

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка**

Кафедра загальнотехнічних дисциплін та креслення

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
ЧАСТИНА 1: ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА, ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

для підготовки бакалаврів технологічної та професійної освіти

Чернігів-2018

УДК 621.8
ББК 30.1
Т 75

Укладачі: *Лаппо І. М., Люлька В. С.*

Відповідальний за випуск: В. С. Люлька

Рецензенти: кандидат технічних наук, доцент кафедри зварювального виробництва та автоматизованого проектування будівельних конструкцій ЧНТУ **Кайдаш М. Д.**;

доктор педагогічних наук, професор, декан технологічного факультету НУЧК імені Т. Г. Шевченка **Торубара О. М.**

Т 75 **Технічна механіка.** Навчально-методичний посібник. Частина 1: теоретична механіка, опір матеріалів. Для підготовки бакалаврів технологічної та професійної освіти / Лаппо І.М., Люлька В.С. – Чернігів: НУЧК, 2018. – 142 с.

Навчально-методичний посібник містить тематику теоретичного матеріалу, яка включає навчальний матеріал з теоретичної механіки, опору матеріалів. Наведено методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни. Надані варіанти завдань до виконання контрольної роботи з прикладами розв'язання задач, правила оформлення контрольних робіт, питання для самоконтролю. Наведено методику виконання лабораторних робіт з дисципліни «Технічна механіка». Тематика лабораторних робіт включає навчальний матеріал з теоретичної механіки, опору матеріалів. Надані варіанти завдань, правила оформлення звіту, приклади розрахунків, питання для самоконтролю, додатки з довідниковими матеріалами.

Рекомендовано до друку вченою радою технологічного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка (Протокол № 2 від 12.11.2018)

© Лаппо І. М., Люлька В.С., 2018

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Програма навчальної дисципліни.....	5
2. Контрольні завдання та приклади їх розв'язання.....	9
Задача 1. Визначення реакцій опор балки.....	9
Задача 2. Приклад дослідження бруса на розтяг (стиск) та розрахунок напружень і деформацій бруса.....	13
Задача 3. Дослідження та розрахунок бруса на міцність та жорсткість при крученні.....	21
Задача 4. Дослідження та розрахунок балки на міцність при згині.....	28
Вимоги до оформлення контрольних робіт.....	38
Питання до самоперевірки.....	38
3. Лабораторні роботи	41
Лабораторна робота 1. Дослідження рівноваги системи збіжних сил.....	41
Лабораторна робота 2. Дослідження рівноваги довільної плоскої системи сил.....	47
Лабораторна робота 3. Дослідження рівноваги довільної просторової системи сил.....	54
Лабораторна робота 4. Визначення швидкості та прискорення точки за даними рівняннями її руху.....	61
Лабораторна робота 5. Теорема про зміну кінетичної енергії.....	72
Лабораторна робота 6. Випробування сталевого зразка на розтяг.....	82

Лабораторна робота 7. Випробування деревини на сколювання та стиск.....	92
Лабораторна робота 8. Випробування на кручення зразків пластичного та крихкого матеріалів.....	96
Лабораторна робота 9 Дослідження та розрахунок бруса на міцність та жорсткість при крученні.....	99
Лабораторна робота 10 Дослідження деформації балки при згині.....	107
Лабораторна робота 11 Дослідження та розрахунок балки на міцність при згині.....	110
Лабораторна робота 12 Дослідження стійкості стиснутого стержня.....	119
4. Приклад тестових завдань.....	122
5. Приклад комплексної контрольної роботи.....	129
Перелік рекомендованої літератури.....	132
Додатки	133
Додаток А.....	133
Додаток Б.....	134
Додаток В.....	135
Додаток Г.....	136
Додаток Д.....	139

ВСТУП

Навчальним планом підготовки бакалаврів технологічної та професійної освіти з дисципліни «Технічна механіка» передбачено вивчення навчального матеріалу шляхом відвідування курсу лекцій, виконання та захисту лабораторних робіт, самостійної роботи.

Значна доля часу згідно навчальному плану дисципліни передбачена для самостійної роботи студентів. Згідно останнім світовим тенденціям сучасної вищої освіти підвищення якості засвоєння навчального матеріалу повинно відбуватися за рахунок збільшення об'єму самостійної роботи студента. Посібник розрахований на студентів денної та заочної форми навчання, може бути використаний для самостійного вивчення основ технічної механіки.

Технічна механіка в системі фахової підготовки спеціалістів технологічної освіти відіграє важливу роль як основа при опануванні в подальшому знань з циклу загальнотехнічних та професійно спрямованих дисциплін. Необхідність у вивченні такого матеріалу визначається вимогами професійно-кваліфікаційної характеристики спеціаліста даного профілю.

Курс «Технічної механіки» традиційно компонується як інтеграція автономних курсів, чільне місце серед яких посідають «Теоретична механіка», «Опір матеріалів», «Теорія машин і механізмів», «Деталі машин».

Частина курсу *«Технічна механіка. Теоретична механіка»* вивчає основні поняття та закони механіки, наслідки з цих законів, методи вивчення рівноваги та руху матеріальних об'єктів.

Частина курсу *«Технічна механіка. Опір матеріалів»* вивчає методи розрахунку окремих елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість. Використання основних методик дослідження напруженого стану конструкцій та їх розрахунок забезпечує не тільки надійність експлуатації, але й принципи технологічності та економічності.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

- основні закони, принципи теоретичної механіки, опору матеріалів;
- способи складання рівнянь рівноваги фізичних об'єктів і механічних систем;
- кінематичні залежності для визначення кінематичних параметрів механічних систем;
- методи проведення статичних і динамічних розрахунків;
- умови міцності, жорсткості, стійкості;

вміти:

- використовувати закони механіки відповідно до ситуації виробничих вимог;
- раціонально вибрати метод вирішення конкретних задач механіки;
- використовувати отримані знання під час вивчення спеціальних дисциплін.

1. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Теоретична механіка

Тема 1. Вступ. Основні поняття механіки. Статика. Аксиоми статички. Система збіжних сил. Система довільних сил на площині. Просторова система довільних сил

Предмет статички. Основні поняття статички: тверде тіло, сила, еквівалентні й зрівноважені системи сил, рівнодіюча системи сил. Основні закони класичної механіки. Момент сили відносно полюса та осі. Елементарна робота сили та системи сил. Невільні системи матеріальних точок. В'язі, їх класифікація.

Умови рівноваги системи сил, окремі випадки плоских та просторових систем сил. Еквівалентні системи сил. Зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду.

Контрольні запитання

1. Назвіть аксиоми статички? 2. Сформулюйте теорему про три сили? 3. Система збіжних сил. Опишіть векторний та аналітичний способи складання сил? 4. Назвіть умови рівноваги системи збіжних сил? 5. Дайте визначення моменту сили відносно центра? 6. Дайте визначення: пара сил, момент пари, еквівалентність пар? 7. Плоска довільна система сил. Дайте визначення головний вектор і головний момент довільної системи сил. Сформулюйте основну теорему статички твердого тіла? 8. Назвіть умови рівноваги довільної плоскої системи сил? 9. Система паралельних сил. Умови рівноваги? 10. Момент сили відносно центра як вектор. Момент сили відносно осі? 11. Приведення просторової системи сил до даного центру? 12. Назвіть умови рівноваги довільної просторової системи сил?

Тема 2. Кінематика руху точки і твердого тіла

Предмет кінематики. Простір і час у класичній механіці. Системи відліку. Векторний спосіб завдання руху точки, траєкторія. Визначення швидкості і прискорення точки. Природний спосіб завдання руху точки, швидкість і прискорення. Кривина кривої, радіус кривизни. Нормальне і тангенціальне прискорення точки. Дослідження руху точки. Поняття про криволінійні координати.

Поступальний рух твердого тіла. Швидкості й прискорення точок тіла при поступальному русі. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла. Швидкість і прискорення точок твердого тіла, що обертається.

Абсолютний, відносний, переносний рухи точки.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте засоби завдання руху точки (натуральний, координатний, векторний)? 2. Швидкість точки при різних способах задавання руху? 3. Прискорення точки при різних способах задавання руху. Дотичне та нормальне прискорення точки? 4. Охарактеризуйте

поступальний рух твердого тіла? 5. Охарактеризуйте обертальний рух твердого тіла. Дайте визначення кутової швидкості та кутового прискорення? 6. Швидкість та прискорення точки тіла, що обертається? 7. Опишіть рівняння плоского руху твердого тіла. Розкладення руху на поступальний та обертальний?

Тема 3. Вступ до динаміки. Загальні теореми динаміки

Предмет і задачі динаміки. Динаміка точки, рівняння руху матеріальної точки. Дві основні задачі динаміки точки. Поняття про механічні системи. Міри механічного руху системи: вектор кількості руху, вектор моменту кількості руху (кінетичний момент). Теорема про зміну кількості руху механічної системи. Кінетична енергія точки та механічної системи, теорема про зміну кінетичної енергії.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте дві задачі динаміки? 2. Опишіть криволінійний рух точки. Запишіть диференціальне рівняння руху? 3. Опишіть відносний рух точки. Запишіть диференціальне рівняння руху. Окремі випадки? 4. Сформулюйте загальні теореми динаміки точки: теорема про зміну кількості руху; про зміну кінетичного моменту; про зміну кінетичної енергії. Що таке робота сил? 5. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху системи. Закон збереження кількості руху? 6. Що таке кінетичний момент системи. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту. Опишіть закон збереження кінетичного моменту?

Змістовий модуль 2. Опір матеріалів

Тема 1. Основні положення опору матеріалів. Розтягання, стискання, зріз, зминання

Поняття про пружну й пластичну деформації. Міцність, жорсткість, основні гіпотези та припущення. Брус. Метод перерізів. Внутрішні силові фактори. Види навантажень. Напруження повне, нормальне, дотичне.

Деформація розтягування (стискання). Поздовжні сили та їх епюри, напруження в плоских перерізах та їх епюри. Закон Гуку, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона.

Контрольні запитання

1. Яке тіло називають брусом? 2. Що розуміють під терміном «механічне напруження»? 3. Яке напруження називають нормальним, а яке – дотичним? 4. В чому полягає суть методу перерізів? Які задачі розв'язують за допомогою цього методу? 5. Які випадки деформації бруса називають центральним розтягом (стиском). 6. Як визначають модуль і напрям внутрішнього зусилля в довільному поперечному перерізі бруса? 7. Як розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах центрально-розтягнутого (стиснутого) бруса? 8. Як визначаються значення та напрям (знак) нормальних напружень в довільному перерізі бруса при розтягу (стиску)? 9. Що являє собою епюра нормальних напружень при

центральному розтягу (стиску)? 10. Як записується умова міцності при розтягу (стиску)? 11. Що розуміють під терміном «допустиме напруження»? В чому полягає різниця визначення допустимого напруження для пластичних та крихких матеріалів? 12. Що таке коефіцієнт запасу міцності? Від яких факторів він залежить? 13. Як формулюється та записується закон Гуку? 14. Як записується умова жорсткості бруса при розтягу (стиску)? 15. Що являє собою еюра повздовжніх переміщень, як вона будується? 16. Які деформації називають пружними, а які пластичними? 17. Як визначають значення та знак нормальних та дотичних напружень в похилих площинах перерізів при розтягу (стиску) бруса?

Тема 2. Деформація кручення

Крутні моменти та їх епюри. Критерії жорсткості при крученні. Розрахунок на міцність та жорсткість. Побудова епюр крутних моментів, максимальних дотичних напружень та кутових переміщень.

Контрольні запитання

1. При якому навантаженні прямий брус отримує деформацію кручення? 2. Який випадок плоского напруженого стану називають чистим зсувом? 3. Що називають кутом зсуву? Що таке відносний зсув і чому він дорівнює? 4. Як записується закон Гуку при зсуві? 5. Що розуміють під модулем зсуву? 6. Що представляє собою еюра крутильних моментів і як вона будується? Для чого вона потрібна? 7. Які напруження виникають в поперечних перерізах круглого бруса при крученні і як вони розподіляються по перерізу? 8. Як записується умова міцності при крученні? 9. Що представляє собою еюра напружень при крученні вала? 10. Що розуміють під жорсткістю вала при крученні? 11. Що розуміють під абсолютним та відносним кутом закручення вала? 12. Як записується умова жорсткості при крученні? 13. Що представляє собою еюра кутів закручення і як вона будується? 14. Що таке відносний кут закручення? Чи має сенс поняття сумарного відносного кутів закручення для ступінчатого вала?

Тема 3. Деформація згину. Поняття про складний напружений стан

Основні поняття та визначення. Поперечні сили й згинаючі моменти. Епюри згинаючих моментів при навантаженні бруса зосередженими силами і моментами. Нормальні напруження при згині. Розрахунок на міцність при згині.

Контрольні запитання

1. При якому навантаженні балка випробовує чистий, а при якому – поперечний згин? 2. Які типи опор використовують для закріплення балки на основі? 3. Як визначаються опорні реакції балки? 4. Як складаються рівняння поперечних сил і згинальних моментів в довільному перерізі на ділянках вала? 5. Що собою представляють епюри поперечних сил та згинальних моментів, і як вони будуються? 6. Як визначаються знаки

поперечних сил і згинальних моментів? 7. Яка диференціальна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою та зовнішнім розподіленим навантаженням? 8. Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки і як вони змінюються по висоті балки? 9. Що представляє собою нейтральний прошарок і нейтральна вісь, як вони розміщені в балці? 10. Як записується умова міцності при згині? 11. Як визначаються осьові моменти інерції та моменти опору перерізу для різних перерізів (круглого, квадратного, прямокутного)? 12. Які форми поперечного перерізу є найбільш раціональними при згині?

2. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

ЗАДАЧА 1. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР БАЛКИ

Для балки, наведеної на рис. 1, визначити реакції опор у точках A і B , зневажаючи вагою балки і стержня BC .

На балку прольотом $AB = l$ діють зосереджена сила F , пари сил з моментом M і рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q .

Примітка: У схемах 1-10 опора A – шарнірно нерухома; у схемах 2, 5, 6, 7 опора B – шарнірно рухома на катках.

Номер схеми і числові дані для задачі вибираються студентом з таблиці 1.1 відповідно до букв його прізвища й ініціалів. Розрахункова схема балки за її номером вибирається з рис. 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до вибору варіанта задачі 1

Літери прізвища та ініціали	№ схеми	l , м	$\frac{l}{a_1}$	$\frac{l}{a_2}$	Кути, град		F , кН	q , кН/м	m , кН·м
					α	β			
А Б В	1	2	10	2	30	30	1	2	1
Г Д Е	2	4	8	4	45	45	2	4	2
Є Ж З	3	6	6	6	60	60	3	6	3
И І Ї	4	8	4	8	90	30	4	8	4
Й К Л	5	10	2	10	120	45	5	10	5
М Н О	6	2	10	2	135	60	6	2	6
П Р С	7	4	8	4	150	30	7	4	7
Т У Ф	8	6	6	6	30	45	8	6	8
Х Ц Ч	9	8	4	8	45	60	9	8	9
Ш Щ Ъ	10	10	2	10	60	30	10	10	10
Ю Я	5	4	8	4	90	45	5	2	6
№ стовпця	1	2	3	4	5	6	7	8	9

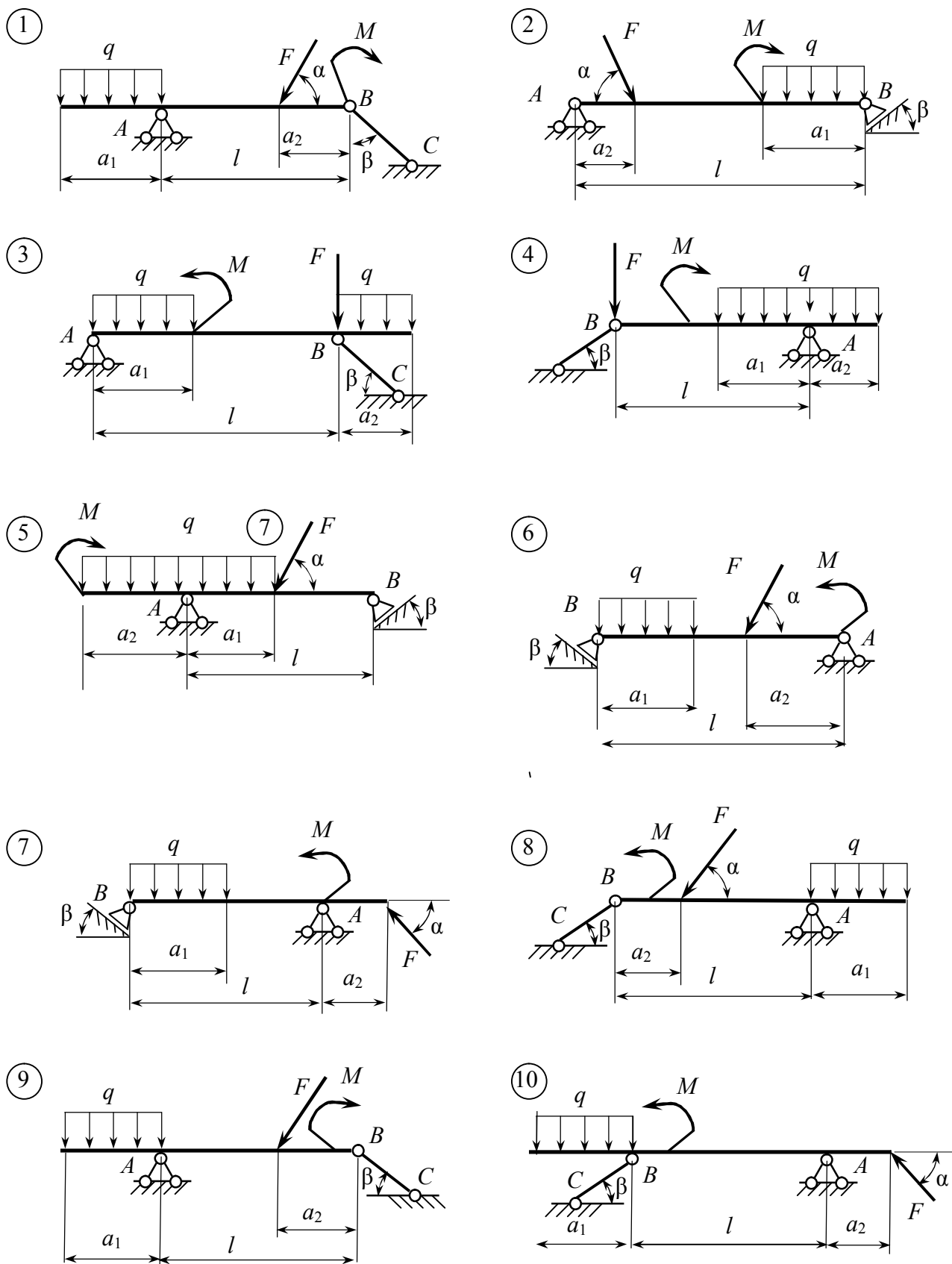


Рисунок 1.1 – Розрахункові схеми балок

Приклад розв'язання

На горизонтальну балку (рис. 1.2) прольотом $AB = l$ діють зосереджена сила F , пара сил з моментом M і рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q . Визначити реакції опор у точках A і B , зневажаючи вагою балки. Схема № 11.

