НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» імені Т. Г. Шевченка
Кафедра математики та економіки

Л. О. Соколенко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до навчання курсу для студентів
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
та спеціальності 111 Математика
Частина 2
«Аналітична геометрія у просторі»

Чернігів-2021

УДК 514 (072)
С 59

Рецензенти:

Тарасенкова Ніна Анатоліївна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та методики навчання математики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького.

Школьний Олександр Володимирович – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики та теорії і методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

С 59 **Соколенко Л. О. Аналітична геометрія** : Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика. **Частина 2 «Аналітична геометрія у просторі».** Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. 104 с.

Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія». Укладено на основі програми навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» підготовки бакалаврів галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика. Розраховані на студентів першого курсу спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та спеціальності 111 Математика денної та заочної форм навчання.

УДК 514 (072)

Рекомендовано до друку вченою радою природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка (протокол № 3 від 20 жовтня 2021 року)

ЗМІСТ

І. ПЕРЕДМОВА

За навчальними планами підготовки бакалаврів з галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) та з галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика нормативна навчальна дисципліна **«Аналітична геометрія»** вивчається протягом I-II семестрів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є геометричні об'єкти, які вивчаються методами векторної і лінійної алгебри з застосуванням методу координат.

Програма навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» складається з таких **двох модулів** складовими яких є такі **змістові модулі**:

Модуль 1. **Аналітична геометрія на площині.**

1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині.
2. Пряма лінія на площині.
3. Лінії другого порядку.

Модуль 2. **Аналітична геометрія в просторі.**

4. Метод координат у просторі.
5. Площина і пряма в просторі.
6. Поверхні другого порядку.

Метою вивчення навчальної дисципліни **«Аналітична геометрія»** є забезпечення глибокого засвоєння основних понять, положень і методів векторної алгебри, векторного впровадження координат, лінійної частини геометрії (пряма на площині, пряма і площина в просторі), теорії ліній і поверхонь другого порядку, а також лінійних геометричних перетворень простору.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Аналітична геометрія» є засвоєння основних понять та методів аналітичної геометрії (методу координат, векторного методу, векторно-координатного методу, методу ГМТ, методу перерізів, алгебраїчних, алгоритмічних методів, методу аналогій, методу геометричних перетворень) та набуття вмінь їх практично застосовувати.

Дані **методичні рекомендації** присвячені засвоєнню студентами **змістових модулів №1-6** курсу **«Аналітична геометрія».**

Під час навчання цих модулів відбувається формування таких **компетентностей**:

- ***здатність запам'ятати та відтворити*** означення та терміни основних понять «Аналітичної геометрії», векторної алгебри, теорії прямої та площини, теорії кривих та поверхонь другого порядку;

•*здатність запам'ятати суть* методу координат, векторного методу, векторно-координатного методу, методу ГМТ, методу перерізів, алгебраїчних, алгоритмічних методів, методу аналогій, та набуття вмінь їх практично застосовувати.

На вивчення навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» відводиться **180** годин **6** кредитів ЄКТС.

Методичні рекомендації до навчання курсу «Аналітична геометрія» складаються з двох частин:

Частина 1. «Аналітична геометрія на площині».

Частина 2. «Аналітична геометрія у просторі».

До методичних рекомендацій до навчання другої частини курсу «Аналітична геометрія у просторі» включено: 1) програму навчальної дисципліни (ЗМ1-ЗМ6); 2) **12 теми лекційного курсу**, що містять мету навчання, змістову структуру теми (структурні елементи змісту та відповідну до них літературу), математичні поняття, рівняння, формули, теореми та правила теми, систематизовані та подані у вигляді таблиць. 3) **9 практичних занять**, що містять тему, питання, номери та умови типових задач до відповідних питань теми, з окремими правилами-орієнтирами, алгоритмами та прикладами розв'язування; 4) **теоретичні питання** по змістових модулях 4-6; 5) **приклади варіантів** тестових завдань по змістових модулях 4-6; 6) список основної та додаткової літератури.

У окремих лекційних темах та всіх практичних заняттях є **питання та завдання, що виносяться на самостійне опрацювання.** Такі питання та завдання є складовими **комплексів завдань самостійної роботи (КЗСР)** по відповідних змістових модулях 4-6. Біля їх нумерації зроблено позначки (°).

Навчання курсу «Аналітична геометрія», зокрема його змістових модулів 1-6, за представленою у посібнику технологією, пройшло апробацію у 2017-2021 роках в Національному університеті «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка на фізико-математичному відділенні природничо-математичного факультету.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Школьному О. В., професору Тарасенковій Н. А. за цінні поради під час підготовки рукопису методичних рекомендацій до друку.

II. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

I СЕМЕСТР

Модуль 1. Аналітична геометрія на площині

Змістовий модуль 1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині

***Тема 1.* Векторні величини.** Предмет геометрії. Скалярні та векторні величини. Поняття вектора. Напрямлені відрізки. Вектор як множина співнапрямлених відрізків. Рівність векторів. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні і компланарні вектори. Розклад вектора за двома неколінеарними векторами. Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами. Лінійна залежність векторів.

***Тема 2.* Двовимірний та тривимірний векторний простори. Координати вектора.** Тривимірний векторний простір і його підпростори. Базис та розмірність векторного простору. Координати вектора та їх властивості. Координати вектора в ортонормованому базисі. Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів.

***Тема 3.* Метод координат на площині.** Афінна та прямокутна декартова система координат на площині. Координати точки і вектора. Відстань між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні. Полярна система координат. Полярні координати точки. Зв'язок між полярними і прямокутними декартовими координатами точки.

***Тема 4.* Перетворення системи координат.** Перетворення системи координат на прямій (перенесення початку координат, зміна одиничного вектора, загальний випадок). Орієнтація площини. Кут між векторами в орієнтованій площині. Перетворення афінної системи координат. Перетворення прямокутної декартової системи координат.

***Тема 5.* Поняття лінії на площині.** Аналітичне задання фігури. Поняття про алгебраїчну лінію. Порядок лінії. Складання рівняння лінії. Рівняння лінії в параметричній формі. Рівняння лінії в полярній системі координат.

Змістовий модуль 2. Пряма лінія на площині

Тема 6. **Рівняння прямої.** Пряма як алгебраїчна лінія першого порядку. Рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічне рівняння). Рівняння прямої, заданої двома точками. Параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором.

Тема 7. **Загальне рівняння прямої та його дослідження.** Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої. Розміщення прямої відносно системи координат. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Умови, що визначають півплощину. [Геометричний зміст лінійної нерівності з двома змінними.] Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими, умови їх паралельності та перпендикулярності. Пучок прямих та його рівняння.

Змістовий модуль 3. Лінії другого порядку

Тема 8. **Лінії другого порядку. Еліпс.** Рівняння лінії другого порядку. Коло. Означення еліпса, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості еліпса. Побудова еліпса.

Тема 9. **Лінії другого порядку. Гіпербола.** Означення гіперболи, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості гіперболи, побудова гіперболи.

Тема 10. **Лінії другого порядку. Парабола.** Означення параболи, канонічне рівняння. Дослідження форми, властивості параболи, побудова параболи. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярній системі координат.

Тема 11. **Загальна теорія ліній другого порядку.** Загальне рівняння лінії другого порядку. Перетин лінії другого порядку з прямою. Асимптотичні напрями. Дотична до кривої другого порядку. Оптичні властивості кривих другого порядку. Діаметри ліній 2-го порядку. Взаємно спряжені діаметри ліній 2-го порядку. Спряжені напрями. Головні напрями відносно кривої 2-го порядку. Центр кривої 2-го порядку.

Тема 12. **Класифікація ліній 2-го порядку. Зведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.** Дослідження загального рівняння ліній 2-го порядку та їх класифікація. Спрощення загального рівняння лінії 2-го порядку перенесенням початку координат, поворотом осей координат.

II СЕМЕСТР

Модуль 2. Аналітична геометрія в просторі

Змістовий модуль 4. Метод координат у просторі

***Тема 13.* Системи координат у просторі.** Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки. Операції над векторами у просторі. Ділення відрізка у даному відношенні. Відстань між двома точками. Скалярний добуток двох векторів. Орієнтація простору. [Перетворення системи координат].

***Тема 14.* Векторний та мішаний добутки векторів.** Поняття векторного добутку двох векторів. Векторний добуток векторів заданих координатами. Геометрична властивість векторного добутку і її застосування. Означення мішаного добутку трьох векторів, властивості. Мішаний добуток трьох векторів в координатній формі. Геометрична властивість мішаного добутку та її застосування.

Змістовий модуль 5. Площина і пряма в просторі

***Тема 15.* Площина у просторі.** Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

***Тема 16.* Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин.** Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин. [Відстань між паралельними площинами]. Пучок площин. Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин.

***Тема 17-18.* Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин.** Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин). Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Змістовий модуль 6. Поверхні другого порядку

Тема 19. **Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні.** Загальне рівняння поверхні другого порядку. Означення та рівняння сфери, властивості сфери. Означення та рівняння циліндричної поверхні. Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей.

Тема 20. **Конічні поверхні другого порядку.** Означення та рівняння канонічної поверхні. Конуси другого порядку з вершиною у початку координат. Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння.

Тема 21. **Поверхні обертання. Еліпсоїд обертання.** Поняття поверхні обертання та її рівняння. Означення та рівняння еліпсоїда обертання і тривісного еліпсоїда. Визначення форми та вивчення геометричних властивостей еліпсоїда обертання.

Тема 22. **Однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди.** Означення та рівняння однопорожнинного гіперболоїда та однопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання. Означення та рівняння двопорожнинного гіперболоїда та двопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови поверхні двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Тема 23. **Поверхні обертання. Параболоїди. Еліптичний параболоїд. Гіперболічний параболоїд.** Означення та рівняння параболоїда обертання. Застосування методу перерізів до побудови його поверхні.

Означення та рівняння еліптичного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей еліптичного параболоїда за його канонічним рівнянням. Означення гіперболічного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей гіперболічного параболоїда за його канонічним рівнянням.

Тема 24. **Прямолінійні твірні на поверхні другого порядку.** Означення прямолінійної твірної поверхні. Поверхні другого порядку, що мають (не мають) прямолінійні твірні. Рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, їх властивості. Рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда, їх властивості.

III. ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС

Модуль 2.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Змістовий модуль 4.
МЕТОД КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Тема 13. СИСТЕМИ КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Мета навчання: ввести афінну систему координат у просторі, повторити поняття «прямокутна декартова система координат у просторі» та поняття пов'язані з нею; з'ясувати, який взаємозв'язок існує між координатами радіус-вектора точки та координатами точки; повторити операції над векторами; використати аналогію для знаходження координат вектора у просторі; вивести за аналогією *формулу відстані між двома точками*, *формули поділу відрізка в даному відношенні*; повторити поняття скалярного добутку двох векторів та розглянути його властивості у просторі; використовуючи правило годинникової стрілки, означити поняття «правий базис», «лівий базис».

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки.	[2] Р5, §1-2. [1] Гл VI, §52.
2	Операції над векторами у просторі.	
3	Ділення відрізка у даному відношенні. Відстань між двома точками.	[2] Р5, §1-2. [1] Гл VI, §52.
4	Скалярний добуток двох векторів.	[2] Р1, §10. [1] Гл I, §8.
5	Орієнтація простору.	[2] Р5, §3. [1] Гл VI, §53.

Математичні поняття:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td>

Афінною системою координат у просторі називають геометричну систему, яка складається з впорядкованої трійки базисних векторів $\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right)$ у тривимірному векторному просторі V, відкладених від деякої фіксованої точки O.

Точку O називають *початком координат,* а вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – *координатними векторами.*

</td><td>

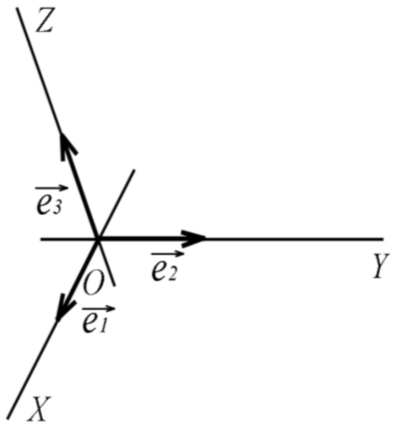


Рис. 13.1

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Проведені через точку O у напрямку базисних векторів прямі OX, OY, OZ називають *координатними осями*: OX *– вісь абсцис,* OY *– вісь ординат,* OZ *– вісь аплікат.*

Площини OXY, OXZ, OYZ, які проходять через координатні прямі, називаються *координатними площинами.*

Афінну систему координат у просторі позначають $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ або $OXYZ$.

</td></tr>
<tr><td>

Прямокутною декартовою, або просто ***прямокутною системою координат (ПДСК)*** називається афінна система координат, у якої базис ортонормований, тобто базисні вектори є одиничними і взаємно ортогональними.

$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \ \vec{i} \perp \vec{k}, \ \vec{j} \perp \vec{k}.$

Така система координат позначається $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

</td><td>

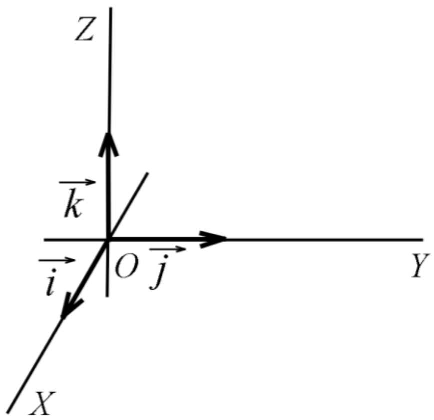


Рис. 13.2

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Коефіцієнти розкладу радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ за базисними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (в афінній системі координат) або за базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (в ПДСК) називають ***координатами вектора*** $\overrightarrow{OM}$ і позначають:

$$\overrightarrow{OM}\,(x;\, y;\, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \text{ або } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

За координати точки M приймають координати радіус-вектора цієї точки (тема 2, Ч.1.).

</td></tr>
</table>

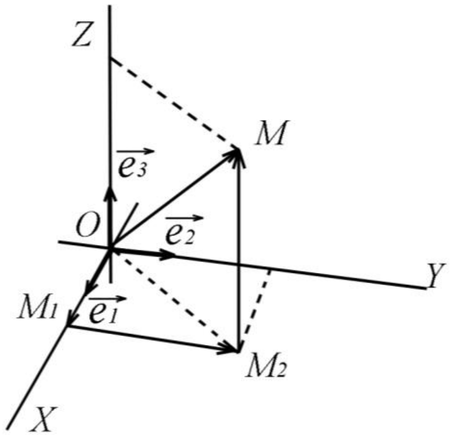


Рис. 13.3

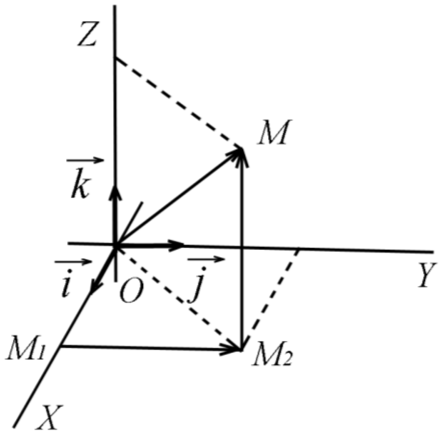


Рис. 13.4

Операції над векторами у просторі

Правила виконання додавання, віднімання векторів, множення вектора на число у просторі такі ж як і на площині.

Зокрема, якщо вектори задані координатами, то: 1) координати вектора, який є сумою даних векторів, дорівнюють сумі відповідних координат даних векторів; 2) координати вектора, який є різницею даних векторів, дорівнюють різниці відповідних координат даних векторів; 3) координати вектора, який одержується в результаті множення вектора $\vec{a}$ на число λ дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на число λ.

Закони для цих операцій такі ж як і на площині.

Координати вектора. Ділення відрізка у даному відношенні

Якщо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ заданий координатами його початку і кінця $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ в деякій афінній системі координат, то він має координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1) \qquad (2)$$

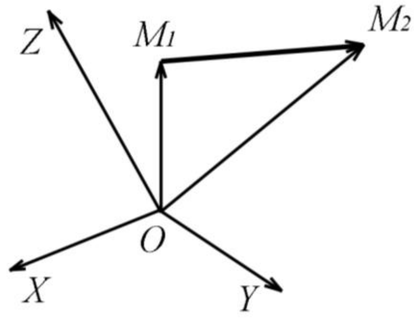


Рис. 13.5

Якщо відрізок M_1M_2 задано координатами його кінців $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, а точка $M(x;\,y;\,z)$ ділить цей відрізок у відношенні λ, то точка M має координати:

$$x=\frac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda\, z_2}{1+\lambda} \quad (3)$$

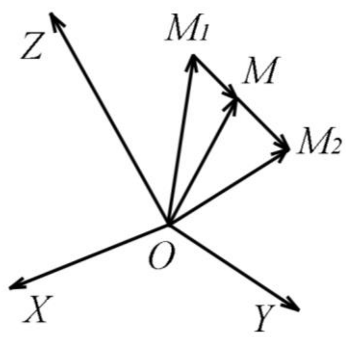


Рис. 13.6

Якщо точка $M(x;\,y;\,z)$ є серединою відрізка M_1M_2, то $\lambda = 1$, отже

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (4)$$

Відстань між двома точками

Нехай в ПДСК $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ точки M_1 і M_2 мають координати $M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2)$.

Відстань між двома точками

$$M_1M_2 = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (5)$$

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \qquad (6)$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається добуток модуля одного з них на проекцію другого на перший

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \qquad (7)$$

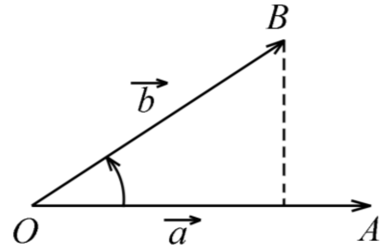


Рис. 13.7

Властивості скалярного добутку (без координат) 1-5 такі ж як і на площині (тема 2, Ч.1).

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами: $\vec{a}\,(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}\,(x_2;y_2;z_2)$. Тоді мають місце рівність:

6) $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;

7) Якщо $\vec{a}\,(x;y;z)$, то $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = x^2 + y^2 + z^2$. Отже,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

8) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Орієнтація простору

Нехай у тривимірному векторному просторі V_3 задано два базиси: $A\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right)$ і $B\left(\vec{b}_1;\vec{b}_2;\vec{b}_3\right)$.

Розклад векторів базису B за *векторами базису* A:

$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2 + c_{31}\vec{a}_3$;

$\vec{b}_2 = c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + c_{32}\vec{a}_3$;

$\vec{b}_3 = c_{13}\vec{a}_1 + c_{23}\vec{a}_2 + c_{33}\vec{a}_3$.

Визначник *матриці переходу від базису A до базису B:*

$$A/B=\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right)/\left(\vec{b}_1;\vec{b}_2;\vec{b}_3\right)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо $A/B>0$, то базиси A і B ***однаково орієнтовані.***

Якщо $A/B<0$, то базиси A і B ***протилежно орієнтовані.***

Відношення однакової орієнтації базисів є відношенням ***еквівалентності,*** оскільки йому властиві рефлективність, симетричність, транзитивність.

У такому випадку всі базиси простору V_3 можна розбити на два класи еквівалентності: клас базисів, які однаково орієнтовані з даним базисом, і клас базисів, які протилежно орієнтовані з ним.

Один з цих класів базисів називають ***правоорієнтованим,*** а другий – ***лівоорієнтованим.***

Правила правої та лівої руки

Базис $A\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right)$ називають ***правоорієнтованим,*** якщо великий, вказівний і середній пальці правої руки можна направити в напрямі відповідних базисних векторів.

Базис $A\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right)$ називають ***лівоорієнтованим,*** якщо базисні вектори будуть напрямленими вздовж відповідних пальців лівої руки.

Правило годинникової стрілки

Базис $\left(\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\right)$ вважають ***правим,*** якщо поворот від $\vec{a}_1$ до $\vec{a}_2$ по найкоротшому шляху здійснюється проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{a}_3$.

