**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка**

Кафедра математики та економіки

Світлана МУЗИЧЕНКО, Лідія ФІЛОН

ПРАКТИКУМ
з математичного аналізу

Частина 1

**Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення функції
однієї змінної**

**Чернігів
2022**

УДК 517(07)
М 89

Рецензенти:

О. О. Балюнов – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та економіки Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка;

М. А. Синенько – кандидатка фізико-математичних наук, доцентка кафедри кібербезпеки та математичного моделювання Національного університету «Чернігівська політехніка».

М 89 **Музиченко Світлана, Філон Лідія. Практикум з математичного аналізу. Частина 1.** Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчальний посібник [електронне видання]. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.

УДК 517(07)

Навчальний посібник укладений відповідно до програми навчальної дисципліни «Математичний аналіз». Він містить матеріали для самоконтролю теоретичних питань та підготовки до практичних занять, зразки розв'язання типових вправ, завдання для самостійного розв'язування, які стосуються змістових модулів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної».

Практикум призначений для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) першого рівня вищої освіти. Також він може бути корисний здобувачам інших спеціальностей, що опановують курс вищої математики, викладачам відповідних дисциплін закладів вищої освіти, фахової передвищої освіти, а також вчителям математики ЗЗСО.

Рекомендовано до друку
вченою радою природничо-математичного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка (Протокол № 1 від 30 серпня 2022 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП 5

Змістовий модуль 1
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ 7

Тема 1.1. **Елементи теорії множин та дійсні числа** 7

1. Множини та операції над ними 7
2. Дійсні числа. Модуль дійсного числа 11

Тема 1.2. **Функція** 18

1. Поняття функції. Елементарні функції, їх властивості та графіки. Обернена функція 18
2. Окремі класи функцій 22

Тема 1.3. **Границя числової послідовності** 25

1. Числові послідовності та їх властивості 25
2. Границя числової послідовності: означення, властивості 28
3. Знаходження границь послідовностей 32

Тема 1.4. **Границя і неперервність функції** 36

1. Границя функції. Розкриття невизначеностей. Визначні границі 36
2. Неперервність функції. Класифікація точок розриву 40

ПИТАННЯ ДО КОЛОКВІУМУ 1 45

Змістовий модуль 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 47

Тема 2.1. **Похідна та диференціал** 47

1. Поняття похідної. Механічний та геометричний зміст похідної. Обчислення похідних 47

2. Логарифмічне диференціювання. Диференціювання параметрично та неявно заданих функцій 52
3. Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень. Похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора (Маклорена) 55

Тема 2.2. **Основні теореми диференціального числення та їх застосування** 60
1. Основні теореми диференціального числення. Правила Лопіталя 60
2. Дослідження функції на монотонність та екстремум. Найбільше і найменше значення функції на відрізку 64
3. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Повне дослідження функції та побудова її графіка 69

ПИТАННЯ ДО КОЛОКВІУМУ 2 74

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ 76

ДОДАТКИ 78
Додаток 1. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни .. 78
Додаток 2. Приклад екзаменаційного білету 84
Додаток 3. Орієнтовна відповідь на теоретичні питання екзаменаційного білету 85
Додаток 4. Схема оцінювання навчальних досягнень студентів з дисципліни «Математичний аналіз» 89

ВСТУП

Фундаментальні математичні знання та практичні навички становлять основу підготовки висококваліфікованого компетентного майбутнього вчителя математики, здатного якісно виконувати свої трудові функції.

Центральне місце в математичній підготовці вчителя математики займає навчальна дисципліна «Математичний аналіз». Вона є нормативною дисципліною циклу професійної підготовки освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)» підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)» галузі знань 01 Освіта / Педагогіка в Національному університеті «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. За відповідним навчальним планом здобувачі освіти її опановують впродовж 1-4 семестрів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є основні поняття та методи математичного аналізу, основи теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, основи теорії рядів, основи теорії поля.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є забезпечення фундаментальних знань основних понять, законів і методів математичного аналізу, їх практичного застосування, що є основою формування математичної та методичної компетентностей майбутніх педагогічних фахівців, а також засобом вивчення інших математичних курсів та суміжних дисциплін природничого циклу.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Математичний аналіз» є:

- засвоєння студентами фундаментальних понять математичного аналізу, що стосуються теорії функцій однієї та декількох змінних, а також методів їх дослідження;

- формування практичних умінь та навичок дослідження властивостей функції методами математичного аналізу та побудови їх графіків;

- формування здатності використання математичних методів дослідженнях під час підготовки курсових робіт; підготовка студентів до науково-дослідної роботи,

- формування математичної та методичної компетентності майбутнього вчителя математики.

Програма навчальної дисципліни складається з наступних змістових модулів (ЗМ):

ЗМ 1. Вступ до математичного аналізу.

ЗМ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної.

ЗМ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної.

ЗМ 4. Ряди.

ЗМ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

ЗМ 6. Інтегральне числення функції багатьох змінних.

ЗМ 7. Поверхневі інтеграли, основи теорії поля.

Навчальний посібник містить матеріали для опанування здобувачами освіти змістових модулів 1-2. Матеріал змістових модулів структуровано за темами відповідно до програми. В рамках кожної теми виокремлено питання, які розкривають її зміст.

На думку авторів, організації якісного засвоєння студентами питань теми сприятимуть виокремлені: понятійний апарат, опорні твердження, питання для самоконтролю, джерела для самопідготовки. Проміжний контроль теоретичних знань стосовно змістового модуля здійснюється у формі колоквіуму. У посібнику наведено перелік орієнтовних питань для підготовки до колоквіуму. Значний масив матеріалів становлять приклади розв'язання типових вправ з кожної теми та завдання для самостійного розв'язування. У додатках наведено зразок білету до семестрового екзамену, орієнтовної відповіді на теоретичні питання білету та схему оцінювання навчальних досягнень студентів з дисципліни «Математичний аналіз».

Розроблені матеріали мають на меті допомогти студентам-першокурсникам якісно опанувати програмовий матеріал перших змістових модулів курсу математичного аналізу, зорієнтувати стосовно базових теоретичних питань теми, здійснювати самоконтроль знань теоретичного матеріалу. Розроблені практичні завдання допоможуть у підготовці до практичних занять та модульної контрольної роботи.

Сподіваємося, що методичні рекомендації сприятимуть самоорганізації систематичної самостійної роботи здобувачів освіти, зокрема в умовах дистанційного навчання.

Посібник стане у нагоді студентам, що вивчають курс математичного аналізу, викладачам закладів вищої освіти у процесі підготовки та викладання даної або аналогічної навчальної дисципліни, вчителям математики закладів загальної середньої освіти та викладачам математики закладів фахової передвищої освіти.

Змістовий модуль 1

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 1.1.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

1. МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Понятійний апарат: множина, елемент множини, скінченна множина, нескінченна множина, порожня множина, підмножина, рівні множини, універсальна множина, об'єднання множин, переріз множин, різниця множин, доповнення множини, декартів добуток множин, відповідність між множинами, взаємно однозначна відповідність, еквівалентні множини, діаграми Ейлера.

Опорні твердження: властивості операцій над множинами.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 1, § 1.1; [9] розділ 1, п. 1.1; [11] розділ 1, п. 1.2.

Питання для самоконтролю:

1. Що розуміють під поняттям «множина»? Які бувають множини? Наведіть приклади.
2. Які операції можна виконувати над множинами? Сформулюйте означення кожної з них, зобразіть за допомогою діаграм Ейлера.
3. Що таке декартів добуток множин?
4. Що розуміють під взаємно однозначною відповідністю між множинами, які множини називають еквівалентними? Наведіть приклади.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть об'єднання, переріз та різницю множин A і B:

а) $A = \{x \in Z \mid -3 \le x \le 6\}$ і $B = \{x \in Z \mid -6 < x < 2\}$;

б) $A=\{x\in R\,|-6\le x\le 10\}$ і $B=\{x\in R\,|-10<x<7\}$;

в) $A=\{x\in R\,|-6\le x\le 10\}$ і $B=\{x\in R\,|-1\le x\le 3\}$.

Розв′язання

а) Запишемо дані множини переліком елементів та виділимо їх спільні елементи:

A = {**– 3, – 2, – 1, 0, 1**, 2, 3, 4, 5, 6},

B = {– 5, – 4, **– 3, – 2, – 1, 0, 1**}.

Виділені спільні елементи будуть утворювати *переріз* даних множин: $A\bigcap B=\{-3,-2,-1,0,1\}=\{x\in Z\,\big|\,-3\le x\le 1\}$.

Знайти *об'єднання* множин можна двома способами: або до елементів множини A додати не виділені елементи множини B, або до елементів множини B додати не виділені елементи множини A.

$A\bigcup B=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}=\{x\in Z\,\big|\,-5\le x\le 6\}$.

Різницю $A\setminus B$ будуть утворювати не виділені елементи множини A, а *різницю* $B\setminus A$ – не виділені елементи множини B:

$A\setminus B=\{2,3,4,5,6\}=\{x\in Z\,\big|\,2\le x\le 6\}$,

$B\setminus A=\{-5,-4\}=\{x\in Z\,\big|\,-5\le x\le -4\}$.

б) Дані множини є нескінченними, тому записати їх переліком елементів ми не можемо. Для зручності зобразимо ці множини на числовій прямій.

Рис.1

$A\bigcap B=\{x\in R\,\big|\,-6\le x<7\}$; $A\bigcup B=\{x\in R\,\big|\,-10<x\le 10\}$;

$A\setminus B=\{x\in R\,\big|\,7\le x\le 10\}$; $B\setminus A=\{x\in R\,\big|\,-10<x<-6\}$.

в) Як бачимо, множина B є підмножиною множини A.

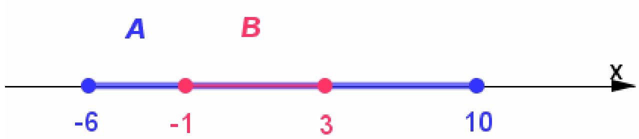

Рис. 2

У такому випадку $A\bigcap B=B$, $A\bigcup B=A$, $B\setminus A=\varnothing$.

Різниця $A\setminus B$ складається з двох частин:

$A\setminus B=\{x\in R\,\big|\,-6\le x<-1;\,3<x\le 10\}$.

Приклад 2. Зобразіть на координатній площині декартів добуток множин $X \times Y$, якщо:

а) $X = \{x \in N \mid x \le 5\}$ і $Y = \{y \in N \mid -1 < y < 4\}$;

б) $X = \{x \in N \mid 3 \le x < 7\}$ і $Y = \{y \in R \mid 1 \le y < 5\}$.

Розв′язання

а) Запишемо дані множини переліком елементів:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$.

Декартів добуток даних множин будуть утворювати пари чисел, які можна інтерпретувати як координати точок (рис. 3):

$X \times Y = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), ..., (5,2), (5,3)\}$.

б) Оскільки множина Y є нескінченною, то й декартів добуток буде складатися із нескінченної множини пар чисел. Абсциси відповідних точок координатної площини визначає множина $X = \{3, 4, 5, 6\}$.Ординатами будуть усі дійсні числа з інтервала $[1; 5)$.

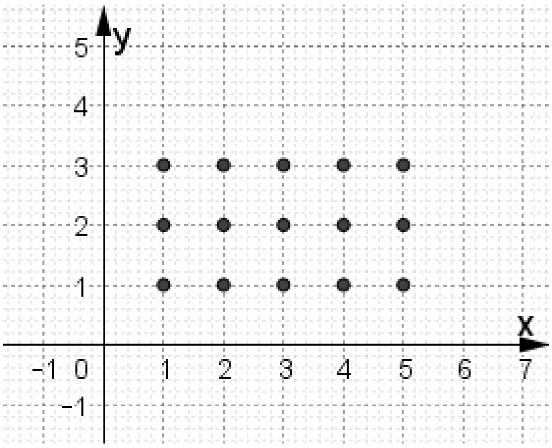

Рис. 3

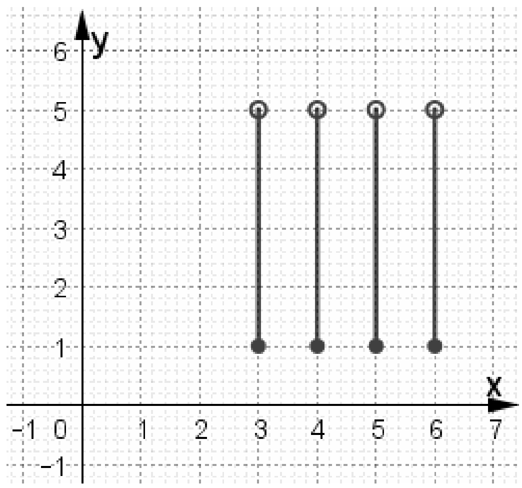

Рис. 4

Завдання для самостійного розв′язування

1. Задайте множину переліком елементів:

а) $A = \{n \mid n$ – прості числа, менші $20\}$;

б) $A = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

в) $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, x + \dfrac{1}{x} \le 2 \text{ і } x > 0 \right\}$;

г) $A = \left\{ x \in Z \,\middle|\, \dfrac{1}{9} \le 3^x < 10 \right\}$.

2. Запишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

3. Чи рівні між собою множини A і B, якщо:

а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, c, a\}$;

б) $A = \{0, 1\}$, $B = \{x \in R \mid x^3 - x = 0\}$?

4. Серед даних множин знайдіть усі множини, рівні між собою:

$A = \left\{ x \in R \,\middle|\, \dfrac{x^2}{x - 0{,}5} \geq 2 \right\}$; $B = \left\{ x \in R \,\middle|\, \dfrac{x - 0{,}5}{(x-1)^2} > 0 \right\}$; $C = (0{,}5; +\infty)$;

$D = [2; +\infty)$; $E = \{x \in R \mid (x+1)(x-2) \geq 0\}$.

5. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 4, а B – множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9, 0, –24, –53, 128, 1242048 належать множині $A \bigcup B$?

6. Нехай A – множина всіх цілих чисел, що діляться на 2, а B – множина всіх цілих чисел, що діляться на 3. Якими є множини:

а) $A \bigcup B$; б) $A \bigcap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$?

7. Знайдіть об’єднання, переріз та різницю множин A і B:

а) $A = \{x \in N \mid 4 \leq x \leq 12\}$ і $B = \{x \in N \mid 4 < x < 15\}$;

б) $A = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 9\}$ і $B = \{x \in R \mid -4 < x < 7\}$;

в) $A = \{x \in R \mid -5 \leq x \leq 3\}$ і $B = \{x \in R \mid -3 \leq x \leq 1\}$;

г) $A = \{x \in R \mid 0 < x < 3\}$ і $B = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\}$.

8. Знайдіть елементи множин $A \times B$ і $B \times A$, де $A = \{a, b\}$, $A = \{b, c\}$.

9. Зобразіть на координатній площині декартів добуток множин $X \times Y$, якщо:

а) $X = \{x \in N \mid x < 8\}$ і $Y = \{y \in N \mid 1 < y < 6\}$;

б) $X = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 6\}$ і $Y = \{y \in R \mid -3 \leq y \leq 3\}$;

в) $X = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 6\}$ і $Y = \{y \in R \mid 1 \leq y \leq 4\}$;

г) $X = \{x \in R \mid -3 \leq x \leq 0\}$ і $Y = \{y \in N \mid -3 \leq y \leq 3\}$.

10. За допомогою діаграм Ейлера з’ясуйте істинність рівностей:

а) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;

б) $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus ((A \bigcap B) \setminus C)$.

11. Які з множин A і B є рівними, а які – еквівалентними, якщо:

а) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,2,1,3\}$;

б) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,2,4,6\}$;

в) A – множина цілих чисел, що діляться на 4, а B – множина парних чисел;

г) A – множина цілих чисел, а B – множина коренів рівняння $\sin \pi x = 0$?