Надано: $l = 10$ м; $a_1 = \frac{l}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$ м; $a_2 = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 5$ м; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$;
 $F = 4$ кН; $q = 2$ кН/м; $M = 8$ кН·м.

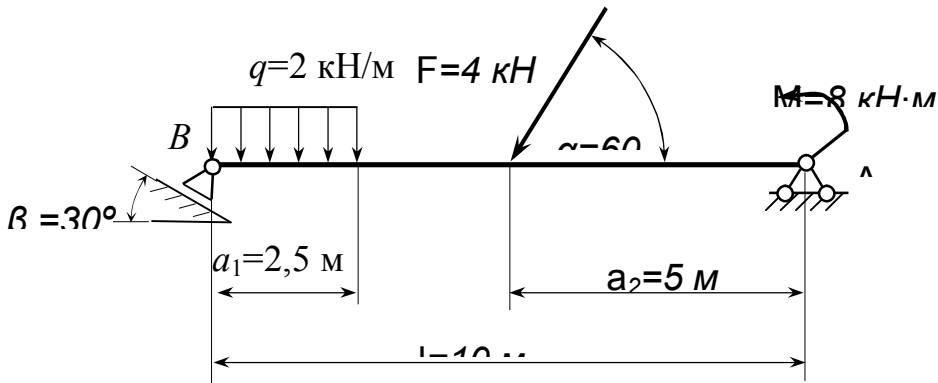


Рисунок 1.2 – Задана схема балки

Розв'язок:

Балка знаходиться у рівновазі під дією заданого навантаження й опорних реакцій. На підставі аксіоми про відстороняння від зв'язків схема фізичної системи замінюється розрахунковою схемою, де опори замінюються їх реакціями. На розрахунковій схемі, наведеній нижче, задля наочності опори показані разом з реакціями.

Для визначення опорних реакцій використовуються рівняння рівноваги балки. При цьому рівняння вибираються в такому порядку, при якому виключається необхідність рішення системи рівнянь, тобто, щоб у кожне рівняння входило не більш однієї невідомої реакції.

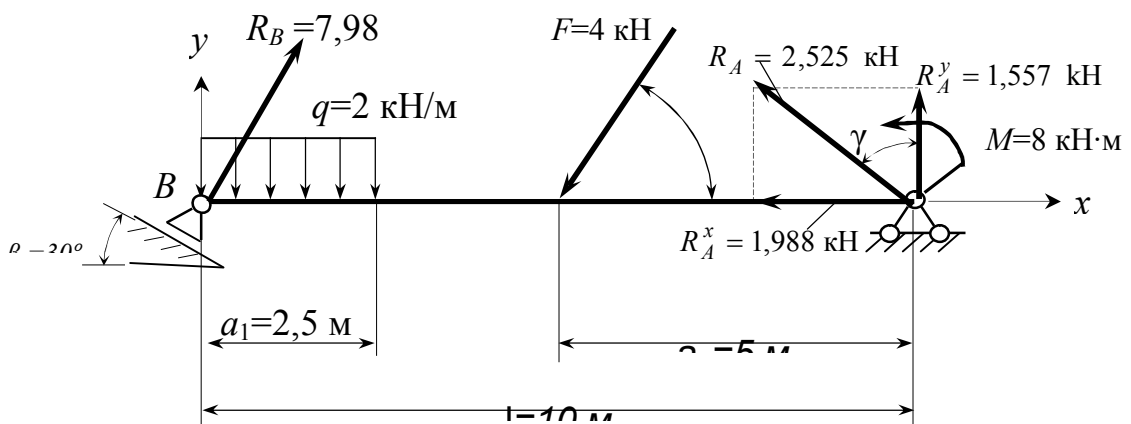


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема балки

Визначення реакції R_B . Опора B шарнірно рухома, вона перешкоджає переміщенню кінця балки лише в напрямку, перпендикулярному опорній площині. Тому реакція R_B теж діє в цьому напрямку (рис. 1.3). Для визначення модулю реакції R_B складемо подальше рівняння рівноваги балки:

$$\sum M_A = 0. R_B l \cos \beta - q a_1 \left(l - \frac{a_1}{2} \right) - F a_2 \sin \alpha - M = 0.$$

$$R_B = \frac{1}{l \cos \beta} \left[q a_1 \left(l - \frac{a_1}{2} \right) + F a_2 \sin \alpha + M \right] =$$

$$= \frac{1}{10 \cos 30^\circ} \left[2 \cdot 2,5 \left(10 - \frac{2,5}{2} \right) + 4 \cdot 5 \sin 60^\circ + 8 \right] = 7,98 \text{ кН}$$

Визначення реакції R_A . Опора A шарнірно нерухома, перешкоджає переміщенню кінця A балки у будь-якому напрямку. Тому потрібно визначити її модуль і напрямок. Для цього реакцію R_A розкладемо на складові R_A^x і R_A^y , які визначаються із наступних рівнянь рівноваги балки.

$$\sum M_B = 0. R_A^y l + M - F \sin \alpha (l - a_2) - q \frac{a_1^2}{2} = 0.$$

$$R_A^y = \frac{1}{l} \left[-M + F \sin \alpha (l - a_2) + q \frac{a_1^2}{2} \right] = \frac{1}{10} \left[-8 + 4 \sin 60^\circ (10 - 5) + 2 \frac{2,5^2}{2} \right] = 1,557$$

$$R_A^y = 1,557 \text{ кН.}$$

$$\sum F_i^x = 0. R_B \sin \beta - F \cos \alpha - R_A^x = 0.$$

$$R_A^x = R_B \sin \beta - F \cos \alpha = 7,98 \cdot \sin 30^\circ - 4 \cdot \cos 60^\circ = 1,988 \text{ кН.}$$

$$\text{Сумарна реакція: } R_A = \sqrt{(R_A^x)^2 + (R_A^y)^2} = \sqrt{1,988^2 + 1,557^2} = 2,525 \text{ кН.}$$

$$\text{Кут нахилу реакції } R_A: \gamma = \arctg \left(\frac{R_A^x}{R_A^y} \right) = \arctg \left(\frac{1,988}{1,557} \right) = 51,93^\circ.$$

Перевірка реакцій

$$\text{Умова рівноваги } \sum F_i^y = 0.$$

$$R_B \cos \beta - q a_1 + F \sin \alpha + R_A^y = 7,976 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot 2,5 - 4 \cdot \sin 60^\circ + 1,557 =$$

$$= 8,464 - 8,464 = 0. \text{ Умова рівноваги виконується.}$$

$$\text{Умова рівноваги } \sum M_B = 0. R_A l \cos \gamma + M - F \sin \alpha (l - a_2) - q \frac{a_1^2}{2} =$$

$$= 2,525 \cdot 10 \cdot \cos 51,93^\circ + 8 - 4 \cdot \sin 60^\circ (10 - 5) - 2 \frac{2,5^2}{2} = 23,57 - 23,57 = 0.$$

Умова рівноваги виконується.

ЗАДАЧА 2. ПРИКЛАД ДОСЛІДЖЕННЯ БРУСА НА РОЗТЯГ (СТИСК) ТА РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ І ДЕФОРМАЦІЙ БРУСА

Надано: Брус навантажений зовнішніми осьовими силами $F_1 = 90\text{кН}$, $F_2 = 50\text{кН}$, $F_3 = 110\text{кН}$, $[\sigma] = 160\text{МПа}$ (рис.2.1).

Розв'язок:

1. *Визначення внутрішніх повздовжніх зусиль та побудова епюри.*

Відповідно правил визначення границь ділянок брус зображуємо в зручному масштабі. Відкидаємо накладену в'язь і замінюємо її відповідною реакцією в'язі \bar{R} (рис. 2.2). З рівняння рівноваги всього бруса маємо: $\sum F_{iz} = 0$;

$$F_1 - F_2 - F_3 + R = 0.$$

$$\text{Визначаємо: } R = F_2 + F_3 - F_1 = 50 + 110 - 90 = 70 \text{ кН.}$$

Отримане додатне значення сили R підтверджує, що напрям реакції попередньо показано правильно.

Розбиваємо брус на ділянки. В даному прикладі виділяємо чотири ділянки (рис. 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6). Використовуючи метод перерізів знаходимо внутрішні повздовжні зусилля на відповідних ділянках бруса. Складаючи рівняння рівноваги напрям внутрішнього повздовжнього зусилля вибирається так, щоб він співпадав з напрямом зовнішньої нормалі. В цьому разі додатне значення внутрішнього повздовжнього зусилля вказує, що це зусилля є розтяжним.

Ділянка I: $0 \leq Z_1 \leq l_1$ або $0 \leq Z_1 \leq 0,5\text{м}$

$$\text{Рівняння рівноваги: } \sum F_{iz} = 0,$$

$$N_1 - F_1 = 0, N_1 = F_1 = 90 \text{ кН.}$$

Деформація ділянки – розтяг.

Ділянка II: $0 \leq Z_2 \leq l_1 + l_2$ або $0 \leq Z_2 \leq 0,9\text{м}$

$$\text{Рівняння рівноваги: } \sum F_{iz} = 0,$$

$$N_2 - F_1 + F_2 = 0, N_2 = F_1 - F_2 = 90 - 50 = 40 \text{ кН.}$$

Деформація ділянки – розтяг.

Ділянка III: $0 \leq Z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$ або $0 \leq Z_3 \leq 1,5\text{м}$

$$\text{Рівняння рівноваги: } \sum F_{iz} = 0,$$

$$N_3 - F_1 + F_2 = 0, N_3 = F_1 - F_2 = 90 - 50 = 40 \text{ кН.}$$

Деформація ділянки – розтяг.

Ділянка IV: $0 \leq z_4 \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ або $0 \leq z_4 \leq 3,6\text{м}$

$$\text{Рівняння рівноваги: } \sum F_{iz} = 0,$$

$$N_4 + R = 0, N_4 = -R = -70 \text{ кН.}$$

Деформація ділянки – стискання.

За отриманими результатами внутрішніх повздовжніх зусиль будується їх епюра. Проводимо паралельно осі бруса нульову лінію. На граничних ділянках бруса в масштабі відкладаємо отримані значення

внутрішніх силових факторів, враховуючи їх знак і характер деформації (рис. 2.1.7).

2. *Визначення напружень та необхідних розмірів поперечного перерізу ділянок бруса.*

Потрібні розміри поперечних перерізів бруса визначаються для кожної з ділянок з умови міцності при розтягу (стиску):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma],$$

де N_i – повздовжнє зусилля в ділянці бруса, кН; A_i – площа поперечного перерізу в ділянці бруса, м²; $[\sigma]$ – допустиме напруження для заданого матеріалу, МПа.

Відповідно заданого, площу перерізу на всіх ділянках бруса виразимо через задані параметри:

$$\text{Ділянка I: } A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot a^2}{4} = 0,785a^2;$$

$$\text{Ділянка II: } A_2 = A_1 = 0,785a^2;$$

$$\text{Ділянка III: } A_3 = b^2 = a^2 \quad ;$$

$$\text{Ділянка IV: } A_4 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (2a)^2}{4} = 3,14a^2.$$

Визначимо напруження на кожній з ділянок бруса, виразивши через задані параметри:

$$\text{Ділянка I: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{90 \cdot 10^3}{0,785a^2} = 11,5 \cdot 10^4 \cdot a^{-2} \text{ Па};$$

$$\text{Ділянка II: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,785a^2} = 5,09 \cdot 10^4 \cdot a^{-2} \text{ Па};$$

$$\text{Ділянка III: } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{a^2} = 4,0 \cdot 10^4 a^{-2} \text{ Па};$$

$$\text{Ділянка IV: } \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{-70 \cdot 10^3}{3,14a^2} = -2,23 \cdot 10^4 a^{-2} \text{ Па}.$$

Аналізуючи отримані результати, робимо висновок, що найбільш напруженим (небезпечним) є переріз на першій ділянці. Тоді умову міцності на першій ділянці запишемо як: $\sigma_1 = 11,5 \cdot 10^4 \cdot a^{-2} \leq [\sigma]$.

З умови міцності знаходимо потрібний параметр перерізу a :

$$a \geq \sqrt{\frac{11,5 \cdot 10^4}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{11,5 \cdot 10^4}{160 \cdot 10^6}} = 26,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Тоді діаметр перерізу бруса на четвертій ділянці (за умовами задачі) $d_4 = 2a = 2 \times 26,8 \cdot 10^{-3} = 53,6 \cdot 10^{-3}$ м. Відповідно до СТ СЭВ 514-77 з ряду $Ra40$ необхідно прийняти найближче стандартне значення розмірів бруса:

$$d_1 = b = 28 \text{ мм} = 0,028 \text{ м}, d_4 = 56 \text{ мм} = 0,056 \text{ м}.$$

3. *Визначення нормальних напружень в перерізах бруса, побудова епюри нормальних напружень.*

Визначимо напруження, що виникають в перерізах бруса:

$$\text{Ділянка I: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 4}{0,785 \cdot 0,028^2} = 146 \cdot 10^6 \text{ Па} = 146 \text{ МПа};$$

$$\text{Ділянка II: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4}{0,785 \cdot 0,028^2} = 65 \cdot 10^6 \text{ Па} = 65 \text{ МПа};$$

$$\text{Ділянка III: } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4}{0,028^2} = 51 \cdot 10^6 \text{ Па} = 51 \text{ МПа};$$

$$\text{Ділянка IV: } \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{-70 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,028^2} = -28 \cdot 10^6 \text{ Па} = -28 \text{ МПа}.$$

За отриманими результатами, в вибраному масштабі будуюмо епюру нормальних напружень в перерізах бруса (рис. 2.1.8).

4. *Визначення деформацій бруса.*

Відповідно до закону Гуку деформація бруса при розтягу (стиску) визначиться по формулі:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i},$$

де E – модуль пружності. Для низьковуглецевої сталі – $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Тоді деформації бруса на кожній ділянці складатимуть:

$$\text{Ділянка I: } \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,785 \cdot 0,028^2} = 0,365 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,785 \cdot 0,028^2} = 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,028^2} = 0,153 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } \Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} = \frac{-70 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 0,028^2} = -0,098 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Переміщення перерізів в точках B, C, D, E , які лежать на границях ділянок, при початку відліку в нерухомій точці A (закріплення бруса) будуть дорівнювати:

$$\text{Точка B: } \delta_B = \Delta l_4 = -0,098 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Точка C: } \delta_C = \Delta l_4 + \Delta l_3 = -0,098 \cdot 10^{-3} + 0,153 \cdot 10^{-3} = 0,055 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Точка D: } \delta_D = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = -0,098 \cdot 10^{-3} + 0,153 \cdot 10^{-3} + 0,13 \cdot 10^{-3} = 0,185 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Точка E: } \delta_E = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = -0,098 \cdot 10^{-3} + 0,153 \cdot 10^{-3} + 0,13 \cdot 10^{-3} + 0,365 \cdot 10^{-3} = 0,550 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Епюра переміщень перерізів бруса будується наступним чином: отримані значення ординат відкладаються у обраному масштабі напроти відповідних граничних точок перерізів і послідовно з'єднуються відрізками прямих ліній (рис. 2.1.9).

5. *Визначення напружень в похилих площинках найбільш навантаженого перерізу бруса.*

Відповідно завдання похилі площинки розміщені під кутом до нормального перерізу бруса.

Нормальні напруження на заданих площинках будуть становити:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha = 146 \cos^2 35 = 98 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma \cdot \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = 146 \cdot \cos^2 (35^\circ + 90^\circ) = 48 \text{ МПа};$$

Дотичні напруження на заданих площинках становлять:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{146}{2} \sin 2 \cdot 35^\circ = 69 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = \frac{146}{2} \sin 2 \cdot (35^\circ + 90^\circ) = -69 \text{ МПа}.$$

Положення заданих похилих площинок та напрям векторів визначених напружень показані на рис.2.2.

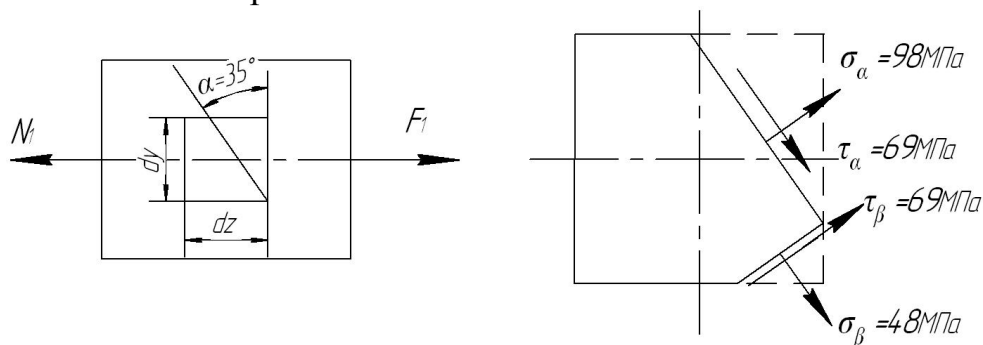


Рисунок 2.2 – Напруження, що виникають в похилій площинці небезпечного перерізу бруса.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для дослідження бруса

Перша буква прізвища	Номер схеми	Діючі сили, кН			Довжина ділянок бруса, м				Матеріал	Кут α , град.
		F ₁	F ₂	F ₃	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
А, Б, В	1	200	90	30	2,0	0,5	1,0	0,3	Мідь	-80
Г, Ґ, Д	2	110	40	120	1,1	0,4	0,3	0,3	Сталь 45	30
Е, Ж, З,	3	120	30	40	1,2	0,6	0,4	0,4	Мідь	45
І, І, К	4	130	50	90	1,3	0,5	0,7	0,5	Латунь	35
Л, М, Н	5	140	80	40	1,4	0,4	0,3	0,6	Бронза	-50
О, П, Р	6	150	120	30	1,5	1,0	0,8	0,7	Чавун	55
С, Т, У	7	160	130	100	1,6	0,4	1,0	0,8	Дюралюміній	-60

Продовження табл. 2.1										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ф, Х, Ц	8	170	150	60	1,7	0,9	0,5	0,9	Сталь 40Х	65
Ч, Ш, Щ,	9	180	50	70	1,8	0,8	0,6	0,6	Сталь Ст3	-70
Є, Ю, Я	0	190	80	90	1,1	0,4	0,5	0,8	Чавун	75
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці.
Наприклад: І В А Н Ч Е Н К О В
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
З таблиці обираємо: схема 4, $F_1=200\text{кН}$, $F_2=90\text{кН}$, $F_3=40\text{кН}$, $l_1=1,8\text{м}$, $l_2=0,6\text{м}$, $l_3=0,3\text{м}$, $l_4=0,5\text{м}$, матеріал – чавун, кут $\alpha = -80^\circ$