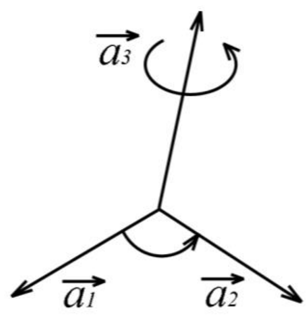


Рис. 13.8

Якщо цей поворот здійснюється за рухом годинникової стрілки, то цей базис ***лівий.***

Тема 14. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Мета навчання: ввести поняття векторного добутку двох векторів та розглянути його властивості, зокрема геометричну та її застосування; ввести поняття мішаного добутку трьох векторів та розглянути його властивості, зокрема геометричну та її застосування.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття векторного добутку двох векторів, властивості. Векторний добуток векторів заданих координатами.	[2] Р5, §5, п.5.1, 5.2. [1] Гл VI, §56.
2	Геометрична властивість векторного добутку і її застосування.	[2] Р5, §5, п.5.3. [1] Гл VI, §56.
3	Означення мішаного добутку трьох векторів, властивості. Мішаний добуток трьох векторів в координатній формі.	[2] Р5, §6, п.6.1. [1] Гл VI, §55.
4	Геометрична властивість мішаного добутку та її застосування.	[2] Р5, §6, п.6.2. [1] Гл VI, §55.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття. Властивості.
Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{p} = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$, який задовольняє такі умови: 1. $\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. 2. $\vec{p} \perp \vec{a}$, $\vec{p} \perp \vec{b}$ – вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ 3. трійка векторів $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{p}\right)$ має праву орієнтацію.
Властивості векторного добутку
1. $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ (*антикомутативність*). 2. $\left[\left(\alpha\,\vec{a}\right)\vec{b}\right] = \left[\vec{a}\left(\alpha\vec{b}\right)\right] = \alpha\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ (*асоціативність відносно множення вектора на число*). 3. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right] = \left[\vec{a}\,\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\,\vec{c}\right]$ (*дистрибутивність відносно додавання*). 4. $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

5. *Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх векторного добутку: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \vec{0}$.

Векторний добуток векторів, заданих координатами

6. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1), \vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ в правому ортонормованому базисі $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, то їх *векторним добутком* є вектор $\vec{p}$ з координатами

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right) \qquad (1) \text{ або}$$

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (позначають $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$) називається **число,** що дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c} \qquad (3).$$

1) $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ – результат множення **вектор**,

2) $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}$ – результат множення **число**.

Властивості мішаного добутку

1. Для того щоб три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були *компланарними*, необхідно і достатньо, щоб $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c} = 0$.

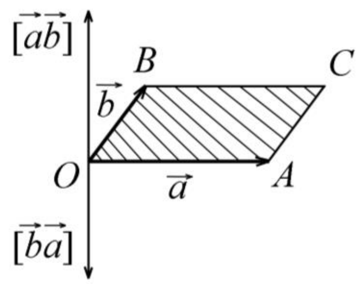
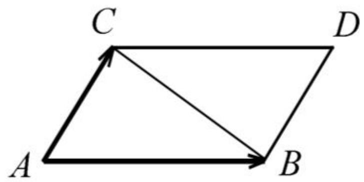
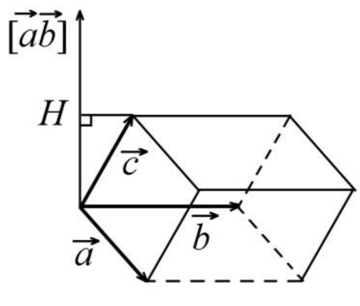
2. При циклічній перестановці векторів їх мішаний добуток не змінюється:
$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right) = \left(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right)$.

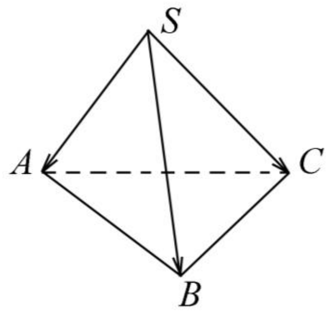
3. При перестановці двох векторів мішаний добуток змінюється на протилежний:
$\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}\right) = -\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

4. Скалярний множник можна виносити за знак мішаного добутку:
$\left(\left(\alpha\,\vec{a}\right)\vec{b}\,\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\left(\alpha\,\vec{b}\right)\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\,\vec{b}\left(\alpha\,\vec{c}\right)\right) = \alpha\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

5. Мішаний добуток векторів дистрибутивний відносно операції додавання: $\left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c}\,\vec{d}\right) = \left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}\right) + \left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)$

Теореми теми:

<table>
<tr><th>Теорема</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Геометрична властивість векторного добутку</td></tr>
<tr><td>Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на даних векторах.
$S = OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi = \left| \left[\vec{a}\, \vec{b} \right] \right|$
(4)</td><td>
Рис. 14.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Застосування векторного добутку</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Площа паралелограма. $S_{пар-ма} = \left| \left[\vec{a}\, \vec{b} \right] \right|$ (5)</td></tr>
<tr><td>2. Площа трикутника.
$S_{тр-ка} = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{a}\, \vec{b} \right] \right|$ (6)
Координати вершин трикутника: $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2, z_2), C(x_3; y_3; z_3)$.</td><td>
Рис. 14.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 }$ (7)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема (мішаний добуток трьох векторів в координатній формі). Мішаний добуток векторів $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1), \vec{b}\,(x_2; y_2; z_2), \vec{c}\,(x_3; y_3; z_3)$, заданих своїми координатами в правому ортонормованому базисі, дорівнює визначнику складеному з координат цих векторів, тобто
$\left(\vec{a}\, \vec{b}\, \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ (8)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометрична властивість мішаного добутку</td></tr>
<tr><td>Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.</td><td>
Рис. 14.3</td></tr>
</table>

Застосування мішаного добутку	
Об'єм тетраедра $SABC$, у якого $S(x_1; y_1; z_1)$ – вершина тетраедра, $A(x_2; y_2; z_2)$, $B(x_3; y_3; z_3)$, $C(x_4; y_4; z_4)$ – вершини основи обчислюється за формулою: $V_{тетр} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$ (9)	 **Рис. 14.4**

Змістовий модуль 5.
ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

Тема 15. ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Мета навчання: розглянути різні способи задання площини та вивести відповідні їм рівняння; вивести нормальне та загальне рівняння площини та розглянути питання зведення загального рівняння площини до нормального вигляду; розглянути різні розміщення площини відносно системи координат, в залежності від значень коефіцієнтів A, B, C та вільного члена D.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння: 1) рівняння площини, заданої точкою і напрямним підпростором; 2) рівняння площини, яка проходить через три задані точки; 3) рівняння площини «у відрізках на осях»; 4) рівняння площини, заданої точкою і нормальним вектором; 5) векторне рівняння площини.	[2] Р6, §1, 3-5. [1] Гл VII, §59.
2	Нормальне рівняння площини.	[2] Р6, §6.
3	Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду.	[2] Р6, §7, п.6.1. [1] Гл VII, §60.
4	Розміщення площини відносно системи координат.	[2] Р6, §8.

Математичні поняття та рівняння:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Площина – первісне (неозначуване) поняття.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Нехай у просторі задана деяка афінна система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. І нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно до двох неколінеарних векторів $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}\,(b_1;b_2;b_3)$.

Тоді всі вектори, які є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, будуть паралельними до площини α. Вони утворюють ***двовимірний підпростір*** векторного простору з базисними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$. Цей підпростір позначають $V_2(\vec{a};\vec{b})$ і називають ***напрямним підпростором*** площини α.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння</td></tr>
<tr><td>

1. Рівняння площини, заданої точкою і напрямним підпростором.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0, \qquad (1)$$

де $M(x;y;z)$ – довільна точка площини.

</td><td>

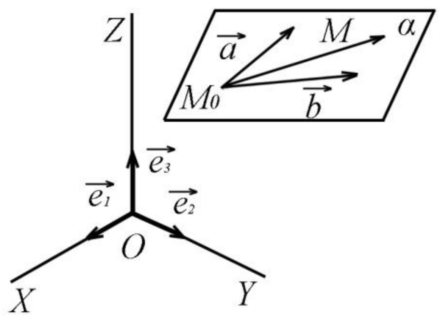


Рис. 15.1

</td></tr>
<tr><td>

2. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (2)$$

де $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ координати трьох точок, що належать площині α, але не лежать на одній прямій.

</td><td>

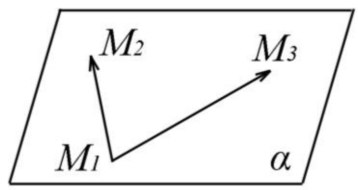


Рис. 15.2

</td></tr>
<tr><td>

3. Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай площина α перетинає кожну з осей АфСК відповідно в точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, відмінних від початку координат ($abc \neq 0$).

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

</td><td>

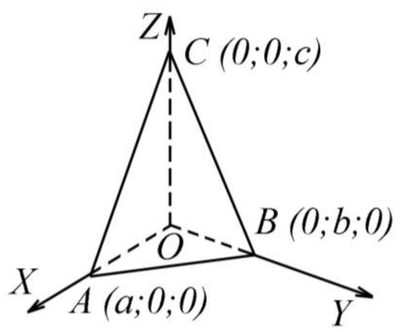


Рис. 15.3

</td></tr>
</table>

4. Рівняння площини, заданої точкою і нормальним вектором у ПСК.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (4)$$

де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, через яку проходить площина α; $\vec{n}\,(A;B;C)$ – вектор, до якого вона перпендикулярна (***нормальний вектор***).

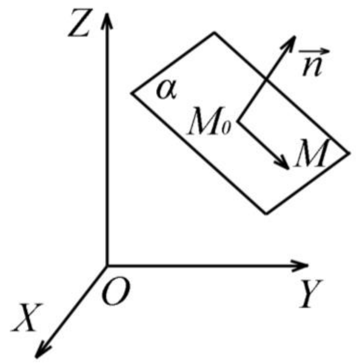


Рис. 15.4

5. Векторне рівняння площини.

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0, \qquad (5)$$

де $M(x;y;z)$ – довільна точка площини α, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, через яку проходить площина α; $\vec{n}\,(A;B;C)$ – вектор, до якого вона перпендикулярна (***нормальний вектор***).

6. Нормальне рівняння площини

Нехай у просторі задана площина α. Через початок ПСК $OXYZ$ проведено перпендикуляр до площини α, M_0 – точка перетину перпендикуляру з площиною.

$OM_0=\rho$.

$\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}$ – вектор нормалі до даної площини.

α, β, γ – кути, які утворює вектор нормалі $\vec{n}$ з координатними осями OX, OY, OZ.

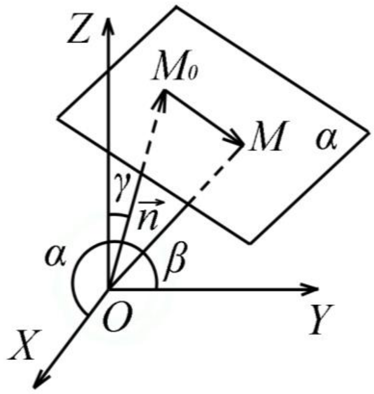


Рис. 15.5

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0, \qquad (6)$$

де ρ – відстань від початку координат до площини.

1) вільний член рівняння (6) недодатний,

2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

7. Загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (7)$$

де x, y, z – змінні, A, B, C – коефіцієнти, D – вільний член.

Зведення загального рівняння до нормального вигляду
$M=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (8) – ***нормуючий множник***   Помноживши обидві частини загального рівняння (7) на (8) одержують нормальне рівняння площини $$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (9)$$ Знак множника M протилежний знаку вільного члена загального рівняння площини.   **Приклад.** Привести загальне рівняння площини $2x+3y+6z-35=0$ до нормального вигляду.   *Розв'язання.* $A=2, B=3, C=6, D=-35.$ Оскільки $D<0$, то $M>0$. $M=\dfrac{1}{\sqrt{4+9+36}}=\dfrac{1}{7}$.   Дане загальне рівняння матиме нормальну форму $\dfrac{2}{7}x+\dfrac{3}{7}y+\dfrac{6}{7}z-5=0$.
Розміщення площини відносно системи координат
В залежності від значень коефіцієнтів A, B, C і вільного члена D площина може займати різні положення відносно системи координат: 1. $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$ – загальне положення.   2. $D=0,\ Ax+By+Cz=0,\ O(0;0;0)$ належить площині.   3. $A=0,\ By+Cz+D=0,\ \alpha \parallel OX$, $B=0,\ Ax+Cz+D=0,\ \alpha \parallel OY$, $C=0,\ Ax+By+D=0,\ \alpha \parallel OZ$.   4. $A=0, D=0,\ OX\in\alpha$, $B=0, D=0,\ OY\in\alpha$, $C=0,\ D=0,\ OZ\in\alpha$.   5. $A=B=0,\ \alpha \parallel OXY$, $B=C=0,\ \alpha \parallel OYZ$, $A=C=0,\ \alpha \parallel OXZ$.   6. $A=B=D=0,\ \alpha=OXY\ (z=0)$, $B=C=D=0,\ \alpha=OYZ\ (x=0)$, $A=C=D=0,\ \alpha=OXZ\ (y=0)$.

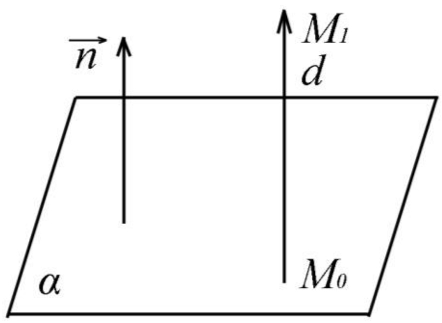
Тема 16. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН

Мета навчання: вивести формулу відстані від точки до площини; розглянути випадки розміщення двох площин та умови, що їх визначають; вивести формулу косинуса кута між двома площинами та з'ясувати умови паралельності та перпендикулярності двох площин; ввести поняття «пучок площин» та розглянути його рівняння; з'ясувати питання взаємного розміщення 3-х площин, ввести поняття «в'язка площин» та розглянути її рівняння.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Відстань від точки до площини.	[2] Р6, §13. [1] Гл VII, §62.
2	Взаємне розміщення двох площин.	[2] Р6, §9. [1] Гл VII, §61.
3	Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.	[2] Р6, §14. [1] Гл VII, §62.
4°	Відстань між паралельними площинами.	[2] Р6, §13, с.216.
5	Пучок площин. Рівняння пучка площин.	[2] Р6, §10.
6	Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин. Рівняння в'язки площин.	[2] Р6, §11. [1] Гл VII, §61.

Математичні поняття та формули:

Означення математичного поняття	**Рисунок**
Нехай у деякій ПСК площина α задана рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, а $M_1(x_1;y_1;z_1)\notin\alpha$. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – основа перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину α. $d=M_0M_1$ – відстань від точки M_1 до площини α. $d=\dfrac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (1)	 **Рис. 16.1**
Взаємне розміщення двох площин	
Нехай відносно деякої АфСК задано дві площини їх загальними рівняннями:	

<table>
<tr><td colspan="3">

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ (\alpha_1)$

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\ (\alpha_2)$

Ці площини матимуть спільні точки тоді і тільки тоді, коли матиме розв'язки відповідна система рівнянь

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Нехай $r_1=rang\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{bmatrix}$ – ранг основної матриці системи (2).

$r_2=rang\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\end{bmatrix}$ – ранг розширеної матриці.

$r_1\le r_2$.

</td></tr>
<tr><td>$r_1=1,\ r_2=2$</td><td>система (2) не має розв'язків</td><td>$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\ne\frac{D_1}{D_2}$
площини паралельні</td></tr>
<tr><td>$r_1=r_2=1$</td><td>система (2) має безліч розв'язків</td><td>$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
площини суміщаються</td></tr>
<tr><td>$r_1=r_2=2$</td><td>система (2) сумісна</td><td>**площини перетинаються**</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Кут між двома площинами

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, утвореними при перетині цих площин третьою площиною, перпендикулярною до прямої перетину даних площин.

Нехай відносно ПСК задано дві площини α_1 і α_2 їх загальними рівняннями

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ (\alpha_1)$

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\ (\alpha_2)$

$\vec{n}_1\,(A_1;B_1;C_1),\ \vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ – нормальні вектори до даних площин.

φ – кут між площинами α_1 і α_2.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

1. $\varphi=\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)$ (кут φ між площинами дорівнює куту між нормальними векторами).

$$\cos\varphi=\cos\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)\right|, \qquad (3.1)$$

оскільки $\cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)>0$.

</td>
<td>

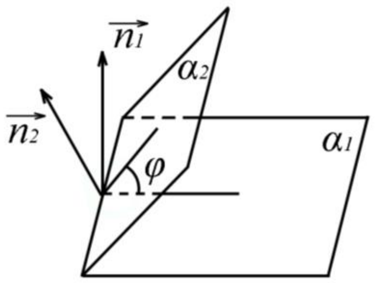


Рис.16.2

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. $\varphi=\pi-\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)$ **(**кут φ є доповняльним до кута між нормальними векторами).

$$\cos\varphi=\cos\left(\pi-\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right)\right)= \qquad (3.2)$$

$$=-\cos\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)\right|$$

</td>
<td>

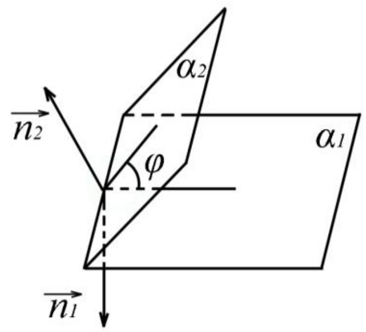


Рис. 16.3

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Косинус кута φ **між площинами** α_1 **і** α_2 обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Якщо площини α_1 **і** α_2 взаємно перпендикулярні, то двогранний кут між ними дорівнює 90°, а $\cos 90^\circ=0$.

Умова перпендикулярності двох площин

$$\alpha_1\perp\alpha_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (5)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Умова паралельності двох площин

$$\alpha_1 \,||\, \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (6)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Якщо відносно ПСК задано дві **паралельні площини** α_1 і α_2 їх загальними рівняннями

$A\,x+B\,y+C\,z+D_1=0,\ (\alpha_1)$

$A\,x+B\,y+C\,z+D_2=0.\ (\alpha_2)$, то **відстань між паралельними площинами**

$$d=\frac{\left|D_2-D_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (7)$$

</td>
</tr>
</table>

Пучком площин називається множина площин, які проходять через спільну пряму. Пряма l, по якій перетинаються площини, називається ***віссю пучка.***

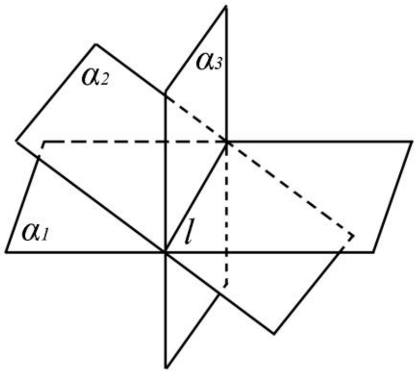


Рис. 16.4

$$\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \qquad (8)$$

рівняння пучка площин

Взаємне розміщення трьох площин

Множина площин, які проходять через єдину спільну точку M, називається ***в'язкою площин,*** а ця спільна їх точка – ***центром в'язки.***

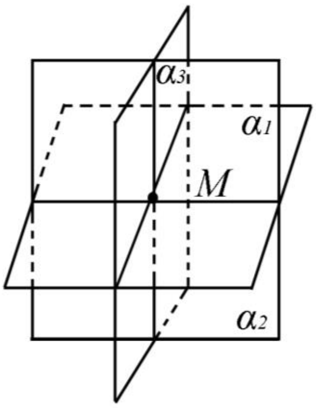


Рис. 16.5

$$\begin{gathered}\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+\\+\nu\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0\end{gathered} \qquad (9)$$

де λ, μ, ν – довільні дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю

Щоб знайти координати точки перетину трьох площин, заданих своїми рівняннями:

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0\end{aligned} \qquad (10)$$

потрібно розв'язати систему рівнянь (10) відносно x, y, z:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{cases} \qquad (10)$$

$$r=rang\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix} \qquad R=rang\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases} \quad (10) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2, \\ A_3x+B_3y+C_3z=-D_3. \end{cases} \quad (11)$$

Визначники системи (11)

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}.$$

Мають місце такі випадки:

№	R	r	Δ	$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$	Число розв'язків системи	Взаємне розміщення площин
1	3	3	$\Delta \neq 0$		єдиний розв'язок $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$	площини перетинаються в одній точці з координатами $(x;\, y;\, z)$ – ***в'язка площин***
2	3	2	$\Delta=0$	$\left[\begin{array}{l} \Delta_x \neq 0, \\ \Delta_y \neq 0, \\ \Delta_z \neq 0. \end{array}\right.$	система розв'язків не має	одна з площин паралельна лінії перетину двох інших
3	2	2	$\Delta=0$	$\Delta_x=\Delta_y= =\Delta_z=0$	система розв'язків не має	всі площини проходять через одну пряму ***(пучок площин)***
4	2	1	$\Delta=0$	$\Delta_x=\Delta_y= =\Delta_z=0$	система розв'язків не має	площини паралельні між собою
5	1	1	$\Delta=0$	$\Delta_x=\Delta_y= =\Delta_z=0$	безліч розв'язків	площини співпадають

Тема 17-18. ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Мета навчання: розглянути різні способи задання прямої та вивести відповідні їм рівняння; розглянути поняття «кут між прямими» та вивести формулу для знаходження косинуса цього кута, визначити умови паралельності та перпендикулярності двох прямих; вивести формули відстані від точки до прямої у просторі, відстані між двома мимобіжними прямими.