12. У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 – грати у шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?

13. У ліцеї навчається 70 учнів, з них 27 записалося в драмгурток, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. Драмгурток відвідує 10 учнів, які також займаються в хорі, у хорі співає 6 спортсменів. У драмгуртку займається 8 спортсменів, 3 спортсмени відвідують і драмгурток, і хор. Скільки дітей не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються в драмгуртку?

14. Для аналізу попиту населення на побутові прилади було проведено дослідження серед 1000 відвідувачів магазину. В результаті було встановлено, що протягом року 500 осіб купили пральні машини, 250 – електричні плити, 350 – телевізори. Виявилось, що 100 відвідувачів купили пральні машини та електричні плити, 90 – пральні машини та телевізори, 80 – електричні плити та телевізори, 20 – пральні машини, електричні плити та телевізори. З'ясуйте, скільки відвідувачів купили: а) принаймні один; б) жодного; в) тільки один з названих побутових приладів.

2. ДІЙСНІ ЧИСЛА. МОДУЛЬ ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Понятійний апарат: числова множина, дійсні числа, раціональні числа, ірраціональні числа, числова пряма, модуль дійсного числа, числові проміжки (відрізок, інтервал, півінтервал), окіл точки, проколотий окіл точки, обмежені / необмежені числові множини, верхня / нижня межа числової множини, точна верхня (*sup*) / точна нижня (*inf*) межа числової множини.

Опорні твердження: аксіоматика дійсних чисел; властивості модуля дійсного числа, властивість неперервності множини дійсних чисел, теорема про існування точної верхньої (точної нижньої) межі числової множини.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 1, § 1.2-1.4; [9] розділ 1, п. 1.1; [11] розділ 1, п. 1.3-1.7.

Питання для самоконтролю:

1. Що таке числова множина? Наведіть приклади числових множин.
2. Сформулюйте аксіоми дійсних чисел.
3. Сформулюйте властивості модуля дійсного числа.
4. Сформулюйте властивість неперервності множини дійсних чисел.
5. Наведіть приклади числових проміжків.
6. Що розуміють під околом точки? проколотим околом точки?

6\. Сформулюйте означення точної верхньої (точної нижньої) межі числової множини.

7\. Сформулюйте теорему про існування точної верхньої (точної нижньої) межі числової множини.

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Дані раціональні числа запишіть у вигляді звичайних дробів:

а) 2,005; б) 0,(7); в) 3,1(12).

Розв'язання

а) $2{,}005 = 2\frac{5}{1000} = 2\frac{1}{200} = \frac{401}{200}$.

б) <u>1-й спосіб.</u> Нехай $0,(7) = a$. Помножимо обидві частини рівності на 10: $7,(7) = 10a$. Від одержаної рівності віднімемо першу: $7 = 9a$, звідки $a = \frac{7}{9}$.

Узагальненням даного способу є правило переведення чистих періодичних дробів у десяткові.

<u>2-й спосіб.</u> Запишемо дане число у вигляді: $0,(7) = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots$. Доданки у правій частині утворюють нескінченну спадну геометричну прогресію, перший член якої $b_1 = 0{,}7$, а знаменник $q = 0{,}1$. Отже, за формулою суми для такої прогресії маємо $0,(7) = \frac{0{,}7}{1 - 0{,}1} = \frac{7}{9}$.

в) <u>1-й спосіб.</u> $3{,}1(12) = a$. Маємо мішаний періодичний дріб. Спочатку зведемо даний випадок до попереднього: $31,(12) = 10a$. Щоб звільнитися при відніманні від дробової частини, помножимо дану рівність на 100: $3112,(12) = 1000a$. Виконаємо віднімання: $3112,(12) - 31,(12) = 1000a - 10a$, $3081 = 990a$, звідки $a = \frac{3081}{990} = \frac{1027}{330}$.

<u>2-й спосіб.</u> $3{,}1(12) = 3{,}1 + 0{,}0(12)$;

$0{,}0(12) = 0{,}012 + 0{,}00012 + 0{,}0000012 + \ldots$;

$$0{,}0(12) = \frac{0{,}012}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}012}{0{,}99} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165};$$

$$3{,}1(12) = 3{,}1 + \frac{2}{165} = \frac{31}{10} + \frac{2}{165} = \frac{31 \cdot 33 + 2 \cdot 2}{330} = \frac{1027}{330}.$$

Приклад 2. Доведіть, що число 0,2020020002… є ірраціональним.

Розв'язання

Доведемо, що даний десятковий дріб не є періодичним. Припустимо супротивне: нехай цей дріб періодичний і його період має довжину *n*. При цьому кількість нулів, поступово зростаючи, рано чи пізно перевищить *n*. Отже, як завгодно далеко від початку у мантисі числа зустрічається *n* нулів підряд. Це означає, що цифра 2 не потрапляє до періоду. Але це неможливо, бо принцип утворення числа передбачає нескінченне повторення цифри 2. Отримали суперечність, яка й засвідчує, що даний дріб не може бути періодичним, а, отже, є ірраціональним числом.

Приклад 3. Доведіть, що $\sqrt{5}$ є числом ірраціональним.

Розв'язання

Припустимо супротивне. Нехай $\sqrt{5} \in Q$. Це означає, що його можна подати у вигляді нескоротного звичайного дробу: $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$.

Тоді $5 = \frac{m^2}{n^2}$ або $m^2 = 5n^2$. Це означає, що $m^2 \vdots 5$, тоді й $m \vdots 5$, тобто $m = 5k$. Отже, $(5k)^2 = 5n^2$ або $5k^2 = n^2$. Але тоді й $n \vdots 5$ і $n = 5l$. Маємо, що $\sqrt{5} = \frac{5k}{5l} = \frac{k}{l}$, тобто дріб виявляється скоротним, що суперечить припущенню. Отже, $\sqrt{5} \notin Q$ і є ірраціональним числом.

Приклад 4. Покажіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є число ірраціональне, а сума двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом.

Розв'язання

Нехай r – раціональне число, а α – ірраціональне. Припустимо, що їх сума $r+\alpha=\beta$ є раціональним числом. Тоді маємо $\alpha=\beta-r$. Але у правій частині рівності стоїть раціональне число (як різниця раціональних чисел), що суперечить умові. Отже, β – ірраціональне число.

Сума двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом. Наприклад:

1) нехай $\alpha=1{,}0100100010000\ldots$, $\beta=0{,}1011011101111...$, тоді їх сума $\alpha+\beta=1,(1)$ – раціональне число;

2) нехай $\alpha=1+\sqrt{5}$, $\beta=1-\sqrt{5}$; кожне з них є ірраціональним числом, як сума раціонального та ірраціонального чисел, а їхня сума $\alpha+\beta=2$ – раціональне число.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність:

а) $|2x-7|\le 9$; б) $|5-x|>8$;

в) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|\ge 2$; г) $|3x-15|>3x-15$;

д) $|x+3|-|x+1|<2$.

Розв'язання

а) Дана нерівність рівносильна подвійній нерівності:

$$-9\le 2x-7\le 9.$$

Додамо до всіх частин нерівності 7 та розділимо на 2:

$$-2\le 2x\le 16;\ -1\le x\le 8.$$

Замість подвійної нерівності можна розв'язувати систему:

$$\begin{cases}2x-7\le 9,\\ 2x-7\ge -9.\end{cases}$$

б) Щоб виконувалась дана нерівність, під модулем мають стояти числа або більші за 8, або менші за – 8. Отже, дана нерівність рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}5-x>8,\\ 5-x<-8,\end{array}\right. \text{ звідки } \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>13.\end{array}\right.$$

в) <u>1-й спосіб.</u> Дану нерівність можна розв’язати аналогічно до попередньої, перейшовши до сукупності $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{x-1} \geq 2, \\ \dfrac{x+2}{x-1} \leq -2.\end{array}\right.$

<u>2-й спосіб.</u> Властивість модуля $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ дозволяє перейти до рівносильної нерівності $\dfrac{|x+2|}{|x-1|} \geq 2$, яка, в свою чергу, при $x \neq 1$ рівносильна нерівності $|x+2| \geq 2|x-1|$. Оскільки обидві частини цієї нерівності невід’ємні, то вона рівносильна нерівності $(x+2)^2 \geq (2(x-1))^2$, звідки $x(x-4) \leq 0$. Розв’язком останньої є відрізок $[0;4]$. Враховуючи, що $x \neq 1$, вихідна нерівність справджується для $x \in [0;1) \cup (1;4]$.

г) З означення модуля слідує, що дана нерівність буде справджуватися для усіх *x*, при яких підмодульний вираз набуватиме від’ємних значень. Отже, маємо $3x - 15 < 0$, звідки $x < 3$.

д) <u>1-й спосіб.</u> Дану нерівність можна розв’язати, розкривши модулі за означенням на кожному з інтервалів, які визначають нулі підмодульних виразів.

<u>2-й спосіб.</u> Застосуємо до лівої частини даної нерівності властивість $|x| - |y| \leq |x-y|$:

$$|x+3| - |x+1| \leq |x+3-(x+1)| = |3-1| = |2| = 2.$$

Отже, для будь-яких значень змінної виконується нерівність $|x+3| - |x+1| \leq 2$. Оскільки дана нерівність, на відміну від останньої, є строгою, то з множини її розв’язків необхідно вилучити ті значення змінної, при яких $|x+3| - |x+1| = 2$. Легко бачити, що дана рівність матиме місце, якщо обидва модулі розкрити зі знаком «+»: $x+3-(x+1) = 2$. Отже, мають виконуватися умови $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ звідки маємо $x \geq -1$. Тоді вихідна нерівність справджується для $x \in (-\infty; -1)$.

Приклад 6. Доведіть, що числова множина $X=\left\{x \middle| x=\dfrac{n-1}{n}, n\in N\right\}$ обмежена. Знайдіть супремум та інфімум цієї множини.

Розв'язання

$\dfrac{n-1}{n}=1-\dfrac{1}{n}$. Очевидно, що для будь-якого $n\in N$ $0<\dfrac{1}{n}\le 1$. Отже, маємо $0\le\dfrac{n-1}{n}<1$. Це і означає, що дана множина обмежена як зверху, так і знизу, а, отже, обмежена загалом. Причому існує мінімум множини, отже, $\inf X=\min X=0$.

Покажемо, що $\sup X=1$, тобто, що 1 є найменшою верхньою межею. Припустимо, що існує деяке число $b\in R$, $0<b<1$, що також є верхньою межею множини *X*. Тоді для усіх $n\in N$ має виконуватись нерівність $\dfrac{n-1}{n}\le b$, натомість протилежна нерівність $\dfrac{n-1}{n}>b$ не повинна мати розв'язків. Проте це не так. При $0<b<1$ з останньої нерівності маємо $n>\dfrac{1}{1-b}$. Очевидно, яким би конкретно не було *b*, розв'язків буде безліч. Отже, $\sup X=1$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка (якщо вона існує) двох раціональних чисел є число раціональне.

2. Доведіть, що довжина діагоналі квадрата зі стороною 1 не виражається раціональним числом.

3. Доведіть, що число $\sqrt{a}$, де $a\in N$, є або натуральним, або ірраціональним.

4. Доведіть, що число є ірраціональним:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

5. Доведіть, що дійсне число 0,121122111222… є ірраціональним.

6. Покажіть, що різниця двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом.

7. Доведіть, що числа $\alpha-\beta$ та $\alpha+2\beta$ є ірраціональними, якщо α та β – ірраціональні числа, а їх сума – число раціональне.

8. Серед заданих чисел вкажіть раціональні та запишіть їх у вигляді звичайного дробу: $\sin 3$; $\cos 3\pi$; $\sqrt{3}$; $\ln 3$; $\ln\sqrt{e}$; $3{,}25$; $1{,}(3)$; $1{,}(18)$; $0{,}2(6)$; $2{,}5(26)$.

9. Якому числовому проміжку належить x, якщо:

а) $|x|\le 8$; б) $|x|>5$;

в) $|x|<3{,}5$; г) $|x|\ge 1$.

10. Для яких чисел x вірно, що:

а) $|x|=x$; б) $|x|>x$;

в) $|x|>-x$; г) $|x|=-x$?

11. Розв’яжіть рівняння:

а) $|3x-1|=5$; б) $|x^2-3|=1$;

в) $|x^2-1|=3$.

12. Розв’яжіть рівняння:

а) $|x^2-4|=x^2-4$; б) $|x^2-9|=9-x^2$;

в) $|2-x^2|=x^2-2$.

13. Розв’яжіть нерівність:

а) $|x^2-2x+3|>4$; б) $|x^2+5x-3|\le 3$.

14. Розв’яжіть нерівність:

а) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right|>\dfrac{x}{x+1}$; б) $|\sin x-1|>\sin x-1$.

15. Розв’яжіть нерівність:

а) $|x^2-3x|>|x^2-x|-|2x|$; б) $||5-x|-2|\le|x-3|$.

16. Розв’яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}|x-2|-|y+7|=2,\\|x-y-9|=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x+2|-|y-1|=4,\\|x-y+3|=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}|x-4|+|y-1|=2,\\|x+y-5|=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}|x+y+5|=\pi,\\|x+2|+|y+3|=3.\end{cases}$

17. Для заданої множини X знайдіть, якщо існує, максимум, мінімум, супремум, інфімум:

а) $X=\left[0{,}1;0{,}9\right]$; б) $X=\left(-2;2\right)$;

в) $X=\left[-1;0{,}9\right)$; г) $X=\left\{x\,\middle|\,x\in R,\left|x-1\right|<4\right\}$;

д) $X=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n+1}{n},n\in N\right\}$; е) $X=\left\{x\,\middle|\,x=(-1)^n\dfrac{1}{n},n\in N\right\}$.

Тема 1.2.

ФУНКЦІЯ

1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Понятійний апарат: функція, закон відповідності, числова функція, аргумент, область визначення функції, множина значень функції, графік функції, елементарні функції, складна функція (композиція функцій), оборотна функція, пряма функція, обернена функція.

Опорні твердження: властивості основних елементарних функцій, теорема про існування оберненої функції.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 2, § 2.1-2.2; [9] розділ 1, п. 1.2; [11] розділ 2, п. 2.1-2.4.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення функції.

2. Що називають областю визначення, множиною значень функції?

3. Що називають графіком функції?

4 Назвіть способи задання функції.

5. Які функції належать до основних елементарних функцій?

6. Що називають композицією функцій?

5. Яка залежність між областю визначення та множиною значень прямої та оберненої функцій?

6. Яке взаємне розміщення графіків прямої та оберненої функцій?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Побудуйте приклад функції, заданої однією формулою, областю визначення якої є інтервал $(-2; 6)$.

Розв′язання

Очевидно, задача не має однозначного розв'язку. Наведемо приклад орієнтовних міркувань.

Аргумент має задовольняти умовам $-2 < x < 6$ або $\begin{cases} x > -2, \\ x < 6. \end{cases}$

Звідси маємо $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 6 - x > 0. \end{cases}$ Нерівності можна ускладнити за допомогою рівносильних перетворень, наприклад, першу нерівність помножимо на 3: $3x + 6 > 0$. Оскільки нерівність строга, то вираз, що стоїть у лівій частині може бути під коренем парного степеня, що знаходиться в знаменнику дробу, або стояти під логарифмом. Отже, задану область визначення матимуть, наприклад, такі функції: $y = \dfrac{2}{\sqrt{3x+6}} + \dfrac{x}{\sqrt{6-x}}$, або $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{12+4x-x^2}}$, або $y = \log_2 (x+2)(6-x)$ тощо.

Приклад 2. Композицією яких найпростіших елементарних функцій є функція $y = \log_2 \cos x^2$?

