УДК 37.016:514:37.091.313

Кобко Л. М., Томилко О. С.

МЕТОД ПРОЕКТІВ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

У статті обґрунтовується необхідність застосування методу проектів у навчанні геометрії в загальноосвітній школі як одного з найбільш поширених видів дослідницької діяльності. На прикладі деяких особливостей застосування проектного методу при вивченні планіметрії продемонстровано його переваги та запропоновано результати впровадження в освітній процес України з учнями поглибленого рівня навчання математики. Метод проектів – педагогічна технологія, орієнтована не на інтеграцію фактичних знань, а на їх застосування і набуття нових.

Пропонується тематика деяких проектів як інноваційної складової в навчанні шкільного курсу геометрії.

Ключові слова: *геометрія, трикутник, різні розв'язання планіметричної задачі, метод проектів.*

Постановка проблеми. Аналіз досліджень і публікацій. Сучасний ринок праці вимагає від випускників середньої школи здатності користуватися сучасними інформаційними технологіями та практично застосовувати здобуті знання і досвід у багатьох освітніх галузях, бути готовими до виконання нових ролей і відповідати потребам інформаційного суспільства [4].

Питання покращення математичної підготовки випускника загальноосвітньої школи постає особливо в контексті практичної реалізації. Навчання полягає не тільки в накопиченні знань, їх узагальненні і систематизації, а також в умінні творчо їх застосовувати [7].

Потрібна така організація педагогічного процесу, щоб учні по змозі самі відкривали математичні твердження, щоб якомога повніше використовувалась ініціатива учнів, заохочувався творчий пошук, щоб максимально використовувалась властива дітям допитливість і активність. Одним з найбільш поширених видів дослідницької праці школярів в процесі навчання сьогодні є метод проектів [10;11;12].

Метод проектів широко застосовується як в Америці (починаючи з середини 70 років), так і в багатьох європейських країнах, та довів свою ефективність. Метод проектів (навчання через діяльність) є замінником традиційної класно-урочної системи організації освітнього процесу [1; 2; 10; 11].

Метою написання даної статті є показ можливостей методу проектів при навчанні геометрії в основній школі.

Виклад матеріалу. Проектний метод у шкільній освіті розглядається як певна альтернатива класно-урочної системи. Сучасний проект учня – це дидактичний засіб активізації пізнавальної діяльності, розвитку креативності та одночасного формування певних особистісних якостей.

Унікальним засобом розвитку інтелектуального потенціалу особистості є геометрія, геометричні знання та вміння є одним з головних факторів, які забезпечують готовність людини до неперервної освіти і трудової діяльності [9].

В умовах скорочення навчального часу на вивчення геометрії постає проблема застосування методу проектів при навчанні геометрії в середній школі.

Метод проектів – це сукупність певних дій, документів, попередніх текстів, задум для створення реального об'єкта, створення різного роду теоретичного продукту, значущого для учня й остаточно оформленного [12].

Метод проектів – педагогічна технологія, орієнтована не на інтеграцію фактичних знань, а на їх застосування і набуття нових.

Розглянемо деякі особливості застосування методу проектів на прикладі пошуку різних розв'язань однієї геометричної задачі.

Задача. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) на бічних сторонах вибрано точки K і N такі, що $K \in AB$, $N \in BC$, $AN \cap CK = O$, $S_{ACO} = S_1$, $S_{KBNO} = S_2$, $S_1 = S_2$. Доведіть, що $AK = BN$.

Розв'язання 1. Нехай у ΔABC $AC = a$, $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 1). За умовою $S_1 = S_2$($S_1 = S_{ACO}$, $S_2 = S_{KBNO}$). Маємо $\angle BCA = \angle BAC = \alpha$(за властивістю рівнобедреного трикутника), тоді $\angle ABC = 180° - 2\alpha$ (теорема про суму кутів трикутника). Побудуємо висоту BH ΔABC. У рівнобедреному трикутнику проведена до основи висота BH є медіаною і бісектрисою. Отже, $AH = HC = \frac{a}{2}$, $\angle ABH = \angle CBH = 90° - \alpha$. З ΔABH ($\angle H = 90°$) $\frac{a}{2} = b\cos\alpha$, звідси $b = \frac{a}{2\cos\alpha}$. Оскільки:

