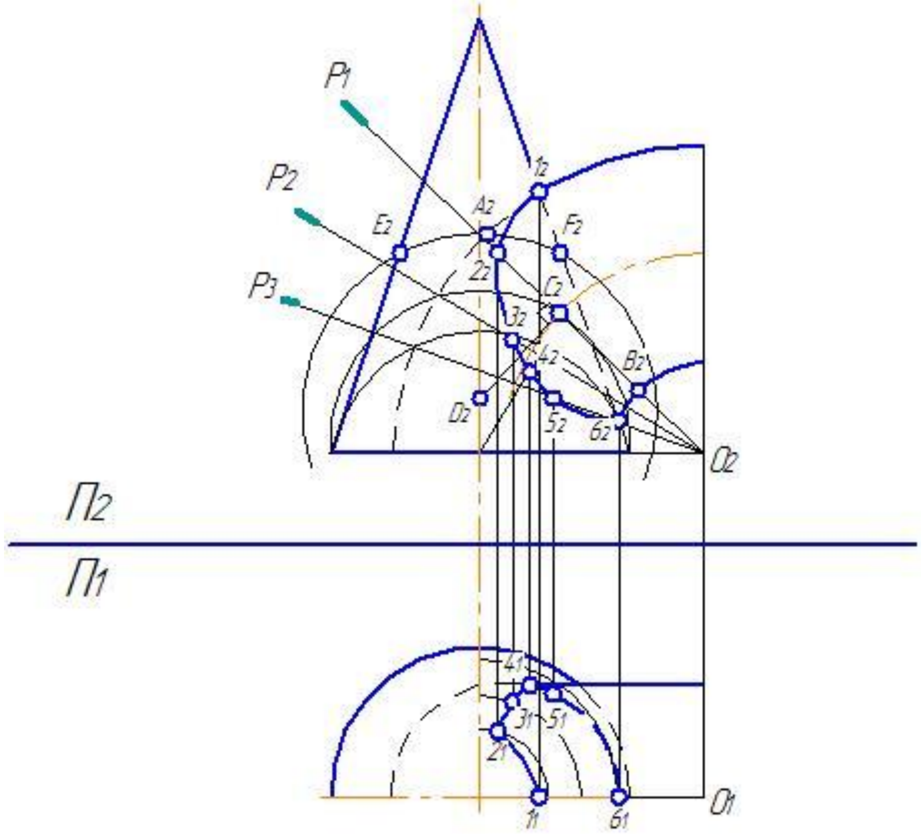


Рис. 12.5. Приклад знаходження лінії перетину циліндра з коловим кільцем

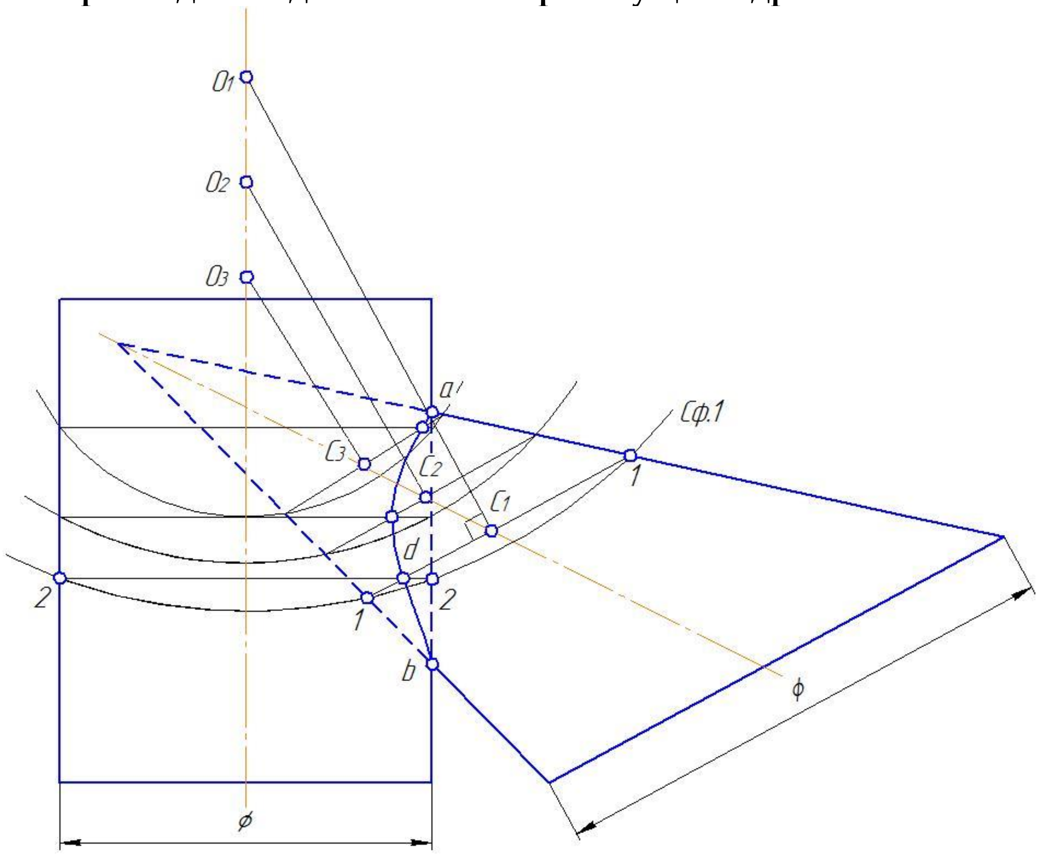


Рис. 12.6. Приклад знаходження лінії перетину двох поверхонь, що мають загальну площину симетрії

