НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» імені Т. Г. Шевченка
Кафедра математики та економіки

Л. О. Соколенко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

**до навчання курсу для студентів
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
та спеціальності 111 Математика**

Частина 1
«Аналітична геометрія на площині»

Чернігів
2021

УДК 514 (072)
С 59

Рецензенти:

Тарасенкова Ніна Анатоліївна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та методики навчання математики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького;

Школьний Олександр Володимирович – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики та теорії і методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

С 59 **Соколенко Л. О. Аналітична геометрія** : Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика. **Частина 1 «Аналітична геометрія на площині»**. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. 80 с.

Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія». Укладено на основі програми навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» підготовки бакалаврів галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика. Розраховані на студентів першого курсу спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика денної та заочної форм навчання.

УДК 514 (072)

Рекомендовано до друку вченою радою природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка (протокол № 3 від 20 жовтня 2021 року)

ЗМІСТ

І. ПЕРЕДМОВА

За навчальними планами підготовки бакалаврів з галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та з галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика нормативна навчальна дисципліна **«Аналітична геометрія»** вивчається протягом I-II семестрів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є геометричні об'єкти, які вивчаються методами векторної і лінійної алгебри з застосуванням методу координат.

Програма навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» складається з таких **двох модулів** складовими яких є такі **змістові модулі**:

Модуль 1. **Аналітична геометрія на площині.**

1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині.
2. Пряма лінія на площині.
3. Лінії другого порядку.

Модуль 2. **Аналітична геометрія в просторі.**

4. Метод координат у просторі.
5. Площина і пряма в просторі.
6. Поверхні другого порядку.

Метою вивчення навчальної дисципліни **«Аналітична геометрія»** є забезпечення глибокого засвоєння основних понять, положень і методів векторної алгебри, векторного впровадження координат, лінійної частини геометрії (пряма на площині, пряма і площина в просторі), теорії ліній і поверхонь другого порядку, а також лінійних геометричних перетворень простору.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Аналітична геометрія» є засвоєння основних понять та методів аналітичної геометрії (методу координат, векторного методу, векторно-координатного методу, методу ГМТ, методу перерізів, алгебраїчних, алгоритмічних методів, методу аналогій, методу геометричних перетворень) та набуття вмінь їх практично застосовувати.

Дані **методичні рекомендації** присвячені засвоєнню студентами **змістових модулів №1-6** курсу **«Аналітична геометрія».**

Під час навчання цих модулів відбувається формування таких **компетентностей**:

– ***здатність запам'ятати та відтворити*** означення та терміни основних понять «Аналітичної геометрії», векторної алгебри, теорії прямої та площини, теорії кривих та поверхонь другого порядку;

– ***здатність запам'ятати суть*** методу координат, векторного методу, векторно-координатного методу, методу ГМТ, методу перерізів, алгебраїчних, алгоритмічних методів, методу аналогій, та набуття вмінь їх практично застосовувати.

На вивчення навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» відводиться **180** годин **6** кредитів ЄКТС:

Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» складаються з двох частин:

Частина 1. «Аналітична геометрія на площині».

Частина 2. «Аналітична геометрія у просторі».

До методичних рекомендацій до навчання першої частини курсу «Аналітична геометрія на площині» включено: 1) програму навчальної дисципліни (ЗМ1-ЗМ6); 2) **12 тем лекційного курсу**, що містять мету навчання, змістову структуру теми (структурні елементи змісту та відповідну до них літературу), математичні поняття, рівняння, формули, теореми та правила теми, систематизовані та подані у вигляді таблиць. 3) **9 практичних занять**, що містять тему, питання, умови типових задач до відповідних питань теми, з окремими алгоритмами та прикладами розв'язування; 4) **теоретичні питання** по змістових модулях 1-3; 5) **приклади варіантів** тестових завдань по змістових модулях 1-3; 6) список основної та додаткової літератури.

У окремих лекційних темах та всіх практичних заняттях є **питання та завдання, що виносяться на самостійне опрацювання.** Такі питання та завдання є складовими **комплексів завдань самостійної роботи (КЗСР)** по відповідних змістових модулях 1-3. Біля їх нумерації зроблено позначки (°).

Навчання курсу «Аналітична геометрія», зокрема його змістових модулів 1-6, за представленою у посібнику технологією, пройшло апробацію у 2017-2021 роках в Національному університеті «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка на фізико-математичному відділенні природничо-математичного факультету.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Школьному О. В., професору Тарасенковій Н. А. за цінні поради під час підготовки рукопису методичних рекомендацій до друку.

II. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

І СЕМЕСТР

Модуль 1. Аналітична геометрія на площині

Змістовий модуль 1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині

Тема 1. **Векторні величини.** Предмет геометрії. Скалярні та векторні величини. Поняття вектора. Напрямлені відрізки. Вектор як множина пів напрямленим відрізків. Рівність векторів. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні і компланарні вектори. Розклад вектора за двома неколінеарними векторами. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами. Лінійна залежність векторів.

Тема 2. **Двовимірний та тривимірний векторний простори. Координати вектора.** Тривимірний векторний простір і його підпростори. Базис та розмірність векторного простору. Координати вектора та їх властивості. Координати вектора в ортонормованому базисі. Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів.

Тема 3. **Метод координат на площині.** Афінна та прямокутна декартова система координат на площині. Координати точки і вектора. Відстань між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні. Полярна система координат. Полярні координати точки. Зв'язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки.

Тема 4. **Перетворення системи координат.** Перетворення системи координат на прямій (перенесення початку координат, зміна одиничного вектора, загальний випадок). Орієнтація площини. Кут між векторами в орієнтованій площині. Перетворення афінної системи координат. Перетворення прямокутної декартової системи координат.

Тема 5. **Поняття лінії на площині.** Аналітичне задання фігури. Поняття про алгебраїчну лінію. Порядок лінії. Складання рівняння лінії. Рівняння лінії в параметричній формі. Рівняння лінії в полярній системі координат.

Змістовий модуль 2. Пряма лінія на площині

Тема 6. **Рівняння прямої.** Пряма як алгебраїчна лінія першого порядку. Рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічне рівняння). Рівняння прямої, заданої двома точками. Параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором.

Тема 7. **Загальне рівняння прямої та його дослідження.** Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої. Розміщення прямої відносно системи координат. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Умови, що визначають півплощину. [Геометричний зміст лінійної нерівності з двома змінними.] Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими, умови їх паралельності та перпендикулярності. Пучок прямих та його рівняння.

Змістовий модуль 3. Лінії другого порядку

Тема 8. **Лінії другого порядку. Еліпс.** Рівняння лінії другого порядку. Коло. Означення еліпса, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості еліпса. Побудова еліпса.

Тема 9. **Лінії другого порядку. Гіпербола.** Означення гіперболи, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості гіперболи, побудова гіперболи.

Тема 10. **Лінії другого порядку. Парабола.** Означення параболи, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості параболи, побудова параболи. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.

Тема 11. **Загальна теорія ліній другого порядку.** Загальне рівняння лінії другого порядку. Перетин лінії другого порядку з прямою. Асимптотичні напрями. Дотична до кривої другого порядку. Оптичні властивості кривих другого порядку. Діаметри ліній 2-го порядку. Взаємно спряжені діаметри ліній 2-го порядку. Спряжені напрями. Головні напрями відносно кривої 2-го порядку. Центр кривої 2-го порядку.

Тема 12. **Класифікація ліній 2-го порядку. Зведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.** Дослідження загального рівняння ліній 2-го порядку та їх класифікація. Спрощення загального рівняння лінії 2-го порядку перенесенням початку координат, поворотом осей координат.

II СЕМЕСТР

Модуль 2. Аналітична геометрія в просторі

Змістовий модуль 4. Метод координат у просторі

***Тема 13.* Системи координат у просторі.** Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки. Операції над векторами у просторі. Ділення відрізка у даному відношенні. Відстань між двома точками. Скалярний добуток двох векторів. Орієнтація простору. [Перетворення системи координат].

***Тема 14.* Векторний та мішаний добутки векторів.** Поняття векторного добутку двох векторів. Векторний добуток векторів заданих координатами. Геометрична властивість векторного добутку і її застосування. Означення мішаного добутку трьох векторів, властивості. Мішаний добуток трьох векторів в координатній формі. Геометрична властивість мішаного добутку та її застосування.

Змістовий модуль 5. Площина і пряма в просторі

***Тема 15.* Площина у просторі.** Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

***Тема 16.* Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин.** Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин. [Відстань між паралельними площинами]. Пучок площин. Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин.

***Тема 17-18.* Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин.** Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин). Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Змістовий модуль 6. Поверхні другого порядку

Тема 19. **Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні.** Загальне рівняння поверхні другого порядку. Означення та рівняння сфери, властивості сфери. Означення та рівняння циліндричної поверхні. Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей.

Тема 20. **Конічні поверхні другого порядку.** Означення та рівняння канонічної поверхні. Конуси другого порядку з вершиною у початку координат. Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння.

Тема 21. **Поверхні обертання. Еліпсоїд обертання.** Поняття поверхні обертання та її рівняння. Означення та рівняння еліпсоїда обертання і тривісного еліпсоїда. Визначення форми та вивчення геометричних властивостей еліпсоїда обертання.

Тема 22. **Однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди.** Означення та рівняння однопорожнинного гіперболоїда та однопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання. Означення та рівняння двопорожнинного гіперболоїда та двопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови поверхні двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Тема 23. **Поверхні обертання. Параболоїди. Еліптичний параболоїд. Гіперболічний параболоїд.** Означення та рівняння параболоїда обертання. Застосування методу перерізів до побудови його поверхні.

Означення та рівняння еліптичного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей еліптичного параболоїда за його канонічним рівнянням. Означення гіперболічного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей гіперболічного параболоїда за його канонічним рівнянням.

Тема 24. **Прямолінійні твірні на поверхні другого порядку.** Означення прямолінійної твірної поверхні. Поверхні другого порядку, що мають (не мають) прямолінійні твірні. Рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, їх властивості. Рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда, їх властивості.

III. ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС

Модуль 1.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Змістовий модуль 1.
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

Тема 1-2. ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ. ДВОВИМІРНИЙ ТА ТРИВИМІРНИЙ ВЕКТОРНИЙ ПРОСТОРИ. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

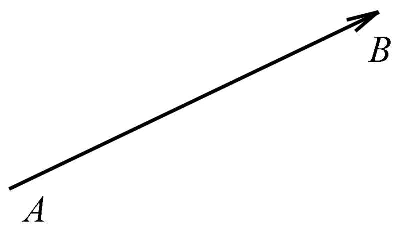
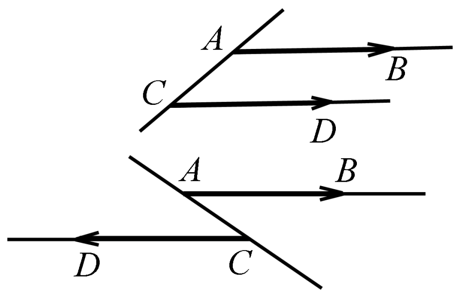
Мета навчання: систематизувати математичні поняття векторної алгебри, відомі зі шкільного курсу геометрії; розглянути різні означення поняття вектора; взяти за основу *означення вектора*, як множини однаково напрямлених відрізків однакової довжини; ввести поняття тривимірного простору, його підпросторів та розглянути координати вектора у двовимірному, тривимірному просторах та в ортонормованому базисі; повторити поняття скалярного добутку векторів та розглянути його властивості.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Скалярні і векторні величини.	[2] Р1, §1.
2	Поняття вектора. Напрямлені відрізки. Вектор як множина співнапрямлених відрізків. Рівність векторів.	[2] Р1, §2. [1] Гл І, §1-3.
3	Додавання і віднімання векторів.	[2] Р1, §3. [1] Гл І, §4.
4	Множення вектора на число.	[2] Р1, §4. [1] Гл І, §5.
5	Колінеарні і компланарні вектори. Розклад вектора за двома неколінеарними векторами. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами.	[2] Р1, §5.

6	Лінійна залежність векторів.	[2] Р1, §6. [1] Гл I, §6.
7	Тривимірний векторний простір і його підпростори. Базис та розмірність векторного простору.	[2] Р1, §7. [1] Гл I, §9.
8	Координати вектора та їх властивості. Координати вектора в ортонормованому базисі. Довжина вектора.	[2] Р1, §8, 9. [1] Гл I, §7.
9	Скалярний добуток векторів.	[2] Р1, §10. [1] Гл I, §8.

Математичні поняття:

Означення математичного поняття	**Рисунок**
Скалярними величинами називають величини, які при вибраній одиниці виміру характеризуються лише числом.	
Векторними величинами називають такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрям дії.	
Відрізок AB називається ***напрямленим,*** якщо береться до уваги порядок його кінцевих точок. Перша точка (A) називається його *початком,* а друга точка (B) – його *кінцем.* Позначають напрямлений відрізок так: $\overline{AB}$. $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ – різні напрямлені відрізки.	 **Рис. 1.1**
Довжиною напрямленого відрізка $\overline{AB}$ називається довжина відрізка AB. $\lvert\overline{AB}\rvert = AB = \lvert\overline{BA}\rvert$.	
Напрямлені відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються ***однаково напрямленими*** (*співнапрямленими*), якщо однаково напрямлені промені AB і CD, і ***протилежно напрямлені***, якщо ці промені протилежно напрямлені.	 **Рис. 1.2**
Відношення α, визначене у множині M, називають ***відношенням еквівалентності*** або ***еквівалентністю*** в M, якщо воно рефлексивне, симетричне, транзитивне. За допомогою відношення еквівалентності виконується розбиття непорожньої множини на підмножини, які називають *класами.*	

Зокрема, відношення еквівалентності дозволяє розбити всю множину напрямлених відрізків на підмножини, які складаються з еквівалентних один одному напрямлених відрізків. Таке розбиття приводить до наступного означення:

Вектором називається множина однаково напрямлених (співнапрямлених) відрізків однакової довжини.

Вектор зображається одним із співнапрямлених відрізків цієї множини і позначається стрілкою: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

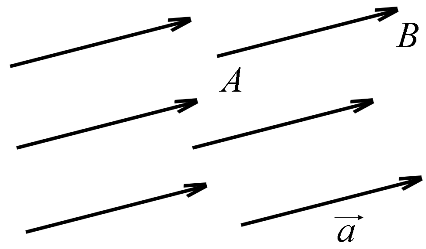


Рис. 1.3

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, називаються ***однаково напрямленими*** (*співнапрямленими*), якщо співнапрямлені відповідні їм напрямлені відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, і ***протилежно напрямленими***, якщо напрямлені відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ протилежно напрямлені.

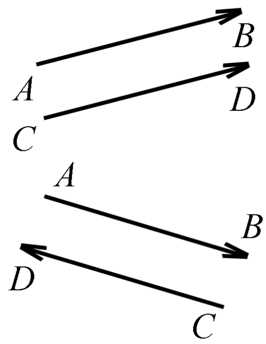


Рис. 1.4

Довжиною (*модулем*) вектора називається довжина будь-якого представника класу співнапрямлених відрізків, який визначає цей вектор.

Інакше кажучи, довжиною вектора називається довжина напрямленого відрізка, який зображає цей вектор.

Вектор, початок якого збігається з його кінцем, називається ***нульовим вектором***, позначають $\vec{0}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним вектором***, або ***ортом.***

Два вектори називаються ***рівними,*** якщо множини відповідних їм напрямлених відрізків збігаються.

Два вектори називаються ***протилежними***, якщо вони протилежно напрямлені і мають рівні довжини.

Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $-\left(-\vec{a}\right) = \vec{a}$.

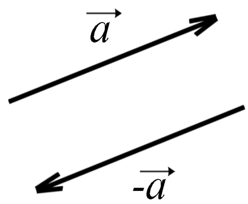


Рис. 1.5

Введений вектор називається *вільним вектором.*

Ковзний вектор – це множина однаково напрямлених відрізків рівної довжини, які лежать на одній прямій.

Зв'язний вектор – це напрямлений відрізок.

Якщо $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ – зв'язні вектори, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тоді і тільки тоді, коли співпадають точки A і C, а також B і D.

Ми будемо розглядати лише вільні вектори, називаючи їх векторами.

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо вектор $\vec{a}$ від деякої точки A: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від кінця цього вектора – точки B – відкладемо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ називається ***сумою векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

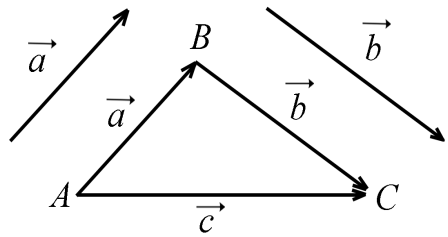


Рис. 1.6

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{x}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{x}$, якщо $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$.