Розв′язання

Для того, щоб у складній функції розрізнити, яка функція є внутрішньою, а яка – зовнішньою, можна прослідкувати порядок виконання дій над аргументом. У даному випадку послідовність дій така: піднесення до степеня, знаходження косинуса, логарифмування. Отже, дану функцію можна розглядати як складну $y = f\big(g(\varphi(x))\big)$, де $\varphi(x) = x^2$, $g(\varphi) = \cos\varphi$, $f(g) = \log_2 g$.

Приклад 3. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = 0{,}2^{3\sin x - 1}$; б) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; в) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання

Множину значень функцій, графіки яких неважко побудувати, зручно знаходити графічно. У інших випадках множину значень визначають аналітично.

а) Оцінимо, яких значень може набувати показник: $-1 \le \sin x \le 1$, $-3 \le 3\sin x \le 3$, $-4 \le 3\sin x - 1 \le 2$. Оскільки показникова функція з основою 0,2 є спадною, то свого найменшого значення вона набуватиме при найбільшому значенні аргументу і навпаки, тобто $0{,}2^2 \le 0{,}2^{3\sin x - 1} \le 0{,}2^{-4}$. Отже, для даної функції $E(y) = [0{,}04; 625]$.

б) Оцінимо, яких значень може набувати внутрішня функція $z = x^2 + 4$: $x^2 \ge 0$, $x^2 + 4 \ge 4$. Оскільки зовнішня функція $y = \sqrt{z}$ зростаюча, то свого найменшого значення вона набуватиме при найменшому значенні аргументу, тобто при $z = 4$: $\sqrt{x^2 + 4} \ge \sqrt{4} = 2$. Найбільшого значення задана функція, очевидно, не має. Отже, $E(y) = [2; +\infty)$.

в) Виразимо x через y: $2x = y(1 + x^2)$, $yx^2 - 2x + y = 0$ – відносно x одержали квадратне рівняння з параметром y.

Якщо $y = 0$, одержимо $x = 0$.

Якщо $y \ne 0$ маємо $D = 4 - 4y^2$. Значення x існуватимуть при умові, що $4 - 4y^2 \ge 0$, звідки $-1 \le y \le 1$.

Отже, для даної функції $E(y) = [-1; 1]$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -x + 1, -1 \le x \le 0, \\ x^2 + 1, 0 < x \le 1. \end{cases}$

Знайдіть значення: $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$.

Побудуйте графік даної функції.

2. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, -1 < x < 0, \\ \sin x, 0 \le x \le 2. \end{cases}$

Знайдіть значення: $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(2)$. Чи існує $f(\pi)$?

Побудуйте графік даної функції.

3. Чи тотожні функції:

а) $y=\sqrt{x-3}\sqrt{x+4}$ та $y=\sqrt{(x-3)(x+4)}$;

б) $y=\ln(x+7)(x+2)$ та $y=\ln(x+7)+\ln(x+2)$?

4. Заповніть таблицю:

Функція	*Умови, що визначають область визначення*	*Функція*	*Умови, що визначають область визначення*
$y=\sqrt[2n]{f(x)}$		$y=\log_{g(x)} f(x)$	
$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$		$y=\arcsin f(x)$	
$y=\log_a f(x)$		$y=\arccos f(x)$	

Знайдіть область визначення функції (**5-8**):

5. а) $y=\dfrac{1}{|x|-12}$; б) $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{9-x^2}}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{12-3x}}$; г) $y=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt[3]{\cos x}$.

6. а) $y=\sqrt{|x|(2x-10)}$; б) $y=\sqrt{5-\sqrt{4x^2-20x+25}}$;

в) $y=\ln(x-3)(10-x)$; г) $y=\log_2(x^3-7x^2+6x)$.

7. а) $y=\log_{\frac{x-4}{x+4}}\dfrac{x+3}{x-3}$; б) $y=\log_2\log_3 \mathrm{tg}x$.

8. а) $y=\arccos(3x-1)$; б) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{5}-5\right)$;

в) $y=\lg\cos(x+1)$; г) $y=\sqrt{\sin(\arcsin(4x-1))}$.

Знайдіть множину значень функції (**9-11**):

9. а) $y = 3 - 4x^2$; б) $y = -(x-1)^2 + 7$;

в) $y = |x-4| - 2$; г) $y = \sqrt{x-2} + 3$;

д) $y = 1 + |\cos x|$; е) $y = 3 - e^x$.

10. а) $y = \sqrt{5x - 4 - x^2}$; б) $y = \dfrac{x}{x+1}$;

в) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x} + 1$; г) $y = 2^{2x-1-x^2}$.

11. а) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; б) $y = \log_2(x^2 + 4)$;

в) $y = 2^{\cos 2x - 1}$; г) $y = 2 + \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

12. Композицією яких найпростіших елементарних функцій є задані функції:

а) $y = \sin^3 x$; б) $y = \sqrt{\cos x}$;

в) $y = 2^{3x+1}$; г) $y = \ln^2 2x$;

д) $y = \sqrt{\mathrm{tg} 7x}$; е) $y = e^{\cos x^2}$?

2. ОКРЕМІ КЛАСИ ФУНКЦІЙ

Понятійний апарат: обмежена / необмежена функція, монотонна функція, парна / непарна функція, періодична функція.

Опорні твердження: властивості монотонної функції, властивість графіка парної / непарної функції, властивості періодичної функції.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 2, § 2.3; [9] розділ 1, п. 1.2; [11] розділ 2, п. 2.5.

Питання для самоконтролю:

1. Яку функцію називають обмеженою / необмеженою зверху (знизу) на заданій множині?

2. Назвіть види монотонних функцій на заданій множині. Сформулюйте відповідні означення.

3. Сформулюйте означення парної / непарної функції. Яку властивість має графік парної / непарної функції?

4. Сформулюйте означення періодичної функції.

5. Чи є періодичною стала функція? Якщо так, то що буде її періодом?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Користуючись означенням, доведіть, що функція $f(x)=x^2-4x+5$ зростає на $(2;+\infty)$.

Розв′язання

Нехай $2<x_1<x_2$.

Розглянемо різницю відповідних значень функції:

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-4x_1+5-x_2^2+4x_2-5=x_1^2-x_2^2-4(x_1-x_2)=$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2-4).$$

З'ясуємо, який знак має ця різниця. Оскільки $x_1<x_2$, то перший множник від'ємний. Оскільки $x_1>2$ і $x_2>2$, то $x_1+x_2>4$ і другий множник буде додатним. Отже, $f(x_1)-f(x_2)<0$, тобто $f(x_1)<f(x_2)$ і дана функція на вказаному проміжку є зростаючою.

Приклад 2. Нехай функція $y=f(x)$ є періодичною з періодом *T*. Доведіть, що функція $y=f(ax+b)$, $a\neq 0$ має період $\frac{T}{a}$.

Розв′язання

Оскільки T є періодом функції $y=f(x)$, то $f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f\left(ax+T+b\right)=f\left(\left(ax+b\right)+T\right)=f\left(ax+b\right)$. Отже, $\frac{T}{a}$ є періодом функції.

Завдання для самостійного розв′язування

Дослідіть функцію на парність (**1-2**):

1. а) $y = \dfrac{|x-7|}{x+1} + \dfrac{|x+7|}{x-1}$; б) $y = x^3$, де x – ребро куба;

в) $y = \sin x - 2$; г) $y = \cos x - 2$.

2. а) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

3. Доведіть, що:
а) добуток двох парних функцій є функцією парною;
б) добуток двох непарних функцій є функцією парною;
в) добуток парної і непарної функцій є функцією непарною.

4. Дослідіть на парність функцію $f(x) = \sin 2x \cos 3x$.

5. Доведіть, що:
а) складна функція є парною, якщо внутрішня функція – парна;
б) складна функція є парною, якщо внутрішня функція – непарна, але зовнішня – парна;
в) складна функція є непарною, якщо і внутрішня, і зовнішня функції – непарні.

6. Дослідіть функцію на парність:

а) $y = \cos\dfrac{\pi}{12} + \log_{\frac{1}{2}} x^2$; б) $y = 2^{\cos x} + (x-2)^2$;

в) $y = \log_2(\sin x)$; г) $y = \log_{0,1}(\cos x)$.

7. Дослідіть на парність функцію $f(x) = \sin^5 2x \cos^2 3x$.

8. Побудуйте графік функції $y = f(x)$, задайте дану функцію однією формулою, якщо відомо, що:
1) функція парна і при $x \ge 0$ $f(x) = \sqrt{x}$;
2) функція непарна і при $x \ge 0$ $f(x) = x^2$.

9. Користуючись означенням, доведіть, що функція $y = \dfrac{4}{2-x}$ зростає на $(2;+\infty)$.

10. Користуючись означенням, доведіть, що функція $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$ спадає на $(-\infty; -1)$.

11. Знайдіть період функції:

а) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$; б) $y = \mathrm{tg}\left(\sqrt{2}x - 1\right)$;

в) $y = 2^{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$; г) $y = \log_2 \sin\left(\frac{4}{3}x - 1\right)$.

Тема 1.3. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

1. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Понятійний апарат: числова послідовність, формула загального члена послідовності, рекурентна формула, зростаюча (спадна) числова послідовність, монотонна послідовність, обмежена зверху (знизу) послідовність, обмежена послідовність.

Опорні твердження: властивості числової функції, визначеної на множині натуральних чисел

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 3, § 3.1; [9] розділ 1, п. 1.5; [11] розділ 2, п. 2.5.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення числової послідовності.
2. Чи може числова послідовність мати скінченне число членів?
3. Чи може числова послідовність мати однакові члени?
4. Яку послідовність називають зростаючою (спадною)?
5. Яку послідовність називають монотонною?
6. Яку послідовність називають обмеженою зверху (знизу)?
7. Яку послідовність називають обмеженою?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Чи може число $a=0$ бути членом послідовності $a_n=n^2-2n-3$?

Розв′язання

Якщо число a є членом послідовності (a_n), то рівняння $a_n=a$ повинно мати натуральні корені. Рівняння $n^2-2n-3=0$ має корені $n=-1$ або $n=3$. Отже, для даної послідовності $a_3=0$.

Приклад 2. Доведіть, що числова послідовність $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ спадає.

Розв′язання

<u>1-й спосіб.</u> Для $n\in N$ маємо $(n+1)^2>n^2$. Тоді $\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n^2}$.

Отже, $a_{n+1}<a_n$, тобто послідовність спадна.

<u>2-й спосіб.</u> Розглянемо різницю

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2n^2}=\dfrac{-(2n+1)}{(n+1)^2n^2}<0$. Отже, $a_{n+1}<a_n$, тобто послідовність спадна.

<u>3-й спосіб.</u> Для послідовностей, члени яких мають сталий знак, визначити характер монотонності можна не тільки за різницею сусідніх членів, а й за їх часткою.

Маємо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}<1$. Отже, $a_{n+1}<a_n$, тобто послідовність спадна.

Приклад 3. Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою зверху:

а) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; б) $a_n=\dfrac{n}{3^n}$.

Розв′язання

а) Представимо загальний член послідовності у такому вигляді:

$a_n = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$. Отже, при будь-якому натуральному n виконується нерівність $a_n < 1$. А це й означає, що послідовність обмежена зверху.

б) Покажемо, що дана послідовність є спадною:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n} = \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{3} \cdot 2 = \dfrac{2}{3} < 1$. Отже, $a_{n+1} < a_n$, тобто послідовність спадна. А це й означає, що послідовність обмежена зверху, наприклад, своїм першим членом.

Приклад 4. Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою знизу:

а) $a_n = n^2 + n + 1$; б) $a_n = n + \dfrac{5}{n}$.

Розв′язання

а) Очевидно, що всі члени даної послідовності додатні. Значить ця послідовність обмежена знизу, наприклад, нулем.

б) Для оцінки загального члена даної послідовності скористаємося відомою нерівністю обернених величин (якщо $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$): $a_n = n + \dfrac{5}{n} > n + \dfrac{1}{n} \geq 2$.

Завдання для самостійного розв′язування

1. Знайдіть перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена:

а) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$; б) $a_n = \dfrac{n!}{n^2}$;

в) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$; г) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

2. З'ясуйте, чи може число a бути членом даної послідовності. Якщо так, то знайдіть номер цього члена:

а) $a = 1$, $a_n = n^2 - 4n + 5$; б) $a = 3$, $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$;

в) $a = 2$, $a_n = 2\sin\dfrac{n\pi}{2}$; г) $a = -2$, $a_n = 3^n - 7$.

3. Підберіть можливу формулу загального члена послідовності за даними першими її членами:

а) 4, 9, 16, 25, 36, … ; б) $\sqrt{1\cdot 2}$, $\sqrt{2\cdot 3}$, $\sqrt{3\cdot 4}$, $\sqrt{4\cdot 5}$, … ;

в) $\frac{1}{11}, \frac{1}{21}, \frac{1}{31}, \frac{1}{41}, \frac{1}{51}, \ldots$; г) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

4. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою загального члена, є спадною:

а) $a_n = 11 - 3n$; б) $a_n = -n^2 + n - 1$.

5. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою загального члена, є зростаючою:

а) $a_n = \frac{n^2}{n^2+10}$; б) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

6. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою загального члена, є обмеженою зверху:

а) $a_n = -n^2 - n$; б) $a_n = -n^2 + 2n - 4$;

в) $a_n = \frac{n+3}{n+5}$; г) $a_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}$.

7. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою загального члена, є обмеженою знизу:

а) $a_n = n^2 - 5n + 2$; б) $a_n = n^3 - 8n$;

в) $a_n = \frac{3n-5}{n+4}$; г) $a_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{n}$.

2. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ: ОЗНАЧЕННЯ, ВЛАСТИВОСТІ

Понятійний апарат: границя числової послідовності, збіжна (розбіжна) послідовність, фундаментальна послідовність, нескінченно мала (нескінченно велика) послідовність, підпослідовність, число *e*.

Опорні твердження: теорема про обмеженість збіжної послідовності, необхідна і достатня умова збіжності послідовності (критерій Коші), властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей, теорема про існування границь для монотонних послідовностей, теорема про існування границі послідовності (a_n), де $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, при $n \to \infty$.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 3, § 3.1-3.2; [9] розділ 1, п. 1.5; [11] розділ 2, п. 2.6-2.8.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення границі числової послідовності.
2. У чому полягає геометричний зміст границі числової послідовності?
3. Чи може в околі границі числової послідовності міститися нескінченне число її членів?
4. У чому полягає критерій Коші збіжності числової послідовності?
5. Яку послідовність називають нескінченно малою?
6. Яку послідовність називають нескінченно великою?
7. В яких випадках монотонна послідовність має границю?
8. Границя якої послідовності дорівнює числу *e*? До якої числової множини воно належить?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Доведіть за допомогою означення границі послідовності, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Розв′язання

Потрібно показати, що, яке б $\varepsilon > 0$ ми не взяли, для нього ***існує*** натуральне число (номер) n_0, таке, що для всіх номерів $n > n_0$ буде виконуватися нерівність $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon$. Отже, візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер n_0.

Розглянемо різницю $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$. Знайдемо, для яких *n* виконується нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Для цього розв'яжемо дану нерівність відносно *n*. Оскільки $n+1>0$, то маємо рівносильну нерівність $1 < \varepsilon(n+1)$, звідки $1 < \varepsilon \cdot n + \varepsilon$, $\varepsilon \cdot n > 1 - \varepsilon$, $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ або $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. При конкретному значенні ε у правій частині нерівності одержимо деяке число, можливо дробове. Тоді за n_0 доцільно взяти число, яке становить цілу частину числа $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$: $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

Наприклад, при $\varepsilon = \dfrac{3}{25}$ $n_0 = \left[\dfrac{25}{3} - 1\right] = 7$; при $\varepsilon = 0{,}0001$ $n_0 = 9999$.