Завдання №13

ПОБУДОВА АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ ТІЛА

Умова. За двома заданими проекціями побудувати третю й аксонометричні проекції сполучення геометричних тіл – косокутну фронтальну симетричну проекцію та прямокутну ізометричну проекцію (рис. 13.2, табл. 13.1).

Таблиця 13.1

Діаметр	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
d, мм	50	60	70	80	90	50
h, мм	80	70	100	100	110	80

d – діаметр циліндра або основи конуса; *h* – висота піраміди або призми.

При побудові косокутної фронтальної симетричної проекції просторовий координатний тригранник, твердо пов'язаний з зображуваним предметом, розміщується так, що його осі *X* і *Z* паралельні до площини аксонометричних проекцій, а вісь *Y* перпендикулярна до неї.

При цьому усі відрізки і фігури, розташовані в площинах, паралельних площині XOZ_1 просторового тригранника, проектуються на площину аксонометричних проекцій у натуральну величину, тобто коефіцієнти викривлення по осях *X* і *Z* рівні 1. Напрямок проекціюючих променів щодо осі *Y* вибирається так, що проекція цієї осі (аксонометрична вісь *Y*) розташовується під кутом 135° до аксонометричних осей *X* і *Z* (коефіцієнт викривлення по осі *Y* дорівнює 0,5 – це значить, що усі відрізки, паралельні до осі *Y* зображуються на аксонометричній площині проекцій у половину своєї натуральної величини.

Кола, розташовані в площинах, паралельних площині *XOZ,* проекціюються в натуральну величину. Наближені зображення кіл, розташованих у площинах, паралельних до площин *XOZ* та *YOZ*, можна побудувати за точками, як показано на рис. 13.5.

Приклад 1. Побудувати косокутну фронтальну диметричну проекцію циліндра і піраміди (рис. 13.4)

Піраміду розташовуємо в просторі так, щоб її висота співпала з віссю *Z*, центр рівностороннього трикутника основи піраміди з початком координат, а вершина основи *3* знаходилася на осі *X*.

Тоді на аксонометричному зображенні висота піраміди *O-S* і висота основи *3-К* як відрізки, паралельні до осей *X* та *Z,* зобразяться в натуральну величину. До того ж центр координат поділяє висоту основи у відношенні 1:2. Сторона основи *1-2* паралельна до осі *Y* і зобразиться на аксонометричному зображенні в 1/2 натуральної величини (зображення буде паралельним до осі *Y).* З'єднавши точки *1, 2, 3* між собою і з точкою *S,* отримаємо аксонометричне зображення піраміди.

Вісь циліндра в просторі розташована у площині *XOZ* паралельно до осі *OX* на відстані радіуса циліндра від цієї осі. Тому відстань між центрами основ циліндра по осі зобразиться в натуральну величину (відрізок $\overline{O}\,\overline{\overline{O}}$, паралельний до осі *X* і знаходиться від неї на відстані радіуса циліндра). Потім на кресленику проводимо системи аксонометричних осей з центрами в точках проекцій кінців осі циліндра $\overline{O}$ і $\overline{\overline{O}}$ і будуємо зображення кіл основ циліндра у відповідності з рис. 13.5.

При побудові зображення в прямокутній ізометричній проекції просторовий координатний тригранник розташовується перед площиною аксонометричних проекцій так, що осі координат X,Y,Z нахилені до площини проекцій під однаковими кутами, а проекціюючі промені спрямовані перпендикулярно до цієї площини. При цьому аксонометричні осі X,Y,Z розташовуються під кутом 120° одна до одної (рис. 13.7). Коефіцієнт спотворення по всіх осях однаковий і дорівнює 0,82. У технічному кресленні коефіцієнт спотворення для простоти умовно приймається рівним 1, тобто відрізки прямих на зображуваному предметі, паралельні до осей координатного тригранника, зображуються на аксонометричній площині проекцій у натуральну величину. При цьому аксонометричне зображення виявляється збільшеним у 1:0,82 = 1,22 рази.