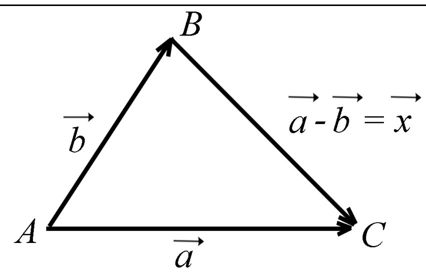


Рис. 1.7

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається такий вектор $\vec{p}$, який задовольняє такі умови: 1) $\left|\vec{p}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$; 2) $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ і $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\alpha < 0$.

Такий вектор позначається $\vec{p} = \alpha\vec{a}$.

Для будь-якого дійсного числа α і будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\alpha \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні або лежать на одній прямій.

Три ненульових вектори називаються ***компланарними***, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні одній площині або лежать в одній площині.

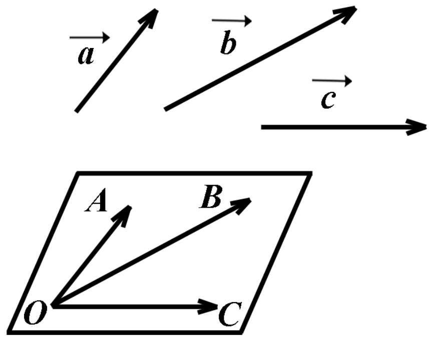


Рис. 1.8

Система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ називається ***лінійно залежною***, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що

$$\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Якщо ж рівність (1) справджується тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то дана система векторів називається ***лінійно незалежною.***

Сума $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n}$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

Непорожня множина вільних векторів, у якій введені операції додавання векторів, множення вектора на число, що задовольняють зазначені властивості, а саме:

1) (комутативність) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2) (асоціативність) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

3) (існування нульового елемента) $\exists\, \vec{0}: \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4) (існування протилежного елемента) $\forall \vec{a}\ \ \exists \left(-\vec{a}\right): \vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

5) (існування нейтрального елемента операції множення) $\forall\, \vec{a}: 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

6) (асоціативність відносно числових множників) $\forall\, \alpha, \beta \in R, \forall\, \vec{a}: \alpha\left(\beta\, \vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.

7) (дистрибутивність відносно суми числових множників) $\forall\, \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a}: \left(\alpha + \beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

8) (дистрибутивність відносно суми векторів) $\forall \alpha \in R, \forall \vec{a}, \vec{b}: \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

називається ***векторним простором.*** Позначають його V_3.

Базисом векторного простору називається система векторів, яка задана в певному порядку і задовольняє умови:

1) ця система векторів лінійно незалежна,

2) будь-який інший вектор із даного векторного простору є лінійною комбінацією даної системи векторів.

Інакше кажучи, базисом векторного простору називається максимальна система лінійно незалежних векторів даного векторного простору.

Розмірністю векторного простору називається число векторів базису, тобто максимальна кількість лінійно незалежних векторів.

Нехай L – непорожня множина векторів із векторного простору V_3. Множина L називається ***векторним підпростором*** простору V_3, якщо виконуються такі умови: 1) якщо $\vec{a} \in L, \vec{b} \in L$, то $\vec{a} + \vec{b} \in L$; 2) якщо $\vec{a} \in L$, то $\alpha\, \vec{a} \in L\ \left(\forall\, \alpha \in R\right)$.

Існують *двовимірний* V_2 і *одновимірний* V_1 *підпростори* простору V_3.

Базис векторного простору називається ***ортонормованим***, якщо всі вектори цього базису одиничні і взаємно перпендикулярні.

Координати вектора

Нехай система векторів $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ – деякий базис простору V_3, $\vec{a}$ – довільний вектор цього простору. За теоремою про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами існують єдині числа a_1, a_2, a_3 такі, що $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

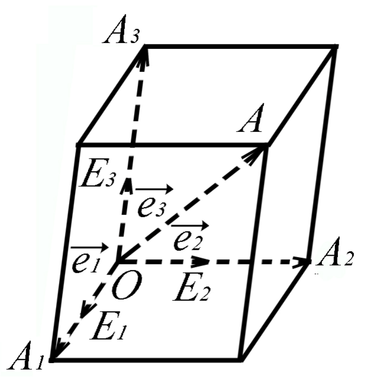


Рис. 1.9

Коефіцієнти a_1, a_2, a_3 розкладу вектора за базисними векторами називаються ***координатами вектора в даному базисі.***

$\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \overrightarrow{OA_3} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$

Нехай система векторів $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ є базисом підпростору V_2. За теоремою про розклад вектора за двома неколінеарними векторами існують єдині числа a_1, a_2 такі, що $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.

Коефіцієнти a_1, a_2 розкладу вектора за базисними векторами називаються ***координатами вектора в даному базисі.***

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$

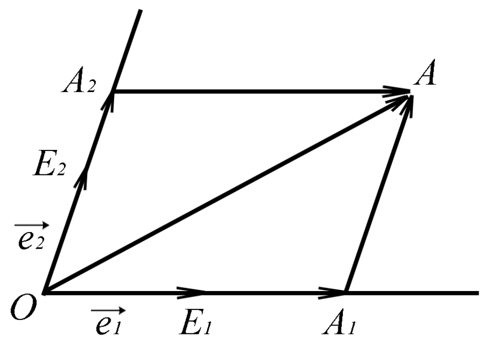


Рис. 1.10

Координати вектора в ортонормованому базисі – це (з точністю до знака) довжини ортогональних проекцій відповідного напрямленого відрізка на напрями базисних векторів, якщо всі вони відкладені від однієї точки:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$

$|a_1| = OA_1,\ |a_2| = OA_2, |a_3| = OA_3.$

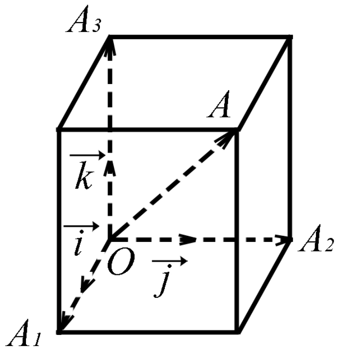


Рис. 1.11

<table>
<tr>
<td>Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ – ненульові вектори. Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між променями OA і OB.

Позначають: $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \varphi$.

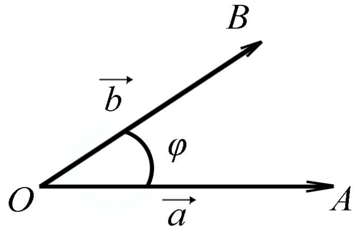
$\left(\forall\, \vec{a}, \vec{b}\right) 0 \le \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \le \pi$.</td>
<td>

Рис. 1.12</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними: $\vec{a}\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.</td>
</tr>
</table>

Теореми та правила теми:

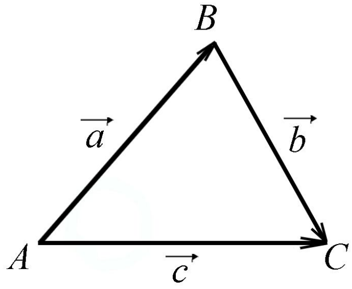
<table>
<tr><th>Теорема. Правило.</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ознаки рівності векторів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема (I ознака рівності двох векторів). Для того, щоб два вектори були рівними, необхідно й достатньо, щоб вони були однаково напрямленими і мали рівні довжини.
Наслідок. Два вектора, кожний з яких дорівнює третьому, рівні між собою.
Теорема (II ознака рівності двох векторів). Для того, щоб два вектори були рівними, необхідно й достатньо, щоб були рівними їх відповідні координати.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема (про відкладання вектора). Від будь-якої точки простору можна відкласти вектор, рівний даному, і до того ж єдиний.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правила додавання векторів</td></tr>
<tr>
<td>Правило трикутника: для будь-яких трьох точок A, B і C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, або: сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, який сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ при умові, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$.</td>
<td>

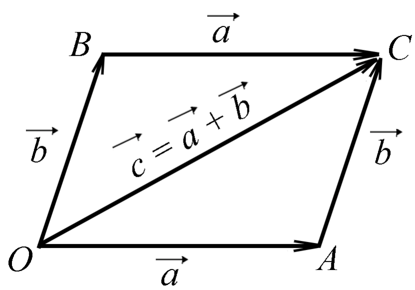
Рис. 1.13</td>
</tr>
<tr>
<td>Правило паралелограма: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладені від спільного початку O, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і на них побудовано паралелограм $OACB$, то сумою векторів $\vec{a} + \vec{b}$ є вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, який виходить з того ж початку і збігається з діагоналлю OC паралелограма.</td>
<td>

Рис. 1.14</td>
</tr>
</table>

Правило многокутника: щоб знайти суму n векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$, потрібно з довільної точки O відкласти вектор $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}$, з його кінця – вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{a_n}$ (початок кожного наступного вектора-доданка з кінцем попереднього). Вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OA_n}$ буде сумою даних векторів.

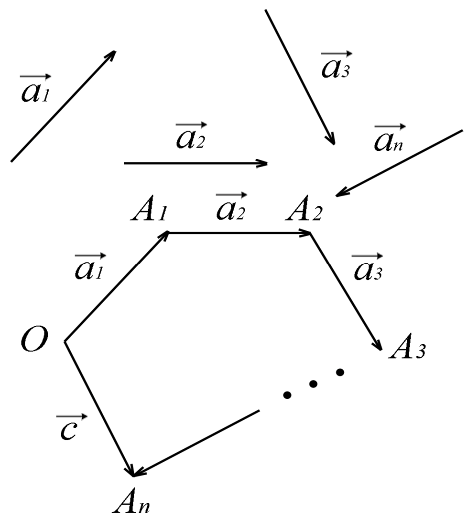


Рис. 1.15

Властивості операції додавання векторів

<u>*Властивість 1*</u> *(комутативність).* $\forall\, \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

<u>*Властивість 2*</u> *(асоціативність).* $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

<u>*Властивість 3.*</u> Сумою протилежних векторів є нуль-вектор: $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

<u>*Властивість 4.*</u> Нуль-вектор є нейтральним елементом операції додавання: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Властивості операції множення вектора на число

<u>*Властивість 1.*</u> $(\forall\, \alpha \in R)\left(\forall\, \vec{a}\right)\ \alpha \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

<u>*Властивість 2.*</u> $\left(\forall\, \vec{a}\right)\ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a};\ \ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

<u>*Властивість 3.*</u> $\left(\forall\, \vec{a}\right)(\forall \alpha \in R, \forall \beta \in R)\ \alpha\left(\beta \vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

<u>*Властивість 4*</u> *(дистрибутивність відносно додавання векторів).* $\forall \alpha \in R, \forall \vec{a}, \vec{b}: \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

<u>*Властивість 5*</u> *(дистрибутивність відносно додавання чисел).* $\forall\, \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a}: (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Твердження:

1) координати суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних координат цих векторів;

2) координати різниці двох векторів дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів;

3) координати добутку вектора на число дорівнюють добутку відповідних координат цього вектора на дане число.

Ознаки колінеарності векторів
Теорема (*I ознака колінеарності двох векторів*). Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує деяке число α таке, що $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. **Теорема** (*II ознака колінеарності двох векторів*). Для того щоб два вектори $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}\,(b_1;b_2;b_3)$, задані в деякому базисі $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб їх координати були пропорційними.
Теорема (*про розклад вектора за двома неколінеарними векторами*). Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, а вектори $\vec{a},\vec{b}$ неколінеарні, то існують єдині числа α, β такі, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Інакше кажучи, вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і до того ж єдиним способом.
Теорема (*про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами*). Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарні, то для будь-якого вектора $\vec{d}$ існують і притому єдині числа α,β,γ такі, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.
Властивості лінійної залежності системи векторів
Властивість 1. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з векторів є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи. *Властивість 2.* Якщо частина даної системи векторів лінійно залежна, то вся система векторів лінійно залежна. *Властивість 3.* Якщо система векторів лінійно незалежна, то будь-яка її частина також лінійно незалежна. *Властивість 4.* Система лінійно незалежних векторів не містить нульового вектора.
Ознака лінійної залежності систем двох та трьох векторів
Теорема. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні. **Теорема.** Система трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.
Теорема (*про довжину вектора в ортонормованому базисі*). Довжина вектора $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$, заданого в ортонормованому базисі, обчислюється за формулою $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
Теорема. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}\,(b_1;b_2;b_3)$, заданих в ортонормованому базисі, обчислюється за формулою: $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Властивості скалярного добутку векторів
1. $\vec{a}\,\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$. 2. $\vec{a}\,\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left\|\vec{a}\right\|^2 \Rightarrow \left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. 3. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$. 4. $(\alpha\,\vec{a})\vec{b}=\alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}), \forall\alpha\in R$. 5. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$.
У просторі V_3: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.
У просторі V_2: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

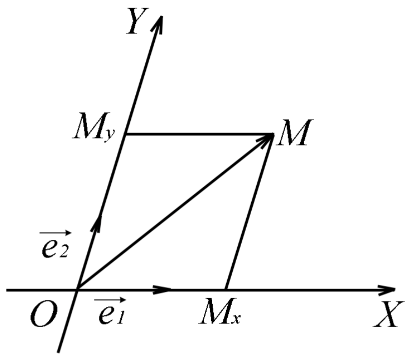
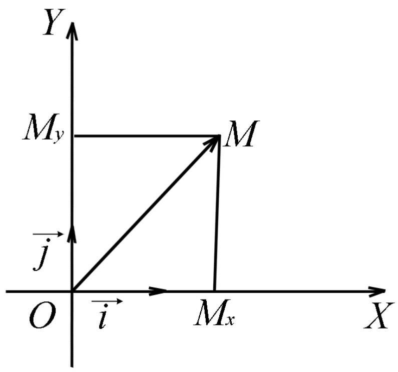
Тема 3. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

Мета навчання: ввести афінну систему координат на площині, повторити поняття «прямокутна декартова система координат на площині» та поняття пов’язані з нею; з’ясувати, який взаємозв’язок існує між координатами радіус-вектора точки та координатами точки; повторити формулу відстані між двома точками та вивести *формули поділу відрізка в даному відношенні*; ввести *полярну систему координат* та встановити зв’язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Афінна система координат на площині.	[2] Р2, §1. [1] Гл II, §11.
2	Прямокутна декартова система координат на площині.	[2] Р2, §2. [1] Гл II, §11.
3	Координати точки і вектора.	[2] Р2, §1. [1] Гл II, §11.
4	Відстань між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні.	[2] Р2, §2,3. [1] Гл II, §11, 12.
5	Полярна система координат. Полярні координати точки.	[2] Р2, §8. [1] Гл II, §16
6	Зв’язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки.	[2] Р2, §8. [1] Гл II, §16.

Математичні поняття:

Означення математичного поняття	**Рисунок**
Візьмемо на площині будь-яку точку O і відкладемо від неї вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ що утворюють базис у просторі V_2. Точку O називатимемо ***початком координат,*** а вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – ***координатними векторами.***	 **Рис. 3.1**
Напрямлені прямі, які проходять через початок координат у напрямку векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ називатимемо ***координатними осями.*** При цьому будемо вважати напрями векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ додатними, а протилежні напрями – від'ємними. Вісь координат, на якій напрям задається вектором $\vec{e}_1$, називають ***віссю абсцис,*** а другу вісь – ***віссю ординат*** (позначають OX і OY відповідно). Утворена таким чином сукупність геометричних об'єктів називається ***афінною системою координат.*** Її позначають $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ або OXY.	
Система координат називається ***прямокутною*** (або ***прямокутною декартовою***), якщо її координатні вектори одиничні і взаємно перпендикулярні (тобто утворюють ортонормований базис V_2). Позначається $O\,\vec{i}\,\vec{j}$. $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$.	 **Рис. 3.2**
Нехай M – довільна точка площини. Розглянемо вектор $\overrightarrow{OM}$ який назвемо *радіус-вектором точки M відносно точки O*. Координати x, y вектора $\overrightarrow{OM}$ у базисі $\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2\right)$ називають ***координатами точки*** M у системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.	
<u>Геометричний зміст</u> ***координат точки*** M у прямокутній системі координат: $\lvert x\rvert = OM_x, \lvert y\rvert = OM_y$, де M_x, M_y – проекції точки M на координатні осі.	

Відстань d ***між двома точками*** $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ у ПСК обчислюється за формулою $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Нехай в афінній системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ дано дві точки $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ *у базисі* $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ має **координати** $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$.

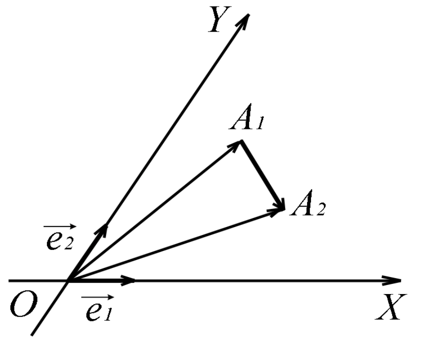


Рис. 3.3

Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай M_1 і M_2 – дві точки площини, λ – деяке дійсне число, причому $\lambda\neq-1$. Говорять, що точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ, якщо $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

$$|\lambda|=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

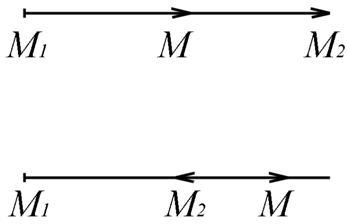


Рис. 3.4

Формули поділу відрізка в даному відношенні

Нехай $M(x;y)$ ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ. $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ – координати кінців відрізка.