Розглянути варіанти взаємного розміщення двох прямих у просторі, прямої і площини та умови що їх визначають; згадати поняття «кут між прямою і площиною», вивести формулу синуса кута між прямою і площиною.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Рівняння прямої в просторі: 1) рівняння прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічні рівняння); 2) рівняння прямої, що проходить через дві дані точки; 3) параметричні рівняння прямої; 4) рівняння прямої, заданої як перетин двох площин.	[2] Р6, §15. [1] Гл VII, §63.
2	Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих.	[2] Р6, §17. [1] Гл VII, §65.
3	Відстань від точки до прямої.	[7] с.32-33.
4	Відстань між двома мимобіжними прямими.	[1] с.195 Задача 7, або [7] с.33-34.
5	Взаємне розміщення двох прямих у просторі.	[2] Р6, §16. [1] Гл VII, §64.
6	Взаємне розміщення прямої і площини.	[2] Р6, §18. [1] Гл VII, §64.
7	Кут між прямою і площиною.	[2] Р6, §19. [1] Гл VII, §65.
8°	Основні задачі на пряму і площину у просторі (практичне заняття).	[2] Р6, §20. [1] Гл VII, §66.

Математичні поняття, рівняння, формули:

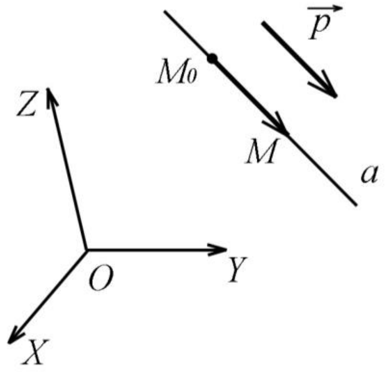
<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Способи задання прямої в просторі та відповідні їм рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай пряма a задана відносно афінної системи координат $OXYZ$:</td></tr>
<tr><td>
1) точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку вона проходить, і напрямним вектором $\vec{p}(l; m; n)$.
Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої a.
$M \in a \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \,||\, \vec{p}$ (колінеарні).
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$ (1) (канонічні рівняння прямої)
</td><td>


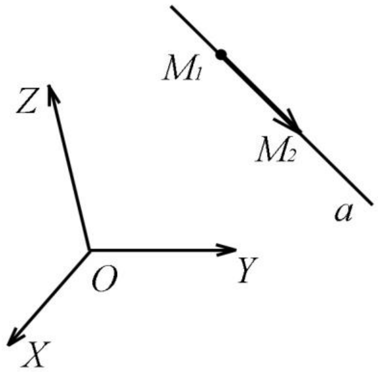
Рис. 17.1
</td></tr>
<tr><td>
2) двома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ через які вона проходить.
Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – її напрямний вектор.
Взявши до уваги, що $M_1 \in a$ і скориставшись рівнянням (1) одержимо рівняння:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$ (2) (рівняння прямої, що проходить через дві дані точки)
</td><td>


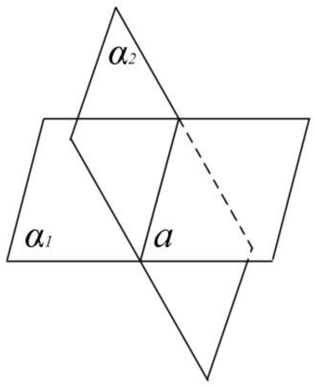
Рис. 17.2
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
3) $$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ (3)
(параметричні рівняння прямої; t – параметр, $t \in R$).
</td></tr>
<tr><td>
4) двома площинами, що перетинаються, які задані своїми рівняннями:
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$ (4)
Тоді пряма їх перетину задається системою рівнянь:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$ (5) (загальне рівняння)
</td><td>


Рис. 17.3
</td></tr>
</table>

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

(6) **(рівняння (5) у канонічній формі)**

Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих

Нехай у просторі дві прямі задані їхніми рівняннями відносно деякої ПСК: $(a_1): \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$, $(a_2): \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$.

Кутом між прямими, які перетинаються, називається менший з кутів, утворених при їх перетині.

- Якщо прямі мимобіжні, то кут між ними дорівнює куту між прямими, що перетинаються і, відповідно, паралельними кожній із даних мимобіжних прямих.
- Кут між паралельними прямими вважається рівним нулю.

1) $\varphi = \left(\overrightarrow{p_1} \widehat{;} \overrightarrow{p_2}\right)$

Тоді $\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{p_1} \widehat{;} \overrightarrow{p_2}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{p_1} \widehat{;} \overrightarrow{p_2}\right)\right|$, бо $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

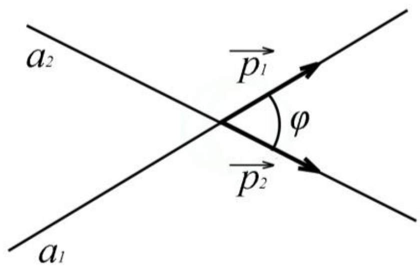


Рис. 17.4

2) Кут φ між прямими є доповняльним до кута між напрямними векторами.

$$\varphi = \pi - \left(\overrightarrow{p_1} \widehat{,} \overrightarrow{p_2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < \left(\overrightarrow{p_1} \widehat{,} \overrightarrow{p_2}\right) < \pi .$$

$$\cos\varphi = \cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{p_1} \widehat{,} \overrightarrow{p_2}\right)\right) = -\cos\left(\overrightarrow{p_1} \widehat{,} \overrightarrow{p_2}\right) =$$

$$= \left|\cos\left(\overrightarrow{p_1} \widehat{,} \overrightarrow{p_2}\right)\right|$$

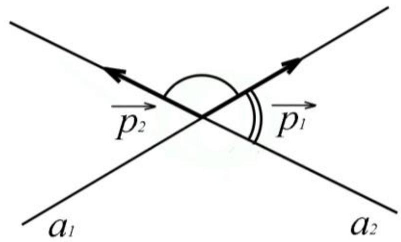


Рис. 17.5

У обох випадках $\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right)\right|$ (7)

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2}\right|}{\left|\overrightarrow{p_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{p_2}\right|}$ або $\cos\varphi = \dfrac{|\, l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 |}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ (8)

Умова паралельності двох прямих: $a_1 \| a_2$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{p_1} \| \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $a_1 \perp a_2$ тоді і тільки тоді, коли $\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Відстань від точки до прямої

Нехай пряма a **(рис. 17.6)** задана канонічним рівнянням $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

Знайдемо відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до цієї прямої:

1) Побудуємо, $\overrightarrow{M_0 M_1}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$.

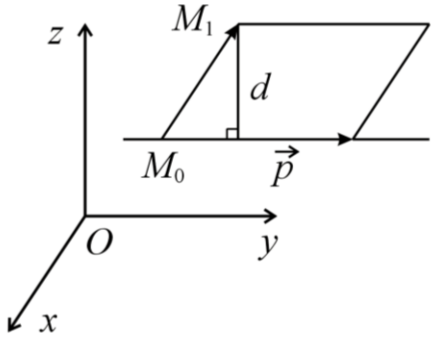


Рис. 17.6

2) На векторах $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\vec{p}$ добудуємо паралелограм.

Площа паралелограма $S = \left|\left[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{p}\right]\right| = |\vec{p}| \cdot d$.

Звідси маємо $d = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{p}\right]\right|}{|\vec{p}|}$.

Отже,

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (9)$$

Відстань між двома мимобіжними прямими

Якщо прямі a_1 і a_2 мимобіжні, то вони мають різні напрямні вектори $\overrightarrow{p_1}(l_1; m_1; n_1)$ і $\overrightarrow{p_2}(l_2; m_2; n_2)$ **(рис. 17.7)**.

Для знаходження відстані між цими прямими виконаємо наступне:

1) Перенесемо $\overrightarrow{p_2}$ так, щоб його початок виходив з M_1.

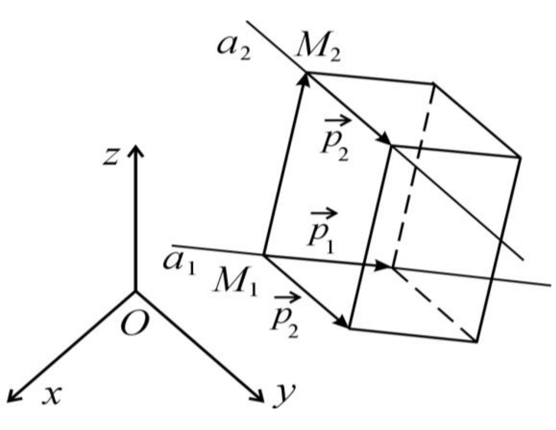


Рис. 17.7

2) На векторах $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ добудуємо паралелограм.

3) Проведемо вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ і добудуємо паралелепіпед.

Об’єм паралелепіпеда $V = SH = \left|\left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right)\right|$`.

Площу основи паралелепіпеда визначимо, використовуючи геометричну властивість векторного добутку векторів $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$.

$$S_{осн} = \left|\left[\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Відстань між мимобіжними прямими a_1 і a_2 дорівнює довжині H перпендикуляра, який є висотою паралелепіпеда.

$$H = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right]\right|} = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (10)$$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай у просторі дві прямі a_1 і a_2 задані відносно АфСК їхніми канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad (a_1), \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad (a_2)$$

1) Прямі a_1 і a_2 будуть ***перетинатися*** тоді і тільки тоді, коли їхні напрямні вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ ***неколінеарні*** (**не виконується** умова $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$), а вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ ***компланарні*** (виконується умова

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)).$$

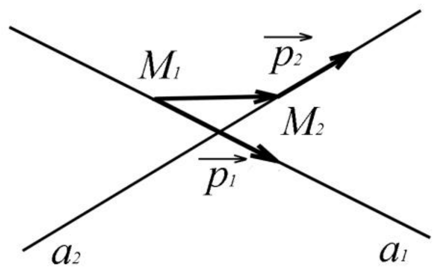


Рис. 17.8

2) Прямі a_1 і a_2 ***збігатимуться*** тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ будуть колінеарними, а точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямої a_1 належатиме прямій a_2, тобто коли виконуватимуться умови:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (12) \text{ та}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} = \frac{z_1 - z_2}{n_2} \qquad (13).$$

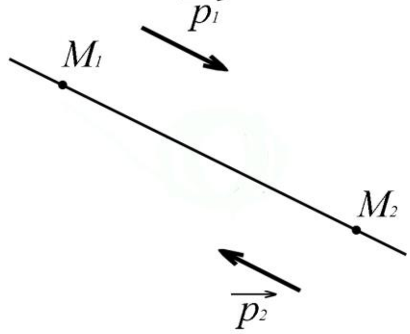


Рис. 17.9

3) Прямі a_1 і a_2 будуть ***паралельними*** тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ будуть колінеарними, а точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямої a_1 не належатиме прямій a_2, тобто коли виконуватиметься умова (12), але не виконуватиметься умова (13).

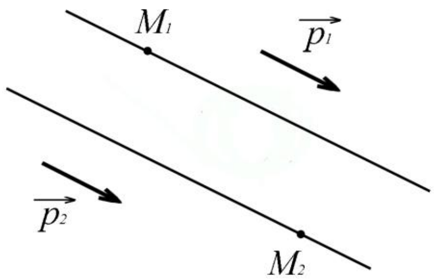


Рис. 17.10

4) Прямі a_1 і a_2 мимобіжні, якщо вони не лежать в одній площині (це буде за умови, що

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (14)).$$

Взаємне розміщення прямої і площини

Нехай у деякій АфСК площина α задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, а пряма a канонічним рівнянням $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

1) Пряма a ***перетинає*** площину α тоді і тільки тоді, коли напрямний вектор прямої $\vec{p}(l; m; n)$ не буде паралельним до цієї площини, тобто за умови:

$$Al + Bm + Cn \neq 0 \qquad (15)$$

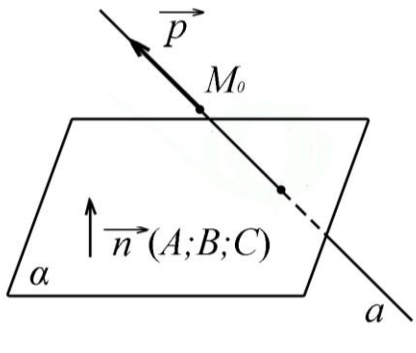


Рис. 17.11

2) Пряма $a \,||\,$ площині $\alpha \Leftrightarrow \vec{p} \,||\,$ площині α, а точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in a$ не належить площині α, тобто коли виконані умови:

$$\begin{cases} A\,l + B\,m + C\,n = 0, \\ A\,x_0 + B\,y_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases} \qquad (16)$$

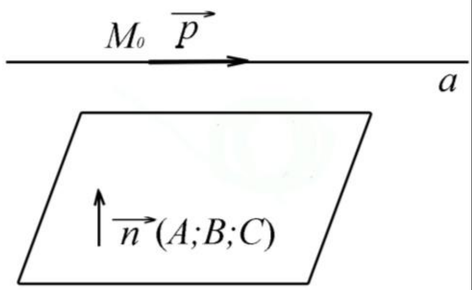


Рис. 17.12

3) Пряма a ***належить*** площині $\alpha \Leftrightarrow \vec{p} \,||$ площині α, а точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in a$ належить площині α, тобто коли виконані умови:

$$\begin{cases} A\,l + B\,m + C\,n = 0, \\ A\,x_0 + B\,y_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

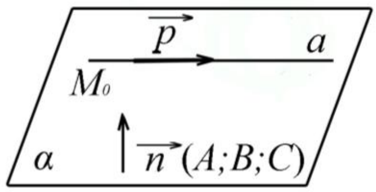


Рис. 17.13

Кут між прямою і площиною

Нехай відносно ПСК площина α задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, а пряма a канонічним рівнянням $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

Тоді нормальним вектором площини α буде вектор $\vec{n}(A; B; C)$, напрямленим вектором прямої a – вектор $\vec{p}(l; m; n)$.

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою і її проекцією на цю площину.

1) $\varphi + (\widehat{\vec{n}; \vec{p}}) = \dfrac{\pi}{2}$, звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{n}, \vec{p}})$.

Тоді $\sin\varphi = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{n}, \vec{p}})\right) = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{p}}) =$

$= \left|\cos\left((\widehat{\vec{n}, \vec{p}})\right)\right|$, оскільки кут $(\widehat{\vec{n}, \vec{p}})$ гострий.

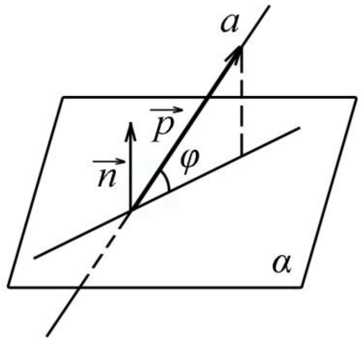


Рис. 17.14

2) $\varphi + \dfrac{\pi}{2} = (\widehat{\vec{n}, \vec{p}})$, звідки $\varphi = (\widehat{\vec{n}, \vec{p}}) - \dfrac{\pi}{2}$.

$\sin\varphi = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{n}, \vec{p}})\right) = -\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{p}}) =$

$= \left|\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{p}})\right|$, оскільки кут $(\widehat{\vec{n}, \vec{p}})$ – тупий.

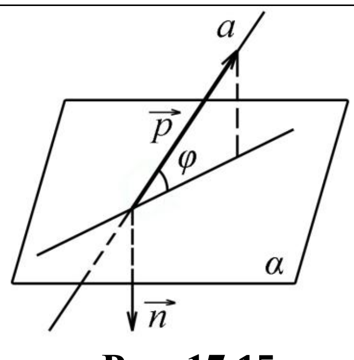


Рис. 17.15

В обох випадках $\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{p}})\right| = \dfrac{|\vec{n}\,\vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$ або

$$\sin\varphi = \frac{|\,Al + Bm + Cn\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (18)$$

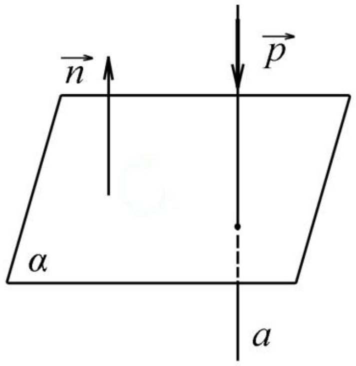
<table>
<tr><th colspan="2">Умова перпендикулярності прямої і площини</th></tr>
<tr><td>Пряма a перпендикулярна до площини α тоді і тільки тоді коли вектори $\vec{n}(A;B;C)$ і $\vec{p}(l;m;n)$ колінеарні, тобто
$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}=k \qquad (19),$$
де k – коефіцієнт пропорційності.</td>
<td>

Рис. 17.16</td></tr>
</table>

Змістовий модуль 6.
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Тема 19-20. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ. КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета навчання: ввести поняття поверхні другого порядку, розглянути типи поверхонь другого порядку: сферу, циліндричні поверхні, конічні поверхні (означення, рівняння, приклади).

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Загальне рівняння поверхні другого порядку.	[2] Р7, §1 с. 237-238, [1] Гл IX, §74.
2	Означення та рівняння сфери, властивості сфери.	
3	Означення і рівняння циліндричної поверхні.	[2] Р7, §4 с. 242-243 [1] Гл IX, §76.
4	Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей.	[2] Р7, §4 с. 243-244, [1] Гл IX, §76.
5	Означення та рівняння канонічної поверхні.	[2] Р7, §5 с. 245-248, [1] Гл IX, §77.
6	Конуси другого порядку з вершиною у початку координат.	[2] Р7, §5 с. 246-247, [1] Гл IX, §77.
7	Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння.	

Математичні поняття, рівняння:

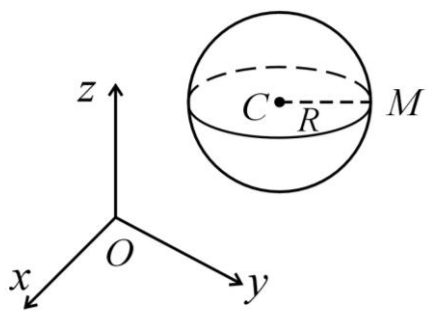
<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Загальне рівняння поверхні другого порядку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Поверхнею другого порядку називається поверхня, яка в деякій афінній системі координат задається рівнянням
$$F\left(x;\,y;\,z\right)=0, \qquad (1)$$
де $F\left(x;\,y;\,z\right)$ – многочлен другого степеня.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Загальне рівняння поверхні другого порядку записується у вигляді:
$$\begin{gathered}a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+\\ +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\end{gathered}, \qquad (2)$$
де $a_{11}, a_{22,\dots,}a_{44}$ – деякі дійсні числа, і $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$ (тобто всі коефіцієнти при членах другого степеня одночасно не дорівнюють нулю). При цьому вважають, що $a_{i\,j}=a_{j\,i}=\overline{1,4}$.</td></tr>
<tr><td>Сферою називається множина точок простору віддалених від даної точки простору (центру сфери) на одну й ту ж відстань (радіус сфери).</td><td>

Рис. 19.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2,$ (3) канонічне рівняння сфери
де $C\left(x_0;\,y_0;z_0\right)$ – центр сфери, $M\left(x;\,y;\,z\right)$ – довільна точка на сфері, $CM=R$ – радіус сфери</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (4)$$
рівняння сфери, центр якої $C\left(0;0;0\right)$ знаходиться у початку координат.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz+p=0,$ (5) загальне рівняння сфери
де $x_0=-\dfrac{l}{2},\,y_0=-\dfrac{m}{2},\,z_0=-\dfrac{n}{2},\quad R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-p$ (6)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рух – перетворення простору на себе, при якому виконуються дві умови: 1) зберігається відстань між точками $AB=A^{'}B^{'}$; 2) зберігається орієнтація просторових фігур.</td></tr>
</table>

Циліндричні поверхні

Поверхня, утворена внаслідок руху прямої, яка перетинає задану криву і залишається паралельною даній прямій, називається ***циліндричною поверхнею.***

Прямі, які повністю лежать на цій поверхні і паралельні заданій прямій, називаються ***твірними*** циліндричної поверхні, а крива L, яку перетинають ці твірні, називається ***напрямною*** цієї поверхні.