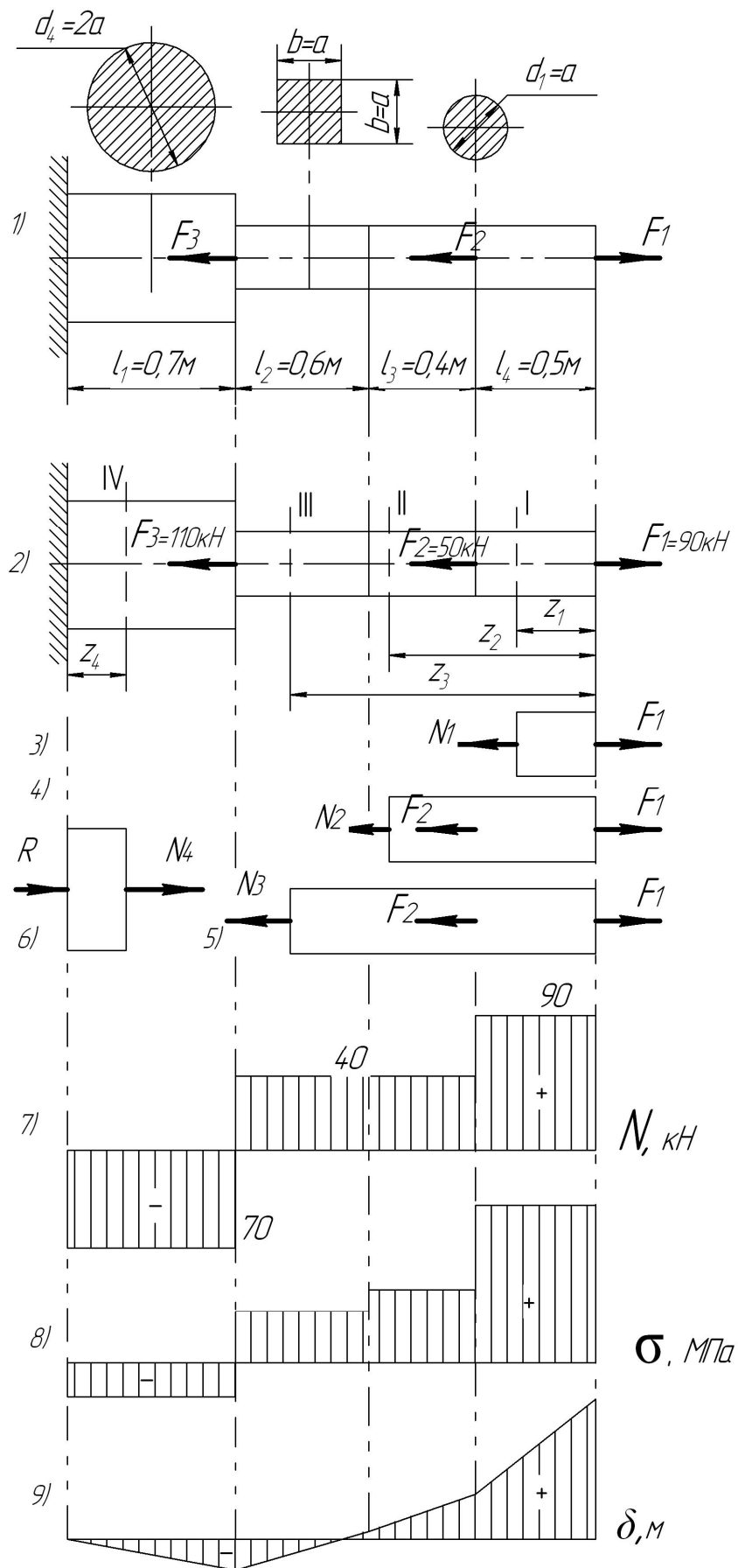
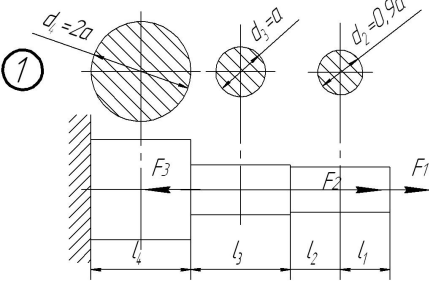
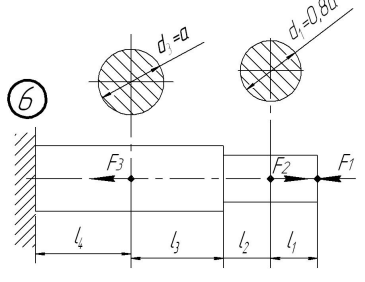
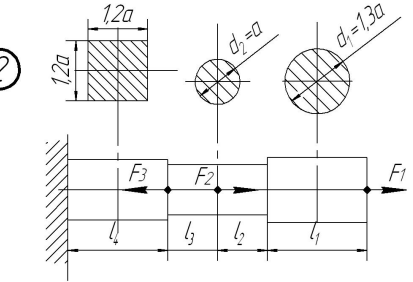
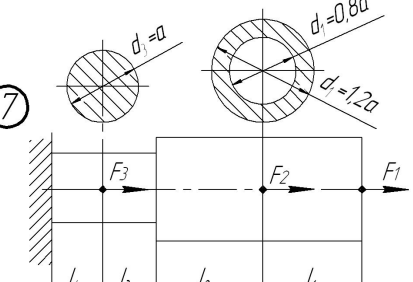
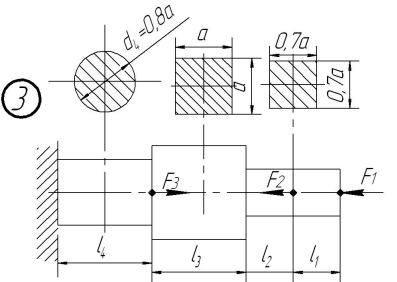
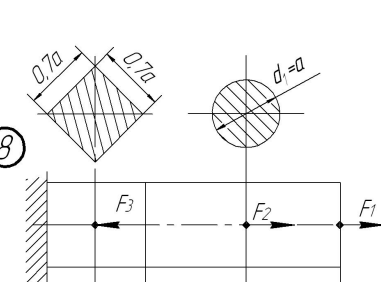
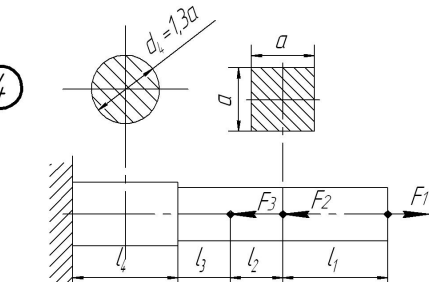
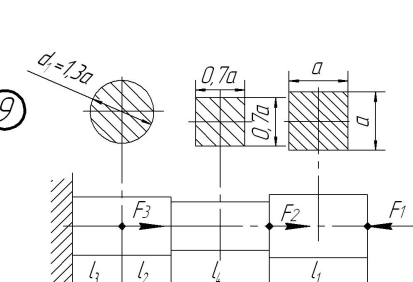
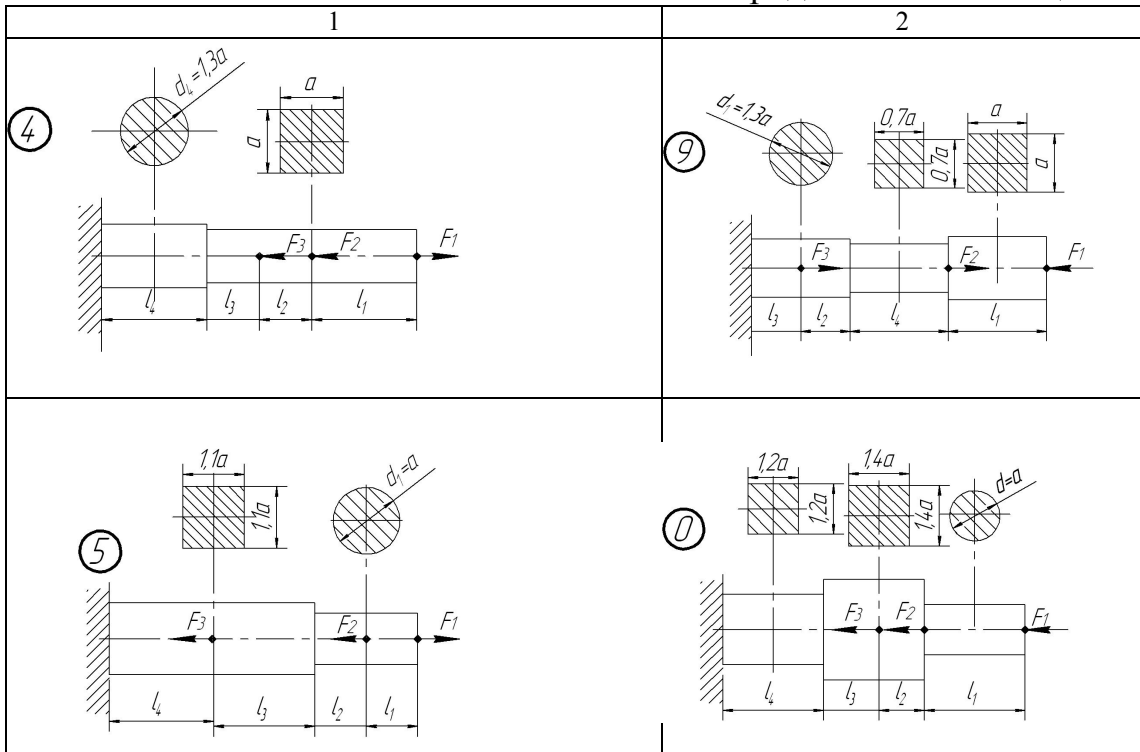


Рисунок 2.1 – Дослідження бруса на міцність та жорсткість при розтягу (стиску)

Таблиця 2.2 – Схеми навантаження бруса

Схеми навантаження бруса	Схеми навантаження бруса
<p style="text-align: center;">1</p> 	<p style="text-align: center;">2</p> 
<p style="text-align: center;">2</p> 	<p style="text-align: center;">7</p> 
<p style="text-align: center;">3</p> 	<p style="text-align: center;">8</p> 
<p style="text-align: center;">4</p> 	<p style="text-align: center;">9</p> 

Продовження таблиці 2.2



ЗАДАЧА 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК БРУСА НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ

Завдання до виконання роботи

Виконати дослідження та розрахунок суцільного вала круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні. Дослідити напружений стан бруса при крученні. Визначити значення невідомого врівноважувального моменту T_0 . Визначити крутні моменти в перерізах бруса, побудувати епюру крутних моментів в перерізах бруса. З умови міцності визначити необхідні діаметри бруса на всіх його ділянках. Підібрати діаметри бруса з умови жорсткості. Виконати аналіз раціонального підбору діаметрів бруса. Визначити кути повороту поперечних перерізів ділянок бруса, побудувати епюру абсолютних та відносних кутів закручення перерізів бруса. Вихідні дані до дослідження надані в таблицях 3.1 і 3.2.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, якщо в поперечних перерізах бруса, під дією зовнішнього моменту виникає тільки один силовий фактор – крутний момент сил пружності M_k , то брус отримує деформацію кручення. Момент сил пружності та його напрям визначають в залежності від дії зовнішніх моментів за допомогою методу перерізів:

– крутний момент в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх обертових моментів, які прикладені до бруса по один бік від дослідного перерізу;

– крутний момент перерізу вважається додатним, якщо при погляді на відсічену частину з боку зовнішньої нормалі до перерізу, рівнодійний момент зовнішніх обертових моментів направлений проти годинникової стрілки.

Для розрахунку бруса (вала) на міцність та жорсткість при крученні необхідно знати закон зміни крутних моментів по всій його довжині.

Графічне зображення зміни крутних моментів вздовж осі бруса називають *епюра крутних моментів*.

Умова міцності при крученні має вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.1)$$

де M_k – крутний момент в небезпечному перерізі вала, Н·м; $[\tau]$, τ_{\max} – розрахункові та допустимі дотичні напруження при крученні, Па; W_p – полярний момент опору перерізу, м³.

Знак дотичного напруження визначається знаком крутного моменту пружних сил M_k .

Жорсткість бруса (вала) визначається кутом закручення перерізу. Кут повороту одного перерізу відносно іншого називається абсолютним кутом закручення. Абсолютний кут закручення довільної ділянки вала визначається за формулою:

$$\varphi_i = \frac{M_{ki} \cdot l_i}{G_i \cdot J_{pi}}, \quad (3.2)$$

де M_{ki} – крутний момент на довільній ділянці, Н·м; l_i – довжина цієї ділянки, м; G_i – модуль пружності другого роду (модуль зсуву), Па; J_{pi} – полярний момент інерції перерізу на ділянці вала, м⁴.

Відносний кут закручення довільної ділянки вала визначається за формулою:

$$\Theta = \frac{\varphi_i}{l_i} = \frac{M_i}{G_i \cdot J_{pi}}. \quad (3.3)$$

Знаки абсолютних та відносних кутів закручення визначаються знаком крутного моменту.

По значенням відносних кутів закручення будується еюра кутів Θ_i .

Тоді умова жорсткості при крученні буде мати вид

$$\Theta = \frac{M_{kmax}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta], \quad (3.4)$$

де $[\Theta]$ – допустимий відносний кут закручення.

При визначенні необхідного діаметра вала круглого перерізу на кожній ділянці з обчислених двох значень приймається більше і приводиться у відповідність з СТ СЭВ 514-77.

Знаючи обчислені кути закручення перерізі, які знаходяться на границях кожної з ділянок, можна побудувати епюру кутів закручення, яка представляє собою графічне зображення зміни кутів повороту перерізу вздовж осі відносно нерухомого (закріпленого) перерізу.

Приклад дослідження та розрахунку суцільного однорідного вала круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні.

Надано: Суцільний однорідний вал круглого перерізу з конструктивними розмірами $l_1 = 0,9$ м, $l_2 = 1,4$ м, $l_3 = 0,6$ м, $l_4 = 0,7$ м, навантажений зовнішніми обертовими моментами $T_1 = 570$ Н·м, $T_2 = 190$ Н·м, $T_3 = 640$ Н·м, $T_4 = 780$ Н·м і врівноважу вальним моментом T_0 . Матеріал бруса – вуглецева сталь; допустиме дотичне напруження $[\tau] = 80$ МПа, допустимий відносний кут закручення $[\Theta] = 0,028$ рад/м.

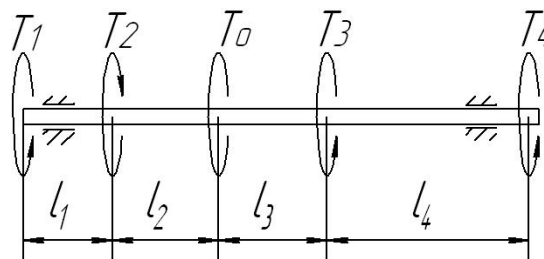


Рисунок 3.1

1. Визначення врівноважувального моменту.

Під дією зовнішніх обертових моментів вал знаходиться в рівновазі. Задано напрям дії врівноважу вального моменту T_0 (рис. 3.1).

Тоді з умов рівноваги можна визначити значення врівноважувального моменту та напрям його дії.

$$\sum M_{Az} = 0, T_1 - T_2 - T_0 + T_3 + T_4 = 0.$$

$$\text{Звідси } T_0 = T_1 - T_2 + T_3 + T_4 = 570 - 1900 + 640 + 780 = 1800 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Додатне значення моменту T_0 свідчить про те, що попередньо обраний його напрям співпадає з дійсним напрямом.

2. Визначення крутних моментів та побудова їх епюри.

Вал, який розглядається, має чотири ділянки. Для визначення внутрішніх силових факторів – крутних моментів скористуємось методом перерізів. Для цього подумки розсічемо вал на чотири ділянки. В місцях розрізу вкажемо крутні моменти, що виникають в перерізах (рис.3.2.2).

Для обчислення значення крутних моментів будемо складати рівняння рівноваги.

$$\text{Ділянка I: } 0 \leq z_1 \leq l_1 \text{ або } 0 \leq z_1 \leq 0,9 \text{ м}$$

$$\sum M_{Az} = 0, T_1 - M_K^I = 0, M_K^I = T_1 = 570 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{Ділянка II: } 0 \leq z_2 \leq l_1 + l_2 \text{ або } 0 \leq z_2 \leq 2,3 \text{ м}$$

$$\sum M_{Az} = 0, T_1 - T_2 - M_K^{II} = 0, M_K^{II} = T_1 - T_2 = 570 - 190 = 380 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{Ділянка III: } 0 \leq z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3 \text{ або } 0 \leq z_3 \leq 2,9 \text{ м}$$

$$\sum M_{Az} = 0, T_1 - T_2 - T_0 - M_K^{III} = 0,$$

$$M_K^{III} = T_1 - T_2 - T_0 = 570 - 190 - 1800 = -1420 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{Ділянка IV: } 0 \leq z_4 \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \text{ або } 0 \leq z_4 \leq 3,6 \text{ м}$$

$$\sum M_{Az} = 0, T_1 - T_2 - T_0 + T_3 - M_K^{IV} = 0,$$

$$M_K^{IV} = T_1 - T_2 - T_0 + T_3 = 570 - 190 - 1800 + 640 = -780 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

За отриманими значеннями крутильних моментів M_K будемо їх епюру (рис. 3.2.3).

3. Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови міцності.

$$\text{Умова міцності при крученні має вид: } \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau].$$

Для суцільного однорідного вала круглого перерізу полярний момент опору перерізу визначається по формулі: $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Для заданого матеріалу вала – вуглецева сталь, допустиме дотичне напруження становить $[\tau] = 80 \text{ ГПа} = 80 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

Тоді з врахуванням останнього, з умови міцності діаметр вала обчислюємо по формулі: $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi \cdot [\tau]}}$.

Визначаємо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

$$\text{Ділянка I: } d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K^I}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 33,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K^{II}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K^{III}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 44,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K^{IV}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 36,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

4. *Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови жорсткості*

$$\text{Умова жорсткості при крученні має вид: } \Theta = \frac{M_K^{\max}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta].$$

Полярний момент інерції перерізу J_{pi} на ділянці суцільного однорідного вала круглого перерізу визначається по формулі: $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Тоді з врахуванням останнього з умови жорсткості діаметр вала обчислюємо по формулі: $d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}}$.

Визначимо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

$$\text{Ділянка I: } d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K^I}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 40,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K^{II}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 36,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K^{III}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 50,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } d_4 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K^{IV}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 43,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Потрібні діаметри вала на кожній ділянці, знайдені з умови жорсткості більші, ніж відповідні, що визначені з умови міцності при крученні. Приймаємо більші значення діаметрів вала.

Відповідно до СТ СЭВ 514-77 (ряд $Ra40$) необхідно прийняти стандартні значення діаметрів вала на ділянках:

$$d_1 = 0,042 \text{ м} = 42 \text{ мм}; d_2 = 0,038 \text{ м} = 38 \text{ мм}; d_3 = 0,05 \text{ м} = 50 \text{ мм}; d_4 = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм}.$$

5. *Визначення абсолютних та відносних кутів повороту поперечних перерізів ділянок вала.*

При дослідженні вала на жорсткість при крученні визначають кути закручення перерізів вала. По формулам обчислимо абсолютні та відносні кути закручення перерізів на кожній ділянці вала.

Ділянка I:

$$\varphi_1 = \frac{M_K^I \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} = \frac{M_K^I \cdot l_1 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 0,9 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,021 \text{ рад},$$

$$\Theta_1 = \frac{M_i}{G_i \cdot J_{pi}} = \frac{M_K^I \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,023 \text{ рад/м}.$$

Ділянка II:

$$\varphi_2 = \frac{M_K^{II} \cdot l_2}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_K^{II} \cdot l_2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 1,4 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,033 \text{ рад},$$

$$\Theta_2 = \frac{M_K^{II}}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_K^{II} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,024 \text{ рад/м}.$$

Ділянка III:

$$\varphi_3 = \frac{M_K^{III} \cdot l_3}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_K^{III} \cdot l_3 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 0,6 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,05^4} = -0,014 \text{ рад},$$

$$\Theta_3 = \frac{M_K^{III}}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_K^{III} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,05^4} = -0,023 \text{ рад/м}.$$

Ділянка IV:

$$\varphi_4 = \frac{M_K^{IV} \cdot l_2}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_K^{IV} \cdot l_2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 0,7 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,017 \text{ рад},$$

$$\Theta_4 = \frac{M_K^{IV}}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_K^{IV} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,024 \text{ рад/м}.$$

Аналізуючи отримані значення відносних кутів закручення встановлюємо, що умова жорсткості вала виконується: $\Theta_{max} \leq [\Theta]$, тобто $0,024 \text{ рад/м} \leq 0,028 \text{ рад/м}$.