$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ – ***формули поділу відрізка в даному відношенні*** λ .

Нехай $M(x;y)$. M – *середина відрізка* M_1M_2, то $\lambda=1$.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Полярна система координат

Задамо на орієнтованій площині точку O і одиничний вектор $\vec{i}$.

Пара, яка складається з точки O і вектора $\vec{i}$, називається ***полярною системою координат на площині***, позначається $O\vec{i}$ або $(O;\vec{i})$.

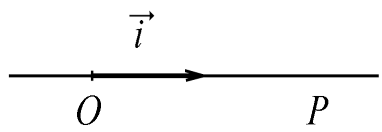


Рис. 3.5

Розглянемо вісь OP, яка проходить через точку O у напрямку вектора $\vec{i}$, на цій осі додатний напрям визначається вектором $\vec{i}$.

Точка O називається ***полюсом,*** а вісь OP ***полярною віссю***.

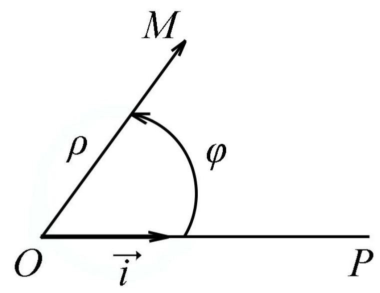
<table>
<tr><td>Нехай M – довільна точка площини. Позначимо $\rho = OM = \left|\overrightarrow{OM}\right|$; $\varphi = \angle\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ – орієнтований кут.
Полярні координати точки
$M(\rho;\varphi)$, де ρ – полярний радіус, φ – полярний кут.
$0 \le \rho < \infty, -\pi < \varphi \le \pi$.</td><td colspan="2">

Рис. 3.6</td></tr>
<tr><td colspan="3">Формули зв’язку між полярними і прямокутними декартовими координатами точки
ρ,φ – полярні координати, x, y – декартові.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Нехай задана полярна система координат $O\vec{i}$. Приєднаємо до неї ПДСК $O\,\vec{i}\,\vec{j}$, так, щоб додатний напрям вісі OX співпадав з полярною віссю, а початок координат співпадав з полюсом. Одиниця вимірювання збережемо.</td></tr>
<tr><td>$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi$</td><td colspan="2">$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$</td></tr>
</table>

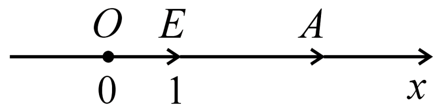
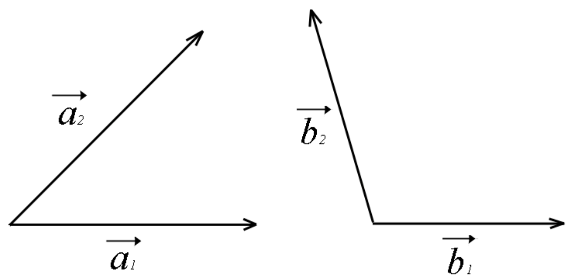
Тема 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Мета навчання: розглянути перетворення системи координат на прямій, афінної та прямокутної декартової системи координат.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Перетворення системи координат на прямій (перенесення початку координат, зміна одиничного вектора, загальний випадок).	
2	Орієнтація площини. Кут між векторами в орієнтованій площині.	[2] Р2, §4-5. [1] Гл II, §13-14.
3	Перетворення афінної системи координат.	[2] Р2, §6. [1] Гл II, §15.
4	Перетворення прямокутної декартової системи координат.	[2] Р2, §7.

Математичні поняття:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td>Якщо на прямій вибрана точка відліку (O – початок), одиничний відрізок $(OE = 1)$ і вказано додатний напрям, то кажуть, що на прямій встановлена система координат.</td><td>
Рис. 4.1
OX – координатна вісь,
$\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ – одиничний вектор (орт),
$\left|\vec{e}\right| = 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вектор $\overrightarrow{OA}$ початок якого знаходиться у початку відліку, а кінець у точці A називається радіус-вектором точки A.
$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{e}$, $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}$, x – координата $\overrightarrow{OA}$.
Будь-якій точці координатної прямої відповідає свій радіус-вектор і тільки один.
Між точками прямої і множиною дійсних чисел R можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожній точці відповідає дійсне число і навпаки.
Координата точки співпадає з координатою її радіус-вектора $A(x)$, x_A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Координатою точки A на прямій називають відстань цієї точки від початку відліку, яка взята зі знаком «+», якщо $\overrightarrow{OA}$ і $\vec{e}$ співнапрямлені ($\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}$) і зі знаком «–», якщо $\overrightarrow{OA}$ і $\vec{e}$ протилежно напрямлені ($\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}$).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Орієнтація площини</th></tr>
<tr><td>Нехай у просторі V_2 задано два різних базиси $A\left(\vec{a}_1; \vec{a}_2\right)$ і $B\left(\vec{b}_1; \vec{b}_2\right)$.
Розклад векторів базису B за векторами базису A:
$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{12}\vec{a}_2$,
$\vec{b}_2 = c_{21}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2$.</td><td>
Рис. 4.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Визначник матриці переходу від базису A до базису B :
$$A/B = \left(\vec{a}_1; \vec{a}_2\right)/\left(\vec{b}_1; \vec{b}_2\right) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}\,c_{22} - c_{21}\,c_{12}.$$
Якщо $A/B > 0$, то базиси A і B однаково орієнтовані.
Якщо $A/B < 0$, то базиси A і B протилежно орієнтовані.</td></tr>
</table>

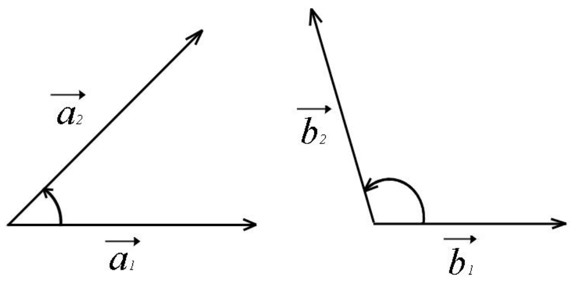
<table>
<tr><td colspan="2">Геометричний зміст відношення однакової орієнтації</td></tr>
<tr><td>Два базиси $A\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2\right)$ і $B\left(\vec{b}_1;\vec{b}_2\right)$ будуть однаково орієнтованими, якщо поворот від вектора $\vec{a}_1$ до вектора $\vec{a}_2$ і від вектора $\vec{b}_1$ до вектора $\vec{b}_2$ по найкоротшому шляху здійснюється в одному й тому ж напрямі (проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою)</td><td>

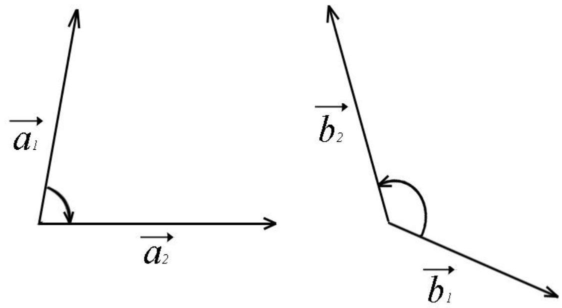
Рис. 4.3</td></tr>
<tr><td>Якщо ж цей поворот здійснюється в протилежних напрямках, то базиси протилежно орієнтовані.</td><td>

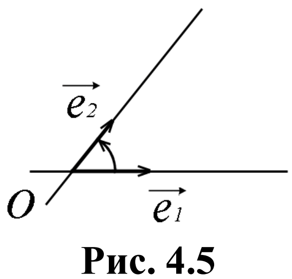
Рис. 4.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Простір векторів V_2 називається орієнтованим якщо здійснено поділ базисів на класи.
До <u>одного</u> класу відносять множину базисів, однаково орієнтованих з даним базисом, а до <u>другого</u> – множину всіх базисів, протилежно орієнтованих з цим базисом.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Площина називається орієнтованою, якщо орієнтований простір векторів цієї площини.
Для задання орієнтації на площині достатньо вибрати один базис і вважати його правим базисом.</td></tr>
<tr><td>Правим базисом називають базис $\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$, в якому обертання від $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$ по найкоротшому шляху здійснюється проти руху годинникової стрілки.</td><td>Протилежно орієнтований до нього базис називають лівим.</td></tr>
<tr><td>

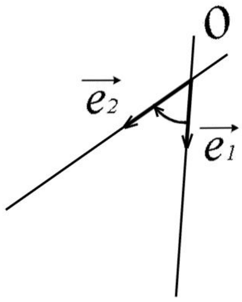
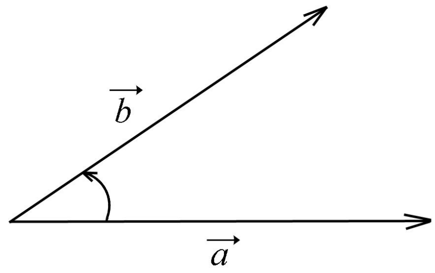
Рис. 4.5</td><td>

Рис. 4.6</td></tr>
</table>

При цьому система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ називається ***правою,*** якщо базис $\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$ правий, і ***лівою,*** якщо цей базис лівий.

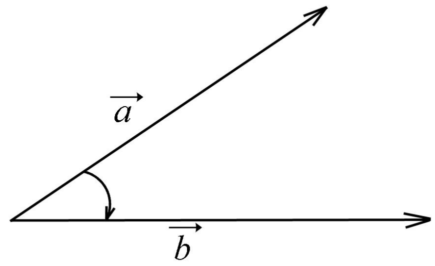
Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – ненульові вектори, задані в певному порядку: $\vec{a}$ – перший вектор, $\vec{b}$ – другий вектор. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то *напрямленим* (***орієнтованим***) кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається величина $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, якщо базис $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ правий і $-\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, якщо базис $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ лівий.

Орієнтований кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)>0$$

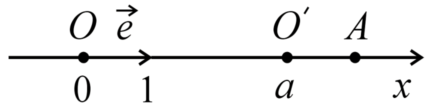
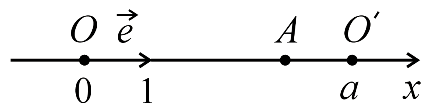
Рис. 4.7



$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)<0$$

Рис. 4.8

Теореми та формули теми:

Теорема	Рисунок
Перетворення системи координат на прямій	
Теорема 1. *Перенесенням початку відліку* із точки O в точку $O'(a)$ координата x точки A замінюється на координату x' цієї ж точки таку, що $x' = x - a$	 **Рис. 4.9**  **Рис. 4.10**

Теорема 2. *Заміною одиничного вектора* $\vec{e}$ *на* $\vec{e}'$ координата x даної точки замінюється на координату x' таку, що

$$x' = \frac{\left|\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}'\right|} \cdot x$$

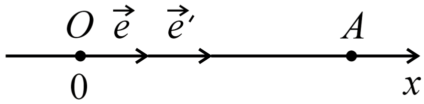


Рис. 4.11

Загальний випадок: $x' = \dfrac{\left|\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}'\right|} \cdot (x - a)$.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ задані своїми координатами $\vec{a}\,(a_1; a_2), \vec{b}\,(b_1; b_2)$.

$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ – орієнтований кут між ними.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}, \ \sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

Формули перетворення афінної системи координат

Нехай на площині задано дві афінні системи координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ (стара) і $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ (нова).

Координати початку нової системи координат та координатних векторів у старій системі координат:

$O'(x_0; y_0)$, $\vec{e}_1{}'(c_{11}; c_{21})$, $\vec{e}_2{}'(c_{12}; c_{22})$.

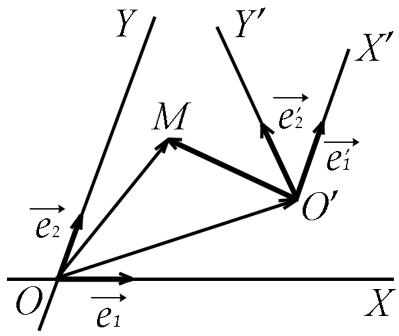


Рис. 4.12

M довільна точка площини.

$(x; y)$ – координати точки M у старій системі координат.

$(x'; y')$ – координати точки M у новій системі координат.

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_{0.}$$

формули перетворення афінної системи координат

Перенесення початку системи координат

$$x = x' + x_0$$
$$y = y' + y_0.$$

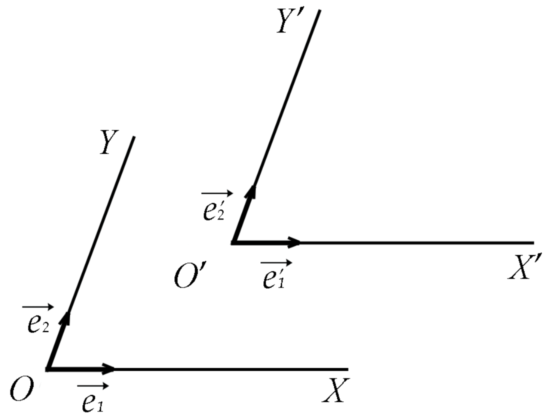


Рис. 4.13

Перетворення системи координат без зміни початку координат

$$x = c_{11}x' + c_{12}y'$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y'.$$

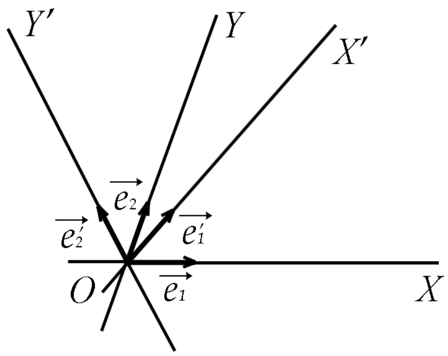


Рис. 4.14

Перетворення прямокутної системи координат

Положення нової системи координат відносно старої задається координатами нового початку $O'\left(x_0; y_0\right)$ у старій системі координат і кутом повороту вісі OX : $\alpha = \angle\left(\vec{i}; \vec{i}'\right)$.

Системи координат однаково орієнтовані.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + x_0$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + y_0.$$

Системи координат протилежно орієнтовані.

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + x_0$$
$$y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha + y_0.$$

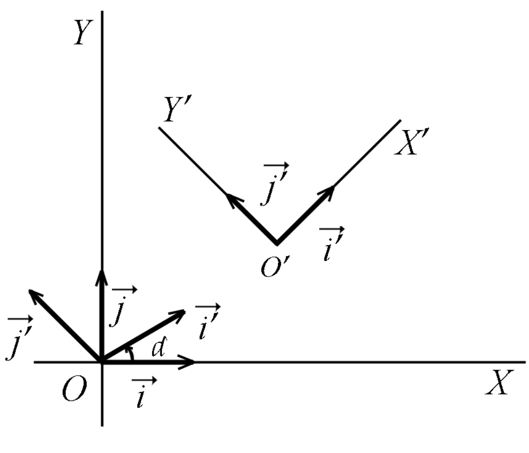


Рис. 4.15

Тема 5. ПОНЯТТЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

Мета навчання: формувати поняття про аналітичне задання фігури, алгебраїчну лінію та складання рівняння лінії, зокрема в параметричній формі.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Аналітичне задання фігури.	[2] Р2, §9.1. [1] Гл ІІ, §17.
2	Поняття про алгебраїчну лінію. Складання рівняння лінії.	[2] Р2, §10. [1] Гл ІІ, §18.
3	Рівняння лінії в параметричній формі.	[2] Р2, §11.
4°	Рівняння лінії в полярній системі координат.	[2] Р2, §12.

Математичні поняття:

Означення математичного поняття	**Рисунок**
Аналітичним заданням фігури Ф в даній системі координат називається рівняння, нерівність або їх система, які задовольняють координати будь-якої точки фігури Ф і не задовольняють координати ніякої іншої точки, що не належить фігурі Ф. Приклад. $y = x$ – аналітичне задання бісектриси першого і третього координатних кутів прямокутної декартової системи координат.	
Рівняння $$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$ називається ***рівнянням лінії*** в деякій афінній системі координат, якщо виконані дві умови: 1) координати будь-якої точки даної лінії задовольняють це рівняння; 2) будь-яка точка, координати якої задовольняють рівняння (1), належить даній лінії.	
Лінія на площині називається ***алгебраїчною***, якщо в якій-небудь афінній системі координат рівняння цієї лінії можна подати у вигляді $$f(x; y) = 0, \qquad (2)$$ де $f(x; y)$ – многочлен від змінних x, y. Степінь многочлена $f(x; y)$ називається ***порядком лінії***, що визначається рівнянням (2). Приклад. $2x + y - 7 = 0$ – алгебраїчна лінія 1-го порядку. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (коло) – алгебраїчна лінія 2-го порядку.	