Побудову кола в прямокутній ізометричній проекції наближено можна робити так, як показано на рис. 13.6. Якщо коло знаходиться в площині X,O,Y або паралельній до неї, будується ромб *0234* зі сторонами, паралельними до аксонометричних осей *X* і *Y*, і рівними натуральній величині діаметра кола (діаметри кола, паралельні до осей *X* і *Y* проектуються в натуральну величину). Потім з точки *O* радіусом *OA* проводимо дугу *AB* кола. Аналогічно з точки *3* тим самим радіусом проводимо дугу *CD*. Далі з точки *K* радіусом *KA* проводимо дугу *AD* і з точки *H* тим самим радіусом – дугу *BC*.

Аксонометричні проекції кіл, що лежать у площинах, паралельних до площин *XOY* і *YOZ* будуються аналогічно (рис13.6).

Приклад 2. Побудова прямокутної ізометричної проекції (рис.13.7). Розглядаються ті самі геометричні тіла, що і при побудові косокутної диметричної проекції в попередньому прикладі.

Центр основи піраміди сполучаємо з початком просторової системи координат, а висоту піраміди – з віссю *Z*. Відкладаючи на аксонометричній осі *Z* від початку координат натуральну величину висоти піраміди, отримуємо точку *S* – аксонометричну проекцію вершини піраміди (умовно приймаємо, що відрізки, паралельні до просторових осей координат, проекціюються в натуральну величину).

Піраміду розташовуємо так, що одна з висот основи (що збігається з віссю *X)* проекціюється (відповідно до умови) у натуральну величину (відрізок *K-3).* Причому початок координат поділяє її у відношенні 1:2. Через точку *K* проводимо паралельно до осі *Y* відрізок 1-2, який дорівнює натуральній величині сторони основи піраміди, тому що ця сторона основи паралельна до просторової осі *Y*. З'єднуючи між собою точки *1,2,3* прямими отримуємо аксонометричну проекцію основи піраміди, а з'єднуючи їх із точкою S – проекцію піраміди.

Відрізок $\overline{O}\,\overline{\overline{O}}$, що являє собою проекцію відрізка між центрами основ по осі циліндра, розташується паралельно до осі *X* на відстані радіуса циліндра. У просторі цей відрізок паралельний до осі *X* і тому на аксонометричній проекції відкладається в натуральну величину.

Проводимо системи аксонометричних осей з центрами в точках $\overline{O}\,\overline{\overline{O}}$ і будуємо аксонометричні зображення основ циліндра, що розташовані в площинах, паралельних до координатної площини *YOZ* у відповідності до рис. 13.6. Потім проводимо відрізки *4-5* і *6-7,* дотичні до зображень основ циліндра і паралельні до осі $\overline{O}\,\overline{\overline{O}}$. Ці відрізки утворять дотичні і доповнять аксонометричне зображення циліндра.

Контрольні питання

1. Які правила побудови зображень у фронтальній косокутній диметричній проекції?
2. Які правила побудови зображень у прямокутній ізометричній проекції?
3. Як будуються зображення кіл у зазначених видах аксонометричних проекцій?