Визначимо абсолютні кути повороту перерізів в граничних точках В, С, D, Е відносно умовно нерухомого перерізу А:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_1 = 0,021 \text{ рад};$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,021 + 0,033 = 0,054 \text{ рад};$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,021 + 0,033 - 0,014 = 0,040 \text{ рад};$$

$$\varphi_{E-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,021 + 0,033 - 0,014 - 0,017 = 0,023 \text{ рад}.$$

Отримані значення ординат відкладаються в обраному масштабі відповідно перерізів і їх кінцівки послідовно з'єднуються прямими лініями. Отримані графічні зображення є епюрами кутових переміщень (рис.3.2.4) і відносних кутів закручення (рис. 3.2.5).

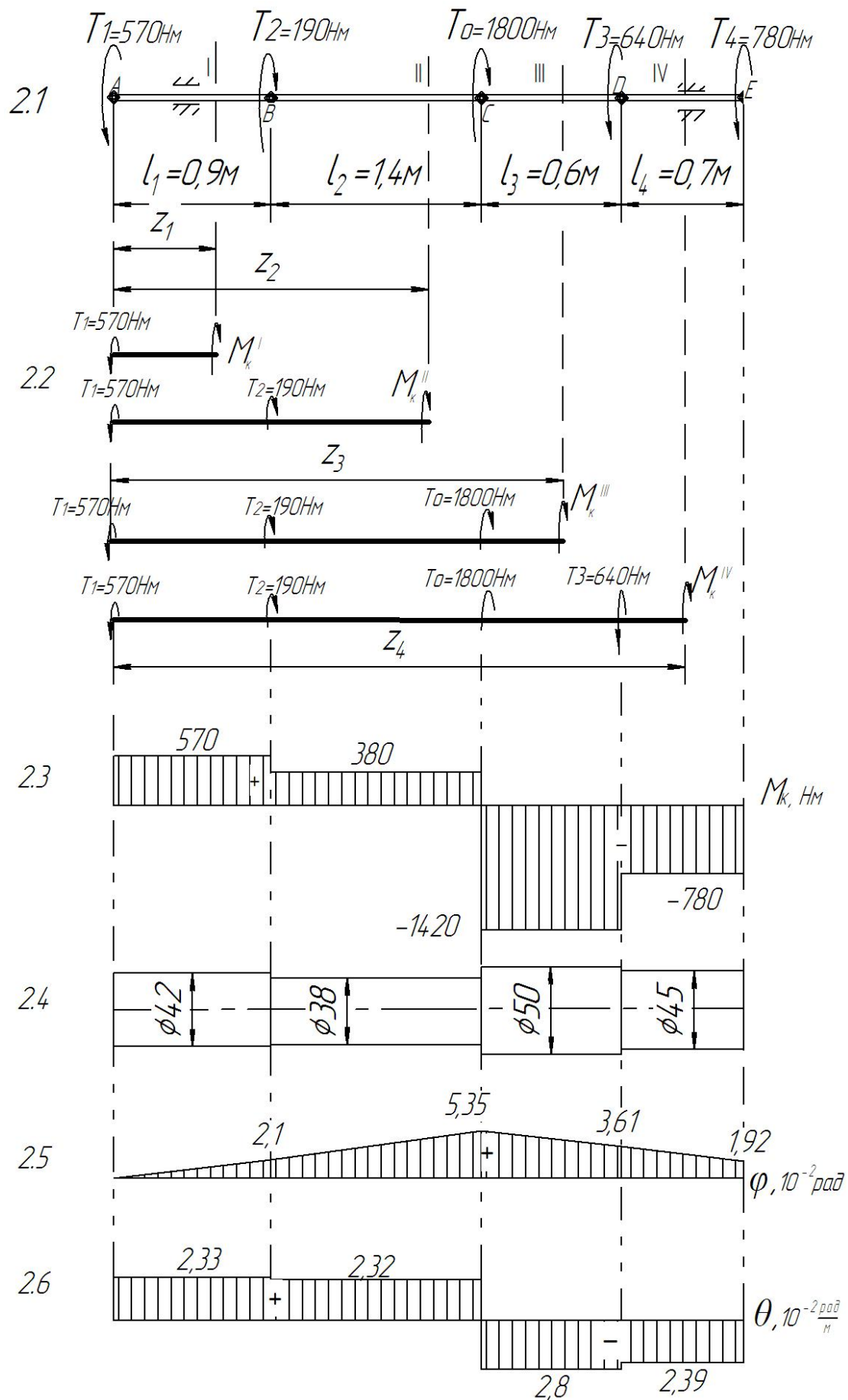


Рисунок 3.2 – Дослідження валу на міцність та жорсткість при крученні

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до розрахунку вала при крученні

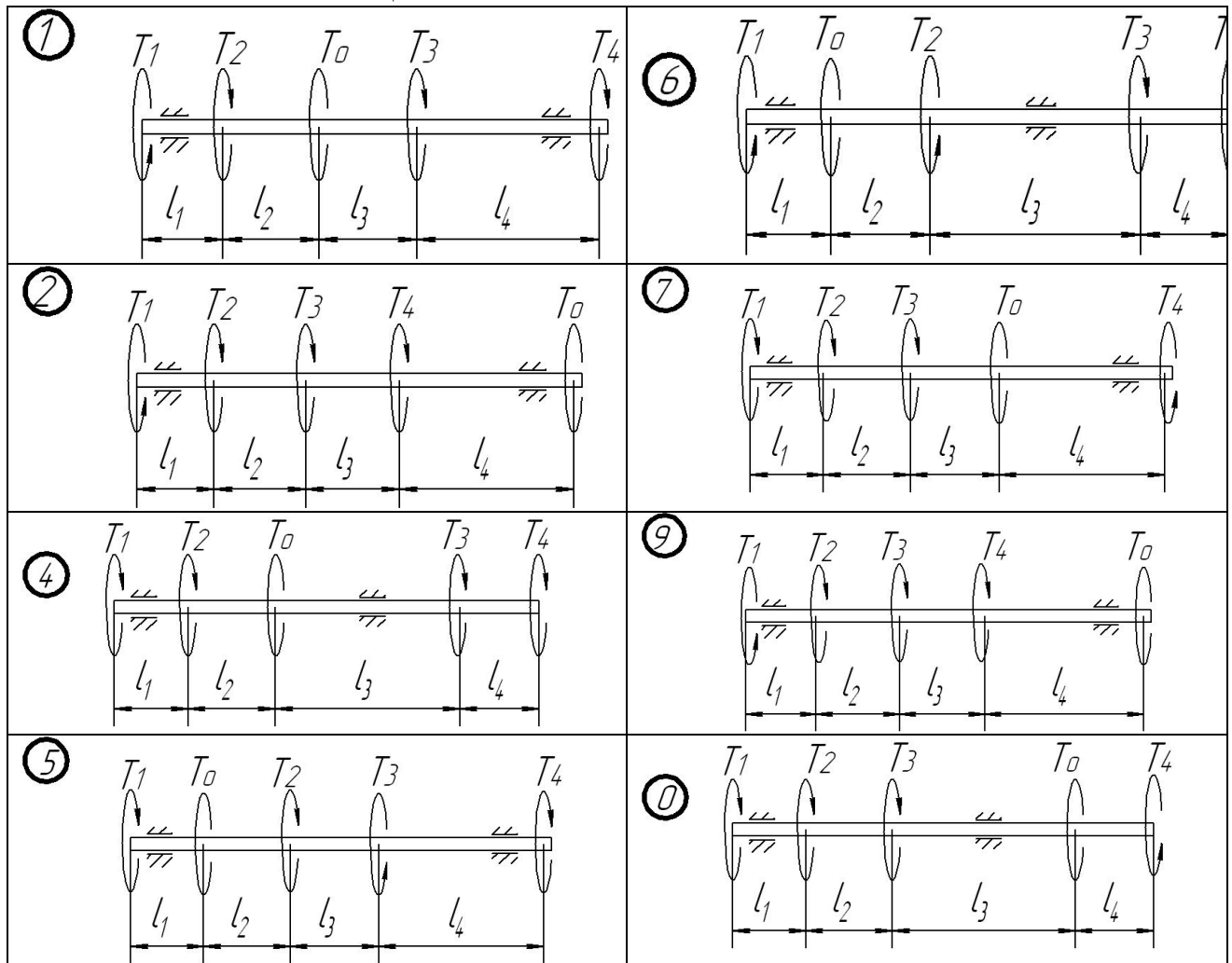
Букви прізвища	Номер схеми	Зовнішні моменти, Нм				Розміри вала, м				[τ], МПа	[θ], рад/м
		T_1	T_2	T_3	T_4	l_1	l_2	l_3	l_4		
А, Б, В	1	100	100	110	210	0,4	0,5	0,1	0,7	10	0,02
Г, І, Д	2	200	200	120	220	0,5	0,6	0,2	0,8	20	0,022
Е, Ж, З,	3	300	300	130	230	0,6	0,7	0,3	0,9	30	0,024
І, Ї, К	4	400	400	140	240	0,7	0,8	0,4	1,0	40	0,025
Л, М, Н	5	500	500	150	250	0,8	0,9	0,5	0,4	50	0,028
О, П, Р	6	600	600	160	260	0,9	1,0	0,6	0,5	60	0,03
С, Т, У	7	700	700	170	270	1,0	1,1	0,7	0,6	70	0,032
Ф, Х, Ц	8	800	800	180	280	0,9	1,2	0,8	0,7	80	0,034
Ч, Ш, Щ,	9	900	900	190	290	0,8	1,3	0,9	0,8	90	0,035
Є, Ю, Я	0	1000	1000	200	300	0,7	1,4	1,0	0,9	100	0,025
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь.

Наприклад: І В А Н Ч Е Н К О В
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

З таблиці обираємо: схема 4, $T_1=100\text{Нм}$, $T_2=100\text{Нм}$, $T_3=150\text{Нм}$, $T_4=290\text{Нм}$,
 $l_1=0,6\text{м}$, $l_2=0,9\text{м}$, $l_3=0,4\text{м}$, $l_4=0,5\text{м}$, $[\tau]=10\text{МПа}$, $[\theta]=0,02\text{рад/м}$.

Таблиця 3.2 – Схеми навантаження вала



ЗАДАЧА 4. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНІ

Проаналізувати схему навантаження балки. Дослідити рівновагу двохопорної балки при випробуваннях на згин. Визначити внутрішні силові фактори в перерізах балки, а саме поперечні сили та згинаючі моменти. З умови міцності підібрати три різновиди поперечних перерізів: круглого, прямокутного (з співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b}$) та двотаврового перерізу. Проаналізувати отримані результати, виявити раціональний профіль перерізу, порівнявши маси балок.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, що при деформації згину в поперечних перерізах балок виникають внутрішні силові фактори – моменти згину і поперечні сили. При одночасній дії в перерізі обох силових факторів, згинаючих моментів і поперечних сил, згин називають поперечним, а при відсутності поперечної сили – чистий згин.

Внутрішні силові фактори визначають використовуючи метод перерізів.

Поперечна сила Q_y в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які лежать по один бік від перерізу, і вважаються додатними, якщо рівнодійна зовнішніх сил, розміщених ліворуч (праворуч) від перерізу, направлена вгору (вниз) (рис.4.1).

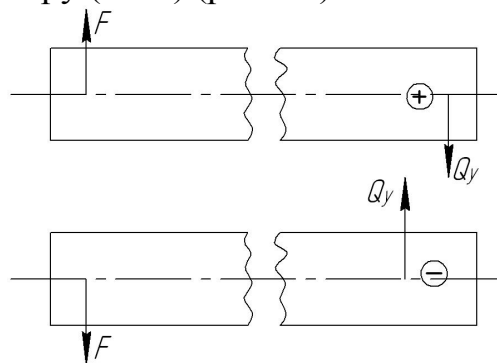


Рисунок 4.1 – Поперечні сили в перерізі при згині балки

Згинаючі моменти в перерізах балки дорівнюють алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених до балки по один бік від перерізу, відносно центра ваги перерізу, що досліджується. Згинаючий момент вважається додатним, якщо зовнішнє навантаження вигинає балку випуклістю вниз і від'ємним, якщо вигин балки направлений вгору (рис. 4.2).

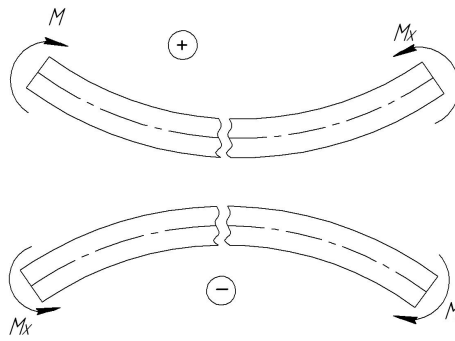


Рисунок 4.2 – Згинаючі моменти в перерізах балки

Між функціями згинаючого моменту M_X , поперечною силою Q_Y , і інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності: $\frac{dM_X}{dz} = Q_Y$, $\frac{dQ_Y}{dz} = q$.

Графічне зображення зміни згинаючих моментів по довжині балки називається епюрою згинаючих моментів.

Графічне зображення зміни поперечних сил по довжині балки називається епюрою поперечних сил.

Дослідження двохопорних балок з метою перевірки умови міцності починають з визначення опорних реакцій відповідно існуючих методик.

Далі балку уявно розбивають на ділянки. Якщо балка представляє собою брус постійного поперечного перерізу з однорідного матеріалу, то границі ділянок визначаються перерізами, в яких змінюються тільки зовнішні навантаження.

На основі методу перерізів і диференціальних залежностей можна зробити висновок про характер епюр згинаючого моменту M_X , поперечної сили Q_Y в залежності від діючих на балку навантажень.

Для епюр поперечних сил мають місце наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, епюра Q_Y зображується похилою прямою;
- на ділянці, вільній від розподіленого навантаження, епюра Q_Y зображується лінією паралельною осі балки;
- в перерізі балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q_Y має місце «стрибок» значення поперечної сили, що чисельно дорівнює модулю зосередженої сили.

Для епюр згинаючих моментів існують наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра M_X зображується квадратичною параболою;
- на ділянці, вільному від рівномірно розподіленого навантаження, епюра M_X зображується прямою лінією;
- в перерізі балки, де діє зовнішній момент, на епюрі M_X виникає «стрибок» значення згинаючого моменту, що дорівнює модулю зовнішнього моменту;

– на ділянці, де поперечна сила дорівнює нулеві, епюра M_X – пряма лінія, паралельна осі балки;

– на ділянках з розподіленим навантаженням згинаючий момент приймає екстремальні значення, в точках, де епюра поперечної сили змінює знак (перетинає ось Oz).

При згині в поперечних перерізах балки виникають нормальні і дотичні напруження.

Нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{M_{Xi} \cdot Y_i}{J_i}, \quad (4.1)$$

де M_{Xi} – згинаючий момент в даному перерізі, Н·м;

Y_i – відстань від зазначеної точки до нейтральної осі, м ;

J_i – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Умова міцності при згині має вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{X max}}{W_X} \leq [\sigma], \quad (4.2)$$

де $M_{X max}$ – максимальний згинаючий момент в перерізах балки, Н·м;

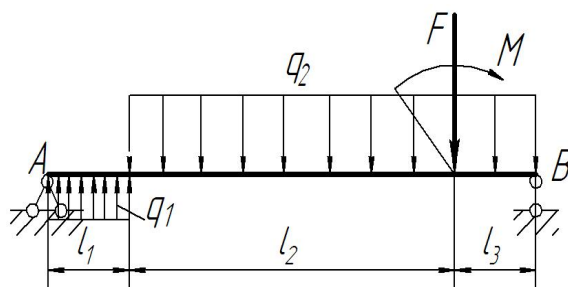
$W_X = \frac{J_X}{Y_{max}}$ – осьовий момент опору перерізу відносно нейтральної осі, м³;

$[\sigma]$ – допустиме напруження для даного матеріалу балки.

Приклад дослідження та розрахунку балки на згин.

Надано:

Балка з конструктивними розмірами $l_1 = 1$ м, $l_2 = 4$ м, $l_3 = 1$ м, знаходиться під дією зовнішнього моменту $M = 20$ кН·м, зосередженої сили $F = 50$ кН, розподіленого навантаження інтенсивністю $q_1 = 20$ кН/м, $q_2 = 2q_1 = 40$ кН/м. Матеріал балки вуглецева сталь марки Ст3. Допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа.



1. Визначення опорних реакцій балки.

Позбавивши балку в'язей, замінимо їх дію відповідними реакціями – реакціями опор. Опорні реакції визначаємо з умов рівноваги довільної системи сил:

$$\sum M_A(F_i) = 0$$

$$q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) - M - F \cdot (l_1 + l_2) + R_B \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$\sum M_B(F_i) = 0,$$

$$-R_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3 = 0;$$

Розв'язуючи рівняння отримуємо:

$$R_B = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) + M + F \cdot (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{-20 \cdot \frac{1^2}{2} + 40 \cdot 5 \cdot 3,5 + 20 + 50 \cdot 5}{1 + 4 + 1} = 160 \text{ кН}$$

$$R_A = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{-20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 4 + 1 \right) + 40 \cdot (4 + 1) \cdot \frac{1 + 4}{2} - 20 + 50 + 1}{1 + 4 + 1} = 70 \text{ кН}$$

Додатні значення отриманих реакцій опор свідчать про те, що попередньо обрані напрями реакцій є дійсними.

Правильність обчислення опорних реакцій перевіримо за допомогою рівняння рівноваги:

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + q_1 \cdot 1 - q_2 \cdot 5 + R_B = 0, \quad 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 5 + 160 = 0.$$

Умова рівноваги виконується, значить реакції опор знайдені вірно.

2. Визначення внутрішніх силових факторів: згинальних моментів та поперечних сил в перерізах балки при згині.