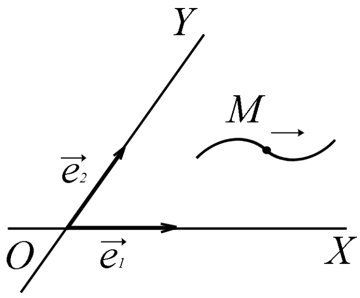
<table>
<tr>
<td>Нехай деяка точка M рухається на площині. У результаті цього руху вона описує деяку лінію, яка є траєкторією руху даної точки. Тоді координати x, y цієї точки будуть змінюватися із зміною часу t і, отже, будуть деякими функціями t:
$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$ – параметричні рівняння лінії.</td>
<td>

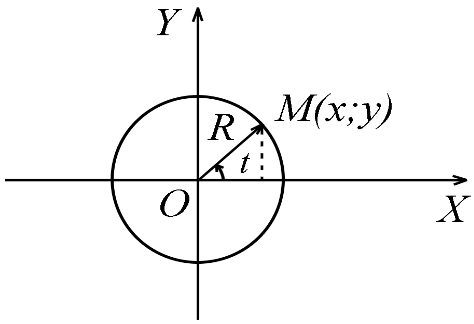
Рис. 5.1</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Приклад.</u> Параметричні рівняння кола
$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t, \end{cases}$
$t \in [0; 2\pi)$.
Параметр t – кут повороту радіус-вектора точки кола $M(x; y)$.</td>
<td>

Рис. 5.2</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Рівняння вигляду
$$F(x; y) = 0 \qquad (3)$$
називається рівнянням лінії в неявній формі.
<u>Приклад.</u> $x^2 + y^2 = R^2$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Якщо з рівняння (3) можна виразити y через x або x через y, отримаємо рівняння лінії в явній формі: $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.</td>
</tr>
</table>

Змістовий модуль 2.
ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

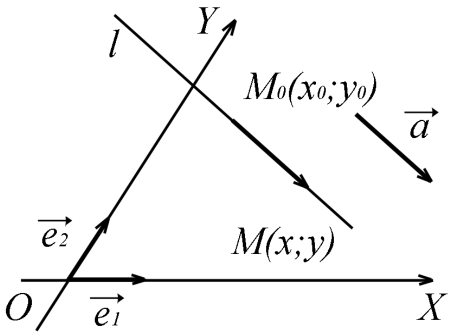
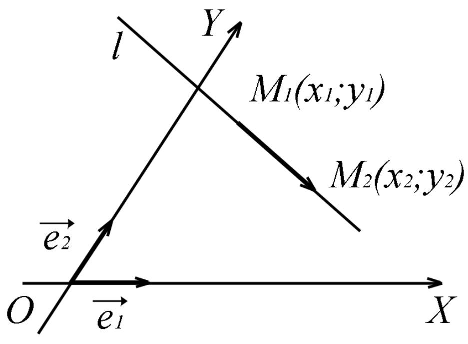
Тема 6. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Мета навчання: скласти різні форми рівнянь прямої, заданої різними способами (заданої точкою і напрямним вектором; канонічне; заданої двома точками; параметричні; у відрізках на осях; з кутовим коефіцієнтом; заданої точкою і нормальним вектором).

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Пряма як алгебраїчна лінія першого порядку. Рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічне рівняння).	[2] Р3, §1. [1] Гл ІІІ, §20.
2	Рівняння прямої, заданої двома точками.	[2] Р3, §2. [1] Гл ІІІ, §20.
3	Параметричні рівняння прямої.	[2] Р3, §3. [1] Гл ІІІ, §20.
4	Рівняння прямої «у відрізках на осях».	[2] Р3, §4.
5	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.	[2] Р3, §5. [1] Гл ІІІ, §20.
6	Рівняння прямої заданої точкою і нормальним вектором.	[2] Р3, §6.

Форми рівнянь прямої:

Спосіб задання прямої, рівняння	**Рисунок**
Нехай пряма l задана відносно афінної системи координат OXY :	
1) точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{a}\,(a_1;a_2)$, до якого вона паралельна. $M(x;y)$ – довільна її точка. $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$ (1) ***канонічне рівняння прямої.***	 **Рис. 6.1**
$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$ (2) Рівняння (1), (2) – ***рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором.***	
2) двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$. $M(x;y)$ – довільна її точка. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (3) – ***рівняння прямої, заданої двома точками.***	 **Рис. 6.2**

3) точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{a}\,(a_1;a_2)$, до якого вона паралельна. $M(x;y)$ – довільна її точка.

$$\begin{cases} x = a_1\,t + x_0, \\ y = a_2\,t + y_0. \end{cases}$$ (4) ***параметричні рівняння*** прямої.

t – параметр, $t \in R$.

4) $A\,(a;0), B\,(0;b)$ – точки перетину прямою l координатних осей.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5)$$

рівняння прямої *«у відрізках на осях».*

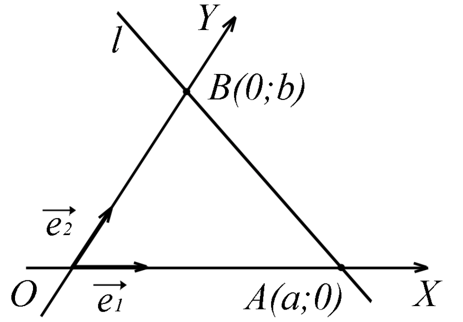


Рис. 6.3

5) точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{a}\,(a_1;a_2)$, до якого вона паралельна.

$M(x;y)$ – довільна її точка.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6)$$

рівняння прямої з *кутовим коефіцієнтом*

$$k = \frac{a_2}{a_1} = tg\,\varphi\,.$$

Якщо в ролі точки $M_0(x_0;y_0)$ взяти точку $M_0(0;b)$ перетину прямої l з віссю OY, то рівняння (6) набуде вигляду

$$y = kx + b \qquad (7)$$

рівняння прямої з *кутовим коефіцієнтом*

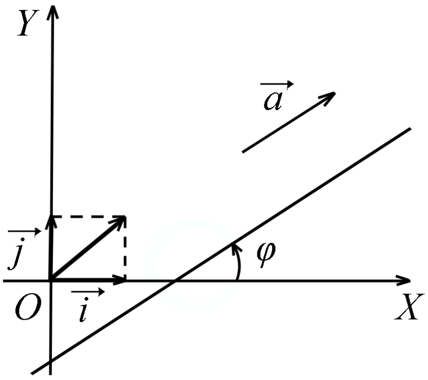


Рис. 6.4

6) точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку вона проходить, і *нормальним вектором* $\vec{n}\,(a;b)$ (перпендикулярним до цієї прямої)

$M(x;y)$ – довільна її точка.

$$a\,(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (8)$$

рівняння прямої, *заданої точкою і нормальним вектором.*

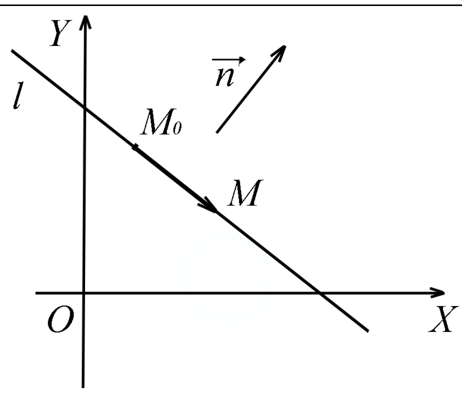


Рис. 6.5

Тема 7. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ЙОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета навчання: вивести загальне та нормальне рівняння прямої, розглянути алгоритм зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду; з'ясувати можливі варіанти розміщення прямої відносно системи координат та взаємного розміщення двох прямих на площині; вивести *формулу відстані від точки до прямої* та *формулу для знаходження тангенса орієнтованого кута між прямими,* проаналізувавши яку визначити умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Загальне рівняння прямої.	[2] Р3, §7. [1] Гл III, §21.
2	Нормальне рівняння прямої.	[2] Р3, §8.
3	Розміщення прямої відносно системи координат.	[2] Р3, §9. [1] Гл III, §21.
4	Взаємне розміщення двох прямих на площині.	[2] Р3, §10. [1] Гл III, §22.
5	Відстань від точки до прямої.	[2] Р3, §12. [1] Гл III, §23.
6	Кут між двома прямими, умова їх паралельності та перпендикулярності.	[2] Р3, §13. [1] Гл III, §24.
7	Пучок прямих та його рівняння.	[2] Р3, §14.

Математичні поняття, рівняння:

Спосіб задання прямої, рівняння	**Рисунок**
1) Нехай пряма l задана відносно афінної системи координат OXY точкою $M_0(x_0; y_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{a}\,(a_1; a_2)$, до якого вона паралельна. $M(x; y)$ – довільна її точка. $ax + by + c = 0$ (1) – ***загальне рівняння прямої***	
<u>Теорема.</u> Лінія на площині, задана в афінній системі координат рівнянням 1-го степеня $ax + by + c = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, є пряма з напрямним вектором $\vec{a}\,(-b; a)$.	

2) Нехай пряма l задана відносно ПДСК OXY.

$\vec{n}$ – вектор нормалі до прямої l, проведений з початку координат.

α – орієнтований кут нахилу його до осі OX.

P – точка перетину $\vec{n}$ з l, ρ – довжина відрізка OP.

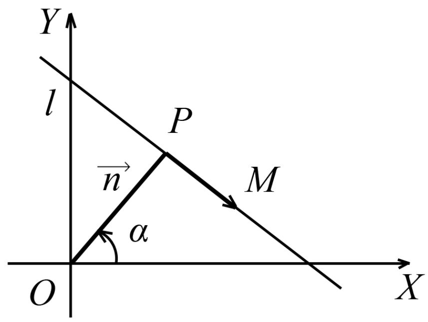


Рис. 7.1

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$ (2) – ***нормальне рівняння прямої***

У рівнянні (2): 1) $\rho \geq 0$; 2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Приклад. $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0$.

Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Число $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (3)

нормуючий множник загального рівняння прямої.

Алгоритм.

Для того, щоб звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду достатньо всі його члени помножити на число λ, взяте зі знаком протилежним знаку c (*вільного члена загального рівняння прямої*).

Розміщення прямої відносно системи координат

1) $c=0$. $ax+by=0$.	2) $a=0, b\neq 0$.	3) $b=0, a\neq 0$.
Пряма проходить через початок координат	$by+c=0$. $y=B$, де $B=-\frac{c}{b}$	$ax+c=0$. $x=A$, де $A=-\frac{c}{a}$

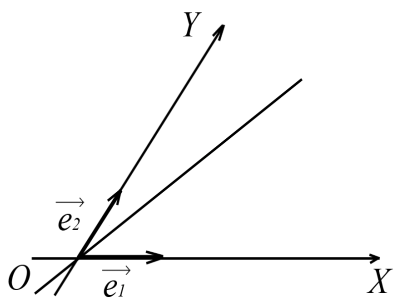


Рис. 7.2

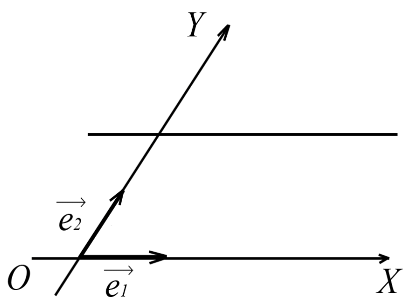


Рис. 7.3

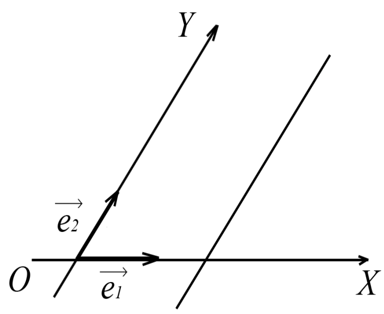


Рис. 7.4

Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай відносно деякої афінної системи координат на площині задано дві прямі:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\ (l_1),$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0\ (l_2)$$

Прямі перетинаються	Прямі паралельні	Прямі збігаються
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

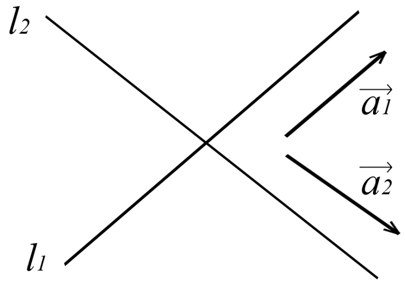


Рис. 7.5

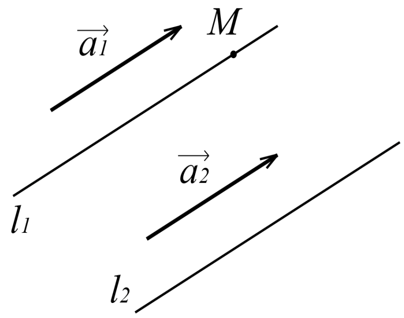


Рис. 7.6

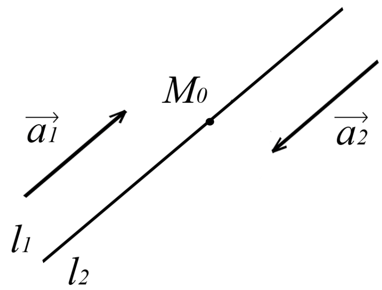


Рис. 7.7

Відстань від точки до прямої

Нехай пряма l задана у прямокутній системі координат рівнянням $ax + by + c = 0$, і $M_0(x_0; y_0)$ – точка, яка не належить даній прямій. d – відстань від точки M_0 до прямої l.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (3)$$

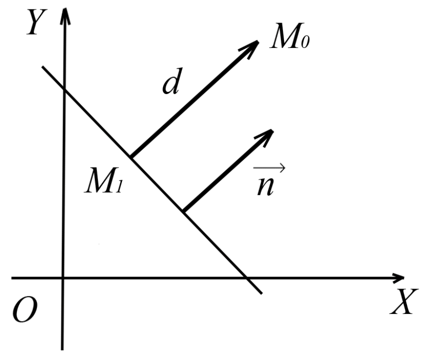


Рис. 7.8

Кут між двома прямими. Напрямлений кут між прямими

Кутом між двома прямими називається менший з кутів, утворений при перетині цих прямих:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

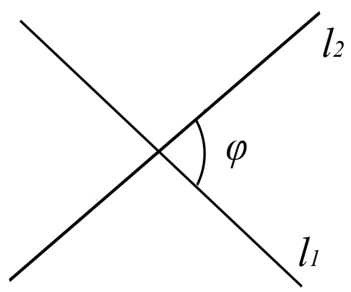
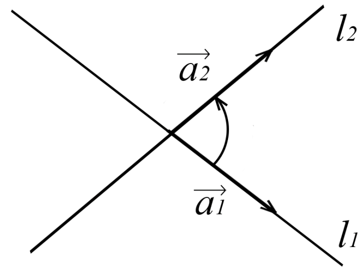
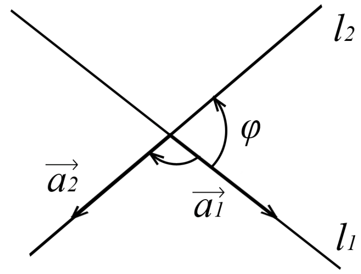


Рис. 7.9

Напрямленим кутом між прямими l_1 і l_2 називається кут повороту від прямої l_1 до прямої l_2 по найкоротшому шляху. Якщо цей поворот виконується проти годинникової стрілки, то напрямлений кут між прямими додатний; якщо ж за годинниковою стрілкою, то – від'ємний.

1) $\varphi = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $tg\,\varphi = tg\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$	 **Рис. 7.10**
2) $\varphi = \pi + \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $tg\,\varphi = tg\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$	 **Рис. 7.11**

$\sin\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\lvert\vec{a}_1\rvert \cdot \lvert\vec{a}_2\rvert}$	$\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\lvert\vec{a}_1\rvert \cdot \lvert\vec{a}_2\rvert}$	$tg\varphi = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a_1a_2 + b_1b_2}$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2

Коли їх напрямні вектори колінеарні, при цьому $\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тобто коли координати цих векторів ***пропорційні.***

Умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2

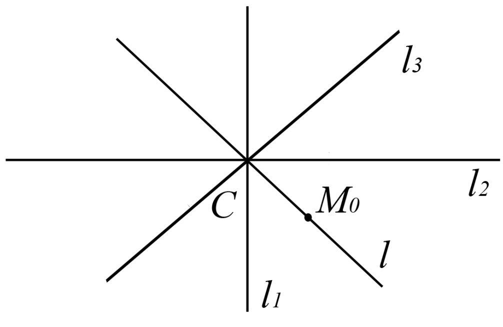
Коли їх напрямні вектори перпендикулярні, тобто коли $\vec{a}_1\vec{a}_2 = 0$ або $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$y = k_1x + b_1, (l_1) \qquad y = k_2x + b_2, (l_2). \quad \text{Тоді } tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2: $k_1k_2 = -1$

Сукупність прямих, які перетинаються в одній точці, називається ***пучком прямих*** з центром у цій точці.	 **Рис. 7.12**

$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ – ***рівняння пучка прямих.***

Змістовий модуль 3.
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Тема 8. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЕЛІПС

Мета навчання: означити поняття лінія другого порядку, коло, еліпс; скласти рівняння еліпса за означенням та звести його до канонічного вигляду; дослідити форму та властивості еліпса, розглянути способи побудови еліпса та овала.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Рівняння лінії другого порядку. Коло.	
2	Означення еліпса, канонічне рівняння.	[2] Р4, §1, п.1.1. [1] Гл IV, §27.
3	Дослідження форми, властивості еліпса.	[2] Р4, §1, п.1.2-1.3. [1] Гл IV, §27.
4	Побудова еліпса. Побудова овала.	[2] Р4, §1, п.1.4. [1] Гл IV, §27.