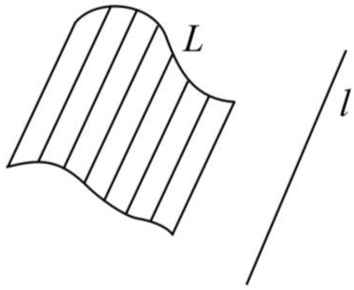


Рис. 19.2

Отже, циліндрична поверхня повністю визначається заданням ***твірної*** і ***напрямної*** ліній.

Якщо напрямною лінією є лінія другого порядку, то циліндрична поверхня називається ***циліндром 2-го порядку.***

Правило-орієнтир складання рівняння циліндричної поверхні

Щоб скласти **рівняння циліндричної поверхні,** заданої *напрямною,* яка є лінією перетину двох поверхонь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

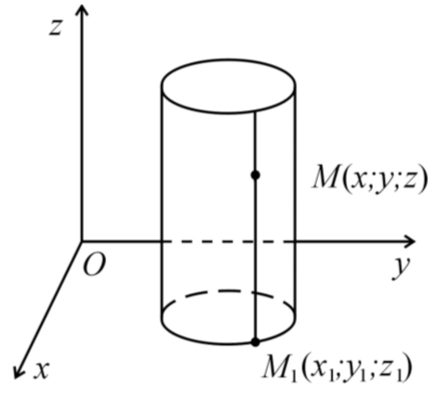
і *твірною*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \qquad (8)$$

треба взяти на напрямній лінії точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, координати якої задовольняють (7) і (8), та вилучити з одержаних рівностей x_1, y_1, z_1.

Тобто, треба розв'язати систему (9) 4-х рівнянь з 3-ма невідомими

$$\begin{cases} F_1(x_1; y_1; z_1) = 0, \\ F_2(x_1; y_1; z_1) = 0, \\ \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} \end{cases} \qquad (9)$$

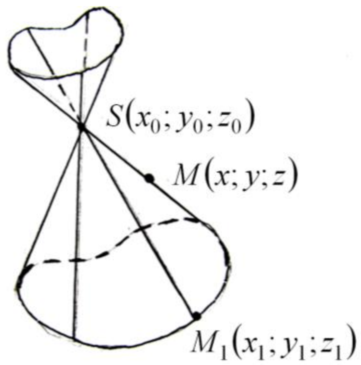
Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей	
Розглянемо циліндр, твірна якого паралельна вісі OZ **(рис. 19.3).** Напрямну цього циліндра можна розглядати як таку, що лежить на площині OXY. Тоді рівняння *напрямної* L: $\begin{cases} f\,(x;\,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ $\vec{u}\,(0;\,0;\,z)$ – напрямний вектор *твірної.* $M\,(x;\,y;\,z)$ – біжуча точка твірної, $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ – точка твірної, $M_1 \in L$.	 **Рис. 19.3**

Абсциси і ординати цих точок однакові $x = x_1$, $y = y_1$.

Координати точки $M_1(x_1;\,y_1;\,0)$ задовольняють рівняння напрямної L:

$\begin{cases} f\,(x_1;\,y_1)=0, \\ z_1=0 \end{cases} \Rightarrow$ оскільки $x = x_1$, $y = y_1$, маємо $f\,(x;\,y)=0$ – **рівняння циліндра.**

Висновок. Рівнянням циліндра, твірна якого паралельна одній з координатних осей, є рівняння з двома змінними, відмінними від третьої змінної, одноименної з віссю, якій паралельна твірна циліндра.

Конічні поверхні	
Конічною поверхнею називається поверхня утворена рухом прямої, яка проходить через одну і ту ж фіксовану точку S і перетинає якусь лінію **(рис. 19.4).** S називають ***вершиною конуса,*** ***твірною*** – пряму, що проходить через вершину, ***напрямною*** – лінію, яку перетинає твірна.	 **Рис. 19.4**

Отже, конічна поверхня повністю визначається заданням вершини і напрямної лінії.

Напрямну лінію можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь

$$\begin{cases} F_1(x,\,y,\,z)=0, \\ F_2(x,\,y,\,z)=0 \end{cases} \qquad (10)$$

Твірна, яка проходить через точки $S\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ і $M_1(x_1;y_1;z_1)$ має рівняння

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \qquad (11)$$

Правило-орієнтир складання рівняння конічної поверхні
Щоб скласти рівняння конічної поверхні, треба вибрати на напрямній точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить і твірній і з 4-х рівнянь системи (12) вилучити x_1, y_1, z_1. $$\begin{cases} F_1(x_1; y_1; z_1) = 0, \\ F_2(x_1; y_1; z_1) = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0} \end{cases} \qquad (12)$$

Матеріал до окремих питань теми

2. Поряд із площиною – поверхнею 1-го порядку, до найпоширеніших поверхонь відносять ***сферу – поверхню 2-го порядку*** **(Рис. 19.1).**

Положення сфери у просторі відносно даної системи координат повністю визначається заданням координат її центра і заданням довжини радіуса.

Нехай $C(x_0; y_0; z_0)$ – центр сфери, $M(x; y; z)$ – довільна точка на сфері, $CM = R$.

Тоді за означенням сфери матимемо: $CM^2 = R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$.

Отже,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \qquad (3)$$

канонічне рівняння сфери.

Якщо C співпадає з початком координат, то рівняння сфери має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4)$$

Перетворимо рівняння (3)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

Введемо позначення $-2x_0 = l, -2y_0 = m, -2z_0 = n$, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = p$.

Тоді матимемо:

$x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz + p = 0$ (5) ***загальне рівняння сфери.***

<u>Особливості загального рівняння сфери</u>: 1) поверхня другого порядку; 2) біля x^2, y^2, z^2 однакові коефіцієнти; 3) відсутні доданки з добутками координат.

Якщо сфера задана загальним рівнянням (5), то для її побудови треба знати координати центра і радіус. Для цього рівняння (5) слід звести до виду (1).

Способи зведення: 1) за допомогою доповнення до квадрату суми або різниці; 2) використовуючи введені позначення:

$$x_0 = -\frac{l}{2},\ y_0 = -\frac{m}{2},\ z_0 = -\frac{n}{2},\quad R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p \tag{6}$$

Властивості сфери

1) Через кожну точку сферичної поверхні можна провести до неї одну і тільки одну дотичну площину.

2) Радіус, проведений в точку дотику дотичної площини перпендикулярний до дотичної площини. Тому всі радіуси сфери є нормалями.

3) Всі точки сфери розміщені по один бік від дотичної площини.

4) Всі перерізи сфери площиною, відстань якої від центра сфери менша радіуса, є кола.

3. В залежності від ліній 2-го порядку маємо три типи циліндрів 2-го порядку: *еліптичний, гіперболічний, параболічний.*

Круговий циліндр є окремим випадком еліптичного типу.

Задача 1. Скласти рівняння циліндричної поверхні заданої напрямною $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ z = 1 \end{cases}$ твірна якої паралельна вектору $\overrightarrow{p}(4; 3; -2)$.

Розв'язання.

1) Візьмемо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить як напрямній так і твірній лінії. Її координати задовольняють рівняння цих ліній.

Отже, матимемо систему $\begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} + \frac{z_1^2}{4} = 1, \\ z_1 = 1, \\ \frac{x - x_1}{4} = \frac{y - y_1}{3} = \frac{z - z_1}{-2} \end{cases}$.

2) Вилучимо з одержаних рівностей x_1, y_1:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}, \\ \dfrac{y-y_1}{3}=\dfrac{z-1}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x+2\left(z-1\right), \\ y_1=\dfrac{2y+3\left(z-1\right)}{2}. \end{cases}$$

3) Підставимо одержані значення $x_1, y_1, z_1 = 1$ у перше рівняння системи:

$$\frac{\left(x+2\left(z-1\right)\right)^2}{16}+\frac{\left(2y+3\left(z-1\right)\right)^2}{36}+\frac{1}{4}=1.$$

Звідки матимемо ***рівняння циліндричної поверхні***

$$\frac{\left(x+2\left(z-1\right)\right)^2}{16}+\frac{\left(2y+3\left(z-1\right)\right)^2}{36}=\frac{3}{4}.$$

4. Рівняння циліндра другого порядку значно спрощується, якщо його твірна паралельна одній з координатних осей.

Задача 2. Скласти рівняння еліптичного циліндра, твірна якого паралельна вісі OZ , а напрямною є еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$.

Розв'язання.

1) Візьмемо точку $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, яка належить напрямній лінії. Її координати задовольняють рівняння напрямної.

Оскільки твірна паралельна OZ, то вона має рівняння $\dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{0}=\dfrac{z-z_1}{1}$.

Отже, матимемо систему $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=0, \\ \dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{0}=\dfrac{z-z_1}{1} \end{cases}$.

2) Вилучимо з одержаних рівностей $x_1,\ y_1$: $\begin{cases} z_1=0, \\ x_1=x, \\ y_1=y \end{cases}$

3) Підставимо одержані значення $x_1, y_1, z_1 = 0$ у перше рівняння системи: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – ***рівняння еліптичного циліндра*** **(Рис. 19.5).**

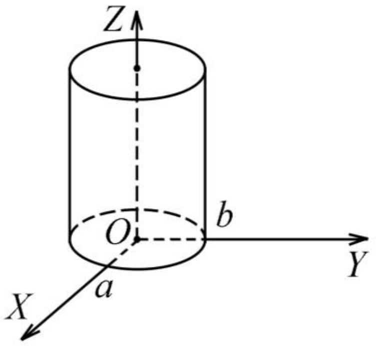


Рис. 19.5

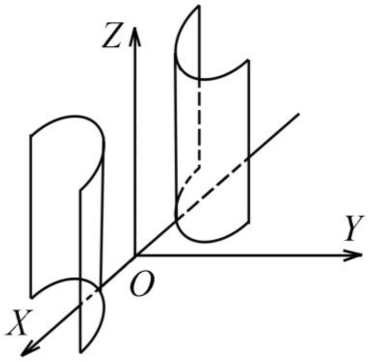


Рис. 19.6

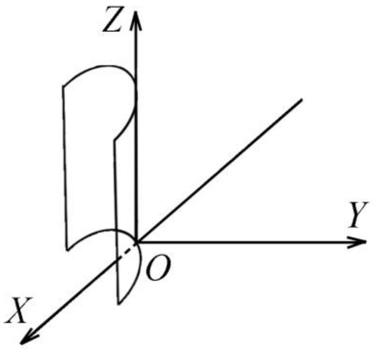


Рис. 19.7

За аналогією дістають ***рівняння гіперболічного циліндра*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **(Рис. 19.6)** та ***параболічного циліндра*** $y^2=2px$ **(Рис. 19.7).**

5. Задача 3. Складіть рівняння конічної поверхні напрямною якої служить лінія $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ z=1 \end{cases}$, а вершиною є точка $S\,(0;0;4)$.

Розв'язання.

1) Візьмемо точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, яка належить як напрямній так і твірній лінії. Її координати задовольняють рівняння цих ліній.

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=16, \\ z_1=1, \\ \dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z-4}{1-4}. \end{cases}$$

2) Вилучимо з одержаних рівностей x_1, y_1:

$$\begin{cases} z_1=1, \\ \dfrac{x}{x_1}=\dfrac{z-4}{-3}, \\ \dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z-4}{-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=1, \\ x_1=\dfrac{-3x}{z-4}, \\ y_1=\dfrac{-3y}{z-4}. \end{cases}$$

3) Підставимо одержані значення x_1, y_1, $z_1=1$ у перше рівняння системи:

$\frac{9x^2}{(z-4)^2}+\frac{9y^2}{(z-4)^2}+1=16 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{(z-4)^2}+\frac{9y^2}{(z-4)^2}-15=0$ – ***рівняння конічної поверхні.***

6. Конуси другого порядку з вершиною у початку координат

Теорема. Однорідне рівняння 2-го степеня з трьома змінними, якщо воно виражає поверхню 2-го порядку і його ліва частина не розкладається на множники, є рівнянням конуса з вершиною у початку координат.

Доведення **(необхідність).**

Нехай однорідне рівняння 2-го степеня з 3-ма змінними

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \tag{13}$$

задовольняє умову теореми, тобто воно виражає дійсну поверхню і його ліва частина не розкладається на множники.

Треба довести, що рівняння (13) буде рівнянням конуса з вершиною у початку координат.

Зрозуміло, що точка $S\,(0;0;0)$ належить поверхні. Візьмемо на поверхні точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ її координати задовольняють рівняння (13), тобто $A\,x_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + Dx_1y_1 + Ex_1z_1 + Fy_1z_1 = 0$.

Складемо рівняння прямої SM_1:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}. \tag{14}$$

Нехай $M\,(x;y;z)$ – довільна точка прямої SM_1. Якщо прирівняти (14) до t, то одержимо $\begin{cases} x = x_1 t, \\ y = y_1 t, \\ z = z_1 t. \end{cases}$

Покажемо, що точка M (довільна точка прямої) належить поверхні. Це означатиме, що і вся пряма SM_1 належить поверхні

$(A\,x_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + Dx_1y_1 + Ex_1z_1 + Fy_1z_1)\,t^2 = 0 \cdot t^2 = 0$. Звідси зрозуміло, що $M\,(x;y;z)$ належить поверхні (13).

Отже, всі точки прямої SM_1 належать поверхні (13). Тобто поверхня (13) утворена рухом прямої SM_1, яка весь час проходить через точку $S\,(0;0;0)$ – початок координат, і є конус.

7. У залежності від напрямної лінії існує три типи конусів другого порядку: *еліптичний, гіперболічний, параболічний.*

Складемо рівняння конусів цих типів.

Задача 4. Складіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться у початку координат, а напрямною є еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c. \end{cases}$

1) Візьмемо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить як напрямній так і твірній лінії. Її координати задовольняють рівняння цих ліній.

Рівнянням твірної OM_1 є рівняння $\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}$.

Отже, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ z_1=c, \\ \dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}. \end{cases}$

2) Вилучимо з одержаних рівностей x_1, y_1:

$$\begin{cases} z_1=c, \\ \dfrac{x}{x_1}=\dfrac{z}{c}, \\ \dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=c, \\ x_1=\dfrac{cx}{z}, \\ y_1=\dfrac{cy}{z}. \end{cases}$$

3) Підставимо одержані значення x_1, y_1 у перше рівняння системи:

$\dfrac{c^2x^2}{a^2z^2}+\dfrac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{c^2}{z^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – ***рівняння еліптичного конуса*** **(рис. 19.8).**

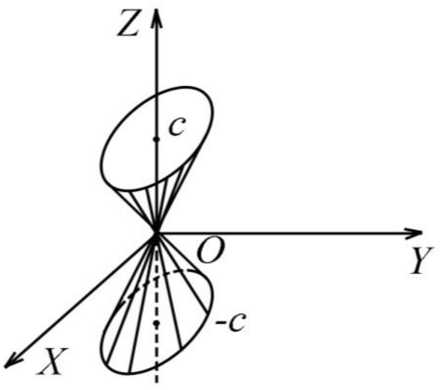


Рис. 19.8.

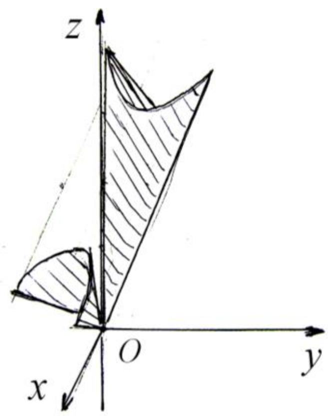


Рис. 19.9.

Задача 5. Складіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться у початку координат, а напрямною є гіпербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{cases}$

Відповідь. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – ***рівняння гіперболічного конуса*** **(рис.19.9).**

Задача 6. Складіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться у початку координат, а напрямною є парабола $\begin{cases} y^2 = -2px, \\ z = c. \end{cases}$

1) Візьмемо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить як напрямній так і твірній лінії. Її координати задовольняють рівняння цих ліній.

Рівнянням твірної OM_1 є рівняння $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1}$.

Отже, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} y_1^2 = -2px_1, \\ z_1 = c, \\ \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1}. \end{cases}$

2) Вилучимо з одержаних рівностей x_1, y_1: $\begin{cases} z_1 = c, \\ \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{z}{c}, \\ \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = c, \\ x_1 = \dfrac{cx}{z}, \\ y_1 = \dfrac{cy}{z}. \end{cases}$

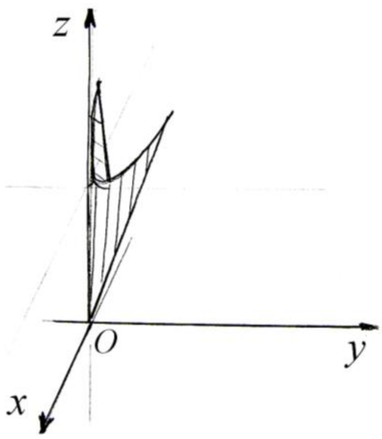


Рис. 19.10

3) Підставимо одержані значення x_1, y_1 у перше рівняння системи:

$\dfrac{c^2 y^2}{z^2} = \dfrac{-2pcx}{z} \Leftrightarrow cy^2 = -2pxz$ – ***рівняння параболічного конуса*** **(рис. 19.10).**

Тема 21-22. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ЕЛІПСОЇД ОБЕРТАННЯ. ОДНОПОРОЖНИННИЙ І ДВОПОРОЖНИННИЙ ГІПЕРБОЛОЇДИ

Мета навчання: ввести поняття поверхні обертання, розглянути правило складання рівняння поверхні обертання, типи поверхонь обертання, застосувати метод перерізів для побудови еліпсоїда обертання, однопорожнинного та двопорожнинного гіперболоїдів обертання.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття *поверхні обертання* та її рівняння.	[2] Р7, §3 с. 240-242, [1] Гл IX, §75.
2°	Означення та рівняння *тривісного еліпсоїда* та *еліпсоїда обертання.* Властивості *еліпсоїда.*	[2] Р7, §6 с. 249-251, [1] Гл IX, §78.
3	Визначення форми та вивчення геометричних властивостей *еліпсоїда обертання*.	[2] Р7, §6 с. 249-251, [1] Гл IX, §78.
4°	Означення та рівняння *однопорожнинного гіперболоїда.* Властивості *однопорожнинного гіперболоїда.* Означення та рівняння *однопорожнинного гіперболоїда обертання.* Застосування методу перерізів для побудови поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання.	[2] Р7, §7 с. 251-254, [1] Гл IX, §79.
5°	Означення та рівняння *двопорожнинного гіперболоїда* та *двопорожнинного гіперболоїда обертання*. Властивості *двопорожнинного гіперболоїда.* Застосування методу перерізів для побудови поверхні двопорожнинного гіперболоїда обертання.	[2] Р7, §8 с. 255-257, [1] Гл IX, §79.