Тим самим доведено, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Зауваження. Знайдений номер $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ мінімально можливий. Взагалі, за n_0 можна прийняти будь-який більший за нього номер. Наприклад, часто беруть наступний номер, тобто номер на 1 більший за цілу частину.

Приклад 2. Доведіть за допомогою означення, що послідовність $a_n = \dfrac{1}{n^3 + n + 5}$ є нескінченно малою.

Розв'язання

Необхідно довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^3 + n + 5} = 0$, тобто потрібно показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться номер n_0, такий, що для всіх номерів $n > n_0$ буде виконуватися нерівність $\left|\dfrac{1}{n^3 + n + 5}\right| < \varepsilon$.

Очевидно, що підмодульний вираз набуває лише додатних значень, тому модуль можемо опустити. Отже, будемо шукати *n* з нерівності $\dfrac{1}{n^3 + n + 5} < \varepsilon$. Розв'язати таку нерівність відносно *n* доволі складно, проте в цьому і немає потреби. Оскільки $\dfrac{1}{n^3 + n + 5} < \dfrac{1}{n^3}$, то для кожного *n*, яке задовольнятиме нерівність $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$, буде виконуватися і нерівність $\dfrac{1}{n^3+n+5}<\varepsilon$. Отже, $n>\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ і за n_0 можемо взяти цілу частину: $n_0=\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right]$.

Завдання для самостійного розв′язування

1. Зобразіть у координатній площині xOy кілька перших членів числової послідовності, заданої формулою загального члена. До якого числа наближаються члени послідовності при необмеженому зростанні n?

а) $a_n=\dfrac{1}{n}$; б) $a_n=-\dfrac{5}{n}$;

в) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$; г) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

2. Користуючись теоремою про збіжність монотонної послідовності, доведіть, що послідовність (a_n) є збіжною:

а) $a_n=\dfrac{n}{n+5}$; б) $a_n=\dfrac{n}{2^n}$;

в) $a_n=\dfrac{n+1}{2n-1}$; г) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

3. Послідовність задано формулою загального члена $a_n=\dfrac{n-1}{2n+1}$. Для заданого числа $\varepsilon=0{,}03$ вкажіть такий номер n_0, що для всіх $n>n_0$ виконується нерівність $\left|a_n-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

4. Доведіть за допомогою означення границі послідовності, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n+2}{2n-1}=-\dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+2}{n^2+3n-1}=2$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-1}{2n^2+2n-3}=\dfrac{1}{2}$.

Вказівка:

в) $\left|\dfrac{2n^2-n+2}{n^3+3n-1}-2\right|=\left|\dfrac{-7n+4}{n^2+3n-1}\right|=\dfrac{7n-4}{n^2+3n-1}<\dfrac{7n}{n^2+3n-1}<\dfrac{7n}{n^2}=\dfrac{7}{n}$.

Отже, для відшукання n_0 достатньо розв'язати відносно n нерівність $\dfrac{7}{n}<\varepsilon$.

5. Доведіть за допомогою означення, що послідовність (a_n) є нескінченно малою:

а) $a_n=\dfrac{1}{n}$; б) $a_n=-\dfrac{4}{n^2}$;

в) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+7}}$; г) $a_n=\dfrac{5}{n^4+n-3}$.

6. Користуючись теоремою про добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої послідовності, доведіть, що послідовність (a_n) є нескінченно малою:

а) $a_n=\dfrac{\cos n}{n^2+1}$; б) $a_n=\dfrac{\sin^2(n+2)}{n+2}$;

в) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$; г) $a_n=\dfrac{1-n}{n\sqrt{n^2+1}}$.

Вказівка: г) покажіть, що $\left|\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right|<1$.

3. ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Понятійний апарат: границя числової послідовності, збіжна (розбіжна) послідовність, нескінченно мала (нескінченно велика) послідовність, сума, різниця, добуток, частка послідовностей.

Опорні твердження: теореми про границі послідовностей (про єдиність границі, про перехід до границі під знаком модуля, про збереження послідовністю знаку своєї границі, про граничний перехід в рівності, про граничний перехід в нерівності, про границю проміжної послідовності), теорема про арифметичні властивості границь.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 3, § 3.1-3.2; [9] розділ 1, п. 1.5; [11] розділ 2, п. 2.9-2.14.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте теорему про границі суми, добутку, частки збіжних послідовностей.
2. Сформулюйте теорему про границю проміжної послідовності.

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Обчисліть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-3}{12+4n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n^3}{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2-5}$.

Розв′язання

а) У чисельнику і знаменнику стоять послідовності, які мають нескінченні границі, тобто є нескінченно великими послідовностями – так звана невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Тому використати теорему про границю частки не можна. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n, а потім застосуємо теореми про границю частки та границю суми (різниці):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{12+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{\frac{12}{n}+4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{n}+4\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{5-0}{0+4}=\frac{5}{4}.$$

б) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь n виразу, що стоїть у знаменнику, тобто на n^2, а потім застосуємо арифметичні властивості границь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n^2}-n}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-\infty}{1+0}=-\infty.$$

в) Аналогічно, поділимо чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь n виразу, що стоїть у знаменнику, тобто на n^2.

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}=\dfrac{0}{1-0}=0$.

Приклад 2. Обчисліть границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Розв'язання

Маємо різницю двох нескінченно великих послідовностей (невизначеність типу $[\infty-\infty]$). Розглянемо даний вираз як дріб із знаменником 1 і позбавимося ірраціональності в чисельнику: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Тоді за властивістю про зв'язок нескінченно великої і нескінченно малої послідовностей маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

Приклад 3. Обчисліть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n-1}$.

Розв'язання

а) Маємо невизначеність типу $[1^\infty]$. Виконаємо перетворення формули загального члена послідовності таким чином, щоб можна було скористатися формулою $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-2}=e^{-2}.$$

б) Для перетворення формули загального члена послідовності використаємо властивості степеня та ділення чисельника і знаменника дробу на n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\cdot 1 = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Завдання для самостійного розв′язування

1. Знайдіть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{-2n^2+3}$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{(n+1)(n+2)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2-2n}\cdot\frac{n+3}{4n+5}\right)$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(n-1)}{4n^3+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-2)(2n+3)}{(4n-1)(n+3)(5n-2)}$;   е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^3$.

2. Знайдіть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{n+3}}$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2+n^2}}$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$.

Вказівка: а) поділіть чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{n}$.

3. Знайдіть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n^2-1}$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3n^2-4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{\sqrt{4n^4+1}}$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n+2}$.

4. Знайдіть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2+n}-\sqrt{3+n})$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$.

5. Знайдіть границю послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^{2n+1}$.

Тема 1.4.
ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ. ВИЗНАЧНІ ГРАНИЦІ

Понятійний апарат: окіл точки x_0; δ-окіл точки x_0; границя функції в точці, границя функції по множині, лівостороння (правостороння) границя функції в точці, границя функції на нескінченності (скінченна або нескінченно віддалена точка), нескінченна границя функції в точці; вертикальна асимптота графіка функції, горизонтальна асимптота графіка функції; нескінченно малі (нескінченно великі) функції, невизначеності, їх основні типи, еквівалентні нескінченно малі функції.

Опорні твердження: основні теореми про границю функції в точці (про єдиність границі, про обмеженість функції, що має границю, про збереження функцією знаку своєї границі, про граничний перехід в рівності, про граничний перехід в нерівності, про границю проміжної функції), теорема про арифметичні властивості границі функції в точці; перша та друга визначні границі та їх наслідки; теорема про зв'язок між границею функції в точці та її односторонніми границями; властивості нескінченно малих (нескінченно великих) функцій.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 3, § 3.3-3.4; [9] розділ 1, п. 1.5; [11] розділ 2, п. 2.15-2.21.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають δ-околом точки x_0?
2. Сформулюйте означення границі функції в точці за Коші і за Гейне.
3. У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці?
4. Які функції називають нескінченно малими (нескінченно великими)?
5. Що розуміють під порівнянням нескінченно малих функцій?
6. Назвіть найбільш вживані еквівалентності нескінченно малих функцій.
7. Який існує зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями?
8. Назвіть основні типи невизначеностей та методи їх розкриття.

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Обчисліть границю функції:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Розв′язання

а) Застосуємо основні теореми про границі:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+5}}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}x^2+2\lim\limits_{x\to 4}x-\lim\limits_{x\to 4}3}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+5}}=\frac{4^2+2\cdot 4-3}{\sqrt{4+5}}=\frac{21}{3}=7.$$

б) Границя знаменника дорівнює 0:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)=1^2+1-2=0$, тому застосувати теорему про границю частки не можемо. При цьому границя чисельника теж дорівнює 0: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=1^2-1=0$. Отже, маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники та скоротимо дріб:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}.$$

Зауваження. Оскільки $x\to 1$, але $x\neq 1$, то і $x-1\neq 0$, отже, скорочувати на даний вираз можна.

Приклад 2. Обчисліть границю функції:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання

а) У цьому випадку також маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Виконаємо у чисельнику тотожні перетворення і застосуємо першу визначну границю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

б) Оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ не існує, то використати теорему про границю частки не можна. У цьому випадку скористаємось властивістю про добуток нескінченно малої функції $\dfrac{1}{x}$ на обмежену $\sin x$ і дістанемо $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \cdot \sin x = 0$.

в) Нехай $\arcsin x = y$, тоді $x = \sin y$. Якщо $x \to 0$, то й $y \to 0$. Отже, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\sin y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}} = 1$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Обчисліть границю функції в точці:

а) $\lim\limits_{x \to -2} \left(2x^3 - 3x^2 + 6\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x^3 + 2\cos x\right)$; г) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2\right)^{\lg x}$.

2. Розкрийте невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ та обчисліть границю:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^2-12x-4}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$.

3. Обчисліть границю функції:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$.

4. Обчисліть границю функції, використавши першу визначну границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$.

5. Обчисліть границю функції, застосувавши заміну змінної:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{x^2-\pi^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

Вказівка. а) Якщо зробити заміну $x-\dfrac{\pi}{3}=y$, то при $x\to\dfrac{\pi}{3}$ буде $y\to 0$, що дозволить застосувати першу визначну границю.

6. Обчисліть границю функції на нескінченності:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+5x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2}{3x^4-7x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

Вказівка. Прийоми обчислення границь функцій на нескінченності аналогічні до прийомів обчислення границь числових послідовностей.

7. Обчисліть границю функції, використавши другу визначну границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{6x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{3x-2}$.

2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ

Понятійний апарат: неперервність функції в точці; неперервність функції на множині, одностороння неперервність, точка розриву першого роду, стрибок функції у точці, усувний розрив, стрибковий розрив; точка розриву другого роду; рівномірно неперервна функція.

Опорні твердження: найпростіші властивості неперервних функцій; властивості функцій, неперервних на відрізку: перша та друга теореми Вейєрштрасса, перша та друга теореми Больцано-Коші; теорема про існування, монотонність та неперервність оберненої функції.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 4, § 4.1-4.3; [9] розділ 1, п. 1.6; [11] розділ 2, п. 2.22-2.28.

Питання для самоконтролю:

1. Яка функція називається неперервною в точці? Сформулюйте різні означення функції, неперервної в точці.
2. Яка функція називається неперервною на множині?
3. Яка функція називається неперервною в точці справа (зліва)?

4. Які точки називають точками розриву функції?

5. За якої умови точка розриву є точкою розриву першого роду? другого роду?

6. За якої умови функцію називають неперервною на відрізку?

7. Чи правильне твердження, обернене до наступного: «Якщо функція рівномірно неперервна на якомусь проміжку, то вона неперервна на цьому проміжку»? Наведіть приклад.

8. Сформулюйте теорему Кантора про рівномірну неперервність функції.

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Знайдіть односторонні границі функції при $x \to x_0$:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2x-1, & 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad x_0 = 1;$

б) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}, \qquad x_0 = 2.$

Розв′язання

а) Для обчислення лівої границі в точці $x_0 = 1$ треба розглядати значення аргументу $x < 1$, отже, використовувати першу формулу $f(x) = x^2$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = \lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

Для обчислення правої границі розглядаємо $x > 1$ і використовуємо другу формулу $f(x) = 2x - 1$:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (2x-1) = \lim_{x \to 1}(2x-1) = 1.$$

Оскільки ліва та права границі рівні, то існує границя $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

б) Чисельник дробу в обох випадках прямує до 4, а знаменник є нескінченно малою функцією, яка набуває від'ємних (границя зліва) або додатних (границя справа) значень. Тому $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$.

Приклад 2. Користуючись означенням неперервності функції на мові приростів ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$), доведіть неперервність функції $f(x) = \sin 2x$ в області її визначення.

Розв'язання

Для даної функції $D(f) = R$. Зафіксуємо довільну точку x_0 та надамо аргументу приросту Δx: $x_0 + \Delta x$. Обчислимо відповідний приріст функції:

$$\Delta f(x_0) = \sin\bigl(2(x_0 + \Delta x)\bigr) - \sin 2x_0 = 2\sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x).$$

При $\Delta x \to 0$ маємо $\sin \Delta x \to 0$, $\cos(2x_0 + \Delta x) \to \cos 2x_0$. Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 2 \cdot 0 \cdot \cos 2x_0 = 0$. А це означає, що функція неперервна у будь-якій точці області визначення.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ на неперервність. Визначте характер точок розриву, якщо такі є.

Розв'язання

Як відомо, функції, що стоять у чисельнику та знаменнику, є неперервними в усіх точках множини *R*. Отже, дана функція теж є неперервною в усіх точках, крім точок -2 і 2, в яких вона не визначена.

Якщо $x \neq \pm 2$, то $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2}$.

У точці $x = -2$ маємо нескінченні односторонні границі: $\lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$. Отже, точка $x = -2$ є точкою розриву *другого роду*.

У точці $x = 2$ існує скінченна границя: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$. Отже, дана точка є точкою розриву *першого роду* (*усувного*). Ми можемо усунути розрив у даній точці, поклавши $f(2) = \dfrac{1}{4}$.

Завдання для самостійного розв′язування

1. Знайдіть односторонні границі функції при $x \to x_0$:

а) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \le 2, \\ -2x+1, & x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{(x-3)^3}, \quad x_0 = 3$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}, \quad x_0 = 1$;

г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}, \quad x_0 = 0$.

Вказівка: у прикладах в) і г) спочатку спростіть формулу, якою задано функцію.

2. Користуючись означенням неперервності функції на мові приростів, доведіть неперервність функції в області її визначення:

а) $f(x)=x^2-3x+1$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

в) $f(x)=\cos x$; г) $f(x)=\sqrt{x}$.

3. Дослідіть функцію на неперервність. Визначте характер точок розриву, якщо такі є. Побудуйте графік.

а) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}$.

4. Дослідіть функцію на неперервність. Визначте характер точок розриву, якщо такі є. Побудуйте графік.

а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ -x+4, & x>2; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 0, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$

5. Побудуйте графік функції та вкажіть точки розриву:

а) $f(x)=\dfrac{9-x^2}{|x-3|}$; б) $f(x)=\dfrac{|2x+4|}{x+2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{|x|}$; г) $f(x)=x+\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

6. Перевірте, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:

а) $x^3+x-3=0$, $[1;2]$; б) $x^4-4x+1=0$, $[-1;0]$;

в) $x+e^x=0$, $[-1;0]$; г) $\mathrm{tg}x-\cos x=0$, $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Вказівка: використайте теорему Больцано-Коші.