Математичні поняття та рівняння:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Лінією 2-го порядку називається лінія у лівій частині рівняння якої

$$F(x;\,y) = 0 \qquad (1)$$

маємо алгебраїчний многочлен 2-го степеня.

Такий многочлен має у загальному вигляді 6 доданків $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Тут принаймні один з коефіцієнтів A, B, C повинен бути відмінним від нуля.

Лініями другого порядку є: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

</td></tr>
<tr><td>

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від деякої точки цієї площини, яку називають центром.

</td><td>

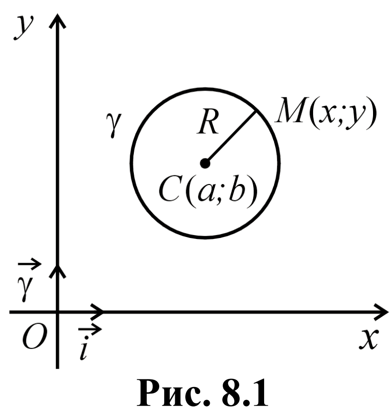


Рис. 8.1

</td></tr>
</table>

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2 \qquad (2)$$

рівнянням кола з центром у точці $C\left(x_0;\, y_0\right)$ і радіусом R.

$x^2+y^2+mx+ny+p=0$ (3)

загальне рівняння кола.

$m=-2x_0$, $n=-2y_0$,

$p=x_0^2+y_0^2-R^2$

Особливості загального рівняння кола.

1) лінія 2-го порядку, 2) біля x^2, y^2 однакові коефіцієнти, 3) відсутній доданок з добутком xy.

Приклад. $2x^2+2y^2+5x-7y+1=0$ – рівняння кола.

Еліпсом називають множину всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини F_1 і F_2 є величина стала, більша ніж відстань між F_1 і F_2.

Точки F_1 і F_2 називають ***фокусами*** еліпса, а відстань між ними – ***фокальною відстанню.***

$M(x;\, y)$ – довільна точка еліпса.

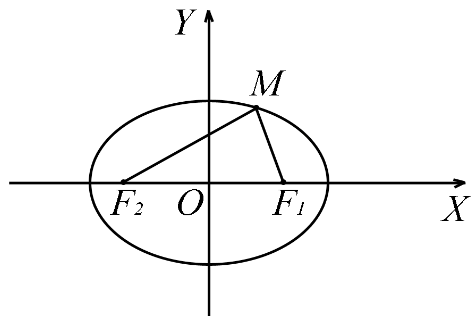


Рис. 8.2

$F_1M+F_2M=const=2a$ – ***сума відстаней від будь-якої точки еліпса до фокусів.***

$F_1F_2=2c$ – ***фокальна відстань.***

За означення $a>c$.

Рівняння еліпса

Виберемо на площині ПДСК так, щоб початок збігався з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2, при цьому напрям цієї вісі візьмемо від точки O до F_1.

$F_1F_2 \in Ox, F_1O=F_2O$.

Оскільки $F_1F_2=2c$, то у вибраній системі фокуси матимуть координати

$F_1(c;0), F_2(-c;0)$.

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса маємо:

$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$;

$F_2M=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (4)$$

рівняння еліпса

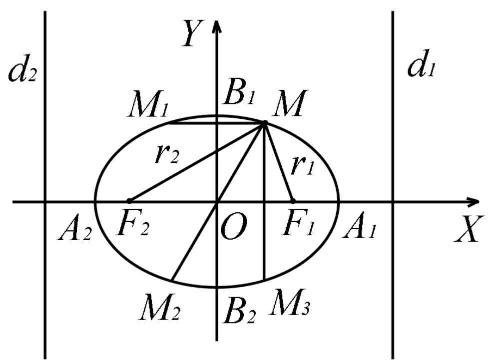


Рис. 8.3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$ ***канонічне рівняння еліпса***
$A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$ – ***вершини еліпса.*** $A_1A_2=2a$ – ***велика вісь***, $B_1B_2=2b$ – ***мала вісь***, a,b – ***піввісі еліпса***.
Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між фокусами цього еліпса до довжини його великої осі.   Ексцентриситет позначають буквою ε. $$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (6)$$ Оскільки для еліпса $0<c<a$, то $0<\varepsilon<1$.   Ексцентриситет показує відхилення від кола.
Директрисами еліпса називають прямі, паралельні до його малої осі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї. $$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$ ***рівняння директрис*** (7)   Оскільки $0<\varepsilon<1$, то $\lvert x\rvert>a$.   Директриси еліпса перпендикулярні до його вісі.
$F_1M=r_1$, $F_2M=r_2$ – ***фокальні радіуси еліпса.*** $$r_1=a-\varepsilon x,\ r_2=a+\varepsilon x. \qquad (8)$$

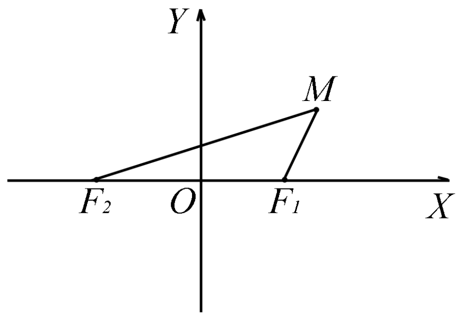
Тема 9. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ГІПЕРБОЛА

Мета навчання: означити поняття гіпербола; скласти рівняння гіперболи за означенням та звести його до канонічного вигляду; дослідити форму та властивості гіперболи, розглянути способи побудови гіперболи.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення гіперболи, канонічне рівняння.	[2] Р4, §2, п.2.1. [1] Гл IV, §28.
2	Дослідження форми, властивості гіперболи.	[2] Р4, §2, п.2.2-2.3. [1] Гл IV, §28.
3	Побудова гіперболи.	[2] Р4, §2, п.2.4. [1] Гл IV, §28.

Математичні поняття та рівняння:

Означення математичного поняття	Рисунок
Гіперболою називають множину всіх точок площини, для кожної з яких різниця відстаней до двох даних точок тієї самої площини F_1 і F_2 є величина стала, менша за відстань між F_1 і F_2. Точки F_1 і F_2 називають ***фокусами гіперболи***, а відстань між ними – ***фокальною відстанню***	 **Рис. 9.1**

Рівняння гіперболи

Виберемо на площині ПДСК так, щоб початок збігався з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2, при цьому напрям цієї вісі візьмемо від точки O до F_1.

$F_1F_2 \in Ox, F_1O = F_2O$.

Оскільки $F_1F_2 = 2c$, то у вибраній системі фокуси матимуть координати

$$F_1(c;0), F_2(-c;0).$$

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса маємо:

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

(1) ***рівняння гіперболи***

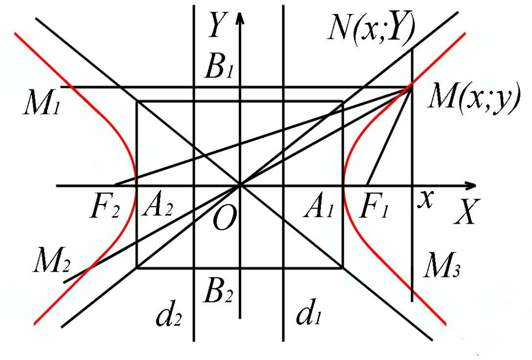


Рис. 9.2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$ ***канонічне рівняння гіперболи***

Асимптотою кривої називається пряма до якої як завгодно близько наближаються точки кривої, але не співпадають з точками прямої.

Гіпербола має дві ***асимптоти***: $y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x$ (3)

Ексцентриситетом гіперболи називається число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (4)$$

Оскільки для гіперболи $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Директрисами гіперболи називають прямі, паралельні до її уявної осі і розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї.

Рівняння директрис

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \qquad \textbf{\textit{рівняння директрис}} \qquad (5)$$

Оскільки $\varepsilon > 1$, то директриси гіперболи $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ проходять між вершинами і не мають спільних точок з гіперболою.

$F_1M = r_1, F_2M = r_2$ – ***фокальні радіуси гіперболи.***

Фокальні радіуси точок *правої вітки гіперболи* обчислюються за формулами: $r_1 = \varepsilon x - a, r_2 = \varepsilon x + a$.

Фокальні радіуси точок *лівої вітки гіперболи* обчислюються за формулами: $r_1 = a - \varepsilon x, r_2 = -a - \varepsilon x$.

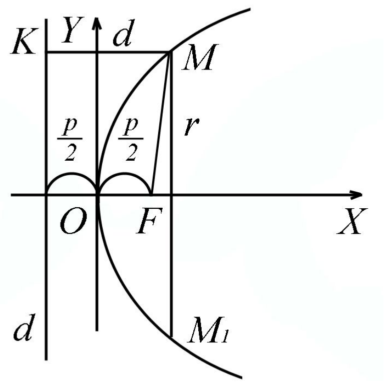
Тема 10. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПАРАБОЛА

Мета навчання: означити поняття парабола; скласти рівняння параболи за означенням та звести його до канонічного вигляду; дослідити форму та властивості параболи, розглянути способи побудови параболи.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення параболи, канонічне рівняння.	[2] Р4, §3, п.3.1. [1] Гл IV, §29.
2	Дослідження форми, властивості параболи.	[2] Р4, §3, п.3.2. [1] Гл IV, §29.
3	Побудова параболи.	[2] Р4, §3, п.3.3. [1] Гл IV, §29.
4	Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.	[2] Р4, §4. [1] Гл IV, §30.

Математичні поняття та рівняння:

Означення математичного поняття	Рисунок
Параболою називають множину всіх точок площини, для кожної з яких відстань від даної точки F дорівнює відстані до даної прямої d, яка не проходить через точку F. Точку F називають ***фокусом,*** а пряму d – ***директрисою.*** Відстань від фокуса до директриси називають ***фокальним параметром*** параболи і позначають p.	 **Рис. 10.1**

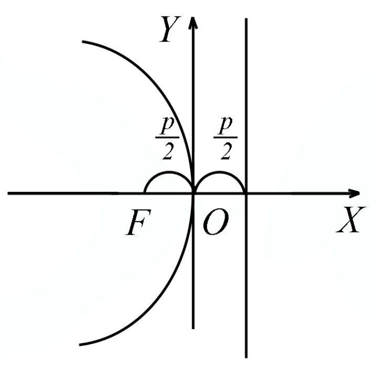
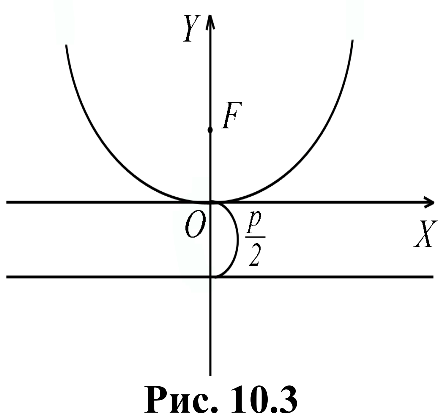
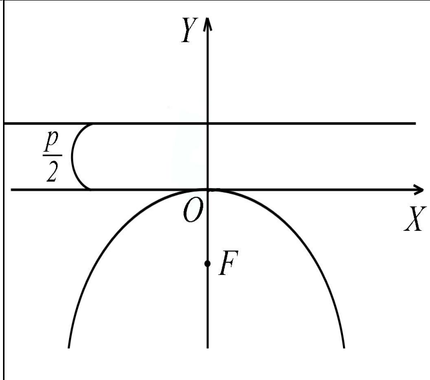
Нехай $M(x;y)$ – довільна точка параболи.

$FM = r$ – ***фокальний радіус.***

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \qquad (1)$$ – ***рівняння параболи.***

$$y^2 = 2px \qquad (2)$$ – ***канонічне рівняння параболи.***

Інші типи рівнянь парабол та відповідні їм графіки

$y^2 = -2px$	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
 **Рис. 10.2**	 **Рис. 10.3**	 **Рис. 10.4**

Нехай r – фокальний радіус параболи, d – відстань від будь-якої точки $M(x;y)$ параболи до директриси.

За означенням параболи $r = d$ або $\frac{r}{d} = 1$. Тому ***ексцентриситет*** параболи $\varepsilon = 1$.

Рівняння ***директриси*** параболи (1) буде $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат

Нехай $M(\rho;\Theta)$ довільна точка лінії L.

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos\Theta}, \qquad (3)$$

полярне рівняння еліпса, гіперболи (точніше однієї вітки гіперболи) і параболи. Тут p – ***полярний параметр,*** ε – ***ексцентриситет кривої.***

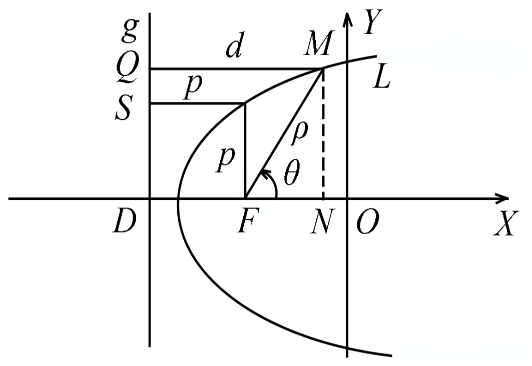


Рис. 10.5

Для *параболи* $p = FP = PS$, тобто p є відстань від фокуса до директриси (*параметр параболи*).

Для *еліпса* та *гіперболи* $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Тема 11. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета навчання: розглянути загальне рівняння лінії 2-го порядку; питання перетину лінії 2-го порядку з прямою; елементи кривих другого порядку (асимптотичні напрями, дотичні, діаметри та ін.).

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Загальне рівняння лінії другого порядку.	[2] Р4, §6. [1] Гл IV, §31.
2	Перетин лінії другого порядку з прямою. Асимптотичні напрями.	[2] Р4, §6. [1] Гл IV, §32.
3	Дотична до кривої другого порядку.	[2] Р4, §7. [1] Гл IV, §34.
4°	[Оптичні властивості кривих другого порядку]	[2] Р4, §8.
5°	Діаметри ліній 2-го порядку.	[2] Р4, §9. [1] Гл IV, §35.
6°	Взаємно спряжені діаметри ліній 2-го порядку. Спряжені напрями.	[2] Р4, §10. [1] Гл IV, §35.
7°	Головні напрями відносно кривої 2-го порядку.	[2] Р4, §11. [1] Гл IV, §36.
8°	Центр кривої 2-го порядку.	[2] Р4, §12. [1] Гл IV, §33.

Математичні поняття та рівняння:

Означення математичного поняття	Рисунок

Загальним рівнянням лінії 2-го порядку є рівняння ліва частина якого є повним квадратним многочленом:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де $A = a_{11}$, $B = 2a_{12}$, $C = a_{22}$, $D = 2a_{13}$, $E = 2a_{23}$, $F = a_{33}$.

Одержуємо рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

Перетин лінії другого порядку з прямою

Нехай лінія 2-го порядку задана загальним рівнянням (1), а пряма задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = p_1 t + x_0, \\ y = p_2 t + y_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1) і виконавши відповідні рівносильні перетворення одержують рівняння виду

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \qquad (3)$$

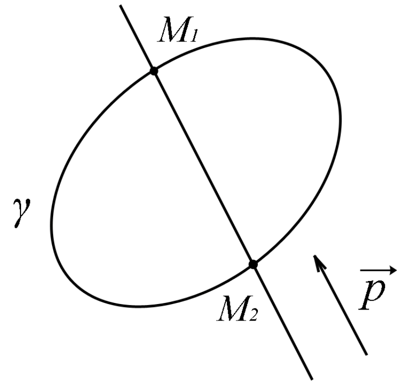


Рис. 11.1

Дослідження рівняння (3)

1) $P \neq 0$.

$$D = 4Q^2 - 4PR = 4\left(Q^2 - PR\right).$$

Якщо $D > 0$ пряма перетинається з кривою у 2-х точках.

Якщо $D = 0$ – дві дійсні точки перетину збігаються.

Якщо $D < 0$ – пряма перетинається з кривою у двох уявних точках.

2) $P = 0$. $2Qt + R = 0$.

Якщо $Q \neq 0$ – одна дійсна точка перетину.

Якщо $Q = 0, R \neq 0$ – немає точок перетину.

Якщо $Q = 0, R = 0$ – пряма міститься в лінії.