Математичні поняття, рівняння:

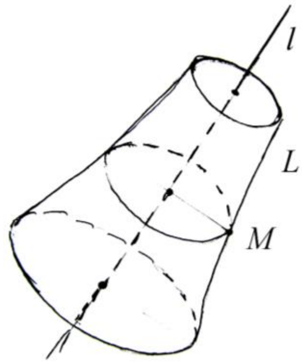
<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Рисунок</th></tr>
<tr><td>Нехай у деякій площині лежить пряма l і крива L. Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання кривої L навколо прямої l, називається поверхнею обертання (рис. 21.1)
При цьому пряма l називається віссю обертання, а крива L – твірною або меридіаном поверхні обертання.</td><td>

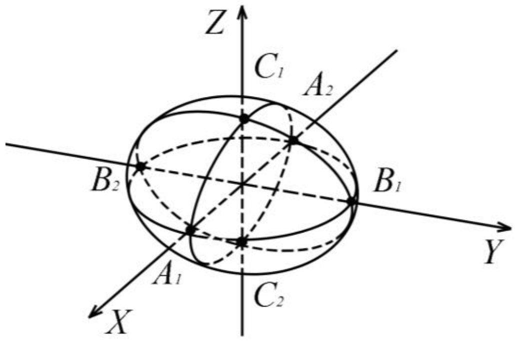
Рис. 21.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кожна точка M кривої L при цьому обертається по колу, площина якого перпендикулярна до осі l, а центр знаходиться на осі l.
Це коло називається паралеллю поверхні обертання.
<u>Простішими поверхнями обертання</u> є сфера, циліндричні поверхні, конуси.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Правило складання рівняння поверхні обертання</th></tr>
<tr><td colspan="2">Щоб одержати рівняння поверхні обертання треба у рівнянні твірної лінії залишити без змін змінну однойменну з віссю, навколо якої проводимо обертання, а замість другої змінної взяти корінь квадратний із суми квадратів двох інших змінних.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Тривісний еліпсоїд. Еліпсоїд обертання.</th></tr>
<tr><td>Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$
канонічне рівняння еліпсоїда.
Величини a, b, c називаються півосями еліпсоїда. Якщо всі вони різні, еліпсоїд називається тривісним (трьохосьовим).</td><td>

Рис. 21.3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Еліпсоїдом обертання називається поверхня утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей.
Нехай еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ обертається навколо вісі OZ.</td></tr>
</table>

Тоді за попереднім правилом рівняння еліпсоїда обертання має вигляд

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

Якщо еліпсоїд утворений обертанням еліпса навколо його великої осі, він називається ***витягнутим*** *еліпсоїдом обертання* **(рис.21.3).**

Еліпсоїд обертання, утворений обертанням еліпса навколо малої вісі, називається ***стиснутим*** *еліпсоїдом обертання*. **(рис.21.4).**

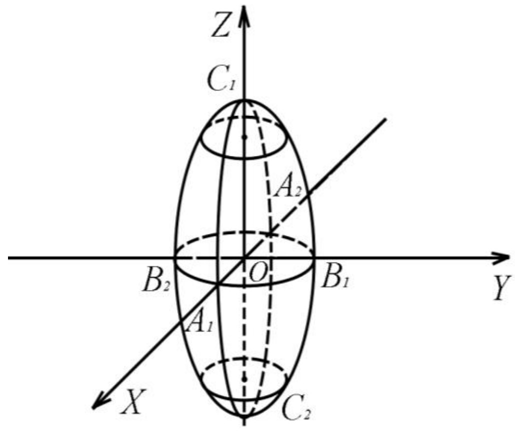


Рис. 21.4

Точки $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$, $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$ є вершинами еліпсоїда. В даному випадку для еліпсоїда обертання $a=b,-a=-b$.

Однопорожнинний гіперболоїд.
Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

Це рівняння називається ***канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.***

Однопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня утворена обертанням гіперболи навколо уявної вісі.

Нехай гіпербола $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}$ обертається навколо вісі OZ.

За раніше одержаним правилом рівняння поверхні обертання буде

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5)$$

рівняння *однопорожнинного гіперболоїда обертання.*

При обертанні кожна точка гіперболи опише коло з центром на вісі OZ.

Координатні площини є площинами симетрії даної поверхні, координатні вісі є осями симетрії, а точка їх перетину $O(0;\,0;\,0)$ – центром одно порожнинного гіперболоїда обертання.

$A_1(a;\,0;\,0)$, $A_2(-a;\,0;\,0)$
$B_1(0;\,b;\,0)$, $B_2(0;\,-b;\,0)$ – **вершини *однопорожнинного гіперболоїда* (4).**

Для ***однопорожнинного гіперболоїда обертання*** (5) $a = b$.

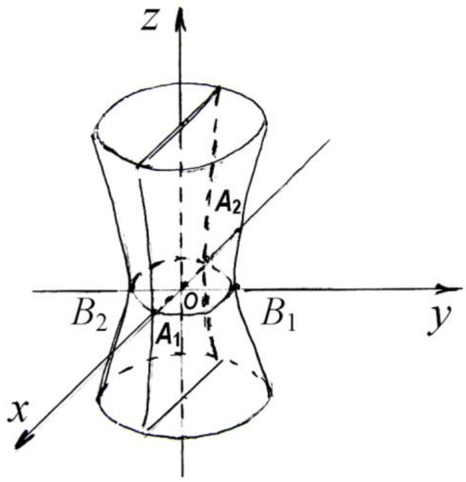


Рис. 21.5

Двопорожнинний гіперболоїд та двопорожнинний гіперболоїд обертання

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (6)$$

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її дійсної вісі.

Нехай гіпербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases}$

обертається навколо дійсної вісі OZ.

За раніше одержаним правилом рівняння поверхні обертання буде

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (7)$$

рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання.

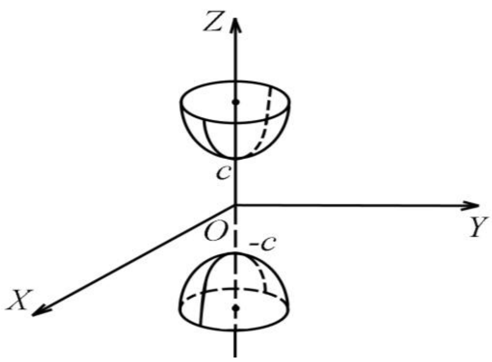


Рис. 21.6

При обертанні кожна точка гіперболи опише коло з центром на вісі OZ.

Координатні площини є площинами симетрії даної поверхні, а точка $O(0;\,0;\,0)$ – центром двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Поверхня має дві вершини – точки перетину з віссю OZ.

Матеріал до питань теми

1. <u>Складання рівняння поверхні обертання в загальному вигляді</u>

Щоб скласти рівняння поверхні обертання в загальному вигляді віднесемо до просторової декартової системи координат $OXYZ$ лінію L **(рис. 21.2)** задану рівнянням $\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Знайдемо рівняння поверхні, яка одержується при обертанні цієї лінії навколо вісі OY. На одному з положень лінії обертання візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$.

Точка M опише коло з центром у точці $N(0; y; 0)$. Радіус цього кола $MN = NM_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Маємо $\begin{cases} MN = NM_1 = \sqrt{x^2 + z^2}, \\ NM_1 = z_1. \end{cases}$ Звідси $z_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Оскільки точка $M_1(0; y_1; z_1)$, де $y_1 = y, z_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$ належить поверхні, то її координати задовольняють рівняння твірної лінії L.

Отже, маємо:

$$F\left(y; \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

рівняння поверхні, утвореної внаслідок обертання лінії L навколо вісі OY.

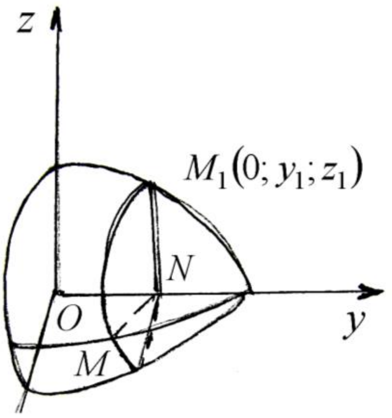


Рис. 21.2

Правило: щоб одержати рівняння поверхні обертання треба у рівнянні твірної лінії залишити **без змін змінну однойменну з віссю**, навколо якої проводимо обертання, а замість **другої змінної взяти корінь квадратний із суми квадратів двох інших змінних**.

Існує 4 типи поверхонь обертання 2-го порядку: *еліпсоїд обертання, однопорожнинний гіперболоїд обертання, двопорожнинний гіперболоїд обертання, параболоїд обертання.*

2. <u>Властивості еліпсоїда</u> [2] P7, §6 с. 249-250.

3. Визначення форми та вивчення геометричних властивостей еліпсоїда обертання

Форму еліпсоїда обертання як і інших поверхонь обертання досліджують за допомогою перерізів поверхні координатними площинами і площинами їм паралельними.

3.1. Розглянемо перерізи даного еліпсоїда обертання площиною OXZ та площинами їй паралельними.

Якщо $y = 0$ (**площина** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ є еліпсом з півосями a і c.

Якщо $y = m$ (**площина паралельна площині** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{x^2 + m^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{m^2}{a^2}$ є *еліпс*.

$$\frac{x^2}{a^2 - m^2} + \frac{z^2}{c^2 - \left(\frac{mc}{a}\right)^2} = 1, \text{ якщо } 1 - \frac{m^2}{a^2} > 0 \Leftrightarrow |m| < |a|.$$

3.2. Розглянемо перерізи даного еліпсоїда обертання площиною OYZ та площинами їй паралельними.

Якщо $x = 0$ (**площина** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ є еліпсом з півосями a і c.

Якщо $x = m$ (**площина паралельна площині** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{m^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ або $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{m^2}{a^2}$ є *еліпс*.

$$\frac{y^2}{a^2 - m^2} + \frac{z^2}{c^2 - \left(\frac{mc}{a}\right)^2} = 1, \text{ якщо } 1 - \frac{m^2}{a^2} > 0 \Leftrightarrow |m| < |a|.$$

3.3. Розглянемо перерізи даного еліпсоїда обертання площиною OXY та площинами їй паралельними.

Якщо $z = 0$ (**площина** OXY), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$ є *коло* радіуса a.

Якщо $z = m$ (**площина паралельна площині** OXY), то лінія яка одержується в перерізі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{m^2}{c^2}$, якщо $1 - \frac{m^2}{c^2} > 0 \Leftrightarrow |m| < |c|$ є *коло* $x^2 + y^2 = a^2 - \left(\frac{am}{c}\right)^2$.

Див. у таблиці (рис.21.4).

4. Властивості однопорожнинного гіперболоїда [2] Р7, §7 с. 251-252.

Властивості поверхні можна дослідити шляхом перерізу поверхні координатними площинами і площинами їм паралельними.

4.1. Розглянемо перерізи даного однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OYZ та площинами їй паралельними.

Якщо $x = 0$ (**площина** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ є *гіпербола* з дійсною віссю OY .

Якщо $x = h$ (**площина паралельна площині** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$.

Якщо $|h| < a$, то $1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$ і одержана в перерізі лінія є *гіпербола* з дійсною віссю OY .

Якщо $|h| > a$, то $1 - \frac{h^2}{a^2} < 0$ і одержана в перерізі лінія є *гіпербола* з дійсною віссю OZ .

Якщо $|h| = a$, то $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – пара прямих, що перетинаються в точці $O(0; 0; 0)$.

4.2. Розглянемо перерізи даного однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OXZ та площинами їй паралельними.

Якщо $y=0$ (**площина** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ є *гіпербола* з дійсною віссю OX.

Якщо $y=h$ (**площина паралельна площині** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{x^2+h^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ або $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}$.

Якщо $|h|<a$, то $1-\dfrac{h^2}{a^2}>0$ і одержана в перерізі лінія є *гіпербола* з дійсною віссю OX.

Якщо $|h|>a$, то $1-\dfrac{h^2}{a^2}<0$ і одержана в перерізі лінія є *гіпербола* з дійсною віссю OZ.

Якщо $|h|=a$, то $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – пара прямих, що перетинаються в точці $O(0;0;0)$.

4.3. Розглянемо перерізи даного однопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OXY та площинами їй паралельними.

Якщо $z=0$ (**площина** OXY), то лінія яка одержується в перерізі $x^2+y^2=a^2$ – коло.

Якщо $z=h$ (**площина паралельна площині** OXY), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2} \Rightarrow x^2+y^2=a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)>a^2$ – коло.

Коло найменшого радіуса називають *горловиною.* При віддаленні від нього вгору та вниз радіус кола збільшується **(рис. 21.5).**

5. Властивості двопорожнинного гіперболоїда [2] Р7, §8 с. 255.

Властивості поверхні можна дослідити шляхом перерізу поверхні координатними площинами і площинами їм паралельними.

5.1. Розглянемо перерізи даного двопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OYZ та площинами їй паралельними.

Якщо $x = 0$ (**площина** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі, то $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ – *гіпербола* з дійсною віссю OZ.

Якщо $x = h$ (**площина паралельна площині** OYZ), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 + \left(\dfrac{h}{a}\right)^2$ – *гіпербола* з дійсною віссю OZ.

5.2. Розглянемо перерізи даного двопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OXZ та площинами їй паралельними.

Якщо $y = 0$ (**площина** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ *гіпербола* з дійсною віссю OZ.

Якщо $y = h$ (**площина паралельна площині** OXZ), то лінія яка одержується в перерізі $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \left(\dfrac{h}{a}\right)^2$ *гіпербола* з дійсною віссю OZ.

5.3. Розглянемо перерізи даного двопорожнинного гіперболоїда обертання площиною OXY та площинами їй паралельними.

Якщо $z = 0$ (**площина** OXY), то лінія яка одержується в перерізі $x^2 + y^2 = -a^2$ – *уявне коло.*

Якщо $|z| < c$ – уявна лінія перерізу.

Якщо $|z| = c$, то $x^2 + y^2 = 0$ – точка в перетині з віссю OZ.

Якщо $z = |h| > c$, то $x^2 + y^2 = a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right)$ – дійсне коло. **(рис. 21.6).**

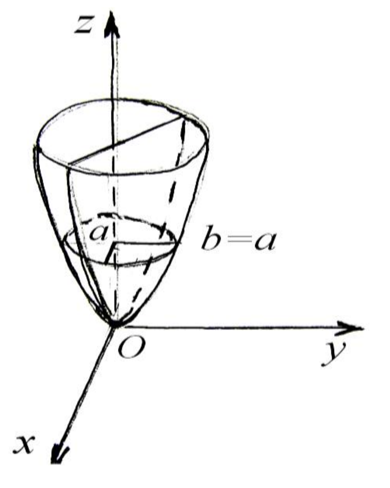
Тема 23. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ПАРАБОЛОЇДИ. ЕЛІПТИЧНИЙ ТА ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇДИ

Мета навчання: ввести поняття параболоїда обертання, застосувати метод перерізів до побудови його поверхні, ввести поняття еліптичного та гіперболічного параболоїдів та застосувати метод перерізів до побудови їх поверхонь.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення та рівняння *параболоїда обертання*. Застосування методу перерізів до побудови його поверхні.	
2	Означення та рівняння *еліптичного параболоїда*. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей еліптичного параболоїда за його канонічним рівнянням.	[2] Р7, §9 с. 257-260, [1] Гл IX, §80.
3	Означення *гіперболічного параболоїда*. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей гіперболічного параболоїда за його канонічним рівнянням.	[2] Р7, §10 с. 260-263, [1] Гл IX, §80.

Математичні поняття, рівняння:

Означення математичного поняття	Рисунок
Параболоїдом обертання називається поверхня утворена обертанням параболи навколо її вісі. Нехай парабола $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$ обертається навколо вісі OZ . Тоді за попереднім **правилом (тема 21-22, с. 47)** рівняння параболоїда обертання має вигляд: $$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z. \qquad (1)$$	 **Рис. 23.1**

<table>
<tr><td colspan="2">При обертанні кожна точка параболи опише коло з центром на вісі OZ. Площини OXZ і OYZ є площинами симетрії даної поверхні.</td></tr>
<tr><td>Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

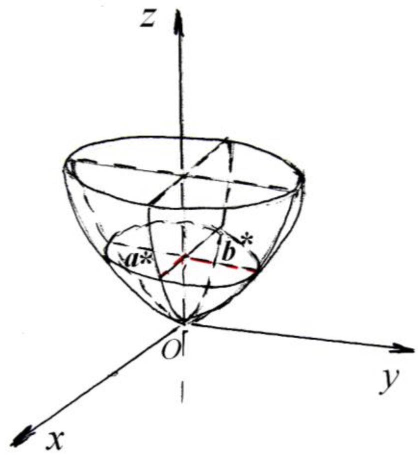
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (2)$$</td><td>

Рис. 23.2</td></tr>
<tr><td>Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій ПДСК визначається рівнянням

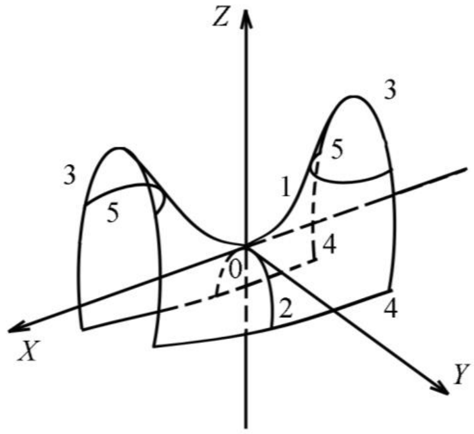
$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (3)$$</td><td>

Рис. 23.3</td></tr>
</table>

Матеріал до питань теми

1. Застосування методу перерізів до побудови поверхні *параболоїда обертання*.

1.1. Розглянемо перерізи даного параболоїда обертання площиною OYZ $(x=0)$ та площинами їй паралельними.

Якщо $x=0$, то $y^2=2pz$ – парабола з віссю OZ.

Якщо $x=h$, то $y^2=2pz-h^2$ – парабола з віссю паралельною осі OZ.

1.2. Розглянемо перерізи даного параболоїда обертання площиною OXZ $(y=0)$ та площинами їй паралельними.

Якщо $y=0$, то $x^2=2pz$ – парабола з віссю OZ.

Якщо $y=h$, то $x^2=2pz-h^2$ – парабола з віссю паралельною осі OZ.

1.3. Розглянемо перерізи даного параболоїда обертання площиною OXY ($z=0$) та площинами їй паралельними.

Якщо $z=0$, то $x^2+y^2=0$ – точка $O\left(0;0;0\right)$.

Якщо $z=h$, то $x^2+y^2=2ph$ – коло з центром на вісі OZ.

Зобразимо ***параболоїд обертання*** у ПДСК (**рис. 23.1**).

2. Застосування методу перерізів до побудови поверхні *еліптичного параболоїда*.

2.1. У перерізі еліптичного параболоїда з площинами OYZ $\left(x=0\right)$ і OXZ $\left(y=0\right)$ одержимо відповідно *параболи*: $\begin{cases} y^2=2qz, \\ x=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0. \end{cases}$

2.2. У перерізі еліптичного параболоїда з площиною OXY ($z=0$) одержимо точку $O\left(0;0;0\right)$.

2.3. У перерізі еліптичного параболоїда з площинами паралельними площині OXY:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h, \end{cases}$$

звідси $\dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1$ – еліпси з півосями $a^*=\sqrt{2ph}$, $b^*=\sqrt{2qh}$.

Зобразимо ***еліптичний параболоїд*** у ПДСК (**рис. 23.2**).

Зауваження. *Параболоїд обертання* це частинний випадок ***еліптичного параболоїда,*** якщо $p=q$, то $\dfrac{x^2+y^2}{p}=2z$.

3. Застосування методу перерізів до побудови поверхні *гіперболічного параболоїда*.

3.1. Переріз площиною OXZ $\left(y=0\right)$: $\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0 \end{cases}$ – парабола, вітки якої напрямлені вгору.

3.2. Переріз площиною OYZ $\left(x=0\right)$: $\begin{cases} y^2=-2qz, \\ x=0 \end{cases}$ – парабола, вітки якої напрямлені вниз.

3.3. Переріз площиною паралельною площині OYZ $(x = h)$:

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{q} = -2z + \dfrac{h^2}{p}, \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz + \dfrac{qh^2}{p}, \\ x = h \end{cases}$$ – парабола симетрична відносно площини OXZ, вітки напрямлені вниз.

3.4. Переріз площиною $y = h$:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q} = 2z \Leftrightarrow \frac{x^2}{p} = 2z + \frac{h^2}{q} \Leftrightarrow x^2 = 2pz + \frac{h^2 p}{q}$$ – парабола, вітки якої напрямлені вгору.

3.5. Переріз площиною паралельною площині OXY $(z = h)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h \end{cases}$$ – гіперболи симетричні відносно площин OXZ та OYZ.