Питання до колоквіуму 1

1. Поняття множини. Операції над множинами.
2 Множина дійсних чисел. Основні числові множини.
3. Окіл точки. Принцип Кантора
4. Точні межі числових множин. Теорема про існування точних меж.
5. Модуль дійсного числа. Властивості модуля.
6. Поняття функції. Числові функції. Різні способи задання функції.
7. Поняття звуження і розширення функції. Поняття складної функції.
8. Основні класи функцій (обмежені, монотонні, парні, непарні, періодичні).
9. Елементарні перетворення графіків функцій.
10. Числова послідовність. Способи задання послідовності. Основні класи послідовностей (обмежені, монотонні).
11. Границя числової послідовності, її геометричний зміст.
12. Необхідна ознака збіжності послідовності.
13. Теорема про границю монотонної обмеженої послідовності.
14. Поняття фундаментальної послідовності. Необхідна і достатня умова збіжності послідовності. Критерій Коші.
15. Теорема про єдність границі послідовності.
16. Властивості збіжних послідовностей (теореми 2-4).
17. Теорема про границю проміжної послідовності.
18. Нескінченно малі послідовності, їх властивості.
19. Нескінченно великі послідовності, їх властивості.
20. Арифметичні властивості границі послідовності.
21. Підпослідовність. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.
22. Нерівність Бернуллі.
23. Число $\boldsymbol{e}$.

24. Границя функції в точці (означення за Коші, означення за Гейне).
25. Властивості границі функції в точці.
26. Перша визначна границя.
27. Наслідки з першої визначної границі.
28. Границя функції по множині. Односторонні границі. Теорема про зв'язок між границею функції в точці та її односторонніми границями.
29. Границя функції на нескінченності. Нескінченна границя функції в точці.
30. Друга визначна границя.
31. Наслідки з другої визначної границі.
32. Нескінченно малі функції в точці та їх властивості. Нескінченно великі функції в точці.
33. Порівняння нескінченно малих функцій.
34. Неперервні функції. Одностороння неперервність.
35. Класифікація точок розриву функції однієї змінної.
36. Властивості функцій, неперервних на відрізку (перша та друга теореми Больцано-Коші).
37. Властивості функцій, неперервних на відрізку (перша та друга теореми Вейєрштрасса).
38. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора.
39. Точки розриву монотонної функції. Ознака неперервності монотонної функції.
40. Теорема про існування, монотонність та неперервність оберненої функції

Змістовий модуль 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 2.1.

ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ

1. ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ. МЕХАНІЧНИЙ ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Понятійний апарат: приріст аргументу, приріст функції, миттєва швидкість, дотична до кривої, кутовий коефіцієнт дотичної, нормаль до кривої, похідна функції у точці; диференційовна функція, похідна n-ного порядку.

Опорні твердження: теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції, про похідну суми, добутку і частки двох функцій, про похідну складної функції, про похідну оберненої функції), теорема про похідні основних елементарних функцій.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 5, § 5.1-5.2; [9] розділ 1, п. 1.7; [11] розділ 3, п. 3.1-3.4.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
2. Поясніть геометричний зміст похідної.
3. Поясніть механічний зміст похідної.
4. Сформулюйте теорему про похідну суми, добутку і частки двох функцій.
5. Назвіть формули похідних основних елементарних функцій.
6. Як знайти похідну композиції функцій (складної функції)?
7. Як знайти похідну оберненої функції?
8. Запишіть рівняння дотичної до кривої.
9. Запишіть рівняння нормалі до кривої.

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. За означенням похідної обчисліть похідну функції $f(x) = \sin 2x$.

Розв′язання

1-й крок. Похідну функції визначають у фіксованій точці x_0. Тому, насамперед, візьмемо довільне, але фіксоване (!) значення аргументу x_0 і надамо йому приросту: $x_0 + \Delta x$. Знайдемо відповідне значення функції: $f(x_0 + \Delta x) = \sin 2(x_0 + \Delta x)$.

2-й крок. Обчислимо приріст функції $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0 =$$

$$= 2\sin\frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2}\cos\frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2} = 2\sin\Delta x\cos(2x_0 + \Delta x).$$

3-й крок. Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\sin\Delta x\cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\cos(2x_0 + \Delta x).$$

4-й крок. Обчислимо похідну $f'(x_0)$, тобто знайдемо границю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(2x_0 + \Delta x) =$$

$$= 2\cdot 1\cdot\cos 2x_0 = 2\cos 2x_0.$$

Отже, для довільного значення аргументу $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$.

Приклад 2. Використовуючи правила і формули диференціювання, знайдіть похідну функції $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 4x - 3$.

Розв′язання

Запишемо функцію у вигляді $y = 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-1} + 4x - 3$. Застосовуючи формулу $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ та правила диференціювання сталої і суми, знаходимо:

$$y' = 3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} + 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - (-1)x^{-2} + 4 = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 4.$$

Приклад 3. Використовуючи формули та правило диференціювання складної функції, знайдіть похідну функції:

а) $y=(1-2x)^3$; б) $y=\log_{x^3} x$.

Розв'язання

а) Позначимо внутрішню функцію $u=1-2x$. Тоді $y=u^3$. Використовуючи правило диференціювання складної функції, маємо: $y'_u=3u^2$, $u'_x=-2$, отже, $y'=3u^2\cdot(-2)=3(1-2x)^2\cdot(-2)=-6(1-2x)^2$.

Зауваження. Більш коротко можна записувати так: $y'=3(1-2x)^2\cdot(1-2x)'=-6(1-2x)^2$.

б) Перейдемо до натуральних логарифмів: $y=\log_{x^3} x=\dfrac{\ln x}{\ln x^3}$. Тоді похідну можна знайти як похідну частки:

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x^3-3x^2\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\ln x}{\left(\ln x^3\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot 3\ln x-\frac{3}{x}\ln x}{\left(\ln x^3\right)^2}=0.$$

Відповідь можна одержати і простіше:

$y=\log_{x^3} x=\frac{1}{3}\log_x x=\frac{1}{3}$, тобто, дана функція є сталою з областю визначення $D(y)=(0;1)\bigcup(1;+\infty)$. Отже, її похідна дорівнює нулю.

Приклад 4. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до параболи $y=x^2-x-3$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

Розв'язання

Відомо, що $x_0=2$, тоді $f(x_0)=f(2)=2^2-2-3=-1$. Знайдемо похідну даної функції: $f'(x)=2x-1$. Тоді $f'(x_0)=f'(2)=2\cdot2-1=3$. Підставимо знайдені значення у рівняння дотичної та нормалі відповідно: $y-(-1)=3(x-2)$ та $y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-2)$, звідки $3x-y-7=0$ та $x+3y+1=0$.

Завдання для самостійного розв′язування

1. За означенням похідної обчисліть $f'(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{2x}{3x+1}$; б) $f(x)=x^3+2x+3$.

2. Використовуючи правила і формули диференціювання, знайдіть похідну функції:

а) $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{x^2}{2}+2\sqrt{2}$;

в) $y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$; г) $y=3\sqrt[6]{x}+\dfrac{4}{3x^9}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\sqrt{x^6}$.

3. Використовуючи формули та правила диференціювання добутку або частки, знайдіть похідну функції:

а) $y=\left(x^2+5\right)\ln x$; б) $y=\dfrac{e^x}{\mathrm{tg}x}$;

в) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$; г) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

4. Використовуючи формули та правило диференціювання складної функції, знайдіть похідну функції:

а) $y=\left(2x^2-3x+1\right)^3$; б) $y=\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\sin(2x-1)$; г) $y=\cos\dfrac{1}{x}$;

д) $y=\cos^2\dfrac{x}{4}$; е) $y=\sin\left(\ln x^2\right)$;

є) $y=\lg\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; ж) $y=\mathrm{arctg}\left(\ln^2 x\right)$.

5. Знайдіть похідну функції:

а) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$; б) $y=\sqrt[3]{(x-4)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$;

в) $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$; г) $y=\cos^5 3x\cdot\mathrm{tg}(4x+1)^3$;

д) $y=\mathrm{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$; е) $y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$;

є) $y = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}$; ж) $y = \dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$.

6. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \ln\cos x$; б) $y = (x^2 + 5)\ln x^3$;

в) $y = \log_2(\sin^2 x)$; г) $y = \log_2 \log_3(x^2 + 1)$;

д) $y = \log_x 2$; е) $y = \log_{x^2} e$;

є) $y = \log_{x^4}(x + 2)$; ж) $y = \log_x(x^2 + 1)$.

Вказівка. У завданнях д) – ж) перейдіть до натуральних логарифмів.

7. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої у точці з абсцисою x_0:

а) $y = x^2 - 3$, $x_0 = 1$; б) $y = \sin^2 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

8. Знайдіть, у якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

а) паралельна прямій $y = 2x - 4$;

б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$.

9. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою $s = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + t$. Знайдіть швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 3$ с.

10. Ліфт після вмикання рухається за законом $x = 2t^2 + 3t + 1$ (у метрах). Знайдіть швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с.

11. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?

12. Турист віддаляється від підніжжя скелі, висота якої 80 м, зі швидкістю 6 км/год. Яка швидкість віддалення туриста від вершини скелі в той момент, коли він знаходиться на відстані 60 м від її підніжжя?

2. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНО ТА НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ

Понятійний апарат: логарифмічна похідна, похідна степенево-показникової функції; похідна параметрично заданої функції, похідна неявно заданої функції.

Опорні твердження: теорема про похідну складної функції, теорема про похідну параметрично заданої функції.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 5, § 5.2; [9] розділ 1, п. 1.7; [11] розділ 3, п. 3.4, п.3.6.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають логарифмічною похідною?
2. Назвіть способи знаходження похідної степенево-показникової функції.
3. Запишіть формулу диференціювання параметрично заданої функції.
4. Як знайти похідну неявно заданої функції?

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$ за допомогою логарифмічної похідної.

Розв'язання

Прологарифмуємо задану рівність: $\ln y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$.

У правій частині виконаємо тотожні перетворення:

$$\ln y=\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x-2};$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1)^2 - \ln(x-2)\right);$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(2\ln(x+1) - \ln(x-2)\right).$$

Тоді $\left(\ln y\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$.

Згідно з формулою $y' = y\left(\ln y\right)'$ маємо:

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}}\cdot\frac{x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x-5}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^4}}.$$

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $y = x^x$.

Розв'язання

1-й спосіб. Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$\ln y = \ln x^x$; $\ln y = x\cdot\ln x$; $\left(\ln y\right)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Тоді $y' = x^x(\ln x + 1)$.

2-й спосіб. Використаємо правило диференціювання степенево-показникової функції:

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = e^{\ln x^x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\left(\ln x + 1\right).$$

3-й спосіб. Похідну степенево-показникової функції можна знайти як суму двох доданків, перший з яких є похідною заданої функції як складної степеневої, а другий – як складної показникової: $\left(x^x\right)' = x\cdot x^{x-1} + x^x\cdot\ln x = x^x + x^x\cdot\ln x = x^x\left(1+\ln x\right)$.

Приклад 3. Знайдіть похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \mathrm{tg}t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

Розв'язання

За формулою диференціювання параметрично заданої функції маємо: $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\left(\cos t\right)'}{\left(\mathrm{tg}t\right)'} = \frac{-\sin t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = -\sin t\cos^2 t$.

Приклад 4. Знайдіть похідну неявно заданої функції:

$$3x^2 + y^2 + 2xy = 0.$$

Розв'язання

Продиференціюємо обидві частини рівняння $3x^2 + y^2 + 2xy = 0$ за змінною x, при цьому вважаючи y функцією від x: $6x + 2y \cdot y' + 2y + 2x \cdot y' = 0$ (y^2 диференціюємо як складну функцію, а $2xy$ – як добуток функцій). З даної рівності виразимо y': $y'(2y + 2x) = -6x - 2y$, звідки $y' = -\dfrac{3x + y}{x + y}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайдіть похідну функції двома способами – користуючись правилами та формулами диференціювання та за допомогою логарифмічної похідної:

а) $y = e^{-5x^2}$;   б) $y = \sqrt{e^{-x}}$;

в) $y = 3^{x^2}$;   г) $y = 2^{3x + x^2}$.

2. Знайдіть похідну функції за допомогою логарифмічної похідної:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$;   б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

в) $y = (\cos x)^{\sin x}$;   г) $y = \left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)^3$.

3. Знайдіть похідну за правилом диференціювання степенево-показникової функції:

а) $y = x^{x^2}$;   б) $y = x^{\sin x}$;

в) $y = (\ln x)^{x^2}$;   г) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

4. Знайдіть похідну функції, заданої параметрично:

а) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos 2t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}, \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \arccos t. \end{cases}$

5. Знайдіть похідну неявно заданої функції:

а) $y + \ln y - x^2 = 0$; б) $e^x + e^y = 2^{xy}$;

в) $y\,\mathrm{arctg}x - \dfrac{y}{x} - 2 = 0$; г) $\ln xy + xy - x = 0$.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА (МАКЛОРЕНА)

Понятійний апарат: диференційовна в точці функція, диференціал аргументу, головна лінійна частина приросту функції (диференціал функції), геометричний зміст диференціала, похідна другого порядку, механічний зміст другої похідної.

Опорні твердження: необхідна і достатня умова диференційовності функції в точці, теорема Тейлора, формули Маклорена для основних елементарних функцій (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$).

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 5, § 5.3-5.4; [9] розділ 1, п. 1.8, 1.9; [11] розділ 3, п. 3.5, 3.7, 3.8, 3.10.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте означення функції, диференційовної в точці.
2. Сформулюйте теорему про неперервність диференційовної в точці функції. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклади.
3. Що таке диференціал функції? В чому полягає його геометричний зміст?
4. Запишіть формулу для наближених обчислень значень функції.
5. Що розуміють під диференціалом вищого порядку?
6. Запишіть формулу Тейлора. Яку формулу одержимо у випадку $n = 0$? У якому випадку одержимо формулу Маклорена?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. За допомогою диференціала обчисліть наближене значення $\cos 29°45'$.

Розв′язання

Розглянемо функцію $f(x)=\cos x$. Нехай $x_0=30°=\frac{\pi}{6}$.

Тоді $\Delta x = x - x_0 = 29°45' - 30° = -15'$, або в радіанах:

$$\Delta x = -\frac{15\pi}{180\cdot 60} \approx -0{,}00436.$$

$f(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660.$

$f'(x)=-\sin x$, $f'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-0{,}5.$

Отже, згідно формули $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ маємо:

$f(29°45')=\cos 29°45' \approx \cos 30° - \sin 30°\cdot(-0{,}00436)=$

$=0{,}8660+0{,}5\cdot 0{,}00436=0{,}86818.$

Для порівняння за допомогою калькулятора одержимо такий результат: $\cos 29°45' = \cos 29{,}75° \approx 0{,}86820$.

Приклад 2. Знайдіть похідну n-го порядку для функції:

а) $f(x)=\cos x$; б) $f(x)=x\ln x$.

Розв′язання

а) $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f^{(3)}(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$. Зрозуміло, що далі похідні будуть повторюватися.

Потрібно знайти можливість виразити залежність формули похідної від порядку похідної. За допомогою формул зведення ми можемо усунути чергування знаків та функцій:

$f'(x)=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; $f''(x)=-\cos x=\cos(\pi+x)$;

$f^{(3)}(x)=\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$; $f^{(4)}(x)=\cos x=\cos(2\pi+x)$.

Якщо уніфікувати перший доданок аргументів: $\pi = \frac{2\pi}{2}$, $2\pi = \frac{4\pi}{2}$, то можна скласти загальну формулу для обчислення похідної будь-якого порядку: $f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + x\right)$, $n = 1, 2, \ldots$.

б) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$; $\quad f''(x) = \frac{1}{x}$; $\quad f^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$; $f^{(5)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$ і так далі. Як бачимо, починаючи з $n = 2$, обчислення похідної відбувається за формулою $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$.

Приклад 3. Запишіть формулу Маклорена для функції $f(x) = \cos x$. Користуючись цією формулою, виведіть формулу для знаходження наближених значень функції $f(x) = \cos x$, $x \in [0; 1]$, з точністю до 0,0001.