Асимптотичні напрями

Напрям, який задається ненульовим вектором $\vec{p}\,(p_1; p_2)$ називається ***асимптотичним напрямом*** відносно кривої 2-го порядку, якщо пряма паралельна вектору $\vec{p}$, або має з кривою не більше однієї точки перетину, або міститься в цій лінії.

Напрям $\vec{p}$ буде асимптотичним тоді і тільки тоді коли $P = 0$, тобто

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \qquad (4)$$

Досліджуючи рівняння

$$a_{22}\frac{p_2^2}{p_1^2}+2a_{12}\frac{p_2}{p_1}+a_{11}=0 \qquad (5)$$

квадратне відносно $\frac{p_2}{p_1}$ та рівносильне рівнянню (4) приходять до висновку, що кількість асимптотичних напрямів залежить від числа $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

А саме:
якщо $\Delta<0$, то крива має два асимптотичні напрями;
якщо $\Delta=0$, то крива має один асимптотичний напрям;
якщо $\Delta>0$, то крива не має асимптотичних напрямів.

$$F_1(x;\,y)+k\cdot F_2(x;y)=0, \qquad (6)$$ ***рівняння асимптот***

де $F_1(x;y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$, $F_2(x;y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}$.

Дотична до кривої другого порядку

Пряма називається ***дотичною*** до кривої 2-го порядку, якщо вона перетинає криву в двох дійсних точках, що збігаються.

Пряма d матиме з кривою дві точки перетину, що збігаються тоді і тільки тоді коли $Q=0$, тобто коли виконується рівність $F_1(x_0;y_0)p_1+F_2(x_0;y_0)p_2=0$

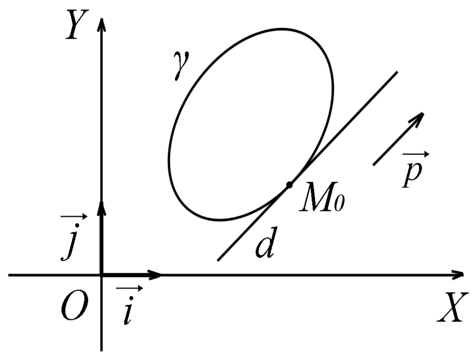


Рис. 11.2

$$F_1(x_0;y_0)\,(x-x_0)+F_2(x_0;y_0)(y-y_0)=0 \qquad (7)$$ ***рівняння дотичної до кривої*** (1) у точці $M_0(x_0;y_0)$

або

$$F_1(x_0;y_0)x+F_2(x_0;y_0)y+F_3(x_0;y_0)=0, \qquad (8),$$

де $F_1(x_0;y_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}$; $F_2(x_0;y_0)=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}$; $F_3(x_0;y_0)=a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}$.

Тема 12. КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙ 2-ГО ПОРЯДКУ. ЗВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ КРИВОЇ 2-ГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Мета навчання: здійснити класифікацію ліній 2-го порядку; розглянути питання спрощення загального рівняння лінії 2-го порядку перенесенням початку координат, поворотом осей координат.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Дослідження загального рівняння ліній 2-го порядку та їх класифікація.	[2] Р4, §13. [1] Гл IV, §37.
2°	Спрощення загального рівняння лінії 2-го порядку перенесенням початку координат, поворотом осей координат.	[2] Р4, §14. [1] Гл IV, §38.

Математичні поняття та рівняння:

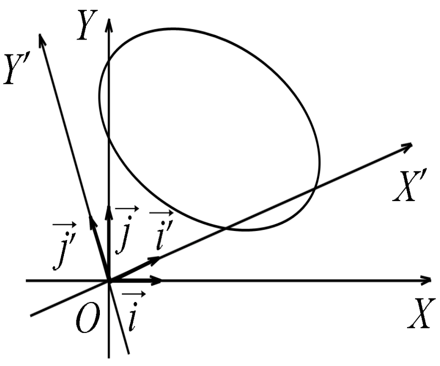
<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Загальне рівняння кривої 2-го порядку, заданої в деякій системі координат OXY:
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$</td></tr>
<tr><td>Здійснюють поворот системи координат так, щоб вектор $\vec{j'}$ нової системи $OX'Y'$ мав головний напрям відносно даної кривої. Тоді головний напрям матиме і вектор $\vec{i'}$.
У новій системі координат рівняння (1) матиме вигляд:</td><td>

Рис. 12.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (2)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дослідження загального рівняння ліній 2-го порядку</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. $a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$.
Здійснивши паралельне перенесення системи координат за формулами
$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">дістають рівняння:
$$a'_{11}x''^{2}+a'_{22}y''^{2}+a''_{33}=0 \qquad (3)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Можливі випадки:</td></tr>
<tr><td>а) $a''_{33}\neq 0$.
$\frac{x''^{2}}{A}+\frac{y''^{2}}{B}=1$</td><td>Якщо $A>0, B>0$, то це – еліпс;
якщо $AB<0$, то це – гіпербола;
якщо $A<0, B<0$ – то це – уявний еліпс</td></tr>
<tr><td>б) $a''_{33}=0$.
$\frac{x''^{2}}{A}+\frac{y''^{2}}{B}=0$</td><td>Якщо $AB<0$, то це – пара прямих $y''=\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}x''$, що перетинаються;
якщо $AB>0$, то це дві уявні прямі $y''=\pm i\sqrt{\frac{B}{A}}x''$, що перетинаються в дійсній точці $(0;0)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $a'_{11}=0$ або $a'_{22}=0$.
Здійснивши паралельне перенесення системи координат $X'OY'$ за формулами
$$x''=x',\quad y''=y'+\frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$
дістають рівняння:
$$a'_{22}y''^{2}+2a'_{13}x''+a''_{33}=0 \qquad (4)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Можливі випадки:</td></tr>
<tr><td>а) $a'_{13}\neq 0$.</td><td>$y''^{2}=2px''$ – парабола</td></tr>
<tr><td>б) $a'_{13}=0$</td><td>$y''^{2}=A$.
Якщо $A>0$, то це дві паралельні прямі: $y''=\pm\sqrt{A}$;
якщо $A=0$, то це прямі, що зливаються: $y''=0$;
якщо $A<0$, то це – дві уявні прямі: $y''=\pm i\sqrt{-A}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Отже, будь-яка лінія 2-го порядку є або еліпсом, або гіперболою, або параболою, або парою прямих, що перетинаються, паралельні чи збігаються.</td></tr>
</table>

IV. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
(типові задачі та КЗСР)

Модуль 1.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Змістовий модуль 1.
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

Практичне заняття 1-2.

Тема. **ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ**

Питання.

1) Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число.

2) Рівність та колінеарність векторів. 3) Координати вектора в даному базисі. Розклад вектора за двома неколінеарними напрямками. 4) Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів. Кут між двома векторами.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
1	№1 (б, г, е); №2, №3	№1 (а, в, д); №4
2	№5	№ 6
3	№7. (а-г),	№7 (д-є), №8
4	№9; №10, №11, №12, №13, №14, №17 (а); №18.	№15, №16; №17 (б,в)

1) <u>Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число.</u>

1. Нехай $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину діагоналей, а E та F – відповідно середини паралельних сторін BC і AD. Побудуйте наступні вектори:

а°) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$; в°) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$;

д°) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FO}$; е) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{CD}$.

2. Використовуючи паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірте на рисунку справедливість тотожностей:

а) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

в) $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)-\left(\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2}\right)=\vec{b}$.

3. Нехай ABC – довільний трикутник, а E та F – середини сторін AB і BC. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ та $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$.

4°. У трикутнику ABC вектори $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$ спрямовані вздовж медіан. Виразіть їх через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

2) <u>Рівність та колінеарність векторів.</u>

5. Для довільного трикутника ABC точки M, N і P – відповідно середини сторін AC, AB і BC. Серед вказаних пар векторів знайдіть пари рівних і пари колінеарних, але нерівних векторів:

а) $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ і $\overrightarrow{BC}$;

д) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MC}$; е) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CM}$; є) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{NP}$.

6°. Накресліть паралелограм $ABCD$ і позначте через O точку перетину діагоналей. Укажіть, які з наступних пар векторів рівні, а які колінеарні, але не рівні:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CB}$;

г) $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{CO}$.

3) <u>Координати вектора в даному базисі. Розклад вектора за двома неколінеарними напрямками.</u>

7. Нехай $ABCD$ – паралелограм, E та F – середини протилежних сторін BC і AD, а O – точка перетину діагоналей. Використовуючи вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{e}_2$ як базисні, визначте координати наступних векторів:

а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{OD}$; в) $\overrightarrow{FC}$; г) $\overrightarrow{BC}$;

д°) $\overrightarrow{EO}$; е°) $\overrightarrow{BD}$; є°) $\overrightarrow{EA}$.

8°. Дано вектори $\vec{a}\,(1;-2), \vec{b}\left(\frac{1}{2};1\right), \vec{c}\,(2;0)$. Визначте координати векторів: $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\vec{c}$; $\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{2}$; $\frac{\vec{c}-2\vec{b}}{3}$.

4) <u>Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів. Кут між двома векторами.</u>

9. На площині дано вектори $\vec{a}(-1;5), \vec{b}(3;5), \vec{c}(-2;8), \vec{d}(3;1)$. Обчисліть: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{c}$; в) $\sqrt{\vec{d}^2}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})$.

10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$; знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчисліть: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$; знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, |\vec{c}|=8$, обчисліть $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$.

12. Дано $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=19, |\vec{a}+\vec{b}|=24$. Обчисліть $|\vec{a}-\vec{b}|$.

<u>Вказівка.</u> Побудуйте паралелограм зі сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та використайте властивість паралелограма $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

13. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^\circ$, до того ж $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=8$. Визначте $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

14. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожен з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=6$, визначте модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

15°. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=4$, обчисліть $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

16°. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$; знаючи, що $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=1$, обчисліть кут α між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

17. Визначте кут між наступними парами векторів:

а) $\vec{a}_1(1;0)$ і $\vec{a}_2(2;2)$; б°) $\vec{b}_1(1;1)$ і $\vec{b}_2(-1;\sqrt{3})$; в°) $\vec{c}_1(-\sqrt{3};3)$ і $\vec{c}_2(0;1)$.

18. Який кут утворюють між собою ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектор $(\vec{a}+3\vec{b})$ перпендикулярний вектору $(7\vec{a}-5\vec{b})$, вектор $(\vec{a}-4\vec{b})$ перпендикулярний вектору $(7\vec{a}-2\vec{b})$.

ВІДПОВІДІ. №1. а) $\overrightarrow{AC'}$**; б)** $\overrightarrow{AB}$**; в)** $\overrightarrow{BO}$**; г)** $\vec{0}$**; д)** $\overrightarrow{EO}$**; е)** $\overrightarrow{E'E}$**.** **№3.** $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{b}-4\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{b}-2\vec{a}$. **№7. а)** $\overrightarrow{AC}(1;1)$**; б)** $\overrightarrow{OD}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **№11.** –62. **№12.** $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22$.

№13. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}\approx 11{,}4$. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$. **№14.** $\left|\vec{p}\right|=10$.

№15. $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-13$. **№16.** $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **№17 а)** 45°.

№18. $\varphi_1=60^\circ, \varphi_2=120^\circ$.

Практичне заняття 3.

Тема. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

Питання.

1) Побудова точки і вектора за їх координатами, знаходження координат точки і вектора в даній системі координат. 2) Основні задачі на координатній площині: а) обчислення відстані між двома точками; б) ділення відрізка в даному відношенні. 3) Побудова точки в полярній системі координат. 4) Залежність між полярними і прямокутними координатами точки.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 1)**
1	№1, №2, №3, №5 (1-5).	№4, №5 (6-10).
2	№6 (а), №7, №9.	№6 (б), №8.
3	№10, №12, №14.	№11, №13.
4	№15, №16, №17.	№18.

1) <u>Побудова точки і вектора за їх координатами, знаходження координат точки і вектора в даній системі координат.</u>

1. Побудувати точки за їх координатами: $A(2;7)$, $B(3;0)$; $C(1;-4)$; $L(\sqrt{2};-\sqrt{3})$, $N(0;\sqrt{5})$.

2. Побудувати точки, координати яких задовольняють рівняння:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = -1; \\ 2x - y = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x + y = 7. \end{cases}$

3. Знайдіть координати точок, симетричних відносно бісектриси першого координатного кута точкам: 1) $A(2; 3)$; 2) $B(5; -2)$; 3) $C(-3; 4)$.

4°. Знайдіть координати точок, симетричних відносно бісектриси другого координатного кута точкам: 1) $A(3; 5)$; 2) $B(-4; 3)$; 3) $C(7; -2)$.

5. У ПДСК на площині побудуйте наступні вектори:

1) $\vec{a}_1(1; 2)$; 2) $\vec{a}_2(2; -1)$; 3) $\vec{a}_3(0; -1)$; 4) $\vec{a}_4(\sqrt{2}; 3)$; 5) $\vec{a}_5(-1; -2)$; 6°) $\vec{a}_6(2;-1)$; 7°) $\vec{a}_7(-2; -2)$; 8°) $\vec{a}_8\left(-2; \frac{1}{2}\right)$; 9°) $\vec{a}_9\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$; 10°) $\vec{a}_{10}(2;0)$.

2) <u>Основні задачі на координатній площині: а) обчислення відстані між двома точками; б) ділення відрізка в даному відношенні.</u>

6. У кожному з наступних випадків знайдіть координати точки, рівновіддаленої від трьох даних точок:

а) $(2; 2), (5; 1), (7; -3)$; б°) $(5; 4), (3; 8), (-2; -7)$.

7. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(4; 1), B(7; 5), C(-4; 7)$. Обчисліть довжину бісектриси AD кута A.

8°. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-4; 4), B(2; 8)$ і точка перетину $M(2; 2)$ його діагоналей. Визначте дві інші вершини C і D.

9. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1; 4)$ і $C(7; -2)$. Знайдіть дві інші вершини. Система координат прямокутна декартова.

3) <u>Побудова точки в полярній системі координат.</u>

10. В полярній системі координат побудувати точки $M_1\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(-3; \frac{\pi}{4}\right)$; $M_3\left(2; -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4\left(-2; \frac{5\pi}{4}\right)$; $M_5\left(3; \frac{9\pi}{4}\right)$.

11°. В полярній системі координат побудувати точки $M_1\left(2;\frac{\pi}{3}\right), M_2\left(1;\frac{5\pi}{3}\right), M_3\left(\frac{1}{2};-\frac{\pi}{2}\right), M_4\left(3;\frac{\pi}{4}\right), M_5\left(4;\frac{2\pi}{3}\right), M_6\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right)$.

12. Дано правильний трикутник ABC, сторона якого дорівнює 5. Обравши вершину A за полюс полярної системи координат, а напрямлену пряму AB за полярну вісь, визначте полярні координати вершин і центра P трикутника. Розгляньте два можливі випадки розміщення трикутника відносно полярної осі.

13°. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 3. Обравши вершину A за полюс полярної системи координат, а напрямлену пряму AB за полярну вісь, визначте координати його вершин і точку P перетину діагоналей. Розгляньте два можливі випадки розміщення квадрата відносно полярної осі.

14. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, сторона якого дорівнює a. Обравши вершину A за полюс полярної системи координат, а напрямлену пряму AB за полярну вісь, визначте координати всіх його вершин і точки P перетину діагоналей. Розгляньте два можливі випадки розміщення шестикутника відносно полярної осі.

4) <u>Залежність між полярними і прямокутними координатами точки.</u>

15. Полюс полярної системи координат співпадає з початком ПДСК, а полярна вісь співпадає з додатною піввіссю абсцис. В полярній системі координат дано точки $M_1\left(6;\frac{\pi}{2}\right), M_2(5;0)$, $M_3\left(2;\frac{\pi}{4}\right), M_4\left(10;-\frac{\pi}{3}\right), M_5\left(8;\frac{2\pi}{3}\right), M_6\left(12;-\frac{\pi}{6}\right)$. Визначте декартові координати цих точок.

16. Полюс полярної системи координат співпадає з початком ПДСК, а полярна вісь співпадає з додатною піввіссю абсцис. В ПДСК дано точки $M_1(0;5), M_2(-3;0), M_3(\sqrt{3};1), M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_5(1;-\sqrt{3})$. Визначте полярні координати цих точок.

17. Трикутник ABC задано полярними координатами вершин $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right), C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.

18°. Дано полярні координати вершин трикутника $A\left(10; \frac{\pi}{2}\right), B\left(16; \frac{5\pi}{6}\right), C\left(6; \frac{7\pi}{6}\right)$. Доведіть, що трикутник ABC правильний.

ВІДПОВІДІ. №6. а) $(2; -3)$**; б)** $(-4; 2)$**. №7.** $AD = \frac{10\sqrt{2}}{3}$**. №8.** $C\,(8; 0), D\,(2; -4)$**. №9.** $B\,(6; 5), D\,(0; -3)$**.**

Практичне заняття 4.

Тема. **ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ. РОЗВ′ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ**

Питання.