Досліджувана балка має три ділянки, для яких будемо визначати згинальні моменти та поперечні сили.

$$\text{Ділянка I: } 0 \leq Z_1 \leq l_1 \quad \text{або} \quad 0 \leq Z_1 \leq 1 \text{ м,}$$

$$\text{Рівняння поперечних сил} \quad Q_Y^I = R_A + q_1 \cdot Z_1 = 70 + 20 \cdot Z_1.$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 0 = 70 \text{ кН}$$

$$Z_1 = 1 \text{ м} \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 1 = 90 \text{ кН.}$$

$$\text{Рівняння згинальних моментів} \quad M_X^I = R_A \cdot Z_1 + \frac{q_1 \cdot Z_1^2}{2} = 70 \cdot Z_1 + 20 \cdot \frac{Z_1^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad M_X^I = 0$$

$$Z_1 = 1 \text{ м} \quad M_X^I = 70 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1^2}{2} = 80 \text{ кНм.}$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності

з диференціальними залежностями Q і M_X , епюра M_X на ділянці буде обмежена увігнутою кривою без екстремуму.

$$\text{Ділянка II: } l_1 \leq Z_2 \leq l_1 + l_2 \quad \text{або} \quad 1 \leq Z_2 \leq 5\text{м,}$$

Рівняння поперечних сил

$$Q_Y^{II} = R_A + q_1 \cdot Z_1 - q_2(Z_2 - 1) = 70 + 20 \cdot Z_1 - 40(Z_2 - 1).$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_2 = 1\text{м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 0 = 90\text{кН}$$

$$Z_2 = 5\text{м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 4 = -70\text{кН}.$$

Рівняння згинальних моментів

$$M_X^{II} = R_A \cdot Z_2 + q_1 \cdot (Z_2 - 0,5) - \frac{q_2 \cdot (Z_2 - 1)^2}{2} = 70 \cdot Z_2 + 20(Z_2 - 0,5) - 40 \frac{(Z_2 - 1)^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_2 = 1\text{м} \quad M_X^{II} = 70 \cdot 1 + 20 \cdot (1 - 0,5) - 40 \cdot 0 = 80\text{кНм}$$

$$Z_2 = 5\text{м} \quad M_X^{II} = 70 \cdot 5 + 20 \cdot (5 - 0,5) - 40 \frac{(5 - 1)^2}{2} = 120\text{кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: на ділянці Q_Y – лінійна убиваюча функція, що міняє знак, значить, M_X – опукла криволінійна функція, що має екстремум в границях даної ділянки.

Абсцису точки екстремуму знайдемо з виразу:

$$\frac{dM_X}{dZ} = Q_Y = 70 + 20 \cdot 1 - 40(Z_2 - 1) = 0, \text{ звідки } Z_2 = 3,25\text{м.}$$

Згинальний момент в точці екстремуму $M_{X_{max}}$ дорівнює:

$$M_{X_{max}}^{II} = 70 \cdot 3,25 + 20 \cdot (3,25 - 0,5) - 40 \frac{(3,25 - 1)^2}{2} = 181\text{кНм}.$$

$$\text{Ділянка III: } 0 \leq Z_3 \leq l_3 \quad \text{або} \quad 0 \leq Z_3 \leq 1\text{м,}$$

$$\text{Рівняння поперечних сил} \quad Q_Y^{III} = -R_B + q_2 \cdot Z_3 = -160 + 40 \cdot Z_3.$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_3 = 0 \quad Q_Y^{III} = -160 + 40 \cdot 0 = -160\text{кН}$$

$$Z_3 = 1\text{м} \quad Q_Y^{III} = -160 + 40 \cdot 1 = -120\text{кН}.$$

$$\text{Рівняння згинальних моментів} \quad M_X^{III} = R_B \cdot Z_3 - \frac{q_2 \cdot Z_3^2}{2} = 160 \cdot Z_3 - 40 \frac{Z_3^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_3 = 0 \quad M_X^{III} = 0$$

$$Z_3 = 1\text{м} \quad M_X^{III} = 160 \cdot 1 - 40 \frac{1^2}{2} = 120\text{кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності з диференціальними залежностями Q і M_X , епюра M_X на ділянці буде обмежена вигнутою кривою без екстремуму.

За отриманими значеннями Q_Y та M_X будуємо епюри поперечних сил та згинаючих моментів (рис. 6.3).

3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

За умовами задачі вимагається визначити раціональний профіль перерізу балки. Для цього, використовуючи умову міцності при згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X \max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

визначимо потрібний момент опору перерізу та розміри різних видів поперечного перерізу балки:

$$W_X \geq \frac{M_{X \max}}{[\sigma]} = \frac{181 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

– для балки круглого перерізу – $W_X = \frac{\pi d^3}{32}$, звідки діаметр балки визначиться як,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_X}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,226 \text{ м}.$$

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду *Ra40* приймаємо для балки круглого перерізу діаметр $d = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

$$\text{Площа поперечного перерізу } A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,24^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Для балки прямокутного перерізу зі співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b} = 1,7$ момент опору перерізу буде дорівнювати:

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{1,7^2 \cdot b^3}{6} = 0,482 b^3.$$

$$\text{Тоді сторона перерізу } b \geq \sqrt[3]{\frac{W_X}{0,482}} = \sqrt[3]{\frac{1,13 \cdot 10^{-3}}{0,482}} = 0,133 \text{ м},$$

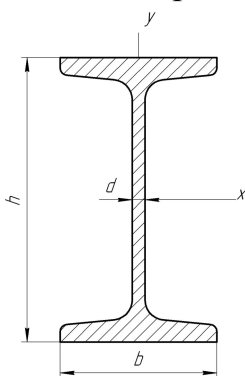
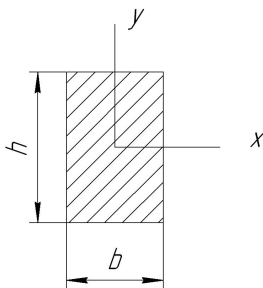
сторона перерізу $h = 1,7b = 1,7 \cdot 0,133 = 226 \text{ мм} = 0,226 \text{ м}$.

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду *Ra40* приймаємо для балки прямокутного перерізу розміри $b = 140 \text{ мм} = 0,14 \text{ м}$, $h = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

Площа прямокутного поперечного перерізу балки буде дорівнювати $A_2 = b \cdot h = 0,14 \cdot 0,24 = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$.

Визначимо площу перерізу двотаврової балки. По сортаменту ГОСТ 8239-72 (додаток В) по моменту опору перерізу обираємо двотавр № 45, з моментом опору $W_X = 1220 \text{ см}^3$ і площею поперечного перерізу $A_3 = 83 \text{ см}^2 =$

$$0,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$



4. *Аналіз металоємності балок різного поперечного перерізу.*

Металоємність балок трьох досліджуваних перерізів можна оцінити, порівнюючи їх площі:

$A_1 : A_2 : A_3 = 4,52 : 3,36 : 0,83$, або прийняв одну, найменшу з них за одиницю, маємо $A_1 : A_2 : A_3 = 5,44 : 4,05 : 1,0$.

Порівняння показує, що найбільш економічним є двотавровий переріз балки, а найменш економічним – круглий.

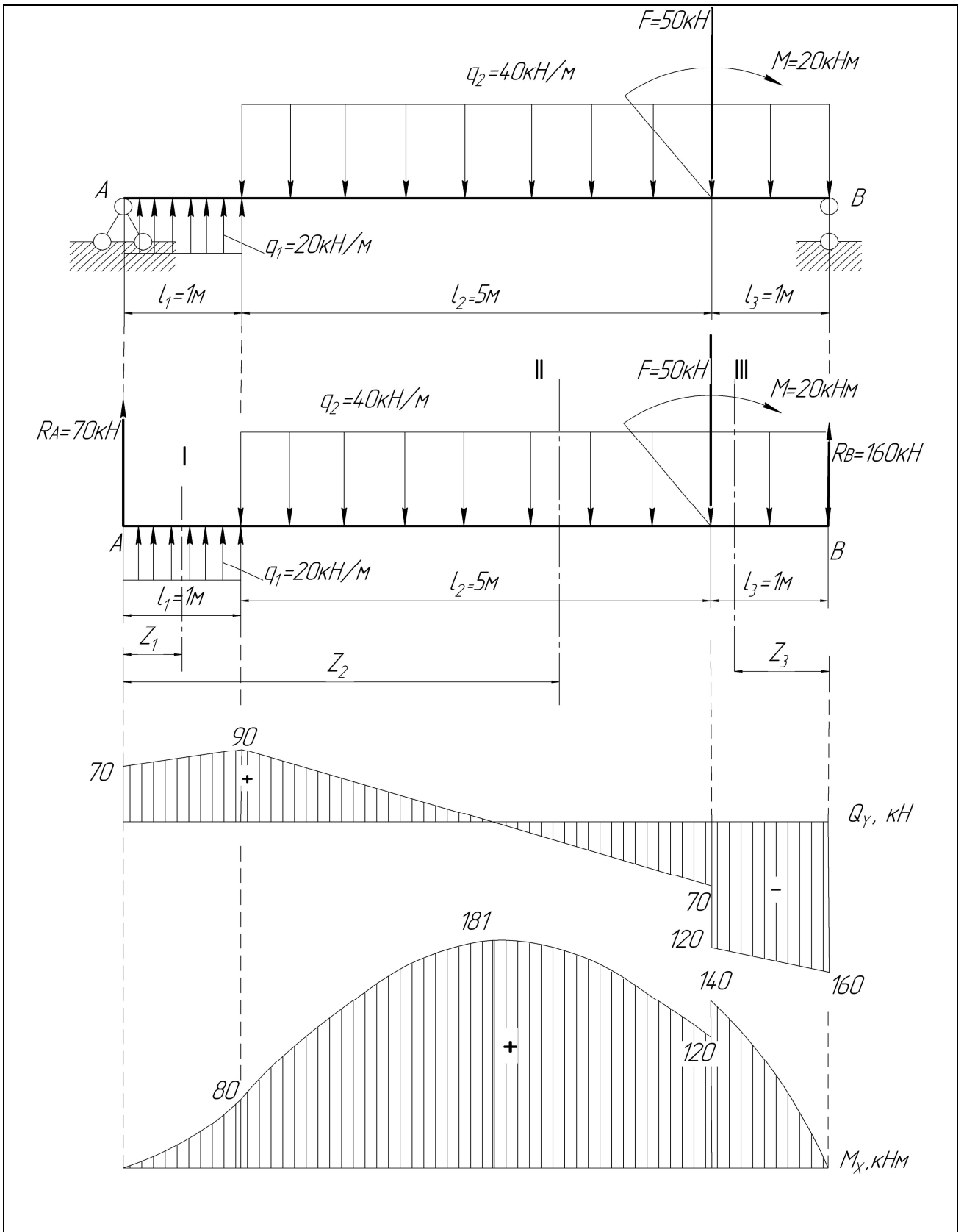


Рисунок 4.3 – Схема дослідження валу на згин

Таблиця 4.1 – Вихідні дані для дослідження балки на згин

Буква прізвища	Номер схеми	F, кН	M, кНм	q, кН/м	Розміри балки, м			[σ]	$k = \frac{h}{b}$
					l_1	l_2	l_3		
А, Б, В	1	10	10	20	1,0	2,0	0,8	80	1,5
Г, Ґ, Д	2	20	20	18	1,2	2,8	0,9	90	1,6
Е, Ж, З,	3	30	30	30	1,3	2,6	1,0	100	1,7
І, Ії, К	4	40	40	32	1,4	2,4	1,1	110	1,8
Л, М, Н	5	50	50	24	1,5	2,2	1,2	120	1,9
О, П, Р	6	60	60	25	1,6	2,0	1,3	130	2,0
С, Т, У	7	70	70	35	1,7	2,8	1,4	140	1,9
Ф, Х, Ц	8	80	80	40	1,8	2,6	1,5	150	1,8
Ч, Ш, Щ,	9	90	90	25	1,9	2,4	1,4	160	1,7
Є, Ю, Я	0	100	100	20	2,0	2,2	0,8	150	1,6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

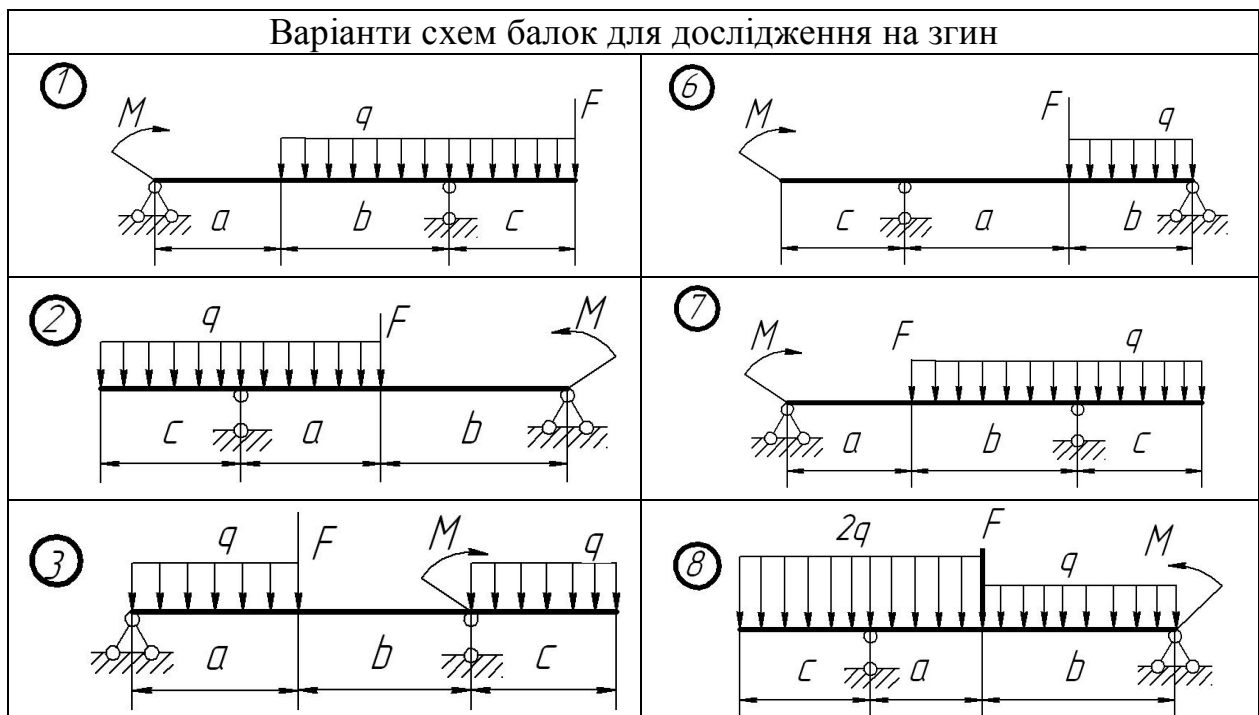
Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь марки Ст3.

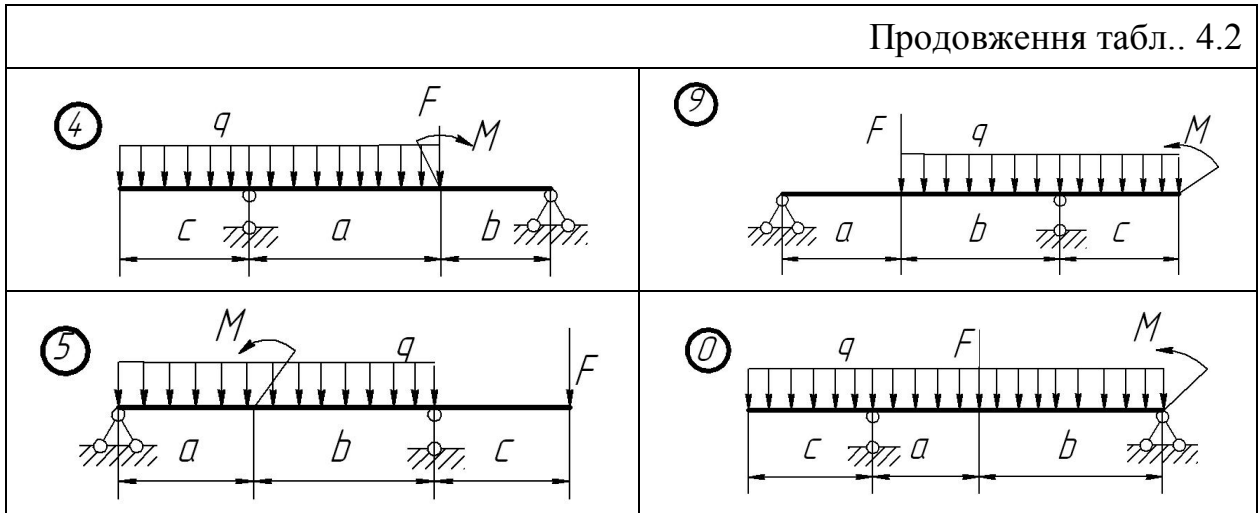
Наприклад: І В А Н Ч Е Н К О В

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

З таблиці обираємо: схема 4, $F_1=10\text{кН}$, $M=10\text{кНм}$, $q=24\text{кН/м}$,
 $l_1=1,9\text{м}$, $l_2=0,9\text{м}$, $l_3=2,6\text{м}$, $[\sigma]=110\text{МПа}$, $k=2,0$

Таблиця 4.2 – Схеми двохопорних балок для дослідження на згин





ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

В загальному випадку розв'язання задач до контрольних робіт повинно містити наступні відомості:

- тему задачі;
- дослідження заданої схеми з обґрунтуванням всіх прийнятих рішень та посиланнями на літературні джерела, потрібні рисунки;
- висновки по роботі.

ПИТАННЯ ДО САМОПЕРЕВІРКИ З ДИСЦИПЛІНИ

1. Умови рівноваги плоскої системи збіжних сил.
2. Умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
3. Основне рівняння динаміки.
4. Яке тіло називають брусом?
5. Що розуміють під терміном «механічне напруження»?
6. Яке напруження називають нормальним, а яке – дотичним?
7. В чом полягає суть методу перерізів? Які задачі розв'язують за допомогою цього методу?
8. Які випадки деформації бруса називають центральним розтягом (стиском)?
9. Як визначають модуль і напрям внутрішнього зусилля в довільному поперечному перерізі бруса?
10. Як розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах центрально-розтягнутого (стиснутого) бруса?
11. Як визначаються значення та напрям (знак) нормальних напружень в довільному перерізі бруса при розтягу (стиску)?
12. Що являє собою епюра нормальних напружень при центральному розтягу (стиску)?
13. Як записується умова міцності при розтягу (стиску)?
14. Що розуміють під терміном «допустиме напруження»? В чому полягає різниця визначення допустимого напруження для пластичних та крихких матеріалів?
15. Що таке коефіцієнт запасу міцності? Від яких факторів він залежить?
16. Як формулюється та записується закон Гуку?
17. Як записується умова жорсткості бруса при розтягу (стиску)?
18. Що являє собою епюра повздовжніх переміщень, як вона будується?
19. Які деформації називають пружними, а які пластичними?
20. Як визначають значення та знак нормальних та дотичних напружень в похилих площинках перерізів при розтягу (стиску) бруса?
21. При якому навантаженні прямий брус отримує деформацію кручення?

22. Який випадок плоского напруженого стану називають чистим зсувом?
23. Що називають кутом зсуву? Що таке відносний зсув і чому він дорівнює?
24. Як записується закон Гуку при зсуві?
25. Що розуміють під модулем зсуву?
26. Що представляє собою епюра крутильних моментів і як вона будується? Для чого вона потрібна?
27. Які напруження виникають в поперечних перерізах круглого бруса при крученні і як вони розподіляються по перерізу?
28. Як записується умова міцності при крученні?
29. Що представляє собою епюра напружень при крученні вала?
30. Що розуміють під жорсткістю вала при крученні?
31. Що розуміють під абсолютним та відносним кутом закручення вала?
32. Як записується умова жорсткості при крученні?
33. Що представляє собою епюра кутів закручення і як вона будується?
34. Що таке відносний кут закручення? Чи має сенс поняття сумарного відносного кутів закручення для ступінчатого вала?
35. При якому навантаженні балка випробовує чистий, а при якому – поперечний згин?
36. Які типи опор використовують для закріплення балки на основі?
37. Як визначаються опорні реакції балки?
38. Як складаються рівняння поперечних сил і згинальних моментів в довільному перерізі на ділянках вала?
39. Що собою представляють епюри поперечних сил та згинальних моментів, і як вони будуються?
40. Як визначаються знаки поперечних сил і згинальних моментів?
41. Яка диференціальна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою та зовнішнім розподіленням навантаженням?
42. Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки і як вони змінюються по висоті балки?
43. Що представляє собою нейтральний прошарок і нейтральна вісь, як вони розміщені в балці?
44. Як записується умова міцності при згині?
45. Як визначаються осьові моменти інерції та моменти опору перерізу для різних перерізів (круглого, квадратного, прямокутного)?
46. Які форми поперечного перерізу є найбільш раціональними при згині?
47. При якому навантаженні прямий брус отримує деформацію кручення?
48. Який випадок плоского напруженого стану називають чистим зсувом?