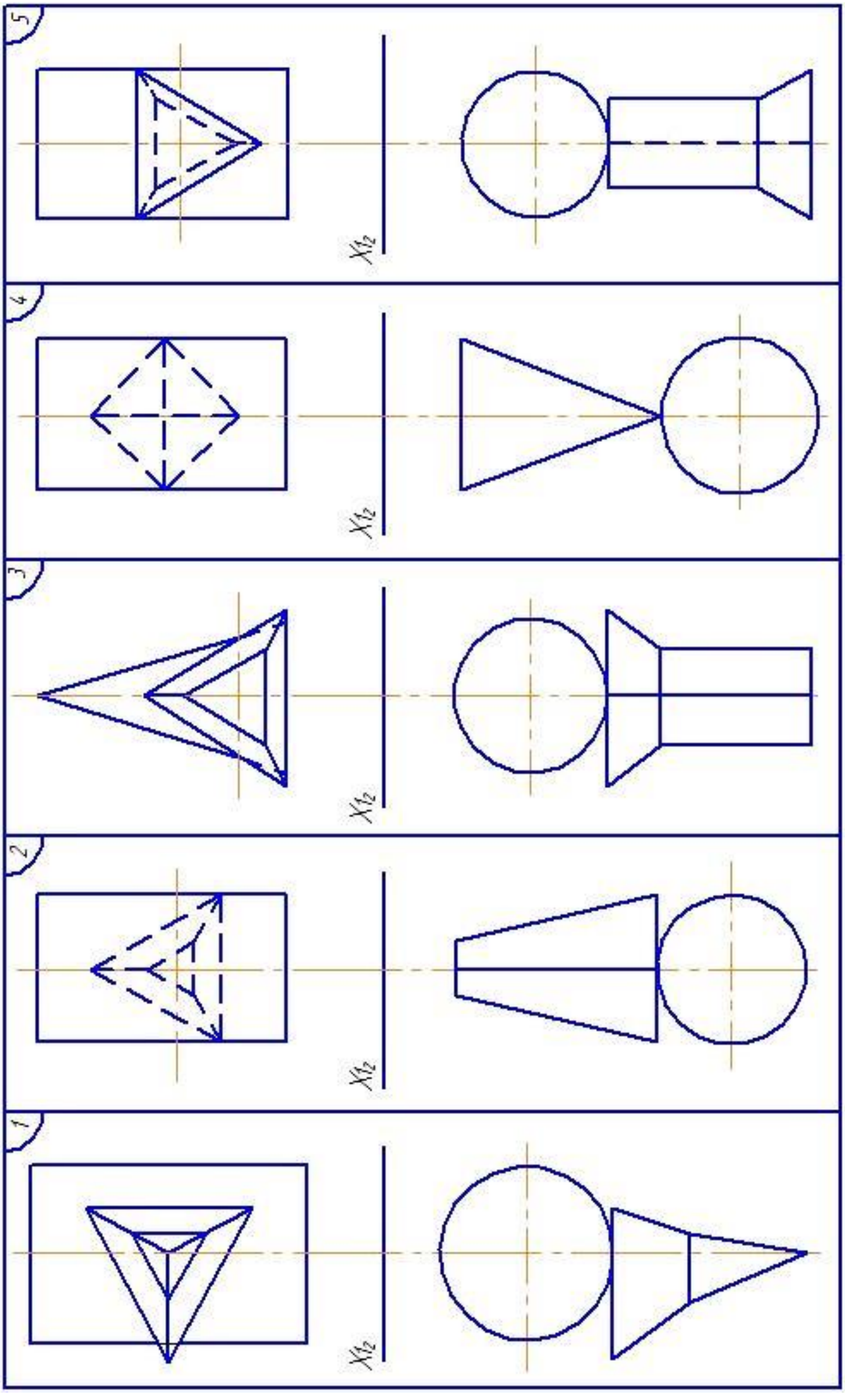


Рис. 13.1. Варіанти до завдання 13

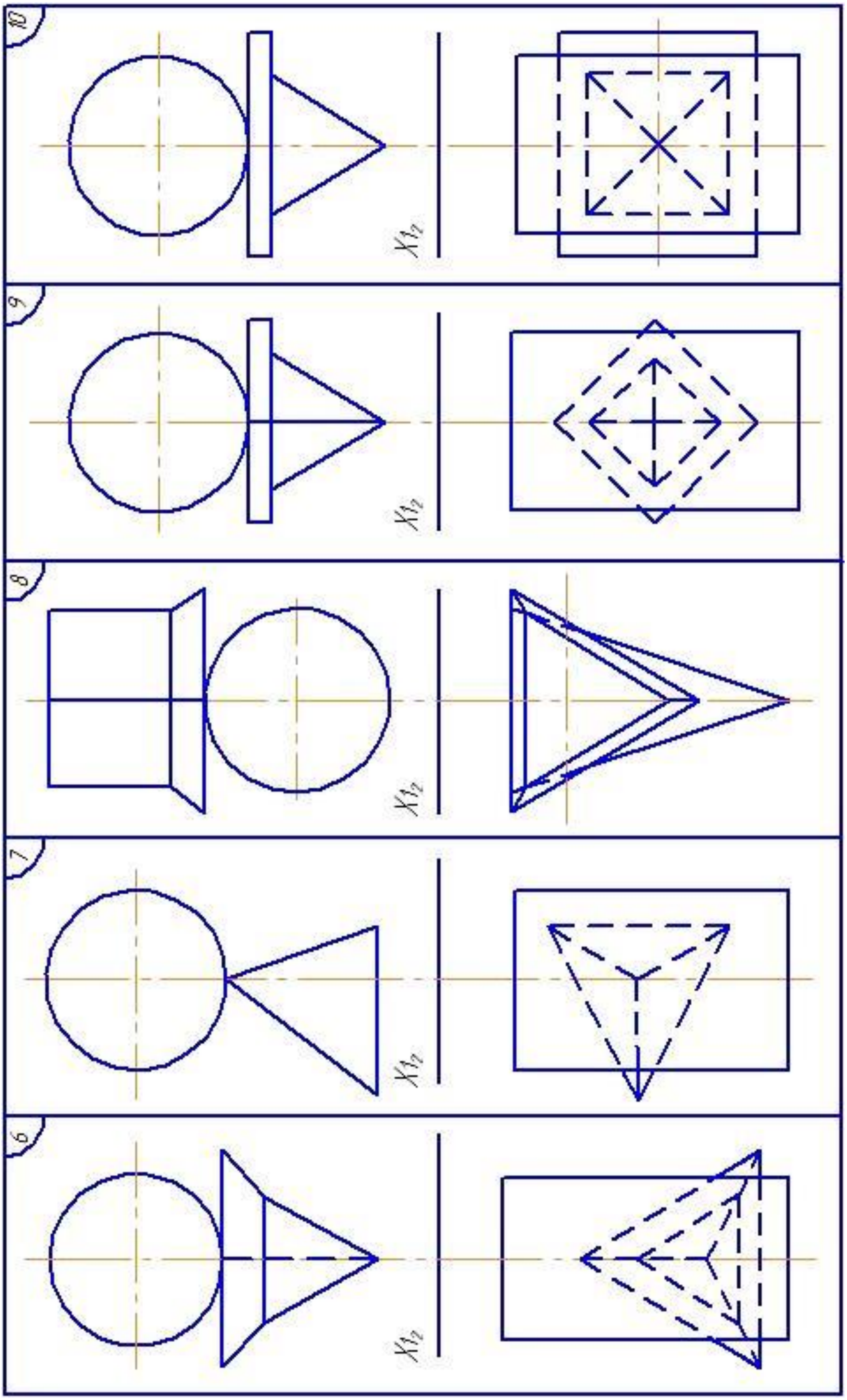