1) Перетворення системи координат на прямій. 2) Орієнтований кут між векторами $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. 3) Формули перетворення афінної системи координат. 4) Перетворення прямокутної системи координат.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
1	№1-4.	№5.
2	повторити теорію **тема 4, п. 2**	повторити теорію **тема 4, п. 2**
3	№6, №8.	№7.
4	№9, № 11.	№10.

1) <u>Перетворення системи координат на прямій.</u>

1. Якими будуть координати точок $A(6), B(2), C(0), D(-2), E(-7), M(x)$ після того як початок координат буде перенесено: 1) в точку $O_1(3)$; 2) в точку $O_2(-5)$?

2. У яку точку потрібно перенести початок координат, щоб точка $A\,(7)$ одержала нову координату $x'(-5)$.

3. Як перетворити систему координат, щоб всі точки координати яких $x < -7$, одержали додатні координати, а всі точки для яких $x > -7$, одержали від'ємні координати.

4. Перетворіть систему координат так, щоб точка $A(5)$ зберегла свою координату, а точки симетричні по відношенню до неї, обмінялись своїми координатами.

5°. Перетворіть систему координат так, щоб точки, які мали координати 3 і 7, отримали нові координати 2 і –6.

Алгоритм розв'язання. Скористайтесь формулою для загального випадку

$$x' = \frac{\left|\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}\,'\right|}(x-a) \qquad (3).$$

1. Позначте відношення векторів $\dfrac{\left|\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}\,'\right|} = n$.

2. Складіть систему двох рівнянь з двома невідомими n та a. Розв'яжіть систему.

3. Проаналізуйте одержані значення n та a.

4. Зробіть висновки, щодо перетворення системи координат.

3) Формули перетворення афінної системи координат.

6. Написати формули перетворення координат, якщо початок координат (без змін напряму осей) перенесено в точку:1) $A(3;4)$; 2) $B(-2;1)$; 3) $C(-3;5)$.

Вказівка. 1) Скориставшись формулами $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, одержуємо $x = x' + 3$, $y = y' + 4$.

7°. Початок координат перенесено (без зміни напряму осей) в точку $O'(3;-4)$. Координати точок $A(1;3)$, $B(-3;0)$, $C(-1;4)$ визначені в новій системі. Визначте координати цих же точок в старій системі координат.

8. Визначте координати точки O' – нового початку координат, якщо точка $A(3;-4)$ лежить на новій осі абсцис, а точка $B(2;3)$ лежить на новій осі ординат, причому вісі старої і нової системи координат мають відповідно однакові напрямки.

4) Перетворення прямокутної системи координат.

9. Координатні вісі повернуті на кут $\alpha = 60^\circ$. Координати точок $A'\left(2\sqrt{3};-4\right), B'\left(\sqrt{3};0\right), C'\left(0;-2\sqrt{3}\right)$ визначені у новій системі. Обчисліть координати цих же точок у старій системі.

10°. Дано точки $M(3;1)$, $N(-1;5)$, $P(-3;-1)$. Знайдіть їх координати в новій системі, якщо вісі координат повернуті на кут: 1) -45°; 2) 90°; 3) -90°; 4) 180°.

11. Початок координат перенесено в точку $O'(1;2)$, координатні вісі повернуті на кут $\alpha = arctg\,\dfrac{5}{12}$. Координати точок $M_1(3;2)$, $M_2(2;-3)$, $M_3(13;-13)$ визначені у новій системі. Обчисліть координати цих же точок у старій системі.

Вказівка. Під час розв'язування №11 використайте формули:

$$\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad \cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ВІДПОВІДІ. №3. Перенести початок координат у точку $O'(-7)$ і замінити напрям. **№5.** Початок координат перенесено в точку $O'(4)$, напрям змінено і масштаб зменшено вдвічі. **№8.** $O'(2;-4)$. **№11.** $M_1(1;5)$, $M_2(2;0)$, $M_3(16;-5)$

Змістовий модуль 2.
ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Практичне заняття 5.

Тема. **РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ЙОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

Питання.

1) Складання рівняння прямої, заданої точкою і напрямком, двома точками, відрізками на осях та іншими умовами. 2) Побудова прямої заданої загальним рівнянням.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	№1, №2, №3, №5 (а,б), №6, №7, №8 (а), №9 (а), №10, №11, №13, №14.	№4, №5 (в,г), №8 (б,в), №9 (б,в), №12.
2	№15 (а-в)	№15 (г-е)

1) Складання рівняння прямої, заданої точкою і напрямком, двома точками, відрізками на осях та іншими умовами.

1. Написати рівняння прямої:

а) яка проходить через точки, $A(-1;1)$, $B(2;5)$.

Розв'язання. Використовуючи рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ та координати точок A та B, отримаємо рівняння $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{4}$. Скориставшись властивістю пропорції та виконавши відповідні рівносильні перетворення матимемо рівняння $4x-3y+7=0$.

б) яка проходить через початок координат і точку $A(2;5)$.

Розв'язання. Оскільки пряма походить через початок координат, то використаємо рівняння $y=kx$. Знайдемо k, скориставшись належністю точки $A(2;5)$ цій прямій: $5=2k$, звідси $k=\dfrac{5}{2}$. Отже, рівняння прямої $y=\dfrac{5}{2}x$.

в) яка проходить через точку $A(2;-6)$ і паралельно вектору $\vec{p}\,(1;-1)$.

Розв'язання. Скориставшись *канонічним рівнянням* прямої $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$, запишемо рівняння $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+6}{-1}$. Цьому рівнянню рівносильне рівняння $x+y+4=0$.

г) яка відтинає на осях координат відрізки $a=3, b=-2$.

Розв'язання. Скориставшись рівнянням прямої у відрізках на осях $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, одержимо рівняння $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$.

д) яка проходить через точку $A(3;5)$ і паралельна вісі OX.

е) яка проходить через точку $B(-1;2)$ і паралельна вісі OY.

є) яка проходить через точку $A(1;-5)$ і паралельна прямій $x-3y+1=0$.

Розв'язання. Для складання рівняння прямої використаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом $y-y_0=k(x-x_0)$.

У даної прямої та прямої, рівняння якої потрібно скласти кутові коефіцієнти рівні, оскільки прямі паралельні. $k=\frac{1}{3}$, отже, маємо $y+5=\frac{1}{3}(x-1)$. Цьому рівнянню рівносильне рівняння $x-3y-16=0$.

2. Написати рівняння прямої:

а) яка проходить через точку $A(2;5)$ і має кутовий коефіцієнт $k=3$;

б) яка проходить через точку $O(0;0)$ і має кутовий коефіцієнт $k=-2$;

в) є бісектрисою першого координатного кута ПДСК;

г) проходить через початок координат і утворює з віссю OX кут 30°;

д) проходить через початок координат і утворює з віссю OX кут 120°.

е) яка відсікає від вісі OY відрізок $b=2$ і має кутовий коефіцієнт $k=-3$;

є) яка відсікає від вісі OY відрізок $b=-3$ і має кутовий коефіцієнт $k=1$.

3. Дано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(-1;3), B(0;4), C(-2;-2)$. Написати рівняння медіани цього трикутника, проведеної з вершини A.

4°. Написати рівняння середніх ліній трикутника, вершини якого знаходяться у точках $A(2;6), B(-4;0), C(4;2)$.

5. Установіть, які з наступних трійок точок належать одній прямій: а) $(2;1),(-1;4),(-7;10)$; б) $(0;5),(7;1),(-2;3)$; в°) $(1;0),(0;1),(-2;3)$; г°) $(2;1),(10;3),(5;2)$.

6. Знайдіть довжини напрямлених відрізків, які пряма відсікає на осях координат:

а) $3x-2y+6=0$; б) $x+y+6=0$; в) $2x-y+3=0$.

Розв'язання. а) Виконаємо рівносильні перетворення даного рівняння: $-3x+2y=6$. Розділимо останнє рівняння на 6: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. Звідси, $a=-2; b=3$.

7. Пряма задана параметричними рівняннями

$$x = -1 + 4\,t,\; y = 2 - t\,.$$

а) Знайдіть напрямний вектор даної прямої; б) визначте координати точок, які мають параметри $t_1 = 3,\ t_2 = 0,\ t_3 = -2,\ t_4 = -1$; в) визначте параметри точок перетину даної прямої з осями координат; г) серед точок $M_1(-3;1),\ M_2(3;1),\ M_3(15;-2),$ $M_4\left(0;\dfrac{7}{4}\right),\ M_5(2;2)$ знайдіть точки, які належать даній прямій.

8°. Знайти координати напрямних векторів наступних прямих а) $3x + 7y + 8 = 0$; б) $x + 5 = 0$; в) $2x - 3y - 1 = 0$.

Розв'язання. а) Виконаємо рівносильні перетворення рівняння:

$$(3x+3)+(7y+5)=0,\ 3(x+1)+7\left(y+\frac{5}{7}\right)=0,\ 3\,(x+1)=-7\left(y+\frac{5}{7}\right).$$

За властивістю пропорції $\dfrac{x+1}{-7} = \dfrac{y+\frac{5}{7}}{3}$. Звідси напрямний вектор $\vec{a}\,(-7;3)$.

9°. Дано прямі: а) $3x - y + 5 = 0$; б°) $x + y - 3 = 0$; в°) $2x + 5 = 0$. Написати рівняння кожної з них у параметричному вигляді.

Розв'язання. а) Виконаємо рівносильні перетворення рівняння: $3x + 3 - y + 2 = 0,\quad 3(x+1) = y - 2$. За властивістю пропорції $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = t$. Звідси $\begin{cases} x+1 = t, \\ y - 2 = 3t. \end{cases}$ Отже, пряма має параметричне рівняння $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = 3t + 2. \end{cases}$

10. Дано три вершини трикутника $A(1;-2), B(0;3), C(1;1)$. Написати рівняння прямих, що проходять через кожну з них паралельно протилежній стороні.

Розв'язання. У кожному випадку скористаємось канонічним рівнянням прямої.

а) пряма проходить через точку $C(1;1)$. Напрямним буде вектор $\overline{AB}(-1;5)$.

Маємо рівняння $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{5}$. Цьому рівнянню рівносильне рівняння $5x + y - 6 = 0$.

11. Довести, що чотирикутник $ABCD$, де $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, $D(3;1)$ є трапецією. Складіть рівняння середньої лінії та діагоналей цієї трапеції.

12°. Дано суміжні вершини $A(1;-2)$, $B(3;2)$ паралелограма $ABCD$ і точка $P(1;1)$ перетину його діагоналей. Складіть рівняння сторін паралелограма.

13. Знайдіть кути нахилу до вісі OX прямих: а) $x+y-7=0$; б) $x-y+2=0$; в) $x+\sqrt{3}y-4=0$.

14. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $P(1;2)$ і відсікає рівні відрізки на осях координат.

2) Побудова прямої заданої загальним рівнянням.

15. У ПДСК побудувати наступні прямі, використовуючи циркуль та лінійку:

а) $3x-5y+10=0$; б) $y=2x-3$; в) $y-3=0$; г°) $y=6x$;

д°) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$; е°) $3x-1=0$.

ВІДПОВІДІ. №1. д) $y=5$; **е)** $x=-1$. **№2. а)** $3x-y-1=0$**; д)** $y=-\sqrt{3}x$. **№3.** $x+1=0$. **№4.** $2x+y-1=0,\ x-y+1=0,\ x-4y+13=0$. **№5 а)** та **в). №8. а)** $\vec{p}\,(-7;3)$; **б)** $\vec{p}\,(0;1)$; **в)** $\vec{p}\,(3;2)$. **№11.** $AB\,||\,CD$. $3x+y-1=0$, $x-y=0,\ y-1=0$. **№14.** $x+y-3=0,\ x-y+1=0$.

Практичне заняття 6.

Тема. **НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ. ВЗАЄМНЕ РОЗМІШЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ**

Питання.

1) Нормальне рівняння прямої, перехід від загального рівняння до нормального і навпаки. 2) Відстань від точки до прямої, кут між двома прямими. 3) Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	№1, №2, №3 (а).	№3 (б).
2	№4 (а), №5, №6 (а), №7.	№4 (б), №6 (б), №8.
3	№9.	

1) <u>Нормальне рівняння прямої, перехід від загального рівняння до нормального і навпаки.</u>

1. Вказати, яке з наступних рівнянь є нормальним:

а) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; б) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$;

в) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$; г) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$;

д) $-x+2=0$; е) $x-2=0$;

є) $y+2=0$; ж) $-y-2=0$.

Вказівка. Потрібно перевірити виконання двох умов: 1) $\rho\geq 0$, 2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ – сума квадратів коефіцієнтів дорівнює 1.

2. Звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду.

а) $4x-3y-10=0$; б) $12x-5y+13=0$; в) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

Розв'язання. а) Оскільки $c=-10$, то нормуючий множник $\lambda=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$. Помноживши рівняння на $\frac{1}{5}$, отримаємо $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$ – нормальне рівняння.

3. Дано рівняння прямих. Визначити полярний кут нормалі α і відрізок ρ. Побудувати пряму за одержаними параметрами α та ρ.

а) $x\sqrt{3}+y-6=0$; б°) $x-y+2=0$.

2) <u>Відстань від точки до прямої, кут між двома прямими.</u>

4. Визначте відстань d від точки до прямої.

а) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$; б) $Q(1;-2)$, $x-2y-5=0$.

5. Точка $A(2;-5)$ – вершина квадрату, одна з сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Обчисліть площу цього квадрату.

6. Визначте кут φ між двома прямими:

а) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$. **б)** $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$.

Вказівка. Зведіть рівняння до вигляду $l_1 : y = k_1 x + b_1$ та $l_2 : y = k_2 x + b_2$ і скористайтесь формулою $tg\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

7. Дана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1)$ під кутом 45° до даної.

Алгоритм розв'язання.

1. Зведіть рівняння даної прямої l_1 до вигляду $y = k_1 x + b_1$ та визначте k_1.

2. Накресліть пряму у ПДСК і розгляньте 2 можливі випадки розташування прямої l_2, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ під кутом 45° до даної.

3. Скористайтесь формулою $tg\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ для знаходження k_2 в обох випадках.

4. Для складання рівняння прямої використайте рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$.

8°. Дано рівняння сторін трикутника $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений. Доведіть задачу за допомогою порівняння кутів трикутника.

3) <u>Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих.</u>

9. Дано дві протилежні вершини квадрату $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Складіть рівняння його сторін.

ВІДПОВІДІ. **№1. а)** так; **б)** ні. **№3. а)** $\alpha = \dfrac{\pi}{6}, p = 3$; **б)** $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}, p = \sqrt{2}$; **№4. а)** $d = 3$; **б)** $d = 0$. **№5.** $S_{кв} = 5$ *кв.од.* **№6. а)** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; **б)** $\varphi = 0$. **№7.** $x - 5y + 3 = 0$; $5x + y - 11 = 0$. **№9.** $3x - 4y + 15 = 0, 3x - 4y - 10 = 0, 4x + 3y - 30 = 0, 4x + 3y - 5 = 0$.

Змістовий модуль 3.
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Практичне заняття 7.

Тема. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КОЛО. ЕЛІПС

Питання.

1) Рівняння лінії другого порядку. 2) Коло. 3) Означення еліпса, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості еліпса. 4) Побудова еліпса. 5) Розв'язування задач.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 3)**
5	№1 (непарні), №2, №3, №4 (1,3), №5, №7, №9.	№1 (парні), №4 (2,4), №6, №8.

5) <u>Розв'язування задач.</u>

1. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

1) його піввісі дорівнюють 5 і 2;

2°) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c=8$;

3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$;

4°) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$;

5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$;

6°) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{12}{13}$;

7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c=4$;

8°) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;

9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;

10°) відстань між директрисами дорівнює 32 і $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$.

2. Дано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайдіть: 1) його піввісі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

3. Обчисліть площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші співпадають з кінцями його малої вісі.

4. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

1) точка $M_1\left(-2\sqrt{5};2\right)$ еліпса і його мала піввісь $b=3$;

2°) точка $M_1(2;-2)$ еліпса і його велика піввісь $a=4$;

3) точки $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$ і $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$ еліпса;

4°) точка $M_1\left(\sqrt{15};-1\right)$ еліпса і відстань між його фокусами $2c=8$.

5. Обчислити відстань від фокуса $F(c;0)$ еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до односторонньої з цим фокусом директриси.

6°. Дана точка $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ на еліпсі $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; складіть рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M_1.

7. Знайдіть точки перетину прямої $x+2y-7=0$ та еліпса $x^2+4y^2=25$.

8°. Знайдіть точки перетину прямої $3x+10y-25=0$ та еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

9. Через фокус F еліпса проведено перпендикуляр до його великої вісі (рис. 7.1). Визначте, при якому значенні ексцентриситета еліпса відрізки AB і OC будуть паралельні.