49. Що називають кутом зсуву? Що таке відносний зсув і чому він дорівнює?

50. Як визначають чисельне значення, напрям і знак крутильного моменту в довільному поперечному перерізі бруса?

51. Що називають полярним моментом інерції перерізу? Чому дорівнює полярний момент інерції круглого перерізу?

52. Що називають полярним моментом опору перерізу? Чому дорівнює полярний момент опору круглого перерізу?

53. Як визначаються осьові моменти інерції та моменти опору перерізу для різних перерізів (круглого, квадратного, прямокутного)? Які форми поперечного перерізу є найбільш раціональними при згині?

3. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

ТЕМА: ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ ЗБІЖНИХ СИЛ

Мета роботи: Вивчити геометричні та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Набути практичних навиків щодо розглядання рівноваги системи збіжних сил.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині та перетинаються в одній точці, називаються **плоскою системою збіжних сил**.

Дію плоскої системи сил можна привести до однієї сили, яку називають **головним вектором** системи сил чи **рівнодійною**.

Рівнодійна плоскої системи збіжних сил дорівнює векторній (геометричній) сумі всіх сил, що діють.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (1.1)$$

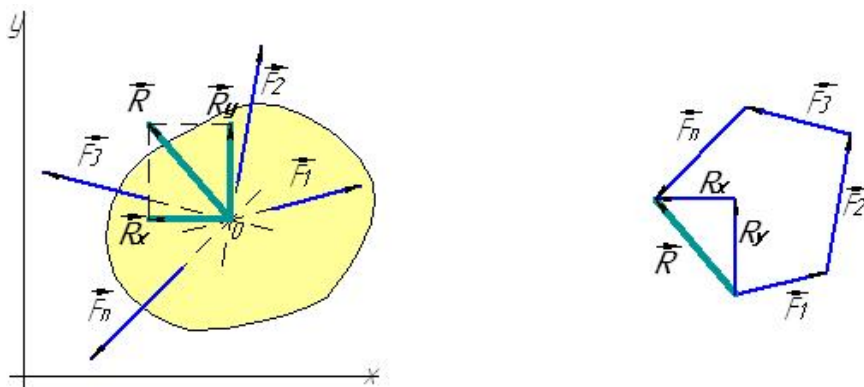


Рисунок 1.1 – Визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил

Визначити рівнодійну можна аналітичним (координатним) способом. Для цього вектори сил та їх рівнодійну розкладають на проекції у вибраній системі координат.

$$\vec{R} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{nx} + \vec{F}_{ny} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy}$$
$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y, \quad R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (1.2)$$

Тоді модуль рівнодійної:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (1.3)$$

Розглядаючи системи збіжних сил можна виділити два способи дослідження рівноваги. Це геометрична умова та аналітична умова рівноваги системи збіжних сил.

Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил: векторний силовий багатокутник є замкненим діючими силами, тобто рівнодійна дорівнює нулю. (рис. 1.2.)

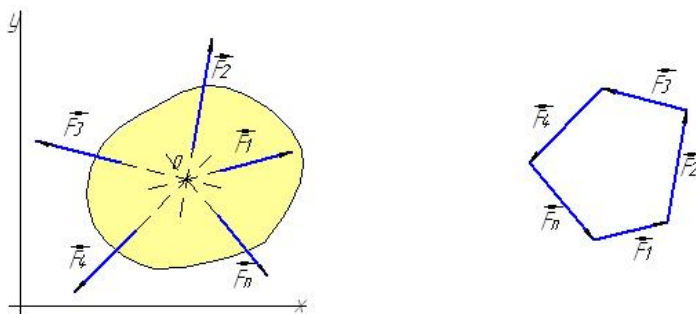


Рисунок 1.2 – Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0 \quad (1.4)$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил формулюються наступним чином: система збіжних сил буде знаходитись в рівновазі коли алгебраїчна сума проєкцій сил на взаємно перпендикулярні осі координат дорівнюють нулю.

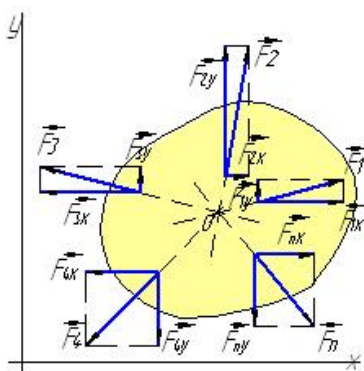


Рисунок 1.3 – Аналітична умова рівноваги системи збіжних сил

Аналітичні умови рівноваги базуються на рівняннях (1.2) і для плоскої системи описуються рівняннями.

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = 0$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (1.5)$$

Для просторової системи збіжних сил аналітичні умови рівноваги складаються з 3-х рівнянь:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (1.6)$$

Дослідна частина

Дослідження рівноваги системи збіжних сил виконується в наступній послідовності:

1. Визначити тіло, рівновагу якого слід розглянути в даній задачі.
2. Обрати пов'язану з тілом зручну для розв'язання систему координат.
3. Показати на схемі всі активні сили, що діють на вибране тіло.
4. Звільнити тіло від в'язей і замінити їх дію відповідними реакціями. Зобразити у вигляді векторів усі сили реакцій відкинутих в'язей.
5. Скласти рівняння, яке б виражало умови рівноваги тіла. Тип цих рівнянь визначається характером системи сил, яка діє на тіло.

Розглянемо приклад дослідження плоскої системи збіжних сил.

Завдання. Тіло вагою 2 Н утримується в рівновазі за допомогою двох шнурів АВ і ВС. Визначити натяг, який виникає в шнурах, якщо кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 135^\circ$. Схема наведена на рис. 1.4, а.

Розв'язання

1. Аналітичний спосіб дослідження рівноваги системи збіжних сил.
 - виділяємо об'єкти, рівновага яких досліджується – це шнури АВ і ВС та підвішене тіло;
 - оберемо пов'язану з об'єктами плоску систему координат;
 - покажемо вектором вагу тіла \vec{G} (вектор спрямований вертикально вниз)
 - позбавимо шнури АВ і ВС в'язей, замінивши їх дію відповідними реакціями. Для гнучких в'язей реакція в'язі – натяг спрямована вздовж осі в'язі. Позначаємо реакцію шнурів T_{BA} і T_{BC} . Зводимо всі сили, що діють в одну точку – точку В.

– складаємо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$1. \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad 2. \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

З врахуванням рис. 1.4, б, маємо:

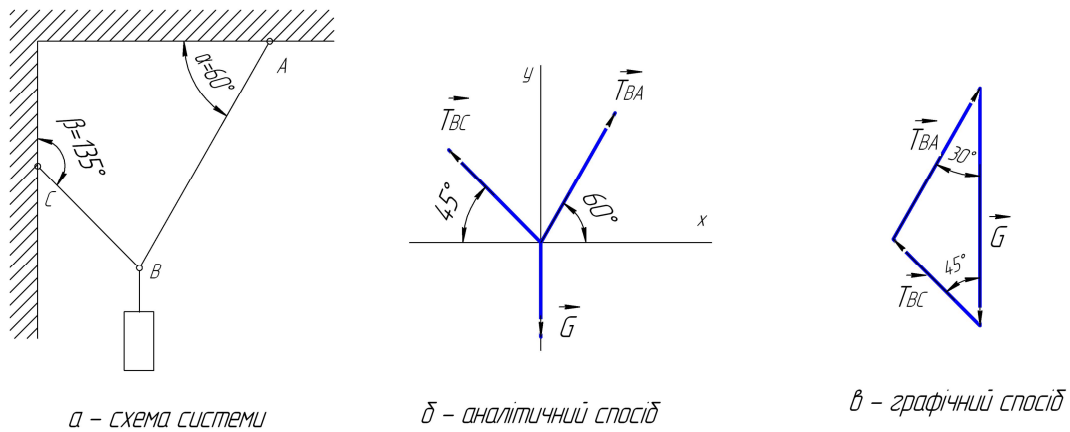
$$1. T_{BA} \cdot \cos 60^\circ - T_{BC} \cos 45^\circ = 0; \quad 2. T_{BA} \sin 60^\circ + T_{BC} \sin 45^\circ - G = 0$$

$$\text{Розв'язуючи рівняння рівноваги отримуємо: } \begin{cases} T_{BA} = \frac{T_{BC} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} \\ T_{BC} = \frac{G}{\cos 45^\circ \operatorname{tg} 60^\circ + \sin 45^\circ} \end{cases}$$

$$T_{BC} = 1,04 \text{ кН}; \quad T_{BA} = 1,46 \text{ кН}.$$

2. Графічний спосіб дослідження рівноваги плоскої системи збіжних сил:

- виділяємо об’єкти, рівновага яких досліджується – це шнури АВ і ВС та підвішене тіло;
- покажемо вектором вагу тіла \vec{G} (вектор спрямований вертикально вниз);
- позбавимо шнури АВ і ВС в’язей, замінивши їх дію відповідними реакціями. Для гнучких в’язей реакція в’язі – натяг спрямована вздовж осі в’язі. Позначаємо реакцію шнурів T_{BA} і T_{BC} ;



*Рисунок 1.4 – Дослідження умов рівноваги системи сил:
 а – схема системи; б – розрахункова схема аналітичного способу розв’язання; в – схема графічного способу розв’язання*

- обираємо зручний масштаб для будови векторного силового трикутника:

$$\vec{G} = 2\text{кН} \leftrightarrow 20\text{ мм};$$

- зберігаючи напрям дії реакцій в’язей \vec{T}_{BA} і \vec{T}_{BC} будуємо векторний трикутник. Він замикається діючими векторами сил, тобто умова рівноваги виконується (рис. 1.4, в);

- визначити модулі реакцій в’язей можна якщо виміряти їх відображення (рис. 1.4, в) та перевести з відповідного масштабу до значення в кН. Так з рис 1.4, в реакції в’язей становлять:

$$T_{BC} = 1,04\text{ кН}; T_{BA} = 1,46\text{ кН}.$$

- визначити реакції в’язей можна з векторного трикутника за допомогою теореми синусів:

$$\frac{T_{BA}}{\sin 45^\circ} = \frac{T_{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{G}{\sin 105^\circ}.$$

Користуючись отриманим співвідношенням встановлюємо:

$$T_{BA} = \frac{G \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = 1,46\text{ кН}, T_{BC} = \frac{G \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = 1,04\text{ кН}$$

- аналізуючи дані, отримані різними способами, встановлюємо перебування плоскої системи збіжних сил к рівновазі та тотожність результатів визначення реакцій в’язей різними способами.

Результат: $T_{BC} = 1,04\text{ кН}$, $T_{BA} = 1,46\text{ кН}$

Завдання для дослідження

Дослідивши рівновагу системи збіжних сил, визначити реакції стрижнів заданої системи графічним та аналітичним способами.

Дані до вибору варіантів завдань, схеми та параметрів досліджуваних систем наведені в таблицях 1.1 і 1.2.

Таблиця 1.1 – Схеми досліджуваних систем

№ СХЕМИ	СХЕМА	№ СХЕМИ	СХЕМА
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Таблиця 1.2 – Дані досліджуваних систем

№ ВАРИАНТУ				№ СХЕМИ	ВИХІДНІ ДАНІ								
					n	F_1	$n-1$	F_2	n	α	$n-1$	β	
1	11	21	31	1	1	3	1	1	1	30	1	60	
2	12	22	32	2	2	6	2	1	2	40	2	45	
3	13	23	33	3	3	2	3	8	3	75	3	30	
4	14	24	34	4	4	8	4	3	4	60	4	75	
5	15	25	35	5	5	1	5	6	5	20	5	45	
6	16	26	36	6	6	4	6	9	6	45	6	15	
7	17	27	37	7	7	7	7	5	7	15	7	60	
8	18	28	38	8	8	5	8	3	8	30	8	75	
9	19	29	39	9	9	1	9	4	9	30	9	60	
10	20	30	40	10	0	9	0	2	0	60	0	20	
n – остання цифра шифру; $n-1$ – передостання цифра шифру													

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Дайте визначення поняттю сила.
2. Що називають системою сил.
3. Яка система сил називається збіжною.
4. Яка сила називається рівнодієюною даної системи сил.
5. Сформулюйте геометричну умову рівноваги системи збіжних сил.
6. Сформулюйте аналітичну умову рівноваги системи збіжних сил.
7. Що таке силовий багатокутник.
8. За якою формулою визначається модуль рівнодієюної.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

ТЕМА: ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОВАГИ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Мета роботи: Вивчити умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Набути практичних навиків щодо розглядання рівноваги довільної системи сил та визначення реакцій в'язей.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, не паралельні між собою та не перетинаються в одній точці називається **довільною плоскою системою сил**.

Однією з основних задач статички є приведення довільної системи сил до простішого вигляду. За методом Пуансон довільна система сил зводиться до однієї сили та однієї пари сил (моменту).

Нехай задана довільна плоска система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, що діють на тіло (рис. 2.1).

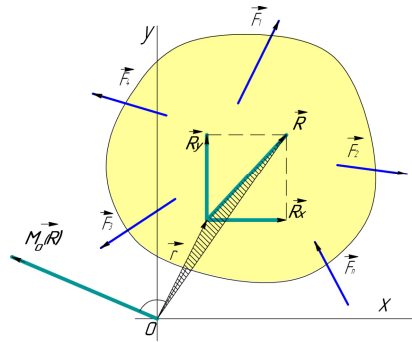


Рисунок 2.1 – Довільна плоска система сил

Головним вектором цієї системи сил є векторна сума всіх сил заданої системи, тобто рівнодійна системи сил:

$$\vec{F}_O = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.1)$$

Використовуючи аналітичний спосіб визначення рівнодійної, та проектуючи рівняння (2.1) на декартові осі координат Oxy , не важко встановити аналітичні вирази для визначення головного вектору довільної плоскої системи сил.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (2.2)$$

Головним моментом такої системи сил, відносно точки (довільного центру зведення) називають векторну суму моментів сил, що складають дану систему, відносно того ж центра.

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{R} \times \vec{r} \quad (2.3)$$

Для того, щоб довільна система сил перебувала в рівновазі (була еквівалентна нулю) необхідно щоб головний вектор системи сил та головний момент цієї системи відносно довільного центру зведення дорівнювали нулю. Це ствердження виражає умови рівноваги довільної системи сил.

$$\vec{R}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0 \quad (2.4)$$

Розглядаючи плоску довільну систему сил можна виділити дві скалярні форми рівнянь умови рівноваги:

I форма

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0$$

II форма

$$\sum_{i=1}^n F_{iU} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0$$

(2.5)

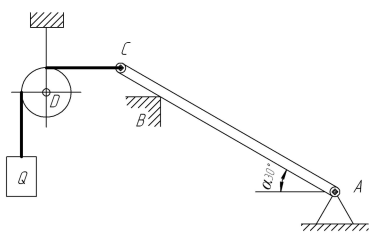
Дослідна частина

Дослідження рівноваги плоскої довільної системи сил виконується в наступній послідовності:

1. Визначити тіло, рівновагу якого слід розглянути в даній задачі.
 2. Обрати пов'язану з тілом зручну для розв'язання систему координат.
 3. Показати на схемі всі активні сили, що діють на вибране тіло.
 4. Звільнити тіло від в'язей і замінити їх дію відповідними реакціями.
- Зобразити у вигляді векторів усі сили реакцій відкинутих в'язей.
5. Скласти рівняння, яке б виражало умови рівноваги тіла. Тип цих рівнянь визначається характером системи сил, яка діє на тіло.

Розглянемо приклади дослідження плоскої довільної системи сил.

Завдання.



Однорідна балка довжиною $AC = 2$ м і вагою $G = 400$ Н кінцем А закріплена шарнірно, а проміжною точкою В опирається на нерухому опору. До кінця балки С прикріплений перекинутий через блок D трос, що несе вантаж вагою $Q = 300$ Н. Виходячи з умов рівноваги визначити реакції опор в точках А і В, якщо $BC = 0,2AC$ і $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.2)

Рисунок 2.2

Розв'язання

1. Розглядаємо рівновагу балки АВ.
 2. Показуємо силу G – вагу балки (прикладена до середини балки, оскільки балка є однорідною і постійного перерізу). Це активна сила, що діє на балку.
 3. Обираємо плоску системи координат Ax , пов'язавши початок відліку з шарніром А.
 4. Звільняємо балку від в'язей прикладених до неї. В'язями є нерухомий циліндричний шарнір А, трос перекинутий через блок D (тертям в блоці нехтувати), і опора В. Реакція \vec{N}_B опори В направлена перпендикулярно до балки АС. Напрямок реакції \vec{R}_A шарніру А – невідомий, тому будемо шукати цю реакцію у вигляді двох проєкцій \vec{X}_A і \vec{Y}_A . Оскільки блок D рахується ідеальним, то натяг троса буде дорівнювати вазі вантажу Q.
 5. Складаємо розрахункову схему (рис. 2.3).
- З рисунка визначаємо – на балку діє плоска довільна система сил.
6. Складаємо рівняння рівноваги по I формі :

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + N_B \cdot \cos 30^\circ - G = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + N_B \cdot \sin 30^\circ - Q = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0; \quad G \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \cos 30^\circ - N_B \cdot \frac{4}{5} AC + Q \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = 0$$

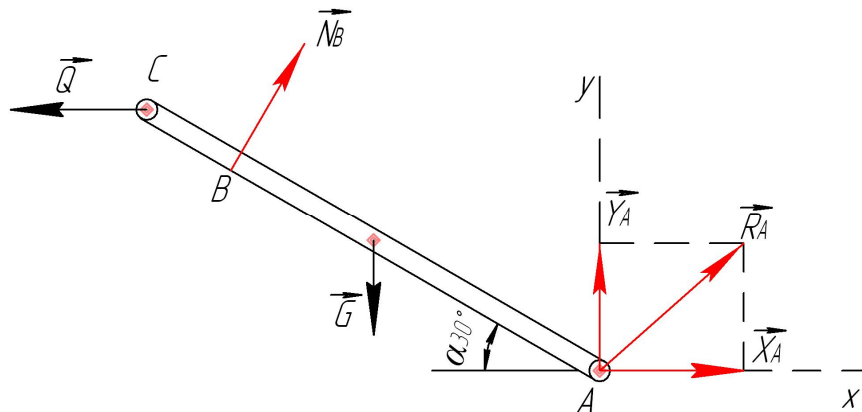


Рисунок 2.3 – Розрахункова схема

Розв'язуючи одержані рівняння знаходимо:

$$N_B = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} G \cdot \cos 30^\circ + Q \cdot \sin 30^\circ \right) = 403,75 \text{ Н};$$

$$X_A = Q - N_B \cdot \sin 30^\circ = 108,175 \text{ Н};$$

$$Y_A = G - N_B \cdot \cos 30^\circ = 50,35 \text{ Н}.$$

Визначимо реакцію шарніру А: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 119,32 \text{ Н}$

Результат: $N_B = 403,75 \text{ Н}, \quad R_A = 119,32 \text{ Н}.$

Завдання.