Рис. 13.1. Варіанти до завдання 13

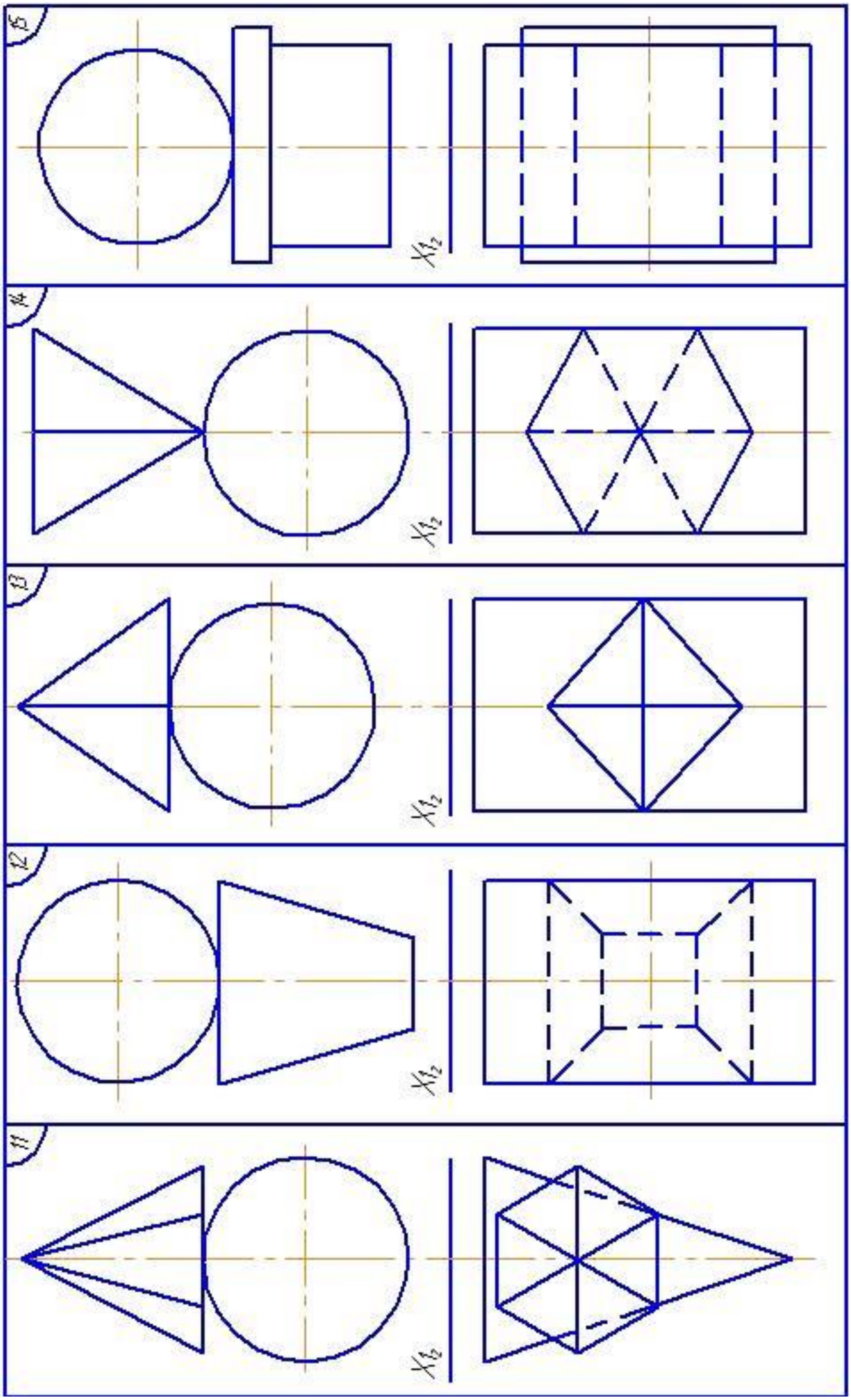


Рис. 13.3. Варіанти до завдання 13