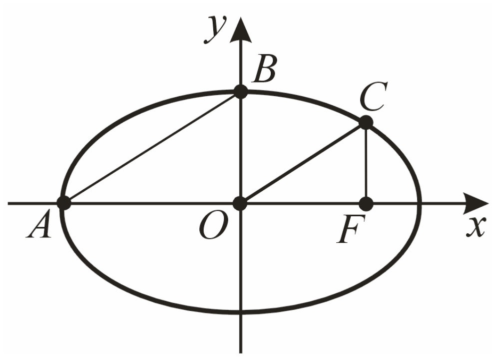


Рис. 7.1

ВІДПОВІДІ. №1. 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; **5)** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; **7)** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$; **9)** $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ або $\frac{4x^2}{117}+\frac{y^2}{9}=1$. **№2. 3)** $\varepsilon=\frac{4}{5}$; **4)** $x=-\frac{25}{4}$, $x=\frac{25}{4}$.

№3. 16 *кв.од.* **№4.** **1)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; **2)** $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$; **3)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$; **4)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. **№5.** $\frac{b^2}{c}$. **№6.** $x-2=0; 5x+12y+10=0$. **№7.** $\left(4;\frac{3}{2}\right), (3;2)$. **№8.** $\left(3;\frac{8}{5}\right)$ – точка дотику**.** **№9.** $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Практичне заняття 8.

Тема. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ГІПЕРБОЛА

Питання.

1) Означення гіперболи, канонічне рівняння. 2) Дослідження форми, властивості гіперболи. 3) Побудова гіперболи. 4) Розв'язування задач.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 3)
4	№1 (непарні), №3, №4, №5 (1,2), №6, №8.	№1 (парні), №2, №5 (3), №7.

4) Розв'язування задач.

1. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

1) її вісі $2a=10$ і $2b=8$;

2°) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$;

3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

4°) вісь $2a=16$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c=20$;

6°) відстань між директрисами дорівнює $\frac{228}{13}$ і відстань між фокусами $2c=26$;

7) відстань між директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$ і вісь $2b=6$;

8°) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

9) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}$.

2°. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайдіть: 1) піввісі a і b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

3. Знайдіть площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

<u>Вказівка.</u> Для обчислення площі трикутника скористайтесь формулою:

$S_\Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$, де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

4. Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гіперболі $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Складіть рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M_1.

5. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

1) точки $M_1(6; -1)$ і $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гіперболи;

2) точка $M_1(-5; 3)$ гіперболи і ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

3°) точка $M_1\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Складіть рівняння гіперболи, якщо ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

7°. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

8. Упевнившись, що точка $M_1\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, установіть фокальні радіуси точки M_1.

ВІДПОВІДІ. №1. 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$**; 5)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$**; 7)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$**; 9)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$**. №2. 4)** $y=\pm\frac{4}{3}x$**; 5)** $x=\pm\frac{9}{5}$**. №3.** 12 *кв.од.* **№4.** $x-10=0$; $x+4\sqrt{5}y+10=0$. **№5. 1)** $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$**; 2)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$**; 3)** $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$**. №6.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$**. №7.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$**. №8.** $F_1M=\frac{41}{4}; F_2M=\frac{9}{4}$**.**

Практичне заняття 9.

Тема. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПАРАБОЛА

Питання.

1) Означення параболи, канонічне рівняння. 2) Дослідження форми, властивості параболи, побудова параболи. 3) Розв'язування задач. 4) Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 3)**
3	№1, №2, №5, №6 (1,2), №7, №9, №11.	№3, №4, №6 (3), №8, №10.
4	№12, №13.	№14.

3) Розв'язування задач.

1. Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо відомо:

1) парабола розміщена в правій півплощині симетрично відносно вісі OX і її параметр $p=3$;

2) парабола розміщена в лівій півплощині симетрично відносно вісі OX і її параметр $p=0{,}5$;

3) парабола розміщена в верхній півплощині симетрично відносно вісі OY і її параметр $p=\frac{1}{4}$;

4) парабола розміщена в нижній півплощині симетрично відносно вісі OY і її параметр $p=3$.

2. Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо відомо:

1) парабола розміщена симетрично відносно вісі OX і проходить через точку $A(9;6)$;

2) парабола розміщена симетрично відносно вісі OX і проходить через точку $B(-1;3)$;

3) парабола розміщена симетрично відносно вісі OY і проходить через точку $C(1;1)$;

4) парабола розміщена симетрично відносно вісі OY і проходить через точку $D(4;-8)$.

3°. Складіть рівняння параболи, яка має фокус $E(0;-3)$ і проходить через початок координат, якщо відомо, що її віссю є вісь OY.

4. Встановіть, які лінії визначаються наступними рівняннями та зобразіть ці лінії на рисунку.

1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$; 3) $y=-3\sqrt{-2x}$; 4) $y=-2\sqrt{x}$.

5. Установіть, що кожне з наступних рівнянь визначає параболу, і знайдіть координати її вершини A, величину параметра p і рівняння директриси:

1) $y^2=4x-8$; 2) $y^2=4-6x$; 3) $x^2=6y+2$; 4) $x^2=2-y$.

6. Установіть, що кожне з наступних рівнянь визначає параболу, і знайдіть координати її вершини A, та величину параметра p:

1) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$; 2) $y=4x^2-8x+7$; 3°) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$.

7. Складіть рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(7;2)$ і директриса $x-5=0$.

8°. Складіть рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4;3)$ і директриса $y+1=0$.

9. Встановіть точки перетину прямої $x+y-3=0$ і параболи $x^2=4y$.

10°. Встановіть точки перетину прямої $3x+4y-12=0$ і параболи $y^2=-9x$.

11. Визначте точки перетину еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ і параболи $y^2=24\,x$.

4) Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.

12. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Складіть полярне рівняння її правої вітки, вважаючи, що напрям полярної вісі співпадає з додатним напрямом вісі абсцис, а полюс знаходиться у правому фокусі гіперболи.

13. Дано рівняння параболи $y^2=6x$. Складіть полярне рівняння, вважаючи, що напрям полярної вісі співпадає з додатним напрямом вісі абсцис, а полюс знаходиться у правому фокусі параболи.

14°. Встановіть, що рівняння $\rho=\frac{144}{13-5\cos\Theta}$ визначає еліпс та знайдіть його піввісі.

ВІДПОВІДІ. **№2.** **1)** $y^2=4x$**;** **2)** $y^2=-9x$**;** **3)** $x^2=y$**;** **4)** $x^2=-2y$**.** **№3.** $x^2=-12y$**.** **№5.** **1)** $A(2;0),\ p=2,\ x-1=0$**;** **2)** $A\left(\frac{2}{3};0\right),\ p=3,\ 6x-13=0$**.** **№6.** **1)** $A(-2;1),\ p=2$**;** **2)** $A(1;3),\ p=\frac{1}{8}$**.** **№7.** $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$**.** **№8.** $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$**.** **№9.** $(-6;9),(2;1)$**.** **№10.** $(-4;6)$ – *точка дотику.* **№11.** $(6;-12),(6;12)$**.** **№12.** $\rho=\frac{9}{4-5\cos\Theta}$**.** **№13.** $\rho=\frac{3}{1-\cos\Theta}$**.** **№14.** 13 і 12.

V. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВИХ МОДУЛЯХ 1-3

Модуль 1.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 1
«Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині»

1. Скалярні та векторні величини. Поняття вектора. Напрямлені відрізки. Вектор як множина співнапрямлених відрізків. Рівність векторів.
2. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число.
3. Колінеарні і компланарні вектори. Розклад вектора за двома неколінеарними векторами. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами. Лінійна залежність векторів.
4. Тривимірний векторний простір і його підпростори. Базис та розмірність векторного простору.
5. Координати вектора та їх властивості. Координати вектора в ортонормованому базисі. Довжина вектора.
6. Скалярний добуток двох векторів.
7. Афінна та прямокутна декартова система координат на площині. Координати точки і вектора.
8. Відстань між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні.
9. Полярна система координат. Полярні координати точки. Зв'язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки.
10. Перетворення системи координат на прямій (перенесення початку координат, зміна одиничного вектора, загальний випадок).
11. Орієнтація площини. Кут між векторами в орієнтованій площині.
12. Перетворення афінної системи координат. Перетворення прямокутної декартової системи координат.
13. Аналітичне задання фігури. Поняття про алгебраїчну лінію. Порядок лінії. Складання рівняння лінії.
14. Рівняння лінії в параметричній формі.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 2
«Пряма лінія на площині»

15. Пряма як алгебраїчна лінія першого порядку. Рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічне рівняння). Рівняння прямої, заданої двома точками. Параметричні рівняння прямої.

16. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором.

17. Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої.

18. Розміщення прямої відносно системи координат. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Відстань від точки до прямої.

19. Кут між двома прямими, умови їх паралельності та перпендикулярності. Пучок прямих та його рівняння.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 3
«Лінії другого порядку».

20. Рівняння лінії другого порядку. Коло. Означення еліпса, канонічне рівняння.

21. Дослідження форми, властивості еліпса. Побудова еліпса.

22. Означення гіперболи, канонічне рівняння.

23. Дослідження форми, властивості гіперболи, побудова гіперболи.

24. Означення параболи, канонічне рівняння.

25. Дослідження форми, властивості параболи, побудова параболи.

26. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.

27. Загальне рівняння лінії другого порядку. Перетин лінії другого порядку з прямою.

28. Асимптотичні напрями кривої другого порядку. Дотична до кривої другого порядку.

VI. ПРИКЛАДИ ВАРІАНТІВ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Модуль 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Змістовий модуль 1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

ВАРІАНТ 1.

У завданнях 1-6 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання 1 бал).

Відповіді повідомити у формі ***пар (номер завдання та відповідна до нього буква)*** *у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. Вектори $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$ та $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)$ будуть колінеарними тоді і тільки тоді, якщо:

А	Б	В	Г
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$	$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}=0$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$	$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=1$

2. Скалярний добуток векторів $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$ і $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)$, заданих в ортонормованому базисі, обчислюється за формулою:

А	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(b_1+b_2+b_3\right)$
Б	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
В	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)\left(a_3+b_3\right)$
Г	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left\{a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3\right\}$

3. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, а вектори $\vec{a}, \vec{b}$ неколінеарні, то існують єдині числа α, β такі, що:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\vec{c} = \alpha\beta(\vec{a} + \vec{b})$	$\vec{c} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$	$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$	$\vec{c} = (\alpha + \beta)(\vec{a} + \vec{b})$

4. Нехай $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$. Першу координату точки $M(x; y)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $M_1M : MM_2 = \lambda$, можна знайти за формулою:

А	**Б**	**В**	**Г**
$x = \dfrac{\lambda\, x_1 + x_2}{1 + \lambda}$	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda}$	$x = \dfrac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda}$	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

5. Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ визначається за формулою:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\lvert x_2 - x_1\rvert + \lvert y_2 - y_1\rvert$	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$\lvert x_2 - x_1 + y_2 - y_1\rvert$	$\lvert x_1x_2 + y_1y_2\rvert$

6. Формули зв'язку між прямокутними декартовими координатами точки $M(x; y)$ і полярними координатами точки $M(\rho; \varphi)$ і мають вигляд:

А	$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$
Б	$x = \rho\sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi$
В	$x = \rho\cos 2\varphi,\ y = \rho\sin 2\varphi$
Г	$x = \rho\cos\dfrac{\varphi}{2},\ y = \rho\sin\dfrac{\varphi}{2}$

Задачі 7-8 представити з повним розв'язанням *(за кожне правильно виконане завдання 2 бала).*

7. Нехай $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину діагоналей, а точки M, N, P, Q – відповідно середини сторін AB, BC, CD, DA. Побудуйте на малюнку вектор $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}$.

8. Дано полярні координати вершин трикутника $A\left(10; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(16; \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(6; \dfrac{7\pi}{6}\right)$. Доведіть, що трикутник ABC правильний.

Змістовий модуль 2.
ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

ВАРІАНТ 1.

У завданнях 1-6 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання 1 бал).

Відповіді повідомити у формі ***пар (номер завдання та відповідна до нього буква)*** *у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. Загальне рівняння прямої на площині, це рівняння виду:

А	$ax+by+c=0$, де a, b, c – довільні сталі, такі, що $a^2+b^2 \neq 0$.
Б	$ax+by+c=0$, де a, b, c – довільні сталі.
В	$ax+by+c=0$, де a, b, c – довільні сталі, такі, що $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert+\lvert c\rvert \neq 0$.
Г	$ax+by+c=0$, де a, b, c – довільні сталі, такі, що $c \neq 0$.

2. Рівняння прямої «у відрізках на осях», це рівняння виду:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$	$ax+by=c$, де a, b, c – довільні сталі	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$ax+by=1$

3. Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $ax+by+c=0$ дорівнює:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\lvert ax_0+by_0+c\rvert$	$\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\lvert a\rvert}$	$\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\lvert a\rvert+\lvert b\rvert}$	$\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4. Прямі $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ паралельні, якщо:

А	**Б**	**В**	**Г**
$k_1k_2=1$	$k_1k_2=-1$	$k_1=k_2$	$k_1=-k_2$

5. Прямі $a_1x+b_1y+c_1=0$ та $a_2x+b_2y+c_2=0$ перетинаються, якщо:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	$a_1b_1=a_2b_2$

6. Нормуючим множником загального рівняння прямої є число:

А	Б	В	Г
$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a+b}}$	$\lambda = \frac{ab}{\sqrt{a+b}}$	$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\lambda = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Задачі 7-8 представити з повним розв'язанням *(за кожне правильно виконане завдання 2 бала).*

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат та перпендикулярна до прямої $y = \frac{1}{3}x - 1$.

8. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x - y - 3 = 0$, $2x + 3y - 11 = 0$, паралельно до прямої $5x - 4y - 17 = 0$.

Змістовий модуль 3.
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

ВАРІАНТ 1.

*У завданнях 1-6 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання **1 бал**).*

*Відповіді повідомити у формі **пар (номер завдання та відповідна до нього буква)** у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. ***Еліпсом*** називають множину всіх точок площини, для кожної з яких:

А	відстань до даної точки F дорівнює відстані до даної прямої d, яка не проходить через точку F
Б	сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини F_1 і F_2 є величина стала, більша ніж відстань між F_1 і F_2
В	добуток відстаней до двох даних точок тієї самої площини F_1 і F_2 є величина стала
Г	різниця відстаней до двох даних точок тієї самої площини F_1 і F_2 є величина стала, менша за відстань між F_1 і F_2

2. Канонічне рівняння гіперболи має наступний вигляд:

А	Б	В	Г
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

3. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ половина відстані між фокусами c дорівнює:

А	Б	В	Г
$\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2-b^2}$	$a-b$	$a+b$

4. Рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має вигляд (ε – ексцентриситет):

А	Б	В	Г
$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y=\pm\varepsilon\, x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$

5. Для параболи $y^2=2px$ параметр p – це:

А	подвоєна відстань від фокуса до директриси
Б	відстань від вершини до фокуса
В	відстань від вершини до директриси
Г	відстань від фокуса до директриси

6. Рівнянням директриси параболи $x^2=-2py$ буде:

А	Б	В	Г
$y=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$

Задачі 7-8 представити з повним розв'язанням *(за кожне правильно виконане завдання 2 бала).*

7. Складіть канонічне рівняння еліпса з ексцентриситетом $\varepsilon=\frac{3}{5}$, що проходить через точку $A(0;8)$.

8. Визначте взаємне розміщення прямої $2x-y-3=0$ та еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов. В 2-х ч. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1986. 336 с.

2. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія : Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Збірники задач з аналітичної геометрії

3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Учеб. пособие для втузов. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 224 с.

4. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч 1. Москва : Просвещение, 1973. 256 с.

5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. Санкт Петербург : Издательство «Лань», 2003. 336 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. Москва : Наука, 1975. 272 с.

7. Зайцева Л. Л., Нетреба А. В. Збірник задач з аналітичної геометрії. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 200 с.

8. Кобко Л. М., Глінка-Єремко І. Б. Аналітична геометрія. Частина 3. Площина і пряма в просторі. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Чернігів, 2008. 75 с.

9. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Духовничий, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.

10. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум (І курс, І семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Духовничий, Л. Б. Федорова. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.

11. Михайленко В. М., Антонюк Р. А. Сборник прикладных задач по высшей математике : Учеб. пособие. Киев : Выща шк., 1990. 168 с.

12. Ноздрин И. И., Степаненко И. М., Костюк Л. К. Прикладные задачи по высшей математике. Издательское объединение «Вища школа», 1976. 176 с.

13. Тарасенкова Н. А., Коломієць О. М. Лінії другого порядку : Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи студентів. Черкаси : «Сіяч», 2000. 80 с.

14. Тестові завдання з вищої математики : Навчальний посібник / С. І. Гургула, В. М. Мойсишин, В. О. Воробйова та ін.; За ред. С. І. Гургули, В. М. Мойсишина. Івано-Франківськ : Факел, 2008. 737 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації
до навчання курсу для студентів спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
та спеціальності 111 Математика

Частина 1
«Аналітична геометрія на площині»
[електронне видання]

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Рисунки *Я. В. Сапонова,*
О. І. Полковник

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 11.11.2021 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 4,65. Обл.-вид. 4,21. Зам. № 971.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
nuchk.tipograf@gmail.com