$S_{ACK} = S_{AOK} + S_1$, $S_{ABN} = S_{AOK} + S_2$, за умовою $S_1 = S_2$, то $S_{ACK} = S_{ABN}$. (1)

Обчислимо: $S_{ACK} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AK \cdot \sin\alpha = \frac{a \cdot AK \cdot \sin\alpha}{2}$, (2)

$S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BN \cdot \sin(180° - 2\alpha) = \frac{b \cdot BN \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{a \cdot BN \cdot \sin 2\alpha}{4\cos\alpha}$. (3)

З (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{a \cdot AK \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot BN \cdot \sin 2\alpha}{4\cos\alpha}$, $\frac{a \cdot AK \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot BN \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{4\cos\alpha}$, $AK = BN$.

Розв'язання 2. Побудуємо висоти AH_1, CH_2 трикутника ABC (рис. 2). Оскільки $\Delta ACH_1 = \Delta CAH_2$ (за гіпотенузою і гострим кутом), то $AH_1 = CH_2 = h$.

Маємо: $\left.\begin{array}{l} S_{ACK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot h = S_{AKO} + S_1 \\ S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot h = S_{AKO} + S_2 \\ \text{за умовою } S_1 = S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AK \cdot h = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot h$, $AK = BN$.

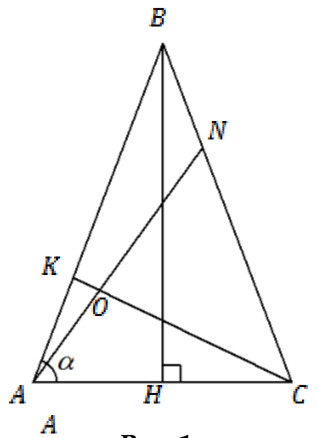

Рис. 1

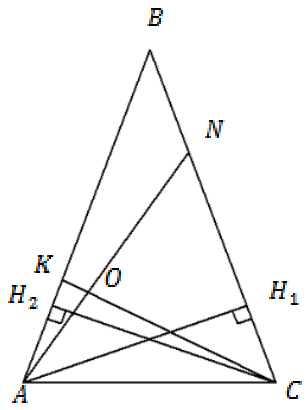

Рис. 2

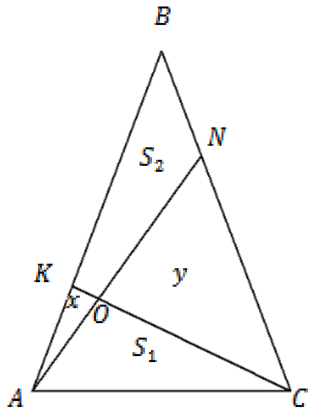

Рис. 3

Розв'язання 3. Нехай $S_{AKO} = x$, $S_{CNO} = y$, $AB = BC = b$ (рис. 3). Трикутники CAN, BAN, мають спільну висоту, проведену з вершини A, трикутники BCK, ACK мають спільну висоту, поведену з вершини C (рис. 2).

За властивістю площ трикутників, довжини висот яких рівні, маємо:

$\frac{S_{BCK}}{S_{ACK}} = \frac{BK}{AK}$ або $\frac{S_2+y}{S_1+x} = \frac{b-AK}{AK}$, $\frac{S_2+y}{S_1+x} = \frac{b}{AK} - 1$, (1)

$\frac{S_{CAN}}{S_{BAN}} = \frac{CN}{BN}$ або $\frac{S_1+y}{S_2+x} = \frac{b-BN}{BN}$, $\frac{S_1+y}{S_2+x} = \frac{b}{BN} - 1$. (2)

За умовою $S_1 = S_2$, тоді: $S_1 + x = S_2 + x$, $S_1 + y = S_2 + y$. (3)

З (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{b}{AK} - 1 = \frac{b}{BN} - 1$, $\frac{b}{AK} = \frac{b}{BN}$. З рівності відношень $AK = BN$.

Розв'язання 4. Побудуємо BH, KH_1, NH_2 – висоти трикутників ABC, AKC, ABN відповідно (рис. 4). Позначимо $AB = BC = b$, $\angle BCA = \alpha$, тоді $\angle ABC = 180° - 2\alpha$.