До балки AB вагою $0,5 \text{ Н}$ прикладена сила $F = 1,6 \text{ Н}$ під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі балки, рівномірно розподілене навантаження постійної інтенсивності $q = 1,2 \text{ Н/м}$ (рис. 2.4).

Розміри: $a = 3 \text{ м}, \quad b = 7 \text{ м}, \quad l = 12 \text{ м}.$

Визначити реакції в'язей.

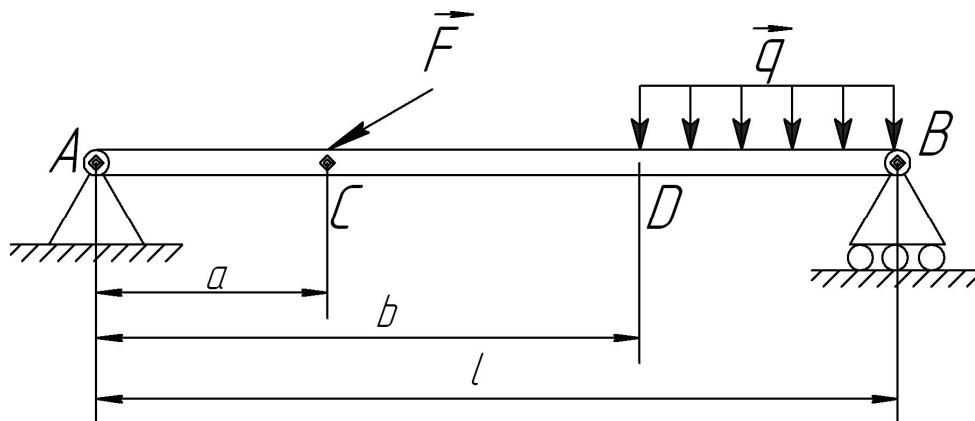


Рисунок 2.4

Розв'язання.

1. Розглядаємо рівновагу балки AB .

2. Показуємо активні сили, що діють на балку. Це сила \vec{G} – вага балки (прикладена до середини балки, оскільки балка є однорідною і постійного перерізу) та зосереджена сила \vec{Q} , еквівалентна розподіленому навантаженню q . Сила \vec{Q} прикладена на середині ділянки BD .

Визначимо модуль цих сил:

$$G = 0,5 \text{ Н}, \quad Q = q \cdot BD = q \cdot (l - b) = 1,2 \cdot (12 - 7) = 6 \text{ Н}.$$

3. Обираємо плоску системи координат Axy , пов'язавши початок відліку з шарніром A .

4. Звільняємо балку від в'язей, прикладених до неї. В'язями є нерухомий циліндричний шарнір A , та рухома (каткова) опора B . Реакція \vec{R}_B опори B направлена перпендикулярно до балки AB (перпендикулярно площині опори опори). Напрямок реакції \vec{R}_A шарніру A – невідомий, тому будемо шукати цю реакцію у вигляді двох проекцій \vec{X}_A і \vec{Y}_A . Складаємо розрахункову схему (рис. 2.5). З рисунка визначаємо – на балку діє плоска довільна система сил.

5. Складаємо рівняння рівноваги по II формі :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A - F \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0;$$

$$-G \cdot \frac{1}{2}l + R_B \cdot l - F \cdot a \cdot \sin 30^\circ - Q \cdot (l - 0,5BD) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; \quad G \cdot \frac{1}{2}l - Y_A \cdot l + F \cdot (l - a) \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot 0,5BD = 0$$

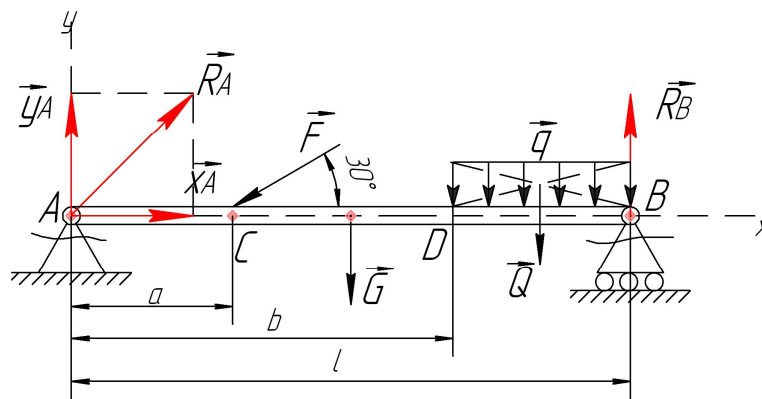


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема

Розв'язуючи одержані рівняння знаходимо:

$$\begin{aligned} X_A &= F \cos 30^\circ = 1,6 \cdot 0,866 = 1,39 \text{ Н} \\ R_B &= \frac{G \cdot 0,5l + F \cdot a \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot (l - 0,5(l - b))}{l} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 12 + 1,6 \cdot 3 \cdot 0,5 + 6 \cdot (12 - 0,5 \cdot 5)}{12} = 5,2 \text{ Н} \end{aligned}$$

$$Y_A = \frac{G \cdot 0,5l + F \cdot (l - a) \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot 0,5(l - b)}{l} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 12 + 1,6 \cdot (12 - 3) \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot (12 - 7)}{12} = 2,1 \text{ Н}$$

Визначимо реакцію шарніру А: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 2,52 \text{ Н}$

6. Перевіримо правильність рішення, склавши рівняння рівноваги системи сил на вісь Ay :

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - F \cdot \sin 30^\circ - G - Q = 0$$

$$2,1 + 5,2 - 1,6 \cdot 0,5 - 0,5 - 6 = 0; \quad 7,3 - 7,3 = 0 - \text{вірно} .$$

Результат: $R_B = 5,2 \text{ Н}, \quad R_A = 2,52 \text{ Н}.$

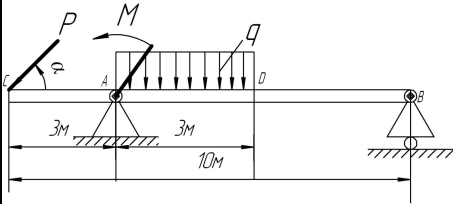
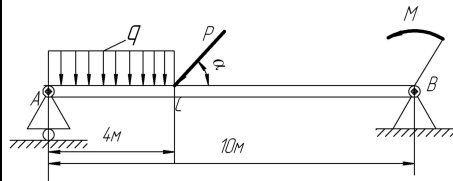
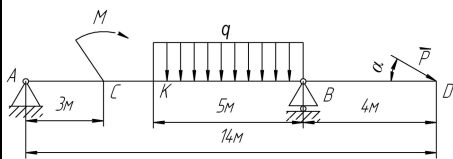
Завдання для дослідження

Дослідити рівновагу плоскої довільної системи сил, визначити реакції опор заданої системи аналітичним способом.

Дані до вибору варіантів завдань, схеми та параметрів досліджуваних систем наведені в таблицях 2.1 і 2.2.

Таблиця 2.1 – Дані досліджуваних систем

№ схеми	1	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	1	25	2	20	30	
	11	16	10	14	135	
	21	15	3	25	270	
	31	45	8	40	90	
№ схеми	2	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	2	80	5	25	30	
	12	30	4	20	135	
	22	10	12	15	270	
32	85	6	60	90		
№ схеми	3	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	3	50	5	35	30	
	13	16	12	40	135	
	23	8	10	25	270	
33	35	6	45	90		
№ схеми	4	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	4	60	1	50	30	
	14	35	6	60	135	
	24	15	2	40	270	
34	50	10	30	90		
№ схеми	5	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	5	12	2	10	30	
	15	20	8	12	135	
	25	15	4	20	270	
35	10	6	8	90		
№ схеми	6	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	
№ варіанту	6	4	6	45	30	
	16	5	12	18	135	
	26	3	8	25	270	
36	8	15	30	90		
№ схеми	7	P, Н	q, Н/м	M Н·м	α	

№ варіанту	7	30	4	35	30	
	17	10	6	5	135	
	27	12	2	10	270	
	37	25	8	20	90	
№ варіанту схеми	8	P, H	q, H/м	M, H·м	α	
№ варіанту	8	16	10	12	30	
	18	40	12	50	135	
	28	10	8	25	270	
	38	60	5	35	90	
№ варіанту схеми	9	P, H	q, H/м	M, H·м	α	
№ варіанту	9	20	2	18	30	
	19	10	5	35	135	
	29	18	8	14	270	
	39	25	9	20	90	
№ варіанту схеми	10	P, H	q, H/м	M, H·м	α	
№ варіанту	10	65	6	10	30	
	20	50	4	45	135	
	30	80	8	35	270	
	40	30	10	60	90	

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Дайте визначення довільної плоскої системи сил.
2. Що називають головним вектором довільної плоскої системи сил.
3. Що називають головним моментом довільної плоскої системи сил.
4. Сформулюйте умову рівноваги довільної системи сил.
5. Що розуміють під розкладанням сили на дві складові сили.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

ТЕМА: ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОВАГИ ДОВІЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Мета роботи: Вивчити умови рівноваги довільної просторової системи сил. Набути практичних навиків щодо розглядання рівноваги довільної системи сил та визначення реакцій в'язей.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Система сил, розташованих в просторі, не паралельних між собою та які не перетинаються в одній точці, називається **довільною просторовою системою сил**.

Однією з основних задач статyki є приведення довільної системи сил до простішого вигляду. За методом Пуансон довільна система сил зводиться до однієї сили та однієї пари сил (моменту).

Нехай задана довільна плоска система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, що діють на тіло (рис. 3.1).

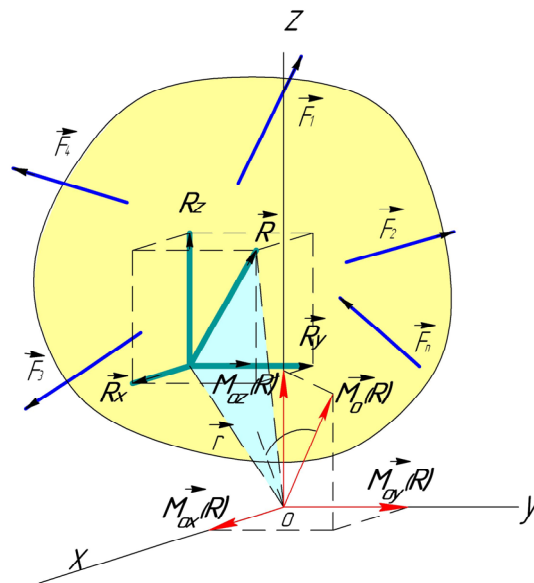


Рисунок 3.1 – Довільна просторова система сил

Головним вектором цієї системи сил є векторна сума всіх сил заданої системи, тобто рівнодійна системи сил:

$$\vec{F}_o = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3.1)$$

Використовуючи аналітичний спосіб визначення рівнодійної, та проєктуючи рівняння (3.1) на декартові осі координат $Oxyz$, не важко встановити аналітичні вирази для визначення головного вектору довільної просторової системи сил.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (3.2)$$

Головним моментом такої системи сил, відносно точки (довільного центру зведення) називають векторну суму моментів сил, що складають дану систему, відносно того ж центра.

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{R} \times \vec{r} \cdot \quad (3.3)$$

Враховавши що $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ і $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$ можна визначити момент рівнодійної за допомогою визначника:

$$M_O(\vec{R}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \underbrace{\vec{i}(y \cdot R_z - z \cdot R_y)}_{M_{Ox}(R)} + \underbrace{\vec{j}(z \cdot R_x - x \cdot R_z)}_{M_{Oy}(R)} + \underbrace{\vec{k}(R_x \cdot y - x \cdot R_y)}_{M_{Oz}(R)}$$

Тоді момент рівнодійної можна розкласти на проєкції у просторовій системі координат

$$M_O(\vec{R}) = M_{Ox}(\vec{R}) + M_{Oy}(\vec{R}) + M_{Oz}(\vec{R}) \quad (3.4)$$

де $M_{Ox}(R)$ – момент рівнодійної відносно осі Ox ; $M_{Oy}(R)$ – момент рівнодійної відносно осі Oy ; $M_{Oz}(R)$ – момент рівнодійної відносно осі Oz .

Для того, щоб довільна система сил перебувала в рівновазі (була еквівалентна нулю) необхідно щоб головний вектор системи сил та головний момент цієї системи відносно довільного центру зведення дорівнювали нулю. Це ствердження виражає умови рівноваги довільної системи сил.

$$\vec{R}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0 \quad (3.5)$$

В аналітичному виді (в проєкціях на осі координат) умови рівноваги довільної просторової системи сил набувають вигляду:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 & \sum_{i=1}^n M_{Ox}(F_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 & \sum_{i=1}^n M_{Oy}(F_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 & \sum_{i=1}^n M_{Oz}(F_i) = 0 \end{array} \quad (3.6)$$

Дослідна частина

Дослідження рівноваги довільної просторової системи сил виконується в наступній послідовності:

1. Визначити тіло, рівновагу якого слід розглянути в даній задачі.
2. Обрати пов'язану з тілом зручну для розв'язання просторову систему координат.
3. Показати на схемі всі активні сили, що діють на вибране тіло.

4. Звільнити тіло від в'язей і замінити їх дію відповідними реакціями. Зобразити у вигляді векторів усі сили реакцій відкинутих в'язей.

5. Скласти систему рівнянь, які б виражали умови рівноваги тіла. Тип та кількість цих рівнянь визначається характером системи сил, яка діє на тіло.

Розглянемо приклад дослідження довільної просторової системи сил.

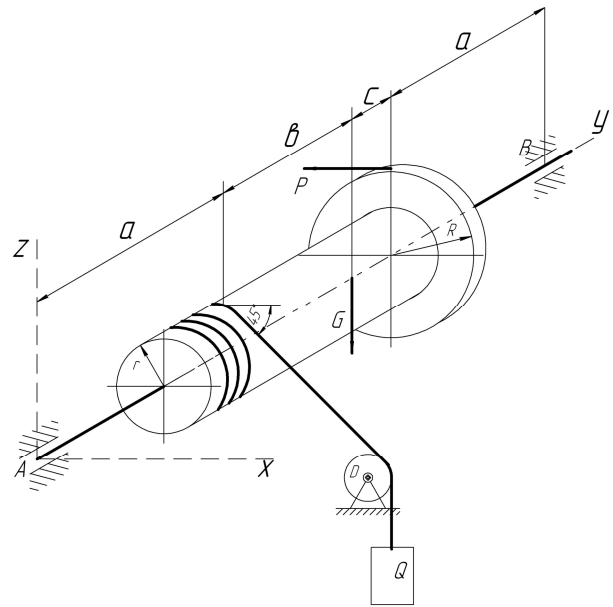
Завдання.

Визначити реакції опор вала АВ та силу P , яку слід докласти до вала, щоб він перебував у рівновазі, якщо $Q = 2$ кН, $G = 20$ кН, $R = 0,15$ м, $r = 0,1$ м, $a = 0,2$ м, $b = 0,3$ м, $c = 0,1$ м.

Розв'язання.

1. Розглядаємо рівновагу балки АВ.

Показуємо активні сили, що діють на балку. Це сила G – вага балки (прикладена в заданому місці балки), та зосереджена сила \vec{P} , прикладена на ободі шківів радіусом R . Крім того на шків радіусом r намотаний трос, що утримує вантаж \vec{Q} . В цьому тросі виникає натяг, який дорівнює вазі вантажу $T=Q$. Для зручності визначимо проєкції сили Q на осі координат.



Маємо:

$$Q_x = Q \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,41 \text{ кН};$$

$$Q_y = Q \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,41 \text{ кН}.$$

2. Обираємо просторову систему координат $Axyz$, пов'язавши початок відліку з опорою A .

3. Звільняємо балку від в'язей, прикладених до неї. В'язями є нерухомі циліндричні шарніри A і B . Напрямок реакції \vec{R}_A шарніру A – невідомий, тому будемо шукати цю реакцію у вигляді двох проєкцій \vec{X}_A і \vec{Z}_A . Аналогічно для опори B – \vec{X}_B і \vec{Z}_B . Складаємо розрахункову схему (рис. 3.2).

4. Складаємо рівняння рівноваги довільної просторової системи сил:

$$4.1. \sum_{i=1}^n M_{Ay}(F_i) = 0: Q \cdot r + P \cdot R = 0, \quad P = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{2 \cdot 0,1}{0,15} = 13,33 \text{ кН}.$$

$$4.2. \sum_{i=1}^n M_{Ax}(F_i) = 0:$$

$$-Q_z \cdot a - G \cdot (a + b) + Z_B \cdot (2a + b + c) = 0$$

$$Z_B = \frac{Q_z \cdot a + G \cdot (a + b)}{2a + b + c} = \frac{1,41 \cdot 0,2 + 20 \cdot (0,2 + 0,3)}{2 \cdot 0,2 + 0,3 + 0,1} = 16,025 \text{ кН}.$$

$$4.3. \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0:$$

$$Z_A + Z_B - Q_z - G = 0, Z_A = Q_z + G - Z_B = 2 + 20 - 16,025 = 3,975 \text{ кН}$$

$$4.4. \sum_{i=1}^n M_{Az}(F_i) = 0$$

$$-Q_x \cdot a + P \cdot (a + b + c) - X_B \cdot (2a + b + c) = 0$$

$$X_B = \frac{P \cdot (a + b + c) - Q_x \cdot a}{2a + b + c} = \frac{13,33 \cdot (0,2 + 0,3 + 0,1) - 2 \cdot 0,2}{2 \cdot 0,2 + 0,3 + 0,1} = 9,49 \text{ кН}$$

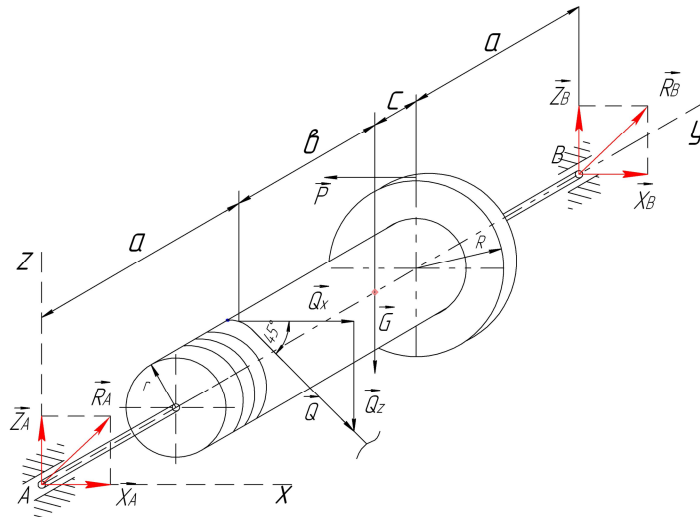


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема

$$4.5. \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0:$$

$$X_A + X_B + Q_x - P = 0, X_A = P - Q_x - X_B = 13,33 - 1,41 - 9,49 = 2,43 \text{ кН.}$$

5. Визначимо сумарні реакції опор:

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Z}_A, R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{2,43^2 + 3,975^2} = 4,79 \text{ кН};$$

$$\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Z}_B, R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{9,49^2 + 16,025^2} = 18,51 \text{ кН};$$

Результат: $P = 13,33 \text{ кН}; R_A = 4,79 \text{ кН}; R_B = 18,51 \text{ кН}.$

Завдання для дослідження

Дослідити рівновагу довільної просторової системи сил, визначити реакції опор заданої системи та сили, що забезпечують рівновагу вала, якщо $F_1 = 5 \text{ кН}.$

Дані до вибору варіантів завдань, схеми та параметрів досліджуваних систем наведені в таблицях 3.1 і 3.2.