Зобразимо ***гіперболічний параболоїд*** у ПДСК (**рис. 23.3**).

Тема 24. ПРЯМОЛІНІЙНІ ТВІРНІ НА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Мета навчання: ввести означення прямолінійної твірної поверхні, вивести рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда та розглянути їх властивості.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Означення прямолінійної твірної поверхні. Поверхні другого порядку, що мають (не мають) прямолінійні твірні.	[2] Р7, §11. [1] Гл IX, §81.
2	Рівняння прямолінійних твірних одно-порожнинного гіперболоїда, їх властивості.	[2] Р7, §11, п.11.1, [1] Гл IX, §81. [6] Гл.13, §73.
3°	Рівняння прямолінійних твірних гіпербо-лічного параболоїда, їх властивості.	[2] Р7, §11, п.11.2, [3] Гл 9, §46, с.164. [1] Гл IX, §81.

Математичні поняття, рівняння:

Означення математичного поняття
Пряма, яка лежить на поверхні, називається ***прямолінійною твірною*** цієї поверхні.
Згідно з означенням твірні циліндричної і конічної поверхні є прямолінійними твірними. Оскільки всі точки еліпсоїда не виходять за межі деякого паралелепіпеда, а на кожній прямій є точки, які не належать цьому паралелепіпеду, то еліпсоїд <u>не має</u> прямолінійних твірних. Виявляється, що крім конусів та циліндрів прямолінійні твірні мають однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд.
Рівняння прямолінійних твірних однопорожниного гіперболоїда
Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ має дві ***системи прямолінійних твірних***, які визначаються рівняннями: $$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{cases} \quad (2)$$ де α і β – деякі числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

IV. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
(типові задачі та КЗСР)

Модуль 2.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Змістовий модуль 4.
МЕТОД КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Практичне заняття 1 (10).

Тема. **СИСТЕМИ КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ**

Питання.

1) Афінна і прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки. 2) Операції над векторами у просторі. 3) Ділення відрізка у даному відношенні. Довжина відрізка. 4) Скалярний добуток двох векторів.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 4)
1	№1, №2 (точки A, D, F), №3 (точки A, D).	№2 (решта точок), №3 (точки B, C).
2	№4.	
3	№5, №7, №8, №10.	№6, №9.
4	№11, №12, №13, №14, №15.	№16, №17, №18, №19, №20.

1) <u>Афінна і прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки.</u>

1. Побудувати в афінній системі координат точку $A(4;-2;2)$.

2. Побудуйте наступні точки за їх декартовими координатами: $A(3;4;6)$, $B(-5;3;1)$, $C(1;-3;-5)$, $D(0;-3;5)$, $E(-3;-5;0)$, $F(-1;-5;-3)$.

3. Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(2;3;1)$, $B(5;-3;2)$, $C(-3;2;-1)$, $D(a;b;c)$ відносно: 1) площини OXY; 2) площини OXZ; 3) площини OYZ; 4) вісі абсцис; 5) вісі ординат; 6) вісі аплікат; 7) початку координат.

2) <u>Операції над векторами у просторі.</u>

4. Дано вектори $\vec{a}\,(4;-2;-4)$ і $\vec{b}\,(6;-3;2)$. Обчисліть: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$; 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

3) <u>Ділення відрізка у даному відношенні. Довжина відрізка.</u>

5. Доведіть, що трикутник з вершинами $A_1(3;-1;6)$, $A_2(-1;7;-2)$, $A_3(1;-3;2)$ прямокутний.

6°. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(3;-1;2)$, $B\,(0;-4;2)$, $C\,(-3;2;1)$ рівнобедрений.

7. Визначте, чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $M_1(4;-1;4)$, $M_2(0;7;-4)$, $M_3(3;1;-2)$.

8. Дано три вершини $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть його четверту вершину D, протилежну B.

9°. Дано три вершини $A(3;-1;2)$, $B\,(1;2;-4)$, $C\,(-1;1;2)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть його четверту вершину D.

10. Дано вершини трикутника $A(1;-1;-3)$, $B(2;1;-2)$, $C\,(-5;2;-6)$. Обчисліть довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

4) <u>Скалярний добуток двох векторів.</u>

11. Визначте, при якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ та $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

12. Обчисліть косинус кута, утвореного векторами $\vec{a}\,(2;-4;4)$ та $\vec{b}\,(-3;2;6)$.

13. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B\,(-4;-2;0)$, $C\,(3;-2;1)$. Визначте його внутрішній кут при вершині B.

14. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}\,(6;-8;-7{,}5)$ утворює гострий кут з віссю OZ. Знаючи, що $|\vec{x}|=50$, знайдіть його координати.

15. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, утворює з віссю OY тупий кут. Знайдіть його координати, знаючи, що $|\vec{x}|=14$.

16°. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 6$, визначте модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

17°. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доведіть, що діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

18°. Обчисліть внутрішні кути трикутника з вершинами $A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2)$, впевнившись, що цей трикутник рівнобедрений.

19°. Знайдіть вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}(2; 1; -1)$, який задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

20°. Знайдіть вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2; 3; -1), \vec{b}(1; -2; 3)$ і задовольняє умову $\vec{x}\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = -6$.

ВІДПОВІДІ. **№8.** $D(9; -5; 6)$. **№9.** Четверта вершина паралелограма може співпадати з однією з точок $D_1(-3; 4; -4)$, $D_2(1; -2; 8)$, $D_3(5; 0; -4)$. **№10.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$. **№11.** $\alpha = -6$. **№12** $\cos\varphi = \dfrac{5}{21}$. **№13.** 45°. **№14.** $\vec{x}(-24; 32; 30)$. **№15.** $\vec{x}(-4; -6; 12)$. **№16.** $|\vec{p}| = 10$. **№19.** $\vec{x}\left(1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$. **№20.** $\vec{x}(-3; 3; 3)$.

Практичне заняття 2 (11).

Тема **ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ**

Питання.

1) Векторний добуток двох векторів. Означення, властивості, застосування до розв'язування задач. 2) Мішаний добуток векторів. Означення, властивості, застосування до розв'язування задач.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 4)
1	№1, №2, №4, №5 (2), №6, №7, №8.	№3, №5 (1,3), №9.
2	№10, №12, №14.	№11, №13, №15.

1) Векторний добуток двох векторів. Означення, властивості, застосування до розв'язування задач.

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, обчисліть $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|$.

2. Дано: $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ і $\vec{a}\,\vec{b} = 12$. Обчисліть $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|$.

3°. Дано: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 26$ і $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| = 72$. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, обчисліть: 1) $\left|\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\right|$; 2) $\left|\left[\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]\right|$.

5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, обчисліть: 1°) $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]^2$, 2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2$, 3°) $\left[\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2$.

6. Доведіть тотожність $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]^2 + \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2}$.

7. Дано точки $A\,(1;\,2;\,0)$, $B\,(3;\,0;\,-3)$, $C\,(5;\,2;\,6)$. Обчисліть площу трикутника ABC.

8. Дано вершини трикутника $A\,(1;\,-1;\,2)$, $B\,(5;\,-6;\,2)$, $C\,(1;\,3;\,-1)$. Обчисліть довжину його висоти, проведеної з вершини B на сторону AC.

9°. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}\,(4;\,-2;\,-3)$ та $\vec{b}\,(0;\,1;\,3)$, утворює з віссю OY тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}| = 26$, знайдіть його координати.

2) Мішаний добуток векторів. Означення, властивості, застосування до розв'язування задач.

10. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, обчисліть $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

11°. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30°. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3$, обчисліть $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

12. Дано вектори $\vec{a}\,(1;\,-1;\,3)$, $\vec{b}\,(-2;\,2;\,1)$, $\vec{c}\,(3;\,-2;\,5)$. Обчисліть $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

13°. Встановіть, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}\,(2;\,3;\,-1)$, $\vec{b}\,(1;\,-1;\,3)$, $\vec{c}\,(1;\,9;\,-11)$.

2) $\vec{a}\,(3;-2;1)$, $\vec{b}\,(2;1;2)$, $\vec{c}\,(3;-1;-2)$.

3) $\vec{a}\,(2;-1;2)$, $\vec{b}\,(1;2;-3)$, $\vec{c}\,(3;-4;7)$.

14. Обчисліть об’єм тетраедра, вершини якого знаходяться у точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ та $D(4;1;3)$.

15°. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайдіть довжину його висоти, опущеної з вершини D.

ВІДПОВІДІ. №1. $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|=15$. **№2.** $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|=16$. **№3.** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm 30$. **№4. 1)** 24; **2)** 60. **№5. 1)** 3; **2)** 27; **3)** 300. **№7.** 14. **№8.** 5. **№9.** $\vec{x}\,(-6;-24;8)$. **№10.** $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=24$. **№11.** $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=\pm 27$. **№12.** $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=-7$. **№14.** 3. **№15.** 11.

Змістовий модуль 5.
ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

Практичне заняття 3 (12).

Тема. **ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ**

Питання.

1) Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння. Рівняння площини: а) заданої точкою і напрямним підпростором; б) яка проходить через три задані точки; в) «у відрізках на осях»; г) заданої точкою і нормальним вектором $\vec{n}$ у ПСК; векторне рівняння. 2) Нормальне рівняння площини. 3) Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння до нормального виду. 4) Розміщення площини відносно системи координат.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 5)
1	а) № 1; б) №3; в) №5, №6, №7; г) №11; №12, №13.	№2, №4, №8, №9, №10, №14, №15.
2	№16 (непарні).	№16 (парні).
3	№17 (непарні), №18 (1,2).	№17 (парні),№18(3).
4	№19 (непарні).	№19 (парні).

1) Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння.

Рівняння площини:

а) заданої точкою і напрямним підпростором.

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;3)$ паралельно векторам $\vec{a}\,(1;2;-1)$ і $\vec{b}\,(3;-1;4)$.

2°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_1\,(3;4;-5)$ паралельно векторам $\vec{a}_1\,(3;1;-1)$ і $\vec{a}_2\,(1;-2;1)$.

б) яка проходить через три задані точки.

3. Складіть рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;2)$.

4°. Складіть рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$.

в) «у відрізках на осях».

5. Знайдіть відрізки, які відтинає на координатних осях площина $3x-4y-24z+12=0$.

6. Обчисліть об’єм піраміди, яка обмежена площиною $2x-3y+6z-12=0$ і координатними площинами.

7. Площина проходить через точки $M_1(1;2;-1)$ та $M_2(-3;2;1)$ та відсікає від осі ординат відрізок $b=3$. Складіть для цієї площини рівняння у **«у відрізках на осях».**

8°. Знайдіть точки перетину площини $2x-3y-4z-24=0$ з координатними осями.

9°. Обчисліть площу трикутника, який відсікає площина $5x-6y+3z+120=0$ від координатного кута OXY .

10°. Площина проходить через точку $M_1(6;-10;1)$ і відсікає на вісі абсцис відрізок $a=-3$ і на вісі аплікат відрізок $c=2$. Складіть для цієї площини рівняння у **«у відрізках на осях».**

г) заданої точкою і нормальним вектором $\vec{n}$ у ПСК; векторне рівняння.

11. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(2;1;-1)$.

12. Точка $P\left(2;-1;-1\right)$ є основою перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину. Складіть рівняння цієї площини.

13. Дано точки $M_1\left(3;-1;2\right)$ і $M_2\left(4;-2;-1\right)$. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

14°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_1\left(2;1;-1\right)$ і має нормальний вектор $\vec{n}\left(1;-2;3\right)$.

15°. Складіть рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n}\left(5;0;-3\right)$.

2) Нормальне рівняння площини.

16. Визначте, які з наступних рівнянь площини є нормальними:

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0;$ 2°) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0;$

3) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0;$ 4°) $-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-5=0;$

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}z-3=0;$ 6°) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z+1=0;$

7) $\frac{5}{13}y-\frac{12}{13}z-1=0;$ 8°) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+3=0;$

9) $x-1=0;$ 10°) $y+2=0;$

11) $-y-2=0;$ 12°) $z-5=0.$

3) Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння до нормального виду.

17. Зведіть кожне з наступних рівнянь площини до нормального виду:

1) $2x-2y+z-18=0;$ 2°) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0;$

3) $4x-6y-12z-11=0;$ 4°) $-4x-4y+2z+1=0;$

5) $5y-12z+26=0;$ 6°) $3x-4y-1=0;$

7) $y-2=0;$ 8°) $-x+5=0;$

9) $-z+3=0;$ 10°) $2z-1=0.$

18°. Для кожної з наступних площин обчисліть кути α, β і γ, які утворює нормаль з осями координат, та відстань ρ до початку координат.

1) $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0;$ 2) $x + z - 6 = 0;$ 3°) $x\sqrt{3} + y + 10 = 0.$

4) Розміщення площини відносно системи координат.

Завдання. Вказати особливості у розташуванні наступних площин і побудувати їх у прямокутній системі координат $OXYZ$:

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; 2°) $3x + 4y - 12 = 0$;

3) $4x + 5z - 20 = 0$; 4°) $3y + 4z - 24 = 0$;

5) $2x - 9 = 0$; 6°) $3y - 7 = 0$;

7) $4z - 11 = 0$; 8°) $2y - 3z = 0$;

9) $x - 2z = 0$; 10°) $2x - 5y = 0$;

11) $2x + 3y - 4z = 0$.

ВІДПОВІДІ. **№1.** $x - y - z = 0$**.** **№2.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$**.** **№3.** $x + y - 4z + 9 = 0$**.** **№4.** $3x + 3y + z - 8 = 0$**.** **№5.** $a = -4, b = 3, c = 0{,}5$**.** **№6.** 8. **№7.** $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{-\frac{3}{2}} = 1$**.** **№8.** $(12; 0; 0)$, $(0; -8; 0)$, $(0; 0; -6)$**.**

№9. 240. **№10.** $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{-4} + \dfrac{z}{2} = 1$**.** **№11.** $2x + y - z - 8 = 0$**.**

№12. $2x - y - z - 6 = 0$**.** **№13.** $x - y - 3z + 2 = 0$**.**

№14. $x - 2y + 3z + 3 = 0$**.** **№15.** $5x - 3z = 0$**.**

№17. 1) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z - 6 = 0$**;** **3)** $\dfrac{2}{7}x - \dfrac{3}{7}y - \dfrac{6}{7}z - \dfrac{11}{14} = 0$**;**

5) $-\dfrac{5}{13}y + \dfrac{12}{13}z - 2 = 0$**;** **7)** $-y - 2 = 0$**;** **9)** $z - 3 = 0$**.**

№18. 1) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ, p = 5$**.**

2) $\alpha = \gamma = 45^\circ, \beta = 90^\circ, p = 3\sqrt{2}$**. 3)** $\alpha = 150^0, \beta = 120^\circ, \gamma = 90^\circ, p = 5$**.**

Практичне заняття 4 (13).

Тема. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН

Питання.

1) Відстань від точки до площини. 2) Взаємне розміщення двох площин. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин. 3) Кут між двома площинами. 4) Відстань між паралельними площинами. 5) Взаємне розміщення трьох площин. В’язка площин.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 5)**
1	№1, №2.	№3.
2	№ 4 (1,2), №5 (2), №6 (1), №7 (1), №8.	№4 (3), №5 (1,3), №6 (2,3), №7 (2,3), №9.
3	№10 (1,2).	№10 (3,4).
4°	[2] с. 216-217, тема 16 формула 7	№11.
5	[2] Р6, §11, №12, №13.	№14.

1) Відстань від точки до площини.

1. Обчисліть відстань d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Алгоритм розв’язання.

1. Складіть рівняння площини α, яка проходить через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

2. Для обчислення відстані d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини α використайте формулу (1) з теми 16.

2. На вісі OZ знайдіть точку, рівновіддалену від точки $M(1;-2;0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

Алгоритм розв’язання.

1. Оскільки точка A належить вісі OZ, то вона має координати $A(0;0;z)$. Знайдіть відстань AM від точки $A(0;0;z)$ до точки $M(1;-2;0)$.

2. Для обчислення відстані d від точки $A(0;0;z)$ до площини $3x-2y+6z-9=0$ використайте формулу (1) з теми 16.

3. Прирівняйте одержані вирази.

4. Розв’яжіть одержану в пункті 3 рівність відносно z.

5. Запишіть відповідь.

3°. На вісі OY знайдіть точку, яка знаходиться на відстані $d = 4$ від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

2) <u>Взаємне розміщення двох площин. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.</u>

4. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3°) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

5. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають перпендикулярні площини:

1°) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3°) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

6. Визначити, при яких значеннях l і m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2°) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$,

3°) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

7. Визначити, при якому значенні l наступні пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$.

2°) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3°) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

8. Складіть рівняння площини α, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин: $(\alpha_1): 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(\alpha_2): x + 2y + z = 0$.

Алгоритм розв'язання.

1. Запишіть координати векторів нормалі $\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}$ площин $\alpha_1; \alpha_2$.

2. Оскільки площина α, яка проходить через початок координат, перпендикулярна до двох площин $\alpha_1; \alpha_2$, то $\overrightarrow{n_1} \| \alpha$ і $\overrightarrow{n_2} \| \alpha$.

3. Складіть рівняння площини, заданої точкою і напрямним підпростором (1).

9°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно до площин $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

3) Кут між двома площинами.

10. Визначте двогранні кути, які утворюються при перетині двох площин:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0,\ x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (4) з теми 16

$$\cos\varphi = \frac{\left|1\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = \left|\frac{1}{2}\right|.$$

Отже, $\left[\begin{array}{l}\cos\varphi = \dfrac{1}{2},\\ \cos\varphi = -\dfrac{1}{2},\end{array}\right.$ звідси $\left[\begin{array}{l}\varphi = \dfrac{\pi}{3},\\ \varphi = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}.\end{array}\right.$

2) $3y - z = 0,\ 2y + z = 0$;

3°) $6x + 3y - 2z = 0,\ x + 2y + 6z - 12 = 0$;

4°) $x + 2y + 2z - 3 = 0,\ 16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

4) Відстань між паралельними площинами.

11°. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0$ і $2x - 2y + z + 5 = 0$. Обчисліть об'єм цього куба.

5) Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин.

12. Встановіть, що три площини $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку, і обчисліть її координати.

Алгоритм розв'язання.

1. Складіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 7 = 0,\\ 2x + y - z + 2 = 0,\\ x - 3y + 2z - 11 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 7,\\ 2x + y - z = -2,\\ x - 3y + 2z = 11. \end{cases}$$

2. Для другої системи запишіть визначники $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

3. З'ясуйте, що $\Delta \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок.

4. За формулами $x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ знайдіть x, y, z – координати точки в якій перетинаються площини.

13. Доведіть, що три площини $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходять через одну пряму.

Алгоритм розв'язання.

1. Складіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x+4y+7z+1=0, \\ 2x-y-z+2=0, \\ x+2y+3z-1=0. \end{cases}$$

2. Складіть для цієї системи розширену матрицю M та нерозширену матрицю M_3 з коефіцієнтів.

3. З'ясуйте, що $R=r=2$. $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$.

4. Зробіть висновок щодо взаємного розміщення площин.

14°. Доведіть, що три площини $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ перетинаються по трьом різним паралельним прямим.

ВІДПОВІДІ. **№1.** $d=4$. **№2.** $(0;0;-2), \left(0;0;-\frac{82}{13}\right)$. **№3.** $(0;7;0), (0;-5;0)$. **№7.** **1)** $l=6$, **2)** $l=-19$, **3)** $l=-\frac{1}{7}$. **№8.** $7x-y-5z=0$. **№9.** $x+2z-4=0$. **№10.** **1)** $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{2\pi}{3}$; **2)** $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$; **3)** $\frac{\pi}{2}$; **4)** $\arccos\frac{2}{15}$ і $\pi-\arccos\frac{2}{15}$. **№11.** 8. **№12.** $(1;-2;2)$.

Практичне заняття 5 (14).

Тема. **ПРЯМА В ПРОСТОРІ.**
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Питання.