З ΔAKH_1 ($\angle H_1 = 90°$) $KH_1 = AK\sin\alpha$, з ΔABH ($\angle H = 90°$) $AH = b\cos\alpha$, тоді $AC = 2b\cos\alpha$,

$S_{AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot KH_1 = \frac{1}{2} \cdot 2b\cos\alpha \cdot AK\sin\alpha = \frac{b \cdot AK \cdot \sin 2\alpha}{2}$. (1)

З ΔBNH_2 ($\angle H_2 = 90°$) $NH_2 = BN \cdot \sin(180° - 2\alpha) = BN\sin 2\alpha$, тоді

$S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot NH_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot BN\sin 2\alpha = \frac{b \cdot BN \cdot \sin 2\alpha}{2}$. (2)

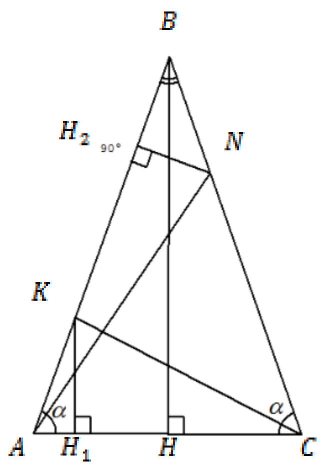

Рис. 4

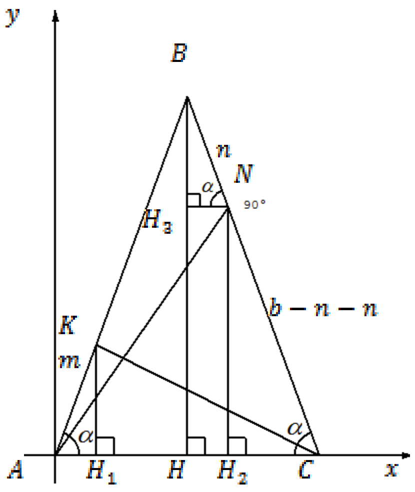

Рис. 5

Крім цього $S_{AKC} = S_{ABN}$ (розв'язання 1). (3)

З (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{b \cdot AK \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{b \cdot BN \cdot \sin 2\alpha}{2}$, звідси $AK = BN$.

Розв'язання 5. Нехай $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $AK = m$, $BN = n$ (рис. 5), тоді $CN = b - n$. Виберемо прямокутну декартову систему координат (Oxy) так, щоб вісь x сумістилась з прямою AC, початок координат – з точкою A. Опустимо перпендикуляри з точок B, K N на AC, з точки N на BH.

З ΔABH $(\angle H = 90°)$ $AH = b\cos\alpha$, $BH = b\sin\alpha$; з ΔAKH_1 $(\angle H_1 = 90°)$

$AH_1 = m\cos\alpha$, $KH_1 = m\sin\alpha$; з ΔNCH_2 $(\angle H_2 = 90°)$ $NH_2 = (b-n)\sin\alpha$,

$CH_2 = (b-n)\cos\alpha$; з ΔBNH_3 $(\angle H_3 = 90°)$ $NH_3 = n\cos\alpha$.

Оскільки в прямокутнику $HH_3NH_2 - HH_2 = NH_3$, то $AH_2 = AH + HH_2 =$

$= AH + NH_3 = b\cos\alpha + n\cos\alpha = (b+n)\cos\alpha$.

В $(O, \vec{i}, \vec{j})$ точки A, B, C, K, N, набувають координат: $A(0;0)$, $B(b\cos\alpha; b\sin\alpha)$, $C(2b\cos\alpha; 0)$, $K(m\cos\alpha; m\sin\alpha)$, $N((b+n)\cos\alpha; (b-n)\sin\alpha)$.

Площу трикутників ABN, AKC обчислимо за формулою ([5, С. 33])

$S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$, де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ – координати вершин трикутника.