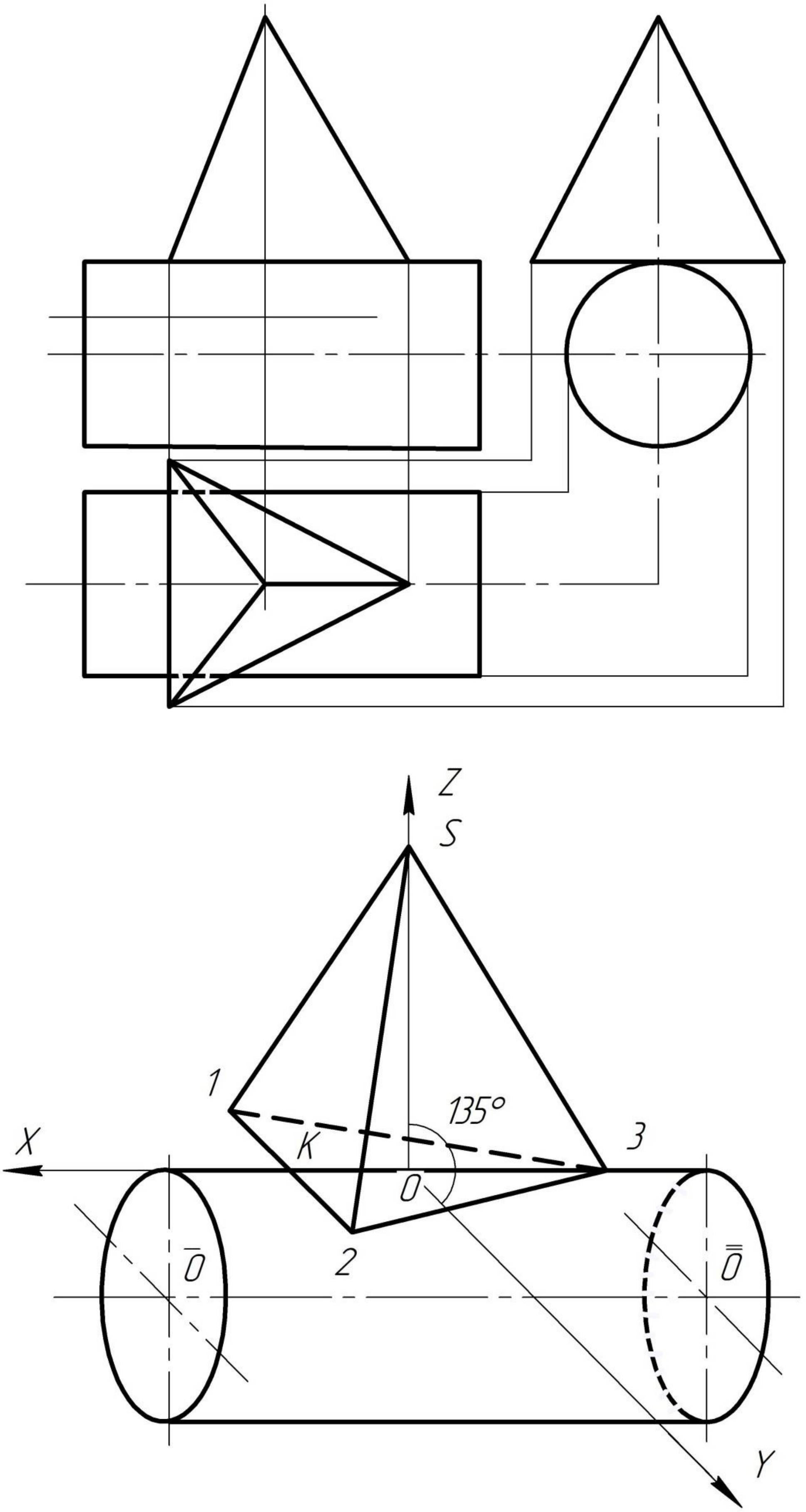


Рис. 13.4. Приклад побудови косокутної фронтальної диметричної проекції циліндра і піраміди