Розв'язання

$$\cos x = \cos 0 + \frac{\cos'(0)}{1!} x + \frac{\cos''(0)}{2!} x^2 + \frac{\cos'''(0)}{3!} x^3 + \frac{\cos^{(4)}(0)}{4!} x^4 +$$
$$+ \ldots + \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{\cos^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Використовуючи результати попереднього прикладу, запишемо:

$$\cos x = 1 - \frac{0}{1!} x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 - \ldots + \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!} x^n + \frac{\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2} + \theta x\right)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Як бачимо, для непарних значень n доданки рівні нулю. Враховуючи це, а також чергування знаків, ряд Маклорена для функції $f(x) = \cos x$ запишемо так:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos\left(\frac{\pi 2(k+1)}{2} + \theta x\right)}{2(k+1)!} x^{2(k+1)} \text{ або}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos(\theta x + (k+1)\pi)}{(2k+2)!} x^{2k+2}.$$

Визначимо достатній степінь многочлена для забезпечення вказаної точності наближення. Для цього оцінимо додатковий член $r_{2k+2}(x) = \dfrac{\cos(\theta x + (k+1)\pi)}{(2k+2)!} x^{2k+2}$. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то $|r_{2k+2}(x)| \le \dfrac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$. Отже, потрібна точність буде досягнута, якщо k буде задовольняти нерівність $\dfrac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} < 0{,}0001$. Підбором знаходимо, що при $k = 1$ вже досягаємо потрібної точності: $\dfrac{1}{24} \cdot \left(\dfrac{\pi}{36}\right)^4 < \dfrac{1}{10000}$. Тоді шукана формула для наближених обчислень матиме вигляд $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!}$, $x \in [0;1]$.

Приклад 4. Визначте $d^3 f$ для функції $f(x) = x \ln x$.

Розв'язання

Як з'ясували у попередньому прикладі, $f^{(3)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Отже, згідно формули $d^3 f = f^{(3)}(x) dx^3$, тобто $d^3 f(x) = -\dfrac{dx^3}{x^2}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. З'ясуйте, чи є правильними твердження:

1) функція f є диференційовною в точці x_0, якщо вона у цій точці має скінченну похідну;

2) якщо функція f неперервна у точці x_0, то вона диференційовна в цій точці;

3) якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то вона має диференціал у цій точці;

4) формула $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ правильна для достатньо малих Δx;

5) диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до її графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.

2. Знайдіть диференціал функції:

а) $f(x)=e^{x^2}$; б) $f(x)=(3x^3-4x)^4$;

в) $f(x)=\sin x+\sqrt[3]{x}$; г) $f(x)=x^4\ln^2 3x$;

д) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$; е) $f(x)=e^x\sin 5x$.

3. За допомогою диференціала обчисліть наближене значення:

а) $\sin 30°12'$; б) $\cos 60°1'$;

в) $\sqrt[3]{8{,}002}$; г) $\sqrt[4]{15{,}94}$;

д) $\ln 1{,}02$; е) $\mathrm{arctg}0{,}98$.

4. Для заданої функції знайдіть похідну вказаного порядку:

а) $y=\cos^2 x$, $y^{(3)}$; б) $y=\sqrt[3]{x}$, $y^{(3)}$;

в) $y=\dfrac{x^2-1}{2x}$, y''; г) $y=\ln(3x^2+1)$, y''.

5. Для заданої функції знайдіть похідну n-го порядку:

а) $y=e^x$; б) $y=a^x$;

в) $y=x^\alpha$; г) $y=\ln x$;

д) $y=\sin x$; е) $y=\cos 2x$.

6. Запишіть формулу Маклорена для функції $f(x)=\sin x$. Користуючись цією формулою, виведіть формулу для знаходження наближених значень функції $f(x)=\sin x$, $x\in[0;1]$, з точністю до 0,00001.

7. З точністю до заданого ε знайдіть наближене значення:

а) $\cos 6°$, $\varepsilon=0{,}0005$; б) $\sin 15°$, $\varepsilon=0{,}0001$.

8. Визначте $d^2 f$ для даної функції:

а) $f(x)=x\ln x$; б) $f(x)=x^3+x^2$;

в) $f(x)=a^x$; г) $f(x)=\sin 5x$;

д) $f(x)=x^n$; е) $f(x)=\sqrt{2x}$.

Тема 2.2.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Понятійний апарат: невизначеності типів $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Опорні твердження: теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, правила Лопіталя

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 6, § 6.1-6.2; [9] розділ 1, п. 1.9; [11] розділ 3, п. 3.9, 3.16.

Питання для самоконтролю:

1. Сформулюйте теореми Ферма та Ролля. Наведіть їх геометричну інтерпретацію.
2. Сформулюйте теореми Лаґранжа та Коші для функцій, які мають похідні. Наведіть їх геометричну інтерпретацію.
3. У чому полягають правила Лопіталя і в яких випадках їх застосовують?

Приклади розв'язання вправ

Приклад 1. Чи можна до функції $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ на відрізку $[-1;1]$ застосувати теорему Ролля?

Розв'язання

Перевіримо виконання умов теореми:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ неперервна на відрізку $[-1;1]$;

2) $f(-1)=f(1)=1$;

3) $\forall x\in(-1;1)\ \exists f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Отже, всі умови теореми виконуються. При цьому $f'(x)=0$ у точці $x=0$.

Приклад 2. Доведіть, що рівняння $x^3+x-1=0$ має єдиний дійсний корінь.

Доведення

Легко переконатися, що цілих коренів рівняння не має. Але можна помітити, що функція $f(x)=x^3+x-1$ на кінцях, наприклад, відрізка $[0;1]$ набуває значення різних знаків. Тому на основі першої теореми Больцано-Коші можна стверджувати, що задане рівняння має принаймні один дійсний корінь.

Доведемо, що цей корінь єдиний. Припустимо супротивне: нехай дане рівняння має два корені x_1 та x_2 і нехай $x_1<x_2$. Тоді функція $f(x)=x^3+x-1$ на відрізку $[x_1;x_2]$ задовольняє всім умовам теореми Ролля ($f(x_1)=f(x_2)=0$). Отже, існує точка $c\in(x_1;x_2)$ така, що $f'(c)=0$, тобто $3c^2+1=0$. Проте дане рівняння дійсних коренів не має. Одержали суперечність, яка й доводить хибність припущення. Отже, корінь даного рівняння єдиний.

Приклад 3. На дузі *AB* кривої $y=x^2+1$ знайдіть точку, в якій дотична буде паралельна хорді *AB*, якщо $A(-1;2)$, $B(2;5)$.

Розв'язання

Функція $y=x^2+1$ неперервна і диференційована на всій області визначення. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a=-1$, $b=2$ існує таке значення $x=c$, що має місце рівність $y(b)-y(a)=y'(c)\cdot(b-a)$, де $y'=2x$. Отже, $y(2)-y(-1)=2c\cdot(2+1)$, тобто $5-2=2c\cdot 3$, звідки $c=\frac{1}{2}$, відповідно $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$.

Отже, шукана точка має координати $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Приклад 4. Користуючись теоремою Лагранжа, доведіть, що виконується нерівність $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$, $\forall x,y\in R$.

Доведення. Нехай $y<x$. Розглянемо функцію $f(x)=\sin x$ на $[y;x]$. На цьому відрізку функція неперервна і на відповідному інтервалі диференційовна. Тоді за теоремою Лагранжа $\exists c\in(y;x):\sin x-\sin y=(\sin c)'(x-y)$, звідки

$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y|$. Враховуючи, що $|\cos c| \le 1$, маємо $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

Приклад 5. Застосовуючи правило Лопіталя, обчисліть границю:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3 + 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 0+0} x \ln x$.

Розв'язання

а) Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуючи правило Лопіталя тричі, одержуємо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3 + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin 2x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{8\cos 2x}{6} = \frac{4}{3}.$$

б) Маємо невизначеність $[0 \cdot \infty]$, тому одразу застосовувати правило Лопіталя не можна. Спочатку перетворимо дану функцію, а потім застосуємо правило:

$$\lim_{x \to 0+0} x \ln x = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. Чи можна до функції $f(x)$ на заданому відрізку застосувати теорему Ролля?

а) $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ на відрізку $[0;8]$;

б) $f(x) = x^2 - 6x + 100$ на відрізку $[1;5]$;

в) $f(x) = |\cos x|$ на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

2. Доведіть, що рівняння має єдиний дійсний корінь:

а) $x^5 + 2x - 3 = 0$; б) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x - 1 + \cos x = 0$.

3. Знайдіть значення c з теореми Лагранжа для функції $f(x) = x^3 - x^2 + 9x + 1$ на відрізку $[0;2]$.

4. Користуючись теоремою Лагранжа, доведіть, що виконуються нерівності:

а) $|\text{arctg}x - \text{arctg}y| \le |x - y|,\ \forall x, y \in R$;

б) $\left|e^{-x} - e^{-y}\right| \le |x - y|,\ \forall x, y > 0$.

5. Застосовуючи правило Лопіталя, обчисліть границю:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + 4x - 12}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$;

є) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln^3 x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$.

6. З’ясуйте тип невизначеності. Зведіть невизначеність до типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ та знайдіть границю за допомогою правила Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\text{tg}x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x \ln^2 x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(e^x - 1\right)^{\frac{1}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$.

Вказівки: д) подайте функцію у вигляді $e^{\ln\left(e^x - 1\right)^{\frac{1}{x}}}$ та перейдіть до границі показника.

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ ТА ЕКСТРЕМУМ. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

Понятійний апарат: внутрішня точка множини, критична точка функції, стаціонарна точка функції, точка локального максимуму (мінімуму) функції, точка екстремуму функції, локальний та глобальний екстремуми функції.

Опорні твердження: теорема про сталу на проміжку функцію, теорема про монотонність функції, необхідна та достатні умови екстремуму функції (в термінах першої та другої похідних)

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 6, § 6.3-6.4; [9] розділ 1, п. 1.9; [11] розділ 3, п. 3.11-3.13.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають внутрішньою точкою множини? Наведіть приклади.
2. Що називають критичною точкою функції? Наведіть приклади.
3. Що називають стаціонарною точкою функції? Наведіть приклади.
4. Який зв'язок між монотонністю функції та її похідної?
5. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на монотонність.
6. Якою є необхідна умова екстремум функції?
7. Які достатні умови екстремуму функції?
8. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на екстремум.
9. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$.

Розв′язання

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}+x^2(-e^{-x})=e^{-x}(2x-x^2)=e^{-x}\cdot x\cdot(2-x).$$

Щоб знайти проміжки зростання функції, розв'яжемо нерівність $f'(x)>0$. Для будь-якого $x\in R$ $e^{-x}>0$. Тоді достатньо розв'язати нерівність $x(2-x)>0$. Її розв'язком є інтервал $(0;2)$. Отже, дана функція зростає на інтервалі $(0; 2)$. Відповідно, на інтервалах $(-\infty; 0)$ та $(2; +\infty)$ $f'(x) < 0$, тому на цих інтервалах функція спадає.

Приклад 2. Дослідіть функцію на екстремум:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання

а) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Як бачимо, похідна не дорівнює нулю при жодному значенні *x*. Отже, *стаціонарних точок* дана функція не має. $f'(0)$ не існує, проте точка $x = 0$ не є внутрішньою точкою області визначення даної функції. Тому *критичних точок* теж немає. Отже, дана функція екстремумів не має.

б) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Випадок схожий з попереднім. Так само функція не має *стаціонарних точок*. Але точка $x = 0$, в якій похідна не існує, є внутрішньою точкою області визначення функції, а, отже, є *критичною*. Очевидно, що $f'(x) < 0$ на інтервалі $(-\infty; 0)$ і $f'(x) > 0$ на інтервалі $(0; +\infty)$. Отже, $x = 0$ є точкою мінімуму: $f_{\min} = f(0) = 0$.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x) = xe^x$ на екстремум за допомогою другої похідної.

Розв'язання

Знайдемо першу похідну: $f'(x) = e^x + xe^x$. Знайдемо стаціонарні точки: $e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Стаціонарна точка $x = -1$ буде єдиною критичною точкою, оскільки похідна скрізь неперервна.

Знайдемо другу похідну: $f''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(2 + x)$.

$f''(-1) = e^{-1} > 0$. Отже, $x = -1$ є точкою мінімуму і $f_{\min} = f(-1) = -e^{-1}$.

Приклад 4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ на:

а) $[0; 8]$; б) $(0; 8)$;

в) $(0; 6)$; г) $(-2; 8)$.

Розв'язання

а) Знайдемо критичні точки функції:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5. \end{array}\right.$ Обидві стаціонарні точки потрапляють у досліджуваний відрізок. Інших критичних точок функція не має.

Обчислимо значення функції у кожній критичній точці та на кінцях відрізка: $f(0) = 0$, $f(1) = 7$, $f(5) = -25$, $f(8) = 56$.

Отже, $\min\limits_{[0;8]} f(x) = f(5) = -25$, $\max\limits_{[0;8]} f(x) = f(8) = 56$.

б) На відміну від попереднього випадку, ми не можемо обчислити значення функції на кінцях інтервалу. Тому знайдемо односторонні границі: $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 8-0} f(x) = 56$. Порівнюючи ці значення із значеннями функції у критичних точках, маємо: $\min\limits_{(0;8)} f(x) = f(5) = -25$, але $\max\limits_{(0;8)} f(x)$ не існує.

в) Додаємо для порівняння значення $\lim\limits_{x \to 6-0} f(x) = -18$. У цьому випадку функція набуває найменшого і найбільшого значень у своїх критичних точках: $\min\limits_{(0;6)} f(x) = f(5) = -25$ і $\max\limits_{(0;6)} f(x) = f(1) = 7$.

г) $\lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = -74 < -25$, $\lim\limits_{x \to 8-0} f(x) = 56 > 7$, отже, на даному інтервалі функція не має ні найменшого, ні найбільшого значень.

Приклад 5. Потрібно з жерсті виготовити ящик з кришкою, об'єм якого був би рівним 72 см^3, а сторони основи відносилися як 1:2. Якими мають бути розміри всіх ребер, щоб на виготовлення ящика пішло найменше матеріалу?

Розв'язання

Величина, що оптимізується, – площа S повної поверхні ящика, тобто прямокутного паралелепіпеда.

Виберемо незалежну змінну: нехай x см – довжина однієї зі сторін основи.

Виразимо через x інші виміри паралелепіпеда: враховуючи дане відношення між сторонами основи, друга сторона може бути $2x$ см; оскільки об'єм має бути 72 см^3, то висота буде $\dfrac{36}{x^2}$ см.

Встановимо межі, в яких може змінюватися x: очевидно що, як довжина, $x > 0$; з іншого боку також і $x \cdot 2x < 72$, звідки $x < 6$, тобто $x \in (0; 6)$.

Складемо формулу функції:

$$S(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2(x + 2x)\frac{36}{x^2} = 4x^2 + \frac{216}{x}.$$

Отже, необхідно знайти найменше значення функції $S(x) = 4x^2 + \dfrac{216}{x}$ на інтервалі $(0; 6)$.

Знайдемо критичні точки, які належать даному інтервалу: $S'(x) = 8x - \dfrac{216}{x^2}$, $8x - \dfrac{216}{x^2} = 0$, $8x^3 = 216$, $x^3 = 27$, $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 0+0} S(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 6-0} S(x) = 180$, $S(3) = 108$. Отже, в точці $x = 3$ функція $S(x)$ має найменше значення на інтервалі $(0; 6)$.

Тоді шукані значення вимірів ящика: 3 см, 6 см і 4 см.

Зауваження. Можна міркувати й інакше. А саме – виконати дослідження функції на екстремум.