$S_{ABN} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} b\cos\alpha & b\sin\alpha \\ (b+n)\sin\alpha & (b-n)\sin\alpha \end{matrix}\right\| = bn\sin\alpha\cos\alpha;$ (1)

$S_{AKC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} m\cos\alpha & m\sin\alpha \\ 2b\cos\alpha & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(0 - 2bm\sin\alpha\cos\alpha| = bm\sin\alpha\cos\alpha.$ (2)

З розв'язання 1 маємо: $S_{ABN} = S_{AKC}$. (3)

З (1), (2), (3) $\Rightarrow bn\sin\alpha\cos\alpha = bm\sin\alpha\cos\alpha$, $m = n$, тобто $AK = BN$.

Розв'язання 6. Площу трикутника ABC, заданого координатами вершин, можна обчислити за формулою $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Дійсно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(AB \cdot AC)^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\right)^2 (1 - \cos^2 A)} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\right)^2 - \left(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

У вибраній системі координат (розв'язання 5) маємо:

$\overrightarrow{BA}(-b\cos\alpha; -b\sin\alpha)$, $|\overrightarrow{BA}| = b$; $\overrightarrow{AC}(2b\cos\alpha; 0)$, $|\overrightarrow{AC}| = 2b\cos\alpha$; $\overrightarrow{BN}(n\cos\alpha; -n\sin\alpha)$, $|\overrightarrow{BN}| = n$; $\overrightarrow{AK}(m\cos\alpha; m\sin\alpha)$, $|\overrightarrow{AK}| = m$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BN} = -bn\cos^2\alpha + bn\sin^2\alpha = -bn\cos 2\alpha$; $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2bm\cos^2\alpha + m\sin\alpha \cdot 0 = 2bm\cos^2\alpha$. Обчислимо:

$$S_{AKC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(|\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\right)^2 - \left(\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2bm\cos\alpha)^2 - (2bm\cos^2\alpha)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4b^2m^2\cos^2\alpha - 4b^2m^2\cos^4\alpha} = \frac{2bm\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2} = \frac{bm\sin 2\alpha}{2}.$$

$$S_{BAN} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BN}|\right)^2 - \left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BN}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(bn)^2 - (-bn\cos 2\alpha)^2} = \frac{bn\sin 2\alpha}{2}.$$

Оскільки $S_{AKC} = S_{BAN}$ (розв'язання 1), то одержимо: $\frac{bm\sin 2\alpha}{2} = \frac{bn\sin 2\alpha}{2}$, звідки $m = n$ або $AK = BN$.

У запропонованих розв'язаннях задачі використано: властивості рівнобедреного трикутника, теорема про суму кутів трикутника, різні формули площ трикутника і чотирикутника, властивості площ трикутників; означення, побудова і властивості медіан, висот і бісектрис трикутника; співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника, тригонометричні формули, властивості паралелограма та прямокутника, дії над векторами в координатах, скалярне множення векторів та його властивості, алгебраїчні обчислення тощо.

Різні розв'язання розглянутої задачі доцільно запропонувати на уроках-проектах "Трикутник у планіметрії", 9 клас. При цьому виконуватимуться вимоги до реалізації проекту [12], а саме: наявність значущої у творчому плані проблеми (задачі, яка вимагає знання теорії для її розв'язання); використання дослідницьких методів, які передбачають певну послідовність дій:

– визначення проблеми і пов'язаних з нею завдань дослідження та формулювання гіпотез їх розв'язання;
– збір, систематизація і аналіз отриманих даних;
– підведення підсумків, оформлення результатів, презентація;
– висновки, пропозиція нових проблем дослідження.

Пропонуємо тематику деяких проектів з геометрії трикутника для учнів 9 класу з поглибленим вивченням математики:

1. У лабіринті висот трикутника [7];
2. Навколо медіан трикутника [5];
3. Властивості бісектрис та інцентра трикутника [1,3];

Висновок. Проектний метод у шкільній освіті розглядається як певна альтернатива класно-урочної системи. Сучасний проект учня – це дидактичний засіб активізації пізнавальної діяльності, розвитку креативності та одночасного формування певних особистісних якостей.

Метод проектів навчання учнів дає змогу найбільш повно врахувати здібності, потреби, освітні нахили учнів і майбутні професійні інтереси.

Метод проектів ефективний на будь-якому етапі навчання та рівні освіти, актуальний в умовах скорочення часу на вивчення математики в школі.