1) Різні задання прямої і відповідні їм рівняння. 2) Кут між двома прямими. Умова паралельності і перпендикулярності. 3) Відстань від точки до прямої. 4) Відстань між двома мимобіжними прямими. 5°) Взаємне розміщення прямої і площини.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 5)**
1	№1, №3 (1,3), №5, №6, №7, №8 (1)	№2, №3 (2), №4 (1,2), №8 (2)
2	№9, №10 (1), №11(1)	№10 (2), №11 (2)
3	№12.	№13.
4	№14.	
5	№15 (1), №16, №17, №19, №21, №22	№15 (2,3), №18, №20, №23

1) <u>Різні задання прямої і відповідні їм рівняння.</u>

1. Складіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2; 0; -3)$ паралельно:

1) вектору $\vec{a}\,(2; -3; 5)$; 2) прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) вісі OX; 4) вісі OY; 5) вісі OZ.

Алгоритм розв'язання.

1. Визначте координати напрямного вектора $\vec{p}(l; m; n)$.

2. Скористайтесь рівнянням (1) з теми 17-18.

Розв'язання 1.2. Оскільки прямі паралельні, то напрямний вектор $\overrightarrow{p_2}(5; 2; -1)$.

Отже, маємо рівняння $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$.

<u>**Вказівка.**</u> Напрямний вектор вісі OX має координати $(1; 0; 0)$, вісі OY – $(0;1;0)$; вісі OZ – $(0;0;1)$.

2°. Складіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через дані точки:

1) $(1;-2;1),(3;1;-1)$; 2) $(3;-1;0),(1;0;-3)$.

3. Складіть параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1;-1;-3)$ паралельно:

1) вектору $\vec{a}\,(2;-3;4)$; 2°) прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$;

3) прямій $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+3, \\ z=5t+2. \end{cases}$

Алгоритм розв'язання.

1. Визначте координати напрямного вектора $\vec{p}(l;m;n)$.

2. Скористайтесь рівнянням (3) з теми 17-18.

4°. (1,2). Складіть параметричне рівняння прямої, яка проходить через дані точки:

1) $(3;-1;2),(2;1;1)$; 2) $(1;1;-2),(3;-1;0)$.

5. Дано вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;-7;-2)$. Складіть параметричне рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

Алгоритм розв'язання.

1. Знайдіть координати точки M – середини відрізка AB.

2. Складіть рівняння прямої CM (2).

3. Прирівняйте відношення у рівнянні (2) до t та перетворіть його до параметричного вигляду (3).

6. Дано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ та $C(-5;14;-3)$. Складіть канонічне рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

7. Дано вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$, $C(5;1;-7)$. Складіть параметричне рівняння його висоти, проведеної з вершини B до протилежної сторони.

Алгоритм розв'язання.

1. Знайдіть довжини сторін ΔABC та переконайтесь, що він прямокутний.

2. Згадайте відомі для катетів співвідношення:

$$AB^2=AN\cdot AC,\ BC^2=NC\cdot AC.$$

3. Використовуючи співвідношення (2), визначте AN та NC – проекції катетів AB та BC на гіпотенузу AC.

4. Знайдіть, в якому відношенні основа висоти N ділить гіпотенузу AC.

5. Знайдіть координати точки N, використовуючи формули поділу відрізка в заданому відношенні.

6. Складіть рівняння прямої BN, як рівняння прямої, що проходить через дві дані точки (2) з теми 17-18.

7. Прирівняйте відношення у рівнянні (2) до t та перетворіть його до параметричного вигляду (3) з теми 17-18.

8. Складіть канонічні рівняння наступних прямих:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0, \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

Алгоритм розв'язання.

1. Нехай, наприклад, $z_0=0$. Розв'язуючи систему $\begin{cases} x-2y-4=0, \\ 3x+2y-4=0, \end{cases}$ знайдіть x_0, y_0.

2. Складіть **загальне рівняння у канонічній формі (6)** з теми 17-18**.**

2) <u>Кут між двома прямими. Умова паралельності і перпендикулярності.</u>

9. Знайдіть гострий кут між прямими

$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ і $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

<u>Вказівка.</u> Скористайтесь формулою (8) з теми 17-18**.**

10. Доведіть паралельність прямих:

1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2°) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

Алгоритм розв'язання.

1. Назвіть координати напрямного вектора $\overrightarrow{p_1}$ першої прямої.

2. Знайдіть напрямний вектор другої прямої $\overrightarrow{p_2}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$.

3. Порівняйте координати напрямних векторів $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ та зробіть висновок.

11. Доведіть перпендикулярність прямих:

1) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2\,t + 1, \\ y = 3\,t - 2, \\ z = -6\,t + 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

3) <u>Відстань від точки до прямої</u>.

12. Обчисліть відстань від точки $P(1; -1; -2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$.

<u>Вказівка.</u> Використайте формулу (9) з теми 17-18.

13°. Переконавшись, що прямі $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ і $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$ паралельні, обчисліть відстань d між ними.

4) <u>Відстань між двома мимобіжними прямими.</u>

14. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими $l_1 : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ і $l_2 : \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{-3}$.

<u>Вказівка.</u> Використайте формулу (10) з теми 17-18.

5°) <u>Взаємне розміщення прямої і площини</u>.

15. Знайдіть точку перетину прямої і площини:

1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$;

2°) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$;

3°) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$, $\quad x+2y-2z+6=0$.

Алгоритм розв'язання.

1. Прирівняйте канонічні рівняння прямої до t та виразіть x, y, z через t.

2. Підставте одержані вирази у рівняння площини. Розв'яжіть одержане рівняння відносно t.

3. Знайдіть x, y, z – координати точки перетину прямої і площини.

16. Складіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-4;-1)$ і середину відрізка прямої $\begin{cases}3x+4y+5z-26=0,\\3x-3y-2z-5=0,\end{cases}$ який міститься між площинами $5x+3y-4z+11=0$ і $5x+3y-4z-41=0$.

Алгоритм розв'язання.

1. Нехай, наприклад, $x_0=0$. Розв'язуючи систему $\begin{cases}4y+5z-26=0,\\-3y-2z-5=0,\end{cases}$ знайдіть y_0, z_0.

2. Складіть **загальне рівняння прямої у канонічній формі (6).**

3. Складене **загальне рівняння прямої у канонічній формі** прирівняйте до t та виразіть x, y, z через t.

4. Знайдіть точку перетину A_1 цієї прямої з площиною $5x+3y-4z+11=0$.

5. Знайдіть точку перетину A_2 цієї прямої з площиною $5x+3y-4z-41=0$.

6. Знайдіть точку M_2 – середину відрізка A_1A_2.

7. Складіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-4;-1)$ та знайдену точку M_2.

17. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases}x-2y+z+3=0,\\x+y-z+2=0.\end{cases}$

Алгоритм розв'язання.

1. Знайдіть координати напрямного вектора прямої $\begin{cases}x-2y+z+3=0,\\x+y-z+2=0.\end{cases}$ Цей вектор є вектором нормалі до площини.

2. Складіть рівняння площини у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $\vec{n}\,(A;B;C)$ – вектор нормалі до площини.

18°. При якому значенні m пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна до площини $x-3y+6z+7=0$.

19. При яких значеннях A і D пряма $\begin{cases} x=3+4t, \\ y=1-4t, \\ z=-3+t \end{cases}$ лежить у площині $Ax+2y-4z+D=0$.

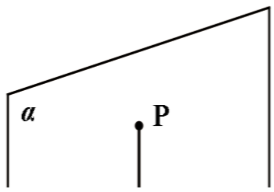
Алгоритм розв'язання.

1. З'ясуйте, при якому значенні A пряма і площина будуть паралельними.

2. З'ясуйте, при якому значенні D точка прямої з координатами $(3;1;-3)$ належатиме площині.

20. При яких значеннях A і B площина $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x=3+2\,t, \\ y=5-3\,t, \\ z=-2-2\,t. \end{cases}$

21. Знайдіть проекцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $\begin{cases} x=3t, \\ y=5t-7, \\ z=2t+2. \end{cases}$



Алгоритм розв'язання.

1. Знайдіть координати вектора нормалі до площини α.

2. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $P(2;-1;3)$ у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

3. Знайдіть P_1 – точку перетину прямої з площиною.

22. Знайдіть точку Q симетричну до точки $P\left(4;1;6\right)$ відносно прямої $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

Алгоритм розв'язання.

1. Нехай, наприклад, $x_0=0$. Розв'язуючи систему $\begin{cases} -y-4z+12=0, \\ y-2z+3=0, \end{cases}$ знайдіть y_0, z_0.

2. Складіть **загальне рівняння прямої** a **у канонічній формі (6).**

3. Складене **загальне рівняння прямої** a **у канонічній формі** прирівняйте до t та виразіть x, y, z через t.

4. Визначте координати напрямного вектора прямої a.

5. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $P(4;1;6)$ перпендикулярно до прямої a, у вигляді $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$.

6. Знайдіть P_1 – точку перетину прямої з площиною.

7. Знайдіть точку Q симетричну точці P відносно прямої a.

23. Знайдіть проекцію точки $P\left(5;2;-1\right)$ на площину $2x-y+3z+23=0$.

ВІДПОВІДІ. **№5.** $x=-5t+4,\ y=11t-7,\ z=-2$**.**
№6. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+7}{-8}$**.** **№7.** $x=3t+3,\ y=15t+1,\ z=19t-3$**.**
№8. 1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$**; 2)** $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+1}{12}=\dfrac{z-1}{13}$**. №9.** 60°**. №12.** $d=7$**.**
№13. $d=25$**. №14.** 6. **№15. 1)** $\left(2;-3;6\right)$; **2)** пряма паралельна площині; **3)** пряма лежить у площині. **№16.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z+1}{3}$.
№17. $x+2y+3z=0$. **№18.** $m=-3$. **№19.** $A=3, D=-23$.
№20. $A=-3, B=4{,}5$. **№21.** $P_1\left(3;-2;4\right)$. **№22.** $Q\left(2;-3;2\right)$.
№23. $P_1\left(1;4;-7\right)$.

Змістовий модуль 6.
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Практичне заняття 6 (15).

Тема. **ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.
ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ
Питання.**

1) Означення та рівняння циліндричної поверхні. 2) Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей. Розв'язування задач.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 6)**
1	**Тема 19-20**, [2] Р7 §4.	
2	№1(а), №2, №4 (а, б)	№1(б,в). №3, №4 (в,г)

2. Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей. Розв'язування задач.

1. Складіть рівняння:

а) ***еліптичного циліндра***, твірна якого паралельна вісі OX , а напрямною є еліпс $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$,

б) ***гіперболічного циліндра***, твірна якого паралельна вісі OX , а напрямною є гіпербола $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$,

в°) ***параболічного циліндра***, твірна якого паралельна вісі OX , а напрямною є парабола $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0. \end{cases}$ Зобразіть їх в ПДСК.

Вказівка. Розв'язується аналогічно до **задачі 2 (теми 19-20 за правилом-орієнтиром** складання рівняння циліндричної поверхні**).**

2. Складіть рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомо рівняння його осі $\begin{cases} x = 3\,t + 7, \\ y = 4\,t + 1, \\ z = 2\,t + 3, \end{cases}$ та координати однієї з точок $M_1(2; -1; 0)$.

Алгоритм розв'язання.

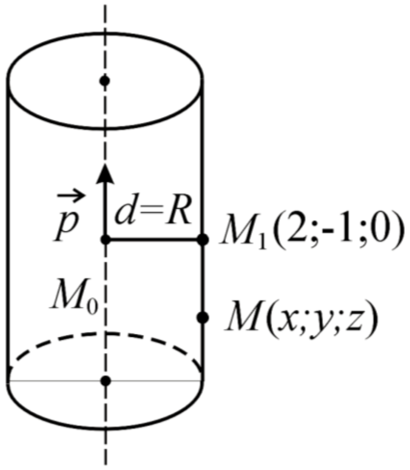


Рис.15.1

1. Знайдемо відстань d від точки $M_1(2; -1; 0)$ до прямої a (осі поверхні) за **формулою відстані від точки до прямої** (див. практ. заняття 4 (11)):

$$M_0(7; 1; 3) \in a,\; M_1(2; -1; 0) \notin a,\; \vec{p}(3; 4; 2).$$

Ця відстань $d = R$ циліндричної поверхні **(рис. 15.1).**

2. $M(x; y; z)$ – **довільна точка кругової циліндричної поверхні,** що знаходиться на відстані $d = R$ від прямої a (осі поверхні). Скористаємось вдруге **формулою відстані від точки до прямої** складемо рівняння. Виконавши рівносильні перетворення якого, отримаємо відповідь (загальне рівняння поверхні).

3°. Складіть рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомо рівняння його осі $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t + 1, \\ z = -2t - 3, \end{cases}$ та координати однієї з точок $M_1(1; -2; 1)$.

<u>**Вказівка.**</u> Розв'яжіть за алгоритмом до №2.

4. Складіть рівняння циліндричної поверхні в кожному з наступних випадків:

а) напрямна лежить у площині OXY та має рівняння $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а твірні паралельні вектору $\vec{p}(1; 0; 1)$;

б) напрямна лежить у площині OYZ та має рівняння $y^2 - yz + 5 = 0$, а твірні паралельні вісі OX ;

в°) напрямна лежить у площині OXY та має рівняння $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, а твірні паралельні вектору $\vec{p}\,(1;2;-1)$;

г°) напрямна лежить у площині OXZ і є колом $(x-1)^2+z^2=4$, а твірні паралельні осі OY.

<u>**Вказівка.**</u> Розв'язується аналогічно до **задачі 2** (**теми 19-20** за **правилом-орієнтиром** складання рівняння циліндричної поверхні).

Розв'язання №4 (а).

1) Візьмемо точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, яка належить напрямній лінії. Її координати задовольняють рівняння напрямної.

Оскільки твірна паралельна вектору $\vec{p}\,(1;0;1)$, то вона має рівняння $\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}$.

Отже, матимемо систему $\begin{cases} x_1^2+2x_1y_1+3y_1^2-x_1=0, \\ z_1=0, \\ \frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}. \end{cases}$

2) Вилучимо з одержаних рівностей $x_1,\ y_1$: $\begin{cases} z_1=0, \\ x_1=x-z, \\ y_1=y. \end{cases}$

3) Підставимо одержані значення $x_1,\ y_1,\ z_1=0$ у перше рівняння системи:

$(x-z)^2+2\,(x-z)\,y+3y^2-(x-z)=0$.

Згрупуємо 2-й та 4-й доданки і винесемо $(x-z)$ за дужки: $(x-z)^2+(2y-1)(x-z)+3y^2=0$.

Відповідь. $(x-z)^2+(2y-1)(x-z)+3y^2=0$ – ***рівняння циліндричної поверхні.***

ВІДПОВІДІ. №1. а) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **б)** $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; **в)** $y^2=2pz$.

№2. $20x^2+13y^2+25z^2-24xy-16yz-12xz-220x+190y-50z+489=0$.

№3. $8x^2+5y^2+5z^2-4xz+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0$.

№4. б) $y^2-yz+5=0$; **в)** $\frac{(x+z)^2}{5}-\frac{(y+2z)^2}{4}=1$; **г)** $(x-1)^2+z^2=4$.

Практичне заняття 7 (16).

Тема. **КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

Питання.

1) Означення та рівняння конічної поверхні. Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння. Розв'язування задач. 2) Конічні поверхні. Розв'язування задач.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 6)
1	**Тема 19-20**, [2] Р7 §5. №1 (а,б).	№1 (в).
2	№2 (а), №3, №5.	№2 (б), №4, №6.

1. <u>Означення та рівняння конічної поверхні. Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння. Розв'язування задач.</u>

1. Складіть рівняння:

а) *еліптичного конуса*, вершина якого знаходиться у початку координат, напрямною є еліпс, паралельний площині OYZ $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a. \end{cases}$ Зобразіть його в ПДСК.

б) *гіперболічного конуса*, вершина якого знаходиться у початку координат, напрямною є гіпербола, паралельна площині OYZ $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a. \end{cases}$ Зобразіть його в ПДСК.

в°) *параболічного конуса,* вершина якого знаходиться у початку координат, напрямною є парабола, паралельна площині OYZ $\begin{cases} y^2=2pz, \\ x=a. \end{cases}$ Зобразіть його в ПДСК.

<u>**Вказівка.**</u> Розв'язується аналогічно до **задачі 3** (**тема 19-20,** за **правилом-орієнтиром** складання рівняння конічної поверхні).

Розв'язання №1 (а).

1) Візьмемо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить як напрямній так і твірній лінії. Її координати задовольняють рівняння цих ліній.

Твірна OM_1 проходить через початок координат $O\,(0;\,0;\,0)$ та має рівняння $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1}$.

Отже, маємо систему $\begin{cases} \dfrac{y_1^2}{b^2} + \dfrac{z_1^2}{c^2} = 1, \\ x_1 = a, \\ \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z}{z_1}. \end{cases}$

2) Вилучимо з одержаних рівностей $y_1,\, z_1$:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = \dfrac{ay}{x}, \\ z_1 = \dfrac{az}{x}. \end{cases}$$

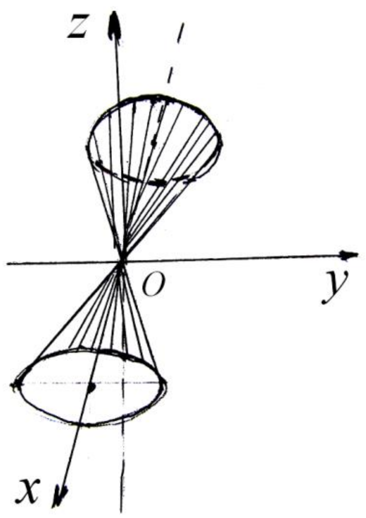


Рис. 16.1

3) Підставимо одержані значення $y_1,\, z_1$ у перше рівняння системи: $\dfrac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \dfrac{a^2 z^2}{x^2 c^2} = 1$.

Помноживши останню рівність на дріб $\dfrac{x^2}{a^2}$, будемо мати $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$.

Отже, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0$ – рівняння ***еліптичного конуса*** **(рис. 16.1).**

2. Конічні поверхні. Розв'язування задач.

2. Напишіть рівняння конічної поверхні, якщо: а) напрямна в площині OXY задана рівнянням $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина має координати $S\,(1;\,0;\,1)$; б°) напрямна в площині OXY задана рівнянням $x^2 + y^2 = 16$, а вершина має координати $S\,(0;\,0;\,1)$.

3. Складіть рівняння конуса з вершиною у початку координат, напрямна якого задана рівняннями $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

4°. Складіть рівняння конуса з вершиною у точці $S\left(0; 0; c\right)$, напрямна якого задана рівняннями $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

5. Вісь OZ – вісь круглого конуса з вершиною у початку координат, точка $M_1(3; -4; 7)$ лежить на його поверхні. Складіть рівняння конуса.

Вказівка. Рівняння такого конуса у загальному має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

6°. Вісь OY – вісь круглого конуса з вершиною у початку координат, його твірні з віссю OY утворюють кут $60°$. Складіть рівняння конусу.

Вказівка. Рівняння такого конуса у загальному має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 0$. Для розв'язання задачі зобразіть конус у ПДСК.

ВІДПОВІДІ. **№1.** **б)** $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0$; **в)** $ay^2 = 2pxz$.

№2. **а)** $\left(x - z\right)^2 + y^2 - y\left(1 - z\right) = 0$; **б)** $x^2 + y^2 - 16\left(z - 1\right)^2 = 0$.

№3. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **№4.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{\left(z - c\right)^2}{c^2} = 0$.

№5. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{49} = 0$. **№6.** $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

Практичне заняття 8 (17).

Тема. **ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ЕЛІПСОЇД ОБЕРТАННЯ. ОДНОПОРОЖНИННИЙ І ДВОПОРОЖНИННИЙ ГІПЕРБОЛОЇДИ**

Питання.

1) Поняття *поверхні обертання* та її рівняння. **Правило** складання *рівняння поверхні обертання.* 2) Означення та рівняння ***тривісного еліпсоїда*** та ***еліпсоїда обертання.*** Розв’язування задач. 3) Означення та рівняння ***однопорожнинного гіперболоїда*** та ***однопорожнинного гіперболоїда обертання.*** Розв’язування задач. 4) Означення та рівняння ***двопорожнинного гіперболоїда*** та ***двопорожнинного гіперболоїда обертання.*** Розв’язування задач. 5) Розв’язування задач на знаходження точок перетину поверхні та прямої.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 6)**
1	**Тема 21-22;** [2] Р7, §3 с. 240-242.	повторити теорію
2	**Тема 21-22;**№1 №2, №3 (а, б), №4.	№3 (в).
3	**Тема 21-22;** №5, №7, №8; №9.	№6.
4	№10, №11.	
5	№12 (2,4).	№12 (1,3).