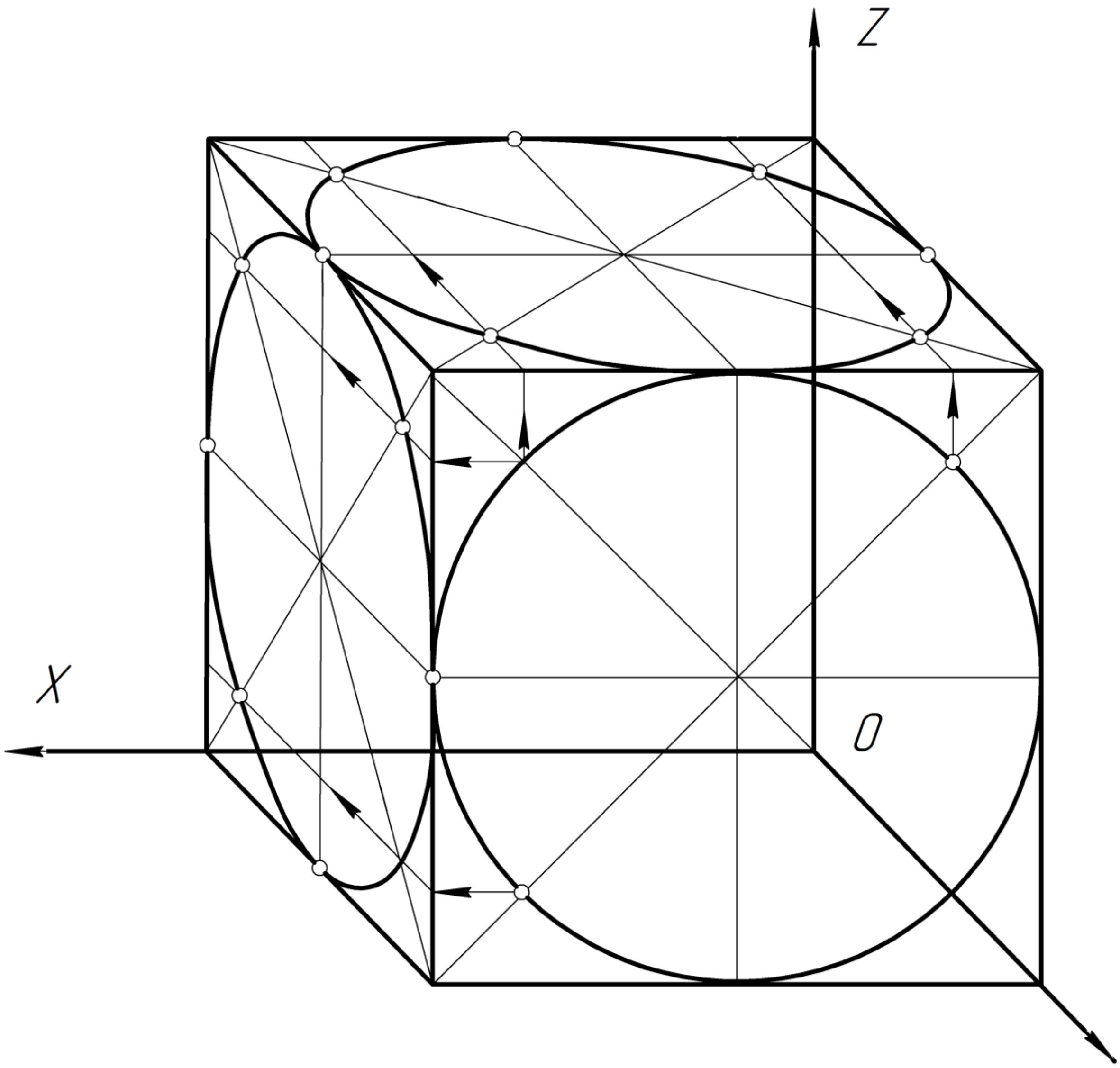


Рис. 13.5. Приклад побудови кола
у фронтальній косокутній диметричній проекції

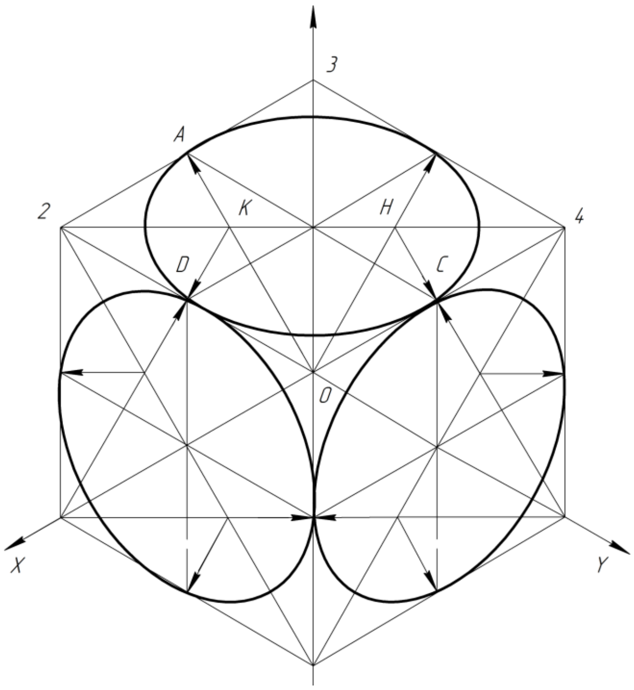


Рис. 13.6. Приклад побудови кола у прямокутній ізометричній проекції

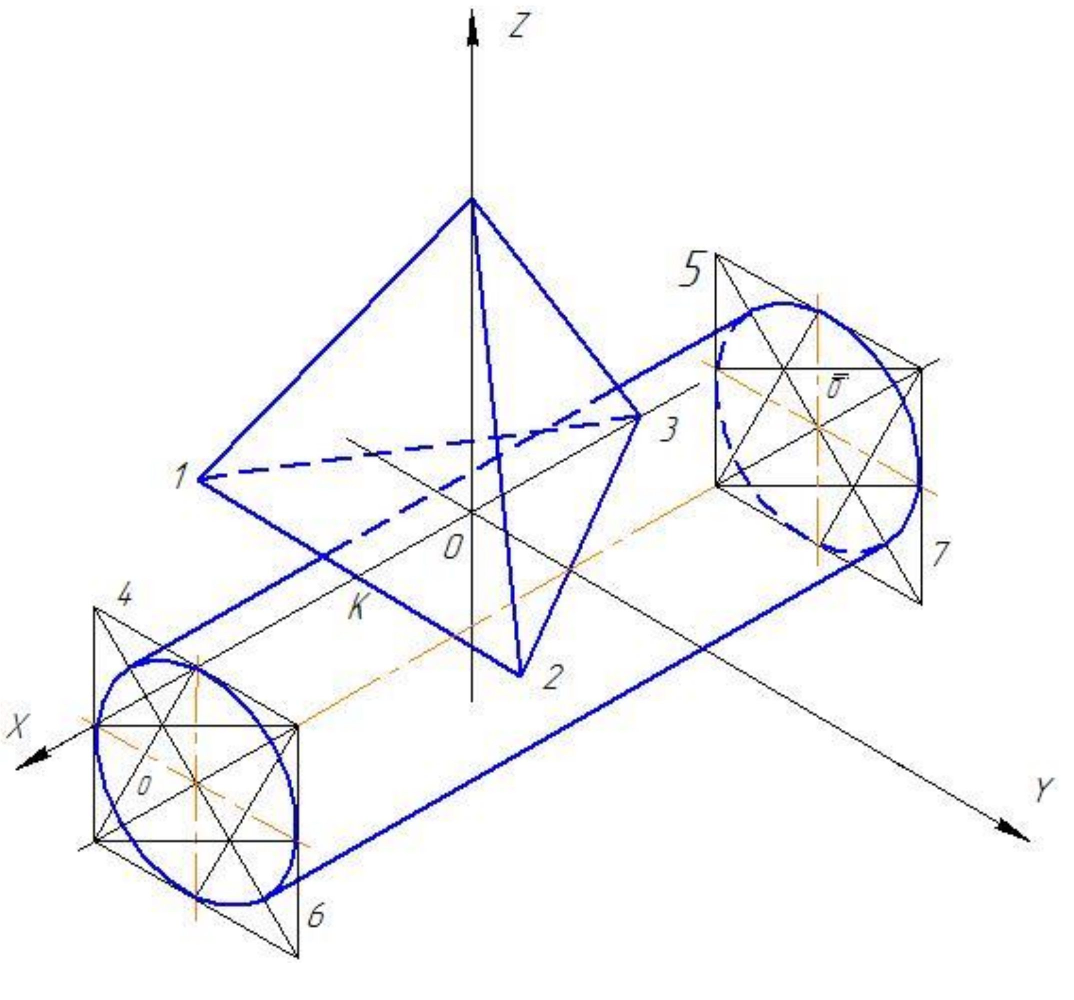


Рис. 13.7. Приклад побудови циліндра і піраміди у прямокутній ізометричній проекції

ЛІТЕРАТУРА

1. Антонович Є.А., Василишин Я.В., Шпільчак В.А. Нарисна геометрія. Практикум: Навч. посібник / За ред. проф. Є.А. Антоновича. Львів: Світ, 2004. 528 с.
2. Джеджула О. М. Курс лекцій з нарисної геометрії: Навчальний посібник Винниця: ВДАУ, 2006. 107 с.
3. Кормановський С. І. Конспект лекцій з інженерної графіки: Конспект лекцій. Вінниця: ВНТУ, 2009. – 116 с.
4. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна графіка : Підручник ; за ред. В.Є. Михайленка. Київ: Каравела, 2008. 272 с.
5. Михайленко В.Є., Євстифєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В. Нарисна геометрія: Підручник ; за ред. В. Є. Михайленка. Київ: Вища шк., 1993. 271 с.
6. Науменко В.Я., Касперський А.В., Борейко С.Ю., Селезень В.Д. Нарисна геометрія: навч. посіб. ; за ред. В.Я. Науменка. Київ: Четверта хвиля, 2013. 144 с.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

БОНДАР
Наталія Олександрівна

ДРОЗДЕНКО
Наталія Миколаївна

КОЛЯДА
Андрій Миколайович

ЛЮЛЬКА
Василь Степанович

Технічний редактор ***О.Клімова***

Комп'ютерна верстка та макетування ***Н.Бондар***

Свідоцтво про державну реєстрацію
Друкованого засобу масової інформації
Серія КВ № 17500-6250 ПР від 16.11.2010р.

Підписано до друку ….. Формат…
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. Друк. Арк. … Обл.-вид…..
Наклад 50 прим. Зам. №
Редакційно-видавничий відділ ЧНПУ імені Т.Г.Шевченка.
14013, вул.. Гетьмана Полуботка, 53, к.208.
Тел. 65-17-99, Chdpu_tipograf_208@gmail/com