Така робота, звичайно, має свої специфічні відмінності: відсутність традиційних занять, включення практичної діяльності у зміст індивідуальної освіти, консультаційний характер роботи викладача, практична діяльність в соціумі, відкритість діалогу (обговорення певних проектних рішень з викладачем), самостійне вирішення власних проблем.

Використані джерела

1. Амелькина Г. Несколько решений одной задачи. Свойство биссектрисы треугольника: [Метод проектов] / Г. Амелькина // Математика. – 2005. – №1. – С. 18-24.
2. Бондар Г. Трикутники: урок-проект у 7 класі / Г. Бондар // Математика в рідній школі. – 2014. – №10. – С. 26-33.
3. Булах І.О. Задачі про інцентр трикутника / І.О. Булах, Л.М. Кобко // Вісник ЧНПУ. Серія: педагогічні науки. – 2008. – Вип. 53. – С. 256-258.
4. Буткова Віра. Фінський досвід успішного навчання математики в школі / Віра Буткова // Математика в школі. – 2008. – С. 52-56.
5. Ігнатенко М. Навколо медіан трикутника / Микола Ігнатенко, Лідія Кобко // Математика в школі. – 2010. – №3. – С. 30-34.
6. Ігнатенко М. Одна геометрична задача крізь різні розділи / Микола Ігнатенко, Лідія Кобко // Математика в сучасній шк. – 2013. – №4. – С. 4-8.
7. Ігнатенко М.Я. У лабіринті висот трикутника / Микола Ігнатенко, Лідія Кобко // Математика в школі. – 2007. – №25. – С. 27-29.
8. Кобко Л.М. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів у процесі проведення підсумкових математичних уроків-практикумів з геометрії трикутника / Л.М. Кобко, О.С. Томилко // Вісник ЧНПУ. Серія: педагогічні науки. – 2012. – Вип. 97. – С. 198-200.
9. Кушнир Исаак. Геометрия на баррикадах. – 2-е изд., доп. и перераб. – К.: Факт, 2009. – 724 с.
10. Ларионова О.Г. Организация проектной деятельности учащихся при изучении геометрии / О.Г. Ларионова // Математика в школе. – 2007. – №8. – С. 8-16.
11. Матюха В.А. Паралельні та перпендикулярні прямі: урок-проект з геометрії, 7 клас / В.А. Матюха // Математика в шк. України.– 2012.– №31.– С. 29-31.
12. Соловій Г. Метод проектів: від вивчення до впровадження / Г. Соловій // Математика. – 2014. – №16. – С. 27-35.

Kobko L., Tomilko O.

METHOD PROJECTS IN TEACHING GEOMETRY

The article substantiates the need of method projects in teaching geometry in secondary school as one of the most common types of research. By the example of some features of the method projects application in the study of plane geometry its advantages are demonstrated and the outcomes of introduction in the educational process in Ukraine with students of depth level studing mathematics are proposed.

Method projects is an educational technology, focused not on integration of actual knowledge, but on use and acquisition of new ones.

L.K. Hladiy notes that the project is a set of specific actions, documents, previous texts, a plan for create a real object, subject, creation of various theoretical product. It is always a creative activity.

A basis of method projects is the development of cognitive skills of students, the ability to construct their own knowledge and orientate in the information space, the development of critical and creative thinking.

Method projects in school education is seen as a kind of alternative to class-task system. Modern project of pupil is a didactic tool of activation cognitive activity, of development creativity and simultaneous formation of certain personal qualities.

Method projects of pupils learning enable most fully take into account abilities, needs, inclinations education pupils, their intentions and future professional interests.

Method projects is effective at any stage of leaning and level of education and actual in reducing the time of studying geometry in school.

A unique way of intellectual potential of the individual is geometry, just geometry knowledge and skills are one of the main factors that ensure the readiness of the person to lifelong learning and employment.

An important part of pedagogical activity is teaching of solving geometry tasks, because in the process of solving skills of mental work and important traits as perseverance, attention, concentration are formed.

Solving problems is a kind of creativity, searching solution is an invention.

Solving geometric problems in different ways is a process of search, heuristic that does not repeats and copy what was before, and encourages independent work.

Topics of some projects are proposed as part of innovation in school course of geometry teaching.

Key words: *geometry, triangle, different solving of plane task, method projects.*

Стаття надійшла до редакції 14.04.2016 р.