1. Поняття *поверхні обертання* та її рівняння. Правило складання *рівняння поверхні обертання.*

На цьому практичному занятті розглянемо **3 з 4-х існуючих типів** поверхонь обертання 2-го порядку, а саме: 1) еліпсоїд обертання, 2) однопорожнинний гіперболоїд обертання, 3) двопорожнинний гіперболоїд обертання.

<u>Правило</u>: щоб одержати рівняння поверхні обертання треба у рівнянні твірної лінії залишити **без змін змінну однойменну з віссю**, навколо якої проводимо обертання, а замість **другої змінної взяти корінь квадратний із суми квадратів двох інших змінних**.

2. Означення та рівняння *тривісного еліпсоїда* та *еліпсоїда обертання.* Розв'язування задач.

1. Установіть, що площина $x-2=0$ перетинає еліпсоїд $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по еліпсу, знайдіть його півосі та вершини.

Алгоритм розв'язання.

1. Розгляньте систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1, \\ x-2=0. \end{cases}$

2. Виконайте рівносильні перетворення.

3. Проаналізуйте одержане рівняння та дайте відповідь до задачі.

2. Дослідіть методом перерізів наступні поверхні другого порядку, які задані у ПДСК рівняннями:

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1;$

б) $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0;$

в) $2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0;$

г) $x^2+y^2+(z-2)^2=-1.$

***Алгоритм розв'язання* (б, в).**

1. Виділіть повні квадрати.

2. Зведіть одержані рівняння до канонічного вигляду.

3. Проаналізуйте канонічні рівняння, використовуючи метод перерізів.

Приклад розв'язання №2 (б).

1. $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$. Виділимо повний квадрат для змінної x.

$(x^2+4x+4)-4+2y^2+z^2-8=0,$

$(x+2)^2+2y^2+z^2=12,$

2. $\frac{(x+2)^2+z^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ – **канонічне рівняння еліпсоїда обертання.**

3. OY – **вісь обертання.** $a=c=2\sqrt{3}, b=\sqrt{6}, O(-2;0;0)$**.**

Завдання. Проаналізуйте канонічне рівняння, використовуючи метод перерізів.

3. Напишіть рівняння еліпсоїда, вісі якого співпадають з осями координат і який:

а) проходить через точку $M(2;0;1)$ і перетинає площину OXY по еліпсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$;

б) проходить через точку $N(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$ і перетинає площину OYZ по еліпсу $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$;

в°) перетинає площину OYZ по еліпсу $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$, а площину OXY по колу $x^2+y^2=25$.

Розв'язання №3 (а).

1. З рівняння еліпса видно, що $a^2=8, b^2=1$.

2. Канонічне рівняння даного *еліпсоїда* має вигляд $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Оскільки точка $M(2;0;1)$ належить еліпсоїду, то її координати задовольняють канонічне рівняння: $\frac{4}{8}+\frac{0}{1}+\frac{1}{c^2}=1$. Звідси $c^2=2$.

3. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}=1$ – **рівняння еліпсоїда**.

4. Напишіть рівняння еліпсоїда, який проходить через точки $(2;2;4)$, $(0;0;6)$, $(2;4;2)$, для якого координатні площини ПДСК є площинами симетрії.

Вказівка. Складіть систему трьох рівнянь з трьома невідомими a^2, b^2, c^2 та розв'яжіть її.

3. Означення та рівняння *однопорожнинного гіперболоїда* та *однопорожнинного гіперболоїда обертання.* Розв'язування задач.

5. Дослідіть методом перерізів наступні поверхні другого порядку, які задані у ПДСК рівняннями:

а) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

б) $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$;

в) $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$.

Алгоритм розв'язання (б, в).

1. Виділіть повні квадрати.

2. Зведіть одержані рівняння до канонічного вигляду.

3. Проаналізуйте канонічні рівняння, використовуючи метод перерізів.

<u>Розв'язання</u> **№5 (а).**

$x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ – ***канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда*** з уявною віссю OY.

Скористаємось методом перерізів.

1. Розглянемо переріз поверхні площиною OXZ $(y=0)$: $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{z^2}{9}=1$ – *еліпс* $(a=1, c=3)$.

2. Розглянемо переріз поверхні площиною OYZ $(x=0)$: $\dfrac{z^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ – *гіпербола* $(c=3, b=2)$.

3. Розглянемо переріз поверхні площиною OXY $(z=0)$: $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$ – *гіпербола* $(a=1, b=2)$.

Зобразимо його у ПДСК (**Рис. 17.1**).

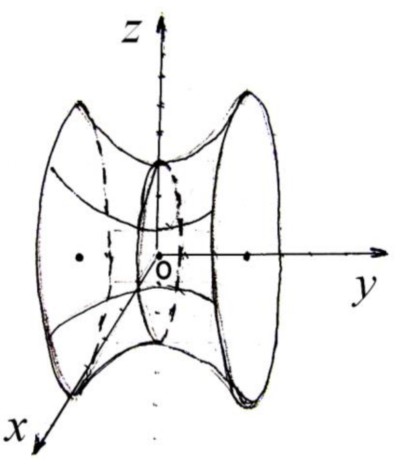


Рис. 17.1

6°. Визначити переріз однопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-z^2=1$ з площиною, яка проведена через точку $(0;0;1)$ паралельно до площини OXY.

7. Знайдіть проекцію на площину OXY лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$ з площиною $x=2z$.

8. Напишіть канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня:

а) проходить через точку $(\sqrt{5}; 3; 2)$ і перетинає площину OXZ по гіперболі $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1$;

б) перетинає площину OXY по колу $x^2 + y^2 = 9$, а площину OXZ по гіперболі $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$.

9. Впевнитись, що площина $z + 1 = 0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гіперболі. Знайдіть її піввісі та вершини.

4. Означення та рівняння *двопорожнинного гіперболоїда* та *двопорожнинного гіперболоїда обертання*. Розв'язування задач.

10. Знайти рівняння площини, паралельної до однієї з координатних площин, яка перетинає *двопорожнинний гіперболоїд* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = -1$ по еліпсу з півосями $2\sqrt{2}$ і 2.

11. Напишіть рівняння *двопорожнинного гіперболоїда* в канонічній системі координат, якщо точки $M_1(3; 1; 2)$, $M_2(2; \sqrt{11}; 3)$ і $M_3(6; 2; \sqrt{15})$ належать даній поверхні.

Вказівка. Якщо точка належить поверхні, то її координати задовольняють рівняння поверхні. Складіть систему трьох рівнянь з трьома невідомими та розв'яжіть її.

5. Розв'язування задач на знаходження точок перетину поверхні та прямої.

12. Знайдіть точки перетину поверхні і прямої.

1°) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ і $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}$;

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ і $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$;

3°) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$ і $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$;

4) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$ і $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

ВІДПОВІДІ. **№1.** $3;\ \sqrt{3};\ B_1(2;\ 3;\ 0),\ B_2(2;-3;0),\ C_1\left(2;\ 0;\ \sqrt{3}\right),$ $C_2\left(2;\ 0;\ -\sqrt{3}\right)$**.** **№3.** **б)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{20}=1$**;** **в)** $\dfrac{x^2+y^2}{25}+\dfrac{z^2}{2}=1$**.** **№4.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2+z^2}{36}=1$**.** **№6.** $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$ – еліпс. **№7.** $y-4=0,\ y+4=0$ – дві прямі. **№8. а)** $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$**;** **б)** $\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{10}=1$**.** **№10.** $z=\pm\sqrt{3}$**.** **№11.** $x^2+2y^2-3z^2+1=0$**.** **№12.** **1)** $(3;\ 4;\ -2),(6;\ -2;\ 2)$**;** **2)** $(4;\ -3;\ 2)$**;** **3)** не перетинаються; **4)** пряма лежить на поверхні.

Практичне заняття 9 (18).

Тема. **ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ПАРАБОЛОЇДИ. ЕЛІПТИЧНИЙ ТА ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇДИ. ПРЯМОЛІНІЙНІ ТВІРНІ НА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

Питання.

1) Означення та рівняння *параболоїда обертання*. Розв'язування задач. 2) Означення та рівняння *еліптичного параболоїда*. Розв'язування задач. 3) Означення *гіперболічного параболоїда*. Розв'язування задач. 4) Прямолінійні твірні на поверхні другого порядку. Розв'язування задач.

Питання	Аудиторна робота + самостійна робота	Домашня робота (КЗСР 6)
1	**Тема 23** [4] №1.	
2	**Тема 23** [4] №2.	№3.
3	**Тема 23.**	№4.
4	**Тема 24.** №5.	№6.

1. Означення та рівняння *параболоїда обертання*. Розв'язування задач.

1. Дослідити поверхню другого порядку, яка задана у ПДСК: $2x^2+2y^2-4z+5=0$.

Вказівка. Зведіть рівняння до канонічного вигляду (1) та зробіть на основі нього висновки про точку O – вершину, вісь, p та q.

2. Означення та рівняння *еліптичного параболоїда*. Розв'язування задач.

2. Дослідити поверхню другого порядку, яка задана у ПДСК використовуючи метод перерізу поверхні площинами: $4x^2+y^2-16z=0$**.**

Вказівка. 1) Розгляньте переріз поверхні площинами (1. OXZ ($y=0$), 2. OYZ ($x=0$), 3. $z=h$).

2) Потім зведіть рівняння до канонічного вигляду (1) та зробіть на основі нього висновки про точку O – вершину, вісь, p та q.

3°. Знайдіть рівняння параболоїда з центром у початку координат, вісь якого співпадає з віссю OY, і який проходить через точки $M_1(1;-2;1)$ та $M_2(-3;-3;2)$.

3) Означення *гіперболічного параболоїда*. Розв'язування задач.

4°. Дослідити поверхню другого порядку, яка задана у ПДСК використовуючи метод перерізу поверхні площинами: $x^2-2y^2-4x-z+1=0$.

4. Прямолінійні твірні на поверхні другого порядку. Розв'язування задач.

5. Складіть рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, паралельних площині $6x+4y+3z-17=0$.

6. Складіть рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, паралельних площині $4x-5y-10z-20=0$.

ВІДПОВІДІ. №1. $x^2+y^2=2\left(z-\frac{5}{4}\right)$ – *еліптичний параболоїд обертання.* $O\left(0;0;\frac{5}{4}\right)$ – вершина. Вісь якого паралельна вісі OZ. $p=q=1$. **№2.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=2z$ – *еліптичний параболоїд.* Вершина у початку координат. $p=2, q=8$. **№3.** $x^2-3z^2=y$.

V. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВИХ МОДУЛЯХ 4-6

Модуль 2.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 4
«Метод координат у просторі»

1. Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Знаходження координат точки. Операції над векторами у просторі.
2. Ділення відрізка у даному відношенні. Відстань між двома точками.
3. Скалярний добуток двох векторів (означення, властивості). Орієнтація простору.
4. Поняття векторного добутку двох векторів. Властивості векторного добутку. Векторний добуток векторів заданих координатами.
5. Геометрична властивість векторного добутку і її застосування.
6. Означення мішаного добутку трьох векторів, властивості. Мішаний добуток трьох векторів в координатній формі.
7. Геометрична властивість мішаного добутку та її застосування.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 5
«Площина і пряма у просторі»

8. <u>Площина у просторі.</u> Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки).
9. <u>Площина у просторі.</u> Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини).

10. Нормальне рівняння площини.

11. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

12. Відстань від точки до площини.

13. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

14. Пучок площин. Рівняння пучка площин.

15. Взаємне розміщення трьох площин. В'язка площин. Рівняння в'язки площин.

16. <u>Пряма в просторі.</u> Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої).

17. Рівняння прямої в просторі, заданої як перетин двох площин.

18. Кут між двома прямими в просторі. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.

19. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими.

20. Взаємне розміщення двох прямих у просторі (прямі, що перетинаються, збігаються, паралельні, мимобіжні).

21. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 6
«Поверхні другого порядку»

22. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Означення та рівняння сфери, властивості сфери.

23. Означення та рівняння циліндричної поверхні.

24. Циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний), твірна яких паралельна одній з координатних осей.

25. Означення та рівняння канонічної поверхні.

26. Конуси другого порядку з вершиною у початку координат.

27. Типи конусів другого порядку (еліптичний, гіперболічний, параболічний) та їх рівняння.

28. Поняття поверхні обертання та її рівняння.

29. Означення та рівняння еліпсоїда обертання і тривісного еліпсоїда. Визначення форми та вивчення геометричних властивостей еліпсоїда обертання.

30. Означення та рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови його поверхні. Рівняння однопорожнинного гіперболоїда.

31. Означення та рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови його поверхні. Рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

32. Означення та рівняння параболоїда обертання. Застосування методу перерізів для побудови його поверхні.

33. Означення еліптичного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей еліптичного параболоїда за його канонічним рівнянням.

34. Означення гіперболічного параболоїда. Визначення форми і вивчення геометричних властивостей гіперболічного параболоїда за його канонічним рівнянням.

35. Означення прямолінійної твірної поверхні. Поверхні другого порядку, що мають (не мають) прямолінійні твірні.

36. Рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, їх властивості. Рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда, їх властивості.

VI. ПРИКЛАДИ ВАРІАНТІВ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Змістовий модуль 4. МЕТОД КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

ВАРІАНТ 1.

У завданнях 1-6 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання 1 бал).

Відповіді повідомити у формі ***пар (номер завдання та відповідна до нього буква)*** *у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. *Кут між векторами* $\vec{a}\,(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}\,(x_2;y_2;z_2)$ визначається так:

А	$\arccos\dfrac{\lvert x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\rvert}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}}$	**В**	$\arcsin\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}}$
Б	$\arccos\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}}$	**Г**	$arctg\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}}$

2. *Напрямні косинуси вектора* задовольняють рівності:

А	$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$	**В**	$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$
Б	$\lvert\cos\alpha\rvert+\lvert\cos\beta\rvert+\lvert\cos\gamma\rvert=1$	**Г**	$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$

3. *Векторним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{p}=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$, модуль якого дорівнює:

А	Б	В	Г
$\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$	$\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$	$\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert$	$\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

4. Нехай $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тоді $[\vec{a}\,\vec{b}]$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}$	$x_1x_2\vec{i}+y_1y_2\vec{j}+z_1z_2\vec{k}$	$(x_1+x_2,\, y_1+y_2,\, z_1+z_2)$	$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$

5. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – вектори, λ – число. Які з наступних рівностей є правильними:

1) $[\vec{a}\,\vec{b}]=[\vec{b}\,\vec{a}]$, 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, 3) $[(\alpha\,\vec{a})\vec{b}]=\alpha\,[\vec{a}\,\vec{b}]$, 4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{b}\cdot\vec{a}$

А	Б	В	Г
1 і 2	1 і 4	2 і 3	3 і 4

6. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right|$	$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|$	$\frac{1}{2}\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right|$	$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

Задачі 7-8 представити з повним розв'язанням *(за кожне правильно виконане завдання 2 бала).*

7. Знайти вектор $\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{b}\,(2;-5;3)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=76$.

8. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$, проведеної з вершини B.

Змістовий модуль 5.
ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1-10 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання 1 бал).

Відповіді повідомити у формі ***пар (номер завдання та відповідна до нього буква)*** *у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. Загальне рівняння площини – це рівняння виду $Ax+By+Cz+D=0$, де A, B, C, D –

А	Б	В	Г
довільні сталі	довільні сталі, $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert+\lvert D\rvert\neq 0$	довільні сталі, $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert\neq 0$	довільні сталі, $D\neq 0$

2. Рівняння площини $MAx+MBy+MCz+MD=0$ матиме нормальний вигляд, якщо:

А	$M=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	**В**	$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $MD<0$
Б	$M=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	**Г**	$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $MD>0$

3. Прямі в просторі, які мають напрямні вектори $\overrightarrow{p_1}(l_1;m_1;n_1)$, $\overrightarrow{p_2}(l_2;m_2;n_2)$ **паралельні**, якщо:

А	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$	**В**	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$
Б	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\neq 0$	**Г**	$l_1l_2=m_1m_2=n_1n_2$

4. Пряма $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ та площина $Ax+By+Cz+D=0$ **перпендикулярні**, якщо:

А	Б	В	Г
$Al+Bm+Cn=0$	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$	$Al+Bm+Cn\neq 0$	$Al=Bm=Cn$

5. Відстань d від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює:

А	$\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert$	**В**	$\frac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}}$
Б	$\frac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	**Г**	$\frac{\lvert Ax_1+By_1+Cz_1+D\rvert}{\sqrt{B^2+C^2+D^2}}$

6. ***Кут між прямими*** в просторі, які мають напрямні вектори $\overrightarrow{p_1}(l_1;m_1;n_1)$, $\overrightarrow{p_2}(l_2;m_2;n_2)$ дорівнює:

А	$\arccos\dfrac{\lvert l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$		**В**	$\cos\dfrac{\lvert l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$
Б	$\dfrac{\lvert l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$		**Г**	$\arcsin\dfrac{\lvert l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

Задачі 7-8 представити з повним розв'язанням *(за кожне правильно виконане завдання 2 бала).*

7. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;-5)$, $M_2(4;-1;3)$, паралельно осі OZ.

8. Записати рівняння площини, яка проходить через вісь OX і точку $A(-1;1;3)$.

А	Б	В	Г
$y+3z=0$	$3y+z=0$	$3y+3z=0$	$z-3y=0$

Змістовий модуль 6.
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ (ТЕОРЕТИЧНИЙ КУРС)

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1-2 виберіть правильну відповідь (за кожне правильно виконане завдання 1 бал).

Відповіді повідомити у формі ***пар (номер завдання та відповідна до нього буква)*** *у відповідності до наданої нумерації завдань.*

1. *Гіперболічний циліндр* – це поверхня, канонічне рівняння якої в ПДСК має наступний вигляд:

А	$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z,\ p>0, q>0$		**В**	$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z,\ p>0, q>0$
Б	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$		**Г**	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2. *Еліпсоїд* – це поверхня, канонічне рівняння якої в ПДСК має наступний вигляд:

А	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		**В**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Б	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		**Г**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Розв'яжіть задачу (3 бала).

3. Складіть рівняння циліндра, твірна якого паралельна вектору $\vec{l}\,(2;-3;4)$, а напрямна задана рівняннями $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=1. \end{cases}$

4. Знайдіть точки перетину поверхні $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ та прямої $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$.

Розв'яжіть задачу (2 бала).

5. Визначте, яку ***поверхню обертання*** визначає рівняння $x^2+y^2+4z^2-1=0$. Назвіть ***вісь обертання*** та ***лінію 2-го порядку,*** в результаті обертання якої навколо даної вісі одержується поверхня обертання.

ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов. В 2-х ч. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1986. 336 с.

2. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія : Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.

Збірники задач з аналітичної геометрії

3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Учеб. пособие для втузов. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 224 с.

4. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1973. 256 с.

5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2003. 336 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. Москва : Наука, 1975. 272 с.

7. Зайцева Л. Л., Нетреба А. В. Збірник задач з аналітичної геометрії. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 200 с.

8. Кобко Л. М., Глінка-Єремко І. Б. Аналітична геометрія. Частина 3. Площина і пряма в просторі. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Чернігів, 2008. 75 с.

9. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Духовничий, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.

10. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум (I курс, I семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Духовничий, Л. Б. Федорова. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.

11. Михайленко В. М., Антонюк Р. А. Сборник прикладных задач по высшей математике: Учеб. пособие. Киев : Выща шк., 1990.168 с.

12. Ноздрин И. И., Степаненко И. М., Костюк Л. К. Прикладные задачи по высшей математике. Издательское объединение «Вища школа», 1976. 176 с.

13. Тарасенкова Н. А., Коломієць О. М. Лінії другого порядку : Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи студентів. Черкаси : «Сіяч», 2000. 80 с.

14. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / С. І. Гургула, В. М. Мойсишин, В. О. Воробйова та ін.; За ред. С. І. Гургули, В. М. Мойсишина. Івано-Франківськ : Факел, 2008. 737 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації
до навчання курсу для студентів спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
та спеціальності 111 Математика

Частина 2
«Аналітична геометрія у просторі»
[електронне видання]

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Рисунки *Я. В. Сапонова,*
О. І. Полковник

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 11.11.2021 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 6,05. Обл.-вид. 5,92. Зам. № 972.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
nuchk.tipograf@gmail.com