Точка $x = 3$ ділить інтервал на дві частини: при $0 < x < 3$ $S'(x) < 0$, отже, $S(x)$ спадає; при $3 < x < 6$ $S'(x) > 0$, отже, $S(x)$ зростає. А це означає, що $x = 3$ є точкою мінімуму.

Оскільки функція неперервна на даному інтервалі і має на ньому єдину критичну точку, яка є точкою мінімуму, то в цій точці і буде найменше значення функції на інтервалі. Тобто $\min\limits_{(0;6)} S(x) = S(3)$.

Дослідження на екстремум можна провести також і за допомогою другої похідної: $S''(x) = 8 + \dfrac{432}{x^3}$, $S''(3) = 24 > 0$. Отже, точка $x = 3$ є єдиною точкою локального мінімуму.

Завдання для самостійного розв’язування

1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; б) $f(x) = 3x - x^3$;

в) $f(x) = \ln x + \dfrac{2}{x}$; г) $f(x) = x^2 \ln x$.

2. Дослідіть функцію на екстремум:

а) $f(x)=x(x-1)^2$; б) $f(x)=2-3x^2-x^3$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; г) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$;

д) $f(x)=4-x-\dfrac{4}{x^2}$; е) $f(x)=|x+2|$.

3. Дослідіть функцію на екстремум за допомогою другої похідної:

а) $f(x)=x^3-6x^2+8x$;

б) $f(x)=x^2\ln x$;

в) $f(x)=e^{-x^2}$;

г) $f(x)=e^{-x}+e^{2x}$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку:

а) $f(x)=2x^2-3x$ на $[-1;2]$;

б) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ на $[-1;1]$;

в) $f(x)=x-2\sqrt{x}$ на $[0;4]$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ на $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

5. Розв’яжіть задачу на оптимізацію:

а) Швидкість v зростання чисельності x деякої популяції описується функцією $v=0{,}003x(200-x)$. За якої чисельності популяції ця швидкість є найбільшою?

б) На шкільному подвір’ї треба обгородити квітник прямокутної форми, що прилягає до паркана довжиною понад 50 м. Маємо 200 плит, кожна довжиною 50 см. Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

в) Знайдіть, яке співвідношення має бути між висотою H і радіусом R консервної банки циліндричної форми заданого об’єму V, щоб на її виготовлення пішло найменше матеріалу.

г) Як треба провести через точку (1; 2) пряму, щоб площа трикутника, утвореного цією прямою і додатними півосями координат, була найменшою?

3. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Понятійний апарат: опуклість кривої вниз (вгору), точка перегину графіка функції, асимптота кривої, вертикальна асимптота, похила асимптота.

Опорні твердження: теорема про напрями опуклості графіка функції, необхідна та достатня умови точки перегину, необхідна та достатня умови асимптоти графіка функції.

Джерела для самопідготовки: [5] розділ 6, § 6.5-6.6; [9] розділ 1, п. 1.9; [11] розділ 3, п. 3.14-3.15, 3.17.

Питання для самоконтролю:

1. Що розуміють під опуклістю кривої, напрямленою вниз (вгору)?
2. Що таке точка перегину графіка функції та як її знайти?
3. Які асимптоти може мати графік функції? Як їх знайти?
4. Якою є загальна схема дослідження заданої функції за допомогою похідних та границь для побудови її графіка?

Приклади розв′язання вправ

Приклад 1. Знайдіть інтервали опуклості та точки перегину функції, якщо вони існують:

а) $f(x)=x^3-6x^2+8x$; б) $f(x)=x\ln x$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$.

Розв′язання

а) Дана функція неперервна в області визначення $D(f)=R$. Знайдемо першу та другу похідні функції: $f'(x)=3x^2-12x+8$, $f''(x)=6x-12$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, при $x<2$ $f''(x)<0$ і функція опукла вгору, а при $x>2$ $f''(x)>0$ і функція опукла вниз. Отже, точка $x=2$ є точкою перегину функції.

б) Дана функція визначена і неперервна при $x>0$. $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}$. Оскільки $f''(x)>0$, то функція на усій області визначення опукла вниз. $f''(x)\neq 0$, а у точці $x=0$, де $f''(x)$ не існує, функція не визначена, тому точок перегину не існує.

в) Функція неперервна в області визначення $D(f) = R$. Похідні: $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$. $f''(x) \neq 0$ для усіх $x \in D(f)$, а при $x = -1$ $f''(x)$ не існує. Але дана функція $f(x)$ у цій точці визначена і неперервна, тому точка може бути точкою перегину. При $x < -1$ $f''(x) > 0$ і функція опукла вниз, а при $x > -1$ $f''(x) < 0$ і функція опукла вгору. Отже, точка $x = -1$ є точкою перегину функції.

Приклад 2. Знайдіть асимптоти графіка функції:

а) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; б) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Розв'язання

а) Оскільки $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$, то пряма $x = -1$ є *вертикальною асимптотою*.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$, отже, пряма $y = 2$ є *горизонтальною асимптотою*.

б) $x^2 + 1 \neq 0$, отже, функція неперервна при всіх $x \in R$, тому вертикальних асимптот її графік не має.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} = \pm\infty$, отже, горизонтальних асимптот також немає.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Отже, *похилою асимптотою* є пряма $y = x$.

Приклад 3. Виконайте повне дослідження функції $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання

$D(f)=R$, ні парна, ні непарна, не періодична.

Точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0$ $y=1$; при $y=0$ $x=1$, тобто маємо точки $(0;1)$, $(1;0)$.

Проміжки знакосталості: $\sqrt[3]{1-x^3}>0 \Leftrightarrow x^3<1 \Leftrightarrow x<1$, отже, $f(x)>0$ на інтервалі $(-\infty;1)$, $f(x)<0$ на інтервалі $(1;+\infty)$.

На своїй області визначення функція неперервна, тому вертикальних асимптот її графік не має.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-x^3}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-x^3\right)}=\mp\infty$, отже, горизонтальних асимптот графік також не має.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0,$$ отже,

графік має похилу асимптоту $y=-x$.

Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

$f'(x)=\dfrac{-x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$. Критичні точки: $x=0$ (стаціонарна точка), $x=1$ ($f'(x)$ не існує). Але в усіх інших точках $f'(x)<0$, отже, функція екстремумів не має і на всій області визначення спадна.

Дослідимо на опуклість та точки перегину:

$$f''(x)=-2x\left(1-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}-2x^4\left(1-x^3\right)^{-\frac{5}{3}}=\frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}\left(1+\frac{x^3}{1-x^3}\right)=$$

$$=\frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}\cdot\frac{1}{1-x^3}.$$

Точками перегину можуть бути: $x=0$ ($f''(x)=0$) та $x=1$ ($f''(x)=\infty$). При $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ $f''(x)>0$, отже, функція опукла вниз; при $x\in(0;1)$ $f''(x)<0$ і функція опукла вгору.

Графік функції зображено на рис. 5.

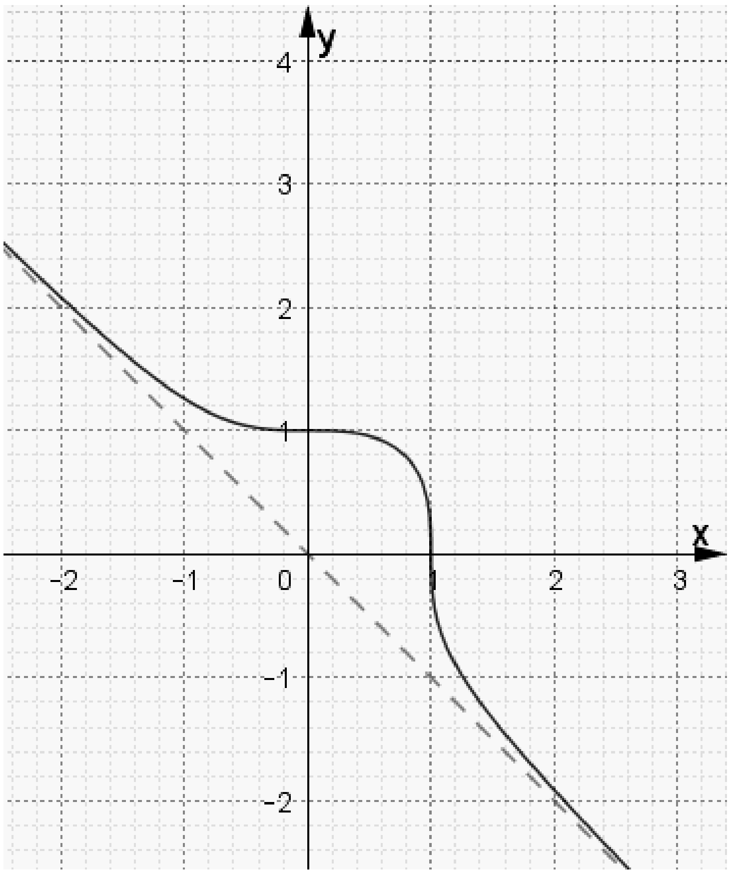

Рис. 5

Завдання для самостійного розв′язування

1. Знайдіть інтервали опуклості та точки перегину функції, якщо вони існують:

а) $f(x)=2x^3+3x^2+4$;   б) $f(x)=x^4-6x^2+5$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^5}$;   г) $f(x)=\ln(x^2-1)$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$;   е) $f(x)=xe^{-x}$.

2. Знайдіть асимптоти графіка функції:

а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$;   б) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$;   г) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+3}$;

д) $f(x)=2x+\frac{1}{x}$; е) $f(x)=xe^{-x}$;

є) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; ж) $f(x)=x-\mathrm{arctg}x$.

3. Виконайте повне дослідження функції та побудуйте її графік:

а) $f(x)=3x-x^3$; б) $f(x)=x^4-5x^2+4$;

в) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$; г) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x}$;

д) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; е) $f(x)=xe^{-x}$;

є) $f(x)=x^2\ln x$; ж) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

Питання до колоквіуму 2

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.
2. Означення похідної. Теорема про неперервність функції, що має похідну.
3. Правила обчислення похідних.
4. Похідна складеної та похідна оберненої функцій.
5. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної до графіка функції.
6. Похідні основних елементарних функцій.
7. Похідні обернених тригонометричних функцій.
8. Похідна степенево-показникової функції.
9. Логарифмічна похідна.
10. Диференціал функції, його геометричний зміст. Інваріантність форми I диференціала.
11. Необхідна і достатня умова диференційованості функції в точці.
12. Основні теореми диференціального числення: теорема Ферма, її геометричний зміст.
13. Основні теореми диференціального числення: теорема Ролля, її геометричний зміст.
14. Основні теореми диференціального числення: теорема Лагранжа, її геометричний зміст.
15. Теорема Коші, формула Тейлора.
16. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей.
17. Застосування похідної до дослідження функції: теорема про сталу на відрізку функцію.
18. Дослідження функції на монотонність (теорема 1).
19. Дослідження функції на монотонність (теорема 2, зауваження). Алгоритм дослідження функції на монотонність.
20. Точки екстремуму та екстремуми функції. Необхідна умова існування екстремуму функції.

21. Достатні умови існування екстремуму функції (теорема 1).
22. Достатні умови існування екстремуму функції (теорема 2). Алгоритм дослідження функції на екстремум.
23. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.
24. Опуклість, угнутість графіка функції. Точки перегину.
25. Асимптоти кривої. Схема повного дослідження функції.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 1. Функції однієї змінноі. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1990. 384 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1991. 368 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 3. Теорія функцій дійсної та комплексної змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1992. 360 с.
4. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: Навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. Київ : Вища шк., 1994. 455 с.
5. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. Київ : Вища шк., 2003.Ч. 1. 462 с.
6. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
7. Коваленко І. П. Вища математика: Навч. посібник. Київ : Видавничий дім «Слово», 2011. 456 с.
8. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів всіх спеціальностей / Укл.: Балюнов О. О. Чернігів : ЧНТУ, 2015. 17 с.
9. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
10. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.
11. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 1. 3-тє вид., переробл. і допов. Київ : Вища школа, 2005. 447 с.
12. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. 3-тє вид., переробл. і допов. Київ : Вища школа, 2005. 510 с.

Додаткова література

1. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. Київ : Техніка, 2007. 600 с.
2. Глушков П. М., Шунда Н. М. Диференціальне числення функції однієї змінної: Навч. посібник. Київ : Вища шк., 1991. 270 с.
3. Дмитрієнко О. О. Прикладні задачі з математичного аналізу: навчальний посібник. Полтава : ТОВ «АСМІ», 2011. 117 с.
4. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д. Спеціальні розділи математики. Київ : ВШ, 1992. 216 с.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. Минск : Выш. шк. Ч. 1. 1990. 270 с. Ч. 2. 1991. 352 с. Ч. 3. 1991. 287 с. Ч. 4. 2006. 336 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Москва : Физматлит, 2001. 616 с
7. Higher mathematics. Part 1: Manual : навч. посібник / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta; NAU. Kyiv : NAU, 2006. 268 p.
8. Higher mathematics. Part 3: Manual : навч. посібник / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta; NAU. Kyiv : NAU, 2006. 232 p.
9. Higher mathematics. Part 2: Manual : навч. посібник / V. P. Denisiuk, L. I. Grishina, O. V. Karupu, T. A. Oleshko, V. V. Pakhnenko, V. K. Repeta; NAU. Kyiv : NAU, 2009. 248 p.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1
Вступ до математичного аналізу

Тема 1.1. **Елементи теорії множин та дійсні числа.** Поняття про множину. Рівні множини. Підмножина. Операції над множинами. Взаємно однозначна відповідність. Еквівалентність множин. Числові множини. Задача про вимірювання відрізків. Означення ірраціонального числа. Дійсні числа. Модуль дійсного числа. Відповідність між множиною точок координатної прямої і множиною всіх дійсних чисел. Неперервність множини дійсних чисел у розумінні Кантора. Межі числових множин. Гранична точка множини.

Тема 1.2. **Функція.** Загальне поняття відповідності та функції (відображення), область визначення та множина значень. Числові функції. Координатна площина. Графік функції. Способи задання функції. Поняття оборотності функції. Критерій оборотності функції. Означення оберненої функції. Графіки взаємно обернених функцій. Композиція функцій (складна функція). Основні класи функцій (обмежені і необмежені, парні і непарні, монотонні, періодичні). Арифметичні операції над функціями. Елементарні функції, їх властивості та графіки. Параметричне задання функції.

Тема 1.3. **Границя числової послідовності.** Числова послідовність як функція натурального аргументу. Границя числової послідовності. Геометричний зміст границі числової послідовності. Необхідна умова збіжності послідовності. Теорема про існування границі монотонної послідовності. Підпослідовність. Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші збіжності послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності, їх властивості. Теореми про границі. Теорема про зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою послідовністю.

Арифметичні властивості границь. Існування границі послідовності (a_n), де $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, при $n \to \infty$. Число *e*. Натуральні логарифми.

Тема 1.4. **Границя і неперервність функції.** Поняття границі функції. Означення границі функції в точці за Коші і за Гейне, їх еквівалентність. Геометричний зміст границі функції в точці. Границя функції по множині. Скінченні та нескінченні границі. Границя функції на нескінченності. Односторонні границі. Основні властивості границь. Властивість функції, що має границю в точці. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції. Зв'язок між нескінченно малою функцією і границею функції в точці. Арифметичні властивості границь. Деякі важливі границі.

Поняття неперервності функції в точці. Означення неперервної в точці функції. Теореми про функції, неперервні в точці. Арифметичні операції над неперервними в точці функціями. Одностороння неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку: обмеженість функції (перша теорема Вейєрштрасса), існування найбільшого і найменшого значень функції (друга теорема Вейєрштрасса), теорема про перетворення функції на нуль (перша теорема Больцано-Коші), теорема про проміжне значення (друга теорема Больцано-Коші). Поняття рівномірної неперервності. Теорема Кантора. Теорема про існування, монотонність і неперервність оберненої функції. Неперервність елементарних функцій.

Змістовий модуль 2
Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 2.1. **Похідна та диференціал.** Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної. Геометричний та механічний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до кривої. Поняття функції, диференційованої в точці і на множині. Теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції; про похідну суми, різниці, добутку і частки). Диференційовність складеної та оберненої функцій. Диференціювання елементарних функцій. Логарифмічна похідна. Похідні вищих порядків. Механічний зміст похідної другого порядку. Формула бінома Ньютона. Формула Лейбніца.

Означення диференціала функції, його геометричний і механічний зміст. Основні правила і формули диференціювання функцій. Застосування диференціала до наближених обчислень. Диференціали вищих порядків. Інваріантність форми диференціала першого порядку. Диференційовність параметрично заданих функцій.

Тема 2.2. **Основні теореми диференціального числення та їх застосування.** Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші та їх застосування. Теорема Тейлора. Формула Тейлора. Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора. Застосування формули Тейлора до наближених обчислень. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[0^{\infty}]$. Дослідження функції за допомогою похідної. Умови монотонності та сталості функції. Поняття екстремуму функції. Максимум і мінімум функції. Необхідна умова екстремуму функції. Достатні умови існування екстремуму функції. Найбільше та найменше значення неперервної на відрізку функції. Напрями опуклості та точки перегину графіка функції. Теорема про напрям опуклості графіка функції. Необхідна умова точки перегину. Достатня умова точки перегину. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Змістовий модуль 3
Інтегральне числення функції однієї змінної

Тема 3.1. **Невизначений інтеграл.** Поняття первісної функції. Основна властивість первісної. Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких типів ірраціональних функцій. Інтегрування диференціальних біномів. Інтегрування тригонометричних функцій.

Тема 3.2. **Визначений інтеграл.** Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла й умови його існування. Означення визначеного інтеграла. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Необхідна умова інтегрованості функції. Суми Дарбу та їх властивості. Критерій інтегрованості функції за Ріманом. Класи інтегрованих функцій. Властивості інтегрованих функцій та визначеного інтеграла. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Теорема про існування первісної неперервної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Застосування визначеного інтеграла: обчислення площ плоских фігур, обчислення об’ємів тіл обертання, обчислення довжини дуги кривої, обчислення площі поверхні обертання). Застосування визначеного інтеграла у фізиці. Невласні інтеграли першого та другого роду. Ознаки збіжності.

Змістовий модуль 4
Ряди

Тема 4.1. **Числові ряди.** Поняття числового ряду та його збіжності. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Критерій Коші. Найпростіші властивості збіжних рядів. Числові ряди з додатними членами Збіжність додатних рядів. Порівняльні ознаки збіжності додатних рядів. Ознаки Коші та ознаки Д’Аламбера збіжності додатних рядів. Інтегральна ознака Коші збіжності додатних рядів. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Ряди з членами довільного знаку. Абсолютно і умовно збіжні ряди, їх властивості. Критерій Коші збіжності числового ряду. Сполучна властивість збіжних рядів. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.

Тема 4.2. **Функціональні послідовності та ряди.** Поняття функціональної послідовності та функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності. Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду. Достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду (ознака Веєрштрасса). Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Тема 4.3. **Степеневі ряди. Ряди Фур'є.** Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус, інтервал, область збіжності степеневого ряду. Рівномірна збіжність степеневого ряду. Неперервність суми степеневого ряду. Інтегрування і диференціювання степеневих рядів. Умови розкладу функції в степеневий ряд. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Розвинення елементарних функцій у степеневий ряд. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Поняття тригонометричного ряду Фур'є. Теорема про єдність розкладу функцій в тригонометричний ряд. Ряд Фур’є для парних і непарних функцій. Розвинення в ряд Фур’є неперіодичних функцій.

Змістовий модуль 5
Диференціальне числення функції багатьох змінних

Тема 5.1. **Поняття функції багатьох змінних, границя, неперервність.** Означення функції багатьох змінних. Області визначення та значень. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції багатьох змінних.

Тема 5.2. **Частинні похідні та диференціал функції багатьох змінних.** Поняття частинної похідної функції *n* змінних. Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал. Похідні складеної функції. Неявно задана функція та її похідна. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні. Частинні похідні та диференціали вищих порядків та техніка їх знаходження.

Тема 5.3. **Екстремуми функції багатьох змінних.** Поняття екстремуму функції *n* змінних, необхідні умови його наявності. Достатні умови екстремуму функції n змінних. Найбільше і найменше значення функції n змінних на обмеженій області та його відшукання. Метод найменших квадратів.

Змістовий модуль 6
Інтегральне числення функції багатьох змінних

Тема 6.1. **Подвійний і потрійний інтеграли.** Подвійний інтеграл, його геометричний та фізичний зміст. Обчислення подвійного інтеграла зведенням до повторного інтеграла. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Застосування подвійного інтеграла до обчислення площ поверхонь.

Потрійний інтеграл, його фізичний зміст. Обчислення потрійного інтеграла. Заміна змінних в потрійному інтегралі. Циліндрична та сферична система координат. Застосування потрійного інтеграла.

Тема 6.2. **Криволінійні інтеграли.** Криволінійний інтеграл першого роду. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду. Натуральна параметризація кривої.

Криволінійний інтеграл другого роду. Робота змінної сили вздовж кривої. Формула Гріна.

Змістовий модуль 7
Поверхневі інтеграли, основи теорії поля

Тема 7.1. **Поверхневі інтеграли.** Поверхневий інтеграл першого роду. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду. Орієнтовна поверхня. Застосування поверхневого інтегралу І роду до обчислення площі поверхні, маси поверхні, статичних та інерційних моментів.

Поверхневий інтеграл другого роду, його властивості. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду. Застосування поверхневих інтегралів.

Обчислення поверхневого інтегралу ІІ роду за допомогою формули Остроградського-Гауса. Зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралом ІІ роду (формула Стокса). Застосування поверхневого інтегралу ІІ роду до обчислення об'ємів тіл, обмеженою замкненою поверхнею.

Тема 7.2. **Основи теорії поля.** Поняття про векторне поле, його силові лінії. Векторна трубка. Визначення потоку векторного поля, його вирази у координатній формі.

Поняття про дивергенцію, як диференціальний оператор, її властивості. Формула Остроградського-Гауса через дивергенцію.

Означення дивергенції, що випливає із формули Остроградського-Гауса та властивостей потрійного інтеграла. Фізичний зміст дивергенції.

Поняття про циркуляцію векторного поля. Фізичний зміст. Поняття ротора поля, як диференціального оператора, його властивості, фізичний зміст.

Формула Стокса у векторному вигляді. Означення ротора за допомогою формули Стокса. Потенціальне поле, його властивості. Обчислення потенціала.

Поняття про гармонічне поле. Оператор Лапласа.

Додаток 2

ПРИКЛАД ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТУ

Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка

Освітній ступінь бакалавр
Галузь знань 01 Освіта/Педагогіка
Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
Семестр 1

Навчальна дисципліна математичний аналіз

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 8

1. Властивості границі функції в точці.
2. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей.
3. Практичні завдання.

Задача 1. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin|x|$; б) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$; в) $y = \sin\left(\frac{|x|}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Задача 2. Обчисліть границю функції у нескінченно віддаленій точці:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Задача 3. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$; б) $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}}$; в) $y = \frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

Затверджено на засіданні кафедри математики та економіки
Протокол №___ від ______________20__ року

Завідувач кафедри математики та економіки ____________ (підпис) ____________ (прізвище та ініціали)

Екзаменатор ____________ (підпис) ____________ (прізвище та ініціали)

Додаток 3

ОРІЄНТОВНА ВІДПОВІДЬ НА ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТУ

1. Властивості границі функції в точці

Теорема 1 *(про єдиність границі).* Якщо функція *f(x)* у точці x_0 має границю, то ця границя єдина.

Доведення. Припустимо, що функція *f* у точці x_0 має дві границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$, причому $A\neq B$. Тоді за означенням границі функції в точці для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх *x*, для яких $0<|x-x_0|<\delta_1$, справджується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Аналогічно для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх *x*, для яких $0<|x-x_0|<\delta_2$, справджується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Позначимо через $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тоді для всіх *x*, для яких $0<|x-x_0|<\delta_0$, виконується нерівність $|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\le|A-f(x)|+|f(x)-B|=$ $=|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$. Оскільки ε – довільне додатне число, то можна покласти $\varepsilon=\frac{1}{3}|A-B|$. Тоді $|A-B|<\frac{2}{3}|A-B|$, тобто $1<\frac{2}{3}$. Дійшли суперечності.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ має границю у точці x_0, то вона обмежена у деякому проколотому околі точки x_0.

Теорема 3 *(про збереження знаку границі).* Якщо функція $f(x)$ має границю у точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$, тоді існує такий проколотий окіл точки x_0, в якому функція $f(x)$ зберігає знак своєї границі.

Теорема 4 *(про граничний перехід в рівностях).* Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ у деякому проколотому околі точки x_0 задовольняють умову $f(x)=g(x)$ і мають границю у точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то $A=B$.

Теорема 5 *(про граничний перехід в нерівностях).* Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ у деякому проколотому околі точки x_0 задовольняють умову $f(x)\le g(x)$ і мають границю у точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то $A\le B$.

Теорема 6 *(про границю проміжної функції).* Якщо функції $f(x)$, $g(x)$ і $h(x)$ у деякому проколотому околі точки x_0 задовольняють умови $f(x)\le g(x)\le h(x)$, *крім того* функції $f(x)$ і $h(x)$ мають границю у точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$, то функція $g(x)$ також має границю у точці x_0 і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

2. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей

Кажуть, що відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$ (x_0– число або ∞ ($-\infty$, $+\infty$)) є невизначеністю типу $\dfrac{0}{0}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Розкрити цю невизначеність – означає знайти границю відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$ (за умови, що ця границя існує).

Невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$ можна розкрити за допомогою наступної теореми.

Теорема *(правило Лопіталя).* Нехай функції f і g диференційовні в деякому околі точки x_0 (x_0– число або ∞ ($-\infty$, $+\infty$)), крім, можливо, самої точки x_0. Нехай також $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ і $g'\ne 0$ в кожній точці x з вищевказаного околу x_0, $x\ne x_0$. Тоді, якщо відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ має границю (скінченну чи нескінченну) при

$x \to x_0$, то відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю при $x \to x_0$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зокрема, можна розглядати праву або ліву границю, тоді під околом точки x_0 розуміють правий або лівий її окіл.

Доведення. Нехай x_0 – число, x – довільна фіксована точка з указаного в умові теореми околу, $x \neq x_0$, й X – відрізок з кінцями x_0 та x. Розглянемо функції f^* і g^*:

$$f^* = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in X,\ x \neq x_0, \\ 0, \text{ якщо } x = x_0; \end{cases} \qquad g^* = \begin{cases} g(x), \text{ якщо } x \in X,\ x \neq x_0, \\ 0, \text{ якщо } x = x_0. \end{cases}$$

Ці функції задовольняють усі умови теореми Коші. Отже, знайдеться принаймні одна точка *c*, яка знаходиться між x_0 і *x,* така, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^*(x) - f^*(x_0)}{g^*(x) - g^*(x_0)} = \frac{f^{*\prime}(c)}{g^{*\prime}(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

Тобто $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Якщо тепер $x \to x_0$, то й $c \to x_0$, і на підставі останньої рівності маємо

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, що й потрібно було довести.

У випадку, коли $x_0 = \infty$ $(x_0 = -\infty, x_0 = +\infty)$, виконавши підстановку $x = \frac{1}{t}$, дістанемо функції $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ і $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, аргументом яких є *t*. Теорема доводиться аналогічно.

Слід зауважити, що коли похідні f' та g' задовольняють ті самі умови, що й функції *f* і *g*, то правило Лопіталя можна застосовувати повторно (тобто границю відношення перших похідних функцій *f* і *g* можна замінити границею відношення других похідних цих функцій). При цьому дістанемо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$**.** Кажуть, що відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ (x_0 – число або ∞ $(-\infty, +\infty)$) є невизначеністю типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Для розкриття цієї невизначеності скористаємося наступним зауваженням.
Якщо у формулюванні правила Лопіталя умову
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ замінити умовою $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$,
то одержане твердження буде правильним.

Розкриття невизначеностей типів $[0\cdot\infty]$**,** $[\infty-\infty]$**.** Невизначеності типів $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$ можна звести до попередніх.

Якщо $f \to 0$, $g \to \infty$, то $f\cdot g$ подамо у вигляді $f\cdot g = \frac{f}{1/g}$, дістанемо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Якщо $f\cdot g$ подати у вигляді $f\cdot g = \frac{g}{1/f}$, то дістанемо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$**.**

Якщо ж $f \to \infty$, $g \to \infty$, то $f - g = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{fg}$. Одержимо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Додаток 4

СХЕМА ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

Система оцінювання навчальних досягнень студентів з дисципліни «Математичний аналіз» є накопичувальною. Шкала оцінювання – 100-бальна. Схема накопичення балів є досить гнучкою.

Оцінювання навчальних досягнень студентів є систематичним та включає в себе поточний та підсумковий контроль.

Поточний контроль передбачає перевірку засвоєння здобувачами освіти як теоретичного матеріалу, так і практичних навичок. Він здійснюється на лекційних та практичних заняттях. Формами його проведення можуть бути: усне опитування або бесіда, виконання тестових завдань, самостійних та контрольних робіт, письмова відповідь за відповідною темою заняття тощо. Кожен вид роботи оцінюється певною кількістю балів, яку викладач визначає заздалегідь.

Однією з форм перевірки теорії по кожному змістовому модулю є колоквіум, який може проводитись як у письмовій формі, так і усно. З питаннями до колоквіуму студентів ознайомлюють на початку вивчення змістового модуля.

Максимальна кількість балів, яку студент може набрати під час опанування та перевірки засвоєння теоретичного матеріалу, – 25 балів, зокрема за колоквіум – 10 балів. Якщо студент активно долучається до обговорення питань на лекційних заняттях, демонструє свідоме сприймання навчального матеріалу, то за кожне таке заняття може отримати 1 бал.

У межах практичної підготовки контролю та оцінюванню підлягають: робота безпосередньо на занятті, виконання домашнього завдання, поточних самостійних та контрольних робіт з теми. За результатами практичних занять студент може набрати максимально 50 балів.

Формою підсумкового контролю знань з дисципліни «Математичний аналіз» є екзамен. Відповідь на екзамені оцінюється максимально в 25 балів. При цьому повна, обґрунтована відповідь на теоретичне питання оцінюється в 5 балів. Практична частина білету складається з трьох завдань. Кожне завдання містить вправи трьох рівнів складності, які студент може обирати на власний розсуд. Завдання а) оцінюється в 3 бали, б) – в 4 бали, в) – в 5 балів.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Музиченко Світлана Василівна *– кандидатка педагогічних наук, доцентка, доцентка кафедри математики та економіки НУЧК імені Т.Г. Шевченка*

Філон Лідія Григорівна *– кандидатка педагогічних наук, доцентка, завідувачка кафедри математики та економіки НУЧК імені Т.Г. Шевченка*

ПРАКТИКУМ
з математичного аналізу

Частина 1

Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення функції однієї змінної

[електронне видання]

Комп'ютерна верстка
та макетування *О. І. Полковник*

*Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.*

Підписано до друку 31.08.2022 р. Формат 60×90 1/16.
Ум. друк. арк. 5,35. Обл.-вид. 5,12. Зам. № 008.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
т. 941-102. nuchk.tipograf@gmail.com