Таблиця 3.1 – Варіанти завдань

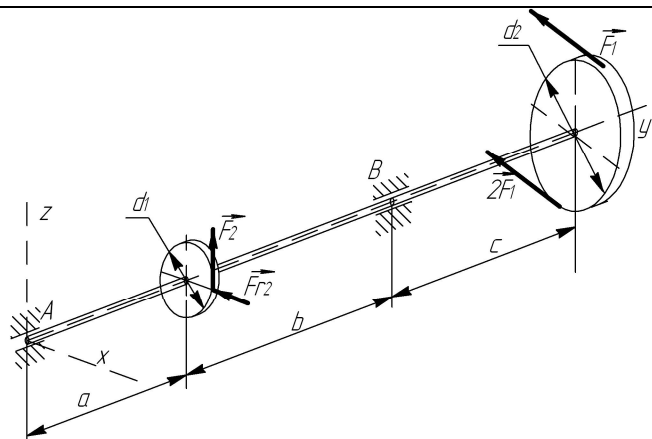
№ схеми	№ варіанту				Дані системи											
					n	$a, \text{ м}$	$n-1$	$b, \text{ м}$	n	$c, \text{ м}$	$n-1$	$d_1, \text{ м}$	n	$d_2, \text{ м}$	$n-1$	$F_{r2}, \text{ кН}$
1	1	11	21	31	1	0,1	1	0,2	1	0,3	1	0,4	1	0,6	1	$0,4F_2$
2	2	12	22	32	2	0,8	2	0,15	2	0,12	2	0,3	2	0,5	2	$0,1 F_2$
3	3	13	23	33	3	0,1	3	0,15	3	0,1	3	0,2	3	0,4	3	$0,5 F_2$
4	4	14	24	34	4	0,2	4	0,4	4	0,3	4	0,5	4	0,6	4	$0,8 F_2$
5	5	15	25	35	5	0,2	5	0,3	5	0,3	5	0,6	5	0,2	5	$1,0 F_2$
6	6	16	26	36	6	0,12	6	0,2	6	0,3	6	0,2	6	0,6	6	$1,2 F_2$
7	7	17	27	37	7	0,3	7	0,4	7	0,3	7	0,8	7	0,3	7	$0,3 F_2$
8	8	18	28	38	8	0,4	8	0,2	8	0,4	8	0,3	8	0,8	8	$1,5 F_2$
9	9	19	29	39	9	0,2	9	0,25	9	0,25	9	0,2	9	0,5	9	$2,0 F_2$
10	10	20	30	40	10	0,3	10	0,3	10	0,3	10	0,4	10	0,6	10	$0,7 F_2$

n – остання цифра шифру; $n - 1$ – передостання цифра шифру

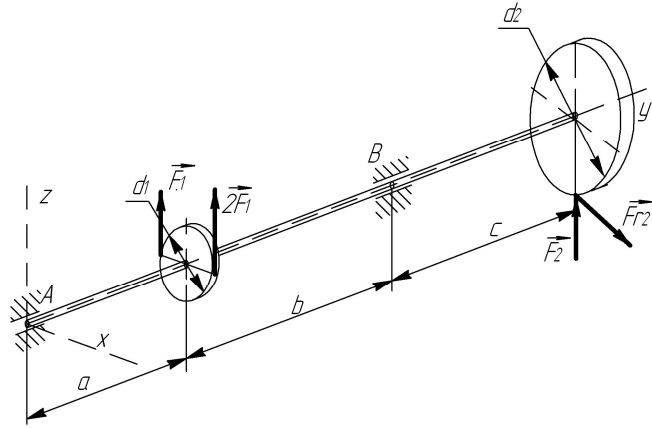
Таблиця 3.2 – Схеми досліджуваних систем

№ схеми	Схема системи
1	
2	

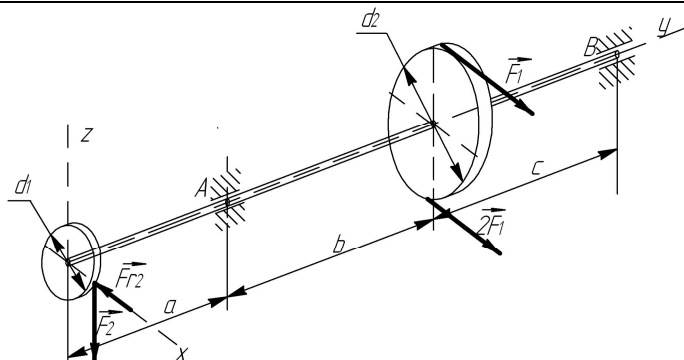
3



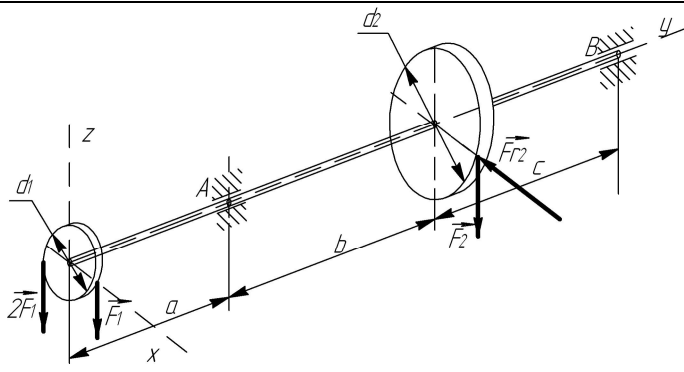
4



5



6



7	
8	
9	
10	

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Дайте визначення довільної просторової системи сил.
2. Сформулюйте умову рівноваги довільної просторової системи сил.
3. Що називають головним вектором та головним моментом довільної просторової системи сил.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

ТЕМА: ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ ЗА ДАНИМИ РІВНЯННЯМИ ЇЇ РУХУ

Мета роботи: Визначення швидкості та прискорення точки у декартових координатах (координатний спосіб завдання руху точки) та при натуральному способі завдання руху точки.

Методичні рекомендації до виконання роботи

ВКАЗИВКА 1. Задача лабораторної роботи відноситься до кінематики точки та розв'язується за допомогою формул за якими визначається швидкість та прискорення точки у декартових координатах (координатний спосіб завдання руху точки), а також формул, за якими визначається швидкість, дотичне та нормальне прискорення точки при натуральному способі завдання її руху.

ВКАЗИВКА 2. При роботі над виконанням задачі необхідно мати відомі з аналітичної геометрії знання, а саме:

Найпростіші функції та їх графіки

Пряма лінія.

Будь-яку пряму, яка не паралельна до осі ординат, можна подати рівнянням виду $y = kx + b$.

У цьому рівнянні k є тангенс кута α (рис.4.1), а число b дорівнює довжині відрізка ОК, який відсікається прямою на осі ординат.

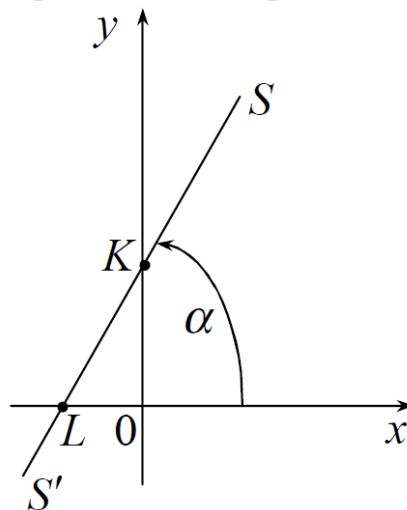


Рисунок 4.1

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$. Величину k називають кутовим коефіцієнтом, величину b - початковою ординатою.

Приклад 1. Написати рівняння прямої (рис.4.2), яка утворює з віссю Ox кут $\alpha = -45^\circ$ і відсікає початкову ординату $b = -3$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$.

Шукане рівняння $y = -x - 3$.

Приклад 2. Яку лінію являє рівняння $3x = \sqrt{3}y$?

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до виду $y = \frac{3}{\sqrt{3}}x$ або $y = 3x$. Кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tga} = 3$, $a = 60^\circ$.

Початкова ордината $b = 0$. Задане рівняння являє собою пряму UV (рис.4.3), яка проходить через початок координат під кутом $a = 60^\circ$ до осі Ox .

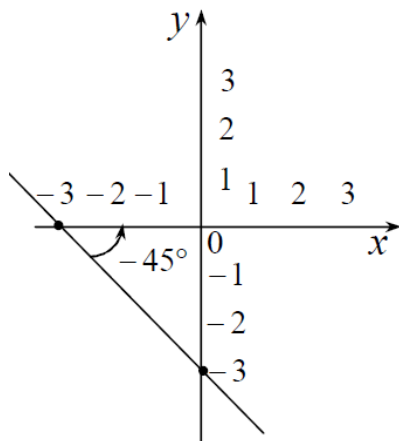


Рисунок 4.2

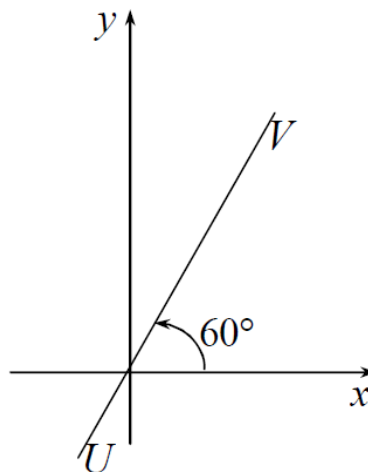


Рисунок 4.3

Коло

Коло радіуса R з центром в початку координат являє собою рівняння виду $x^2 + y^2 = R^2$.

Коло радіуса R з центром у точці $C(a;b)$ (рис.4.4) являє собою рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

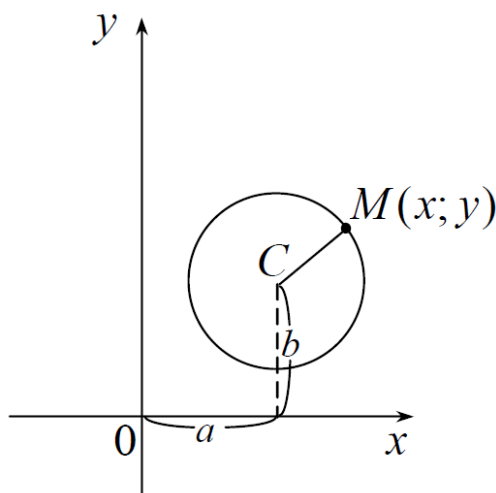


Рисунок 4.4

Еліпс

Рівняння виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Величина $2a$ (рис.4.5) називається великою віссю еліпса; величина b називається малою піввіссю еліпса.

Точка C називається центром еліпса.

Рівняння еліпса з центром в точці $C (c_1; c_2)$ має вид (рис.4.5)

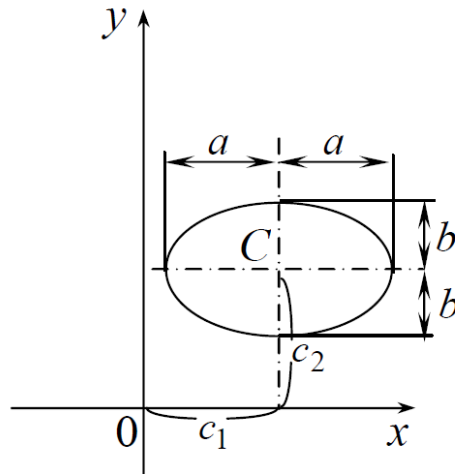
$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1.$$


Рисунок 4.5

Парабола

Функція $y = ax^2 + bx + c$ (a , b і c – сталі величини; $a \neq 0$) називається квадратичною.

У найпростішому випадку $y = ax^2$ ($b = c = 0$) графік являє собою криву лінію, яка проходить через початок координат.

Графік функції $y = ax^2$ є парабола. Кожна парабола має вісь симетрії, яка називається віссю параболу. Точка O перетину параболу з її віссю називається вершиною параболу (рис. 4.6).

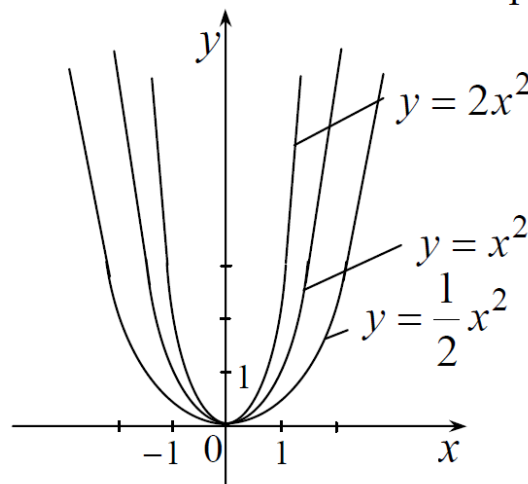


Рисунок 4.6

Завдання для дослідження

Точка B рухається у площині xu (рис. 4.7), табл. 4.1; траєкторія точки на рисунках показана умовно).

Закон руху точки заданий рівнянням: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, де x та y виражені у сантиметрах, t – у секундах.

За заданими рівняннями руху точки B встановити вид її траєкторії та для моменту часу $t = t_1(c)$ знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Залежність $x = f_1(t)$, залежність $y = f_2(t)$ задані в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1- Завдання для дослідження

Номер варіанта	Рівняння руху		t_1, c
	$x = x(t), cm$	$y = y(t), cm$	
1	$2t-4$	$-3t^2-5$	1
2	$4 \cos^2 \frac{\pi t}{3} + 2$	$4 \sin^2 \frac{\pi t}{3}$	1
3	$-\cos^2 \frac{\pi t^2}{3} + 3$	$\sin^2 \frac{\pi t^2}{3} - 1$	1
4	$4t+4$	$-\frac{4}{t+1}$	2
5	$2 \sin \frac{\pi t}{3}$	$-3 \cos \frac{\pi t}{3} + 4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
7	$3t^2-t+1$	$5t^2 - \frac{5}{3}t - 2$	1
8	$7 \sin \frac{\pi t^2}{6} + 3$	$2 - 7 \cos \frac{\pi t^2}{6}$	1
9	$-\frac{3}{t+2}$	$3t+6$	2
10	$-4 \cos \frac{\pi t}{3}$	$-2 \sin \frac{\pi t}{3} - 3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
12	$5 \sin^2 \frac{\pi t}{6}$	$-5 \cos^2 \frac{\pi t^2}{6} - 3$	1
13	$5 \cos \frac{\pi t^2}{3}$	$-5 \sin \frac{\pi t^2}{3}$	1
14	$-2t-2$	$-\frac{2}{t+1}$	2
15	$4 \cos \frac{\pi t}{3}$	$-3 \sin \frac{\pi t}{3}$	1
16	$8 \sin \frac{\pi t^2}{4} - 3$	$8 \cos \frac{\pi t^2}{4} + 5$	

Продовження табл. 4.1			
17	$7\sin^2 \frac{\pi t}{6} - 5$	$-7\cos^2 \frac{\pi t}{6}$	1
18	$1 + 3\cos \frac{\pi t^2}{3}$	$3\sin \frac{\pi t^2}{3} + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - \frac{3}{2}t - 3t^2$	0
21	$6\sin^2 \frac{\pi t}{6} - 2$	$6\cos^2 \frac{\pi t}{6} + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	0,25
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + \frac{5}{3}t$	1
24	$-4\cos \frac{\pi t}{3} - 1$	$-4\sin \frac{\pi t}{3}$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8\cos^2 \frac{\pi t}{6} + 2$	$-8\sin^2 \frac{\pi t}{6} - 7$	1
27	$-3 - 9\sin^2 \frac{\pi t}{6}$	$-9\cos^2 \frac{\pi t}{6} + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + \frac{5}{3}t - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2\cos \frac{\pi t^2}{3} - 2$	$-2\sin \frac{\pi t^2}{3} + 3$	1
31	$3t$	$4t^2 + 1$	0,5
32	$7t^2 + 2t - 3$	$5t - 1$	0,5

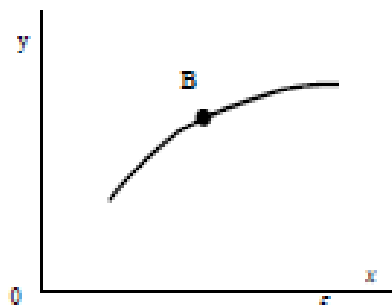


Рисунок 4.7

Приклад 1

Дано: точка рухається у площині $xу$, закон руху заданий рівняннями:

$$x = t - 4(\text{см}); \quad (1)$$

$$y = 2t^3 (\text{см}). \quad (2)$$

Знайти: рівняння траєкторії точки, для моменту часу $t_1 = 1(c)$ визначити швидкість та прискорення точки, її дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1. Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо з заданих рівнянь руху час t . З рівняння (1) $t = (x+4)$, підставивши значення t в рівняння (2), отримаємо:

$$y = 2(x + 4)^3. \quad (3)$$

Рівняння (3) являє собою рівняння кубічної параболи та є рівнянням траєкторії точки у координатній формі. Тобто траєкторія точки знаходиться на кубічній параболі $y = 2(x + 4)^3$. У початковий момент часу положення точки визначається координатами $M_0(-4; 0)$. З плином часу вона рухається параболою в нескінченність правого квадранта (додатного) декартових координат.

2. Швидкість точки знайдемо за її проекціями на координатні вісі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 1 \text{ (см/с)}; V_y = \frac{dy}{dt} = 6t^2 \text{ (см/с)};$$

при $t = 1 \text{ с}; V_{1x} = 1 \text{ (см/с)}; V_{1y} = 6 \text{ (см/с)};$

$$V_1 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = 6,08 \text{ (см/с)}. \quad (4)$$

Вектори швидкості точки і його проекції на осі зображені на рис.4.8, а.

3. Аналогічно знайдемо прискорення точок:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0; a_y = \frac{dV_y}{dt} = 12t; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ (см/с}^2\text{)};$$

при $t = 1 \text{ с}; a_{1y} = 12 \text{ (см/с}^2\text{)};$

$$a_1 = a_{1y} = 12 \text{ (см/с}^2\text{)}. \quad (5)$$

4. Дотичне прискорення знайдемо шляхом диференціювання за часом рівності

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2; a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (6)$$

Підставивши у вираз (6) чисельні значення отримаємо:

$$a_{1\tau} = \frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot 12}{6,08} = 11,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

5. Нормальне прискорення точки:

$$a_n = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{12^2 - 11,8^2} = 2,2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор повного прискорення точки, його складові, дотичне і нормальне прискорення, а також проекції вектора прискорення на осі координат зображені на рисунку 4.8, б.

6 Радіус кривизни траєкторії:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Підставивши в останній вираз числові значення присутніх в ньому величин для $t_1 = 1 \text{ с}$, знаходимо радіус кривизни траєкторії для цього моменту часу:

$$\rho = \frac{6,08^2}{2,2} = 16,8 \text{ см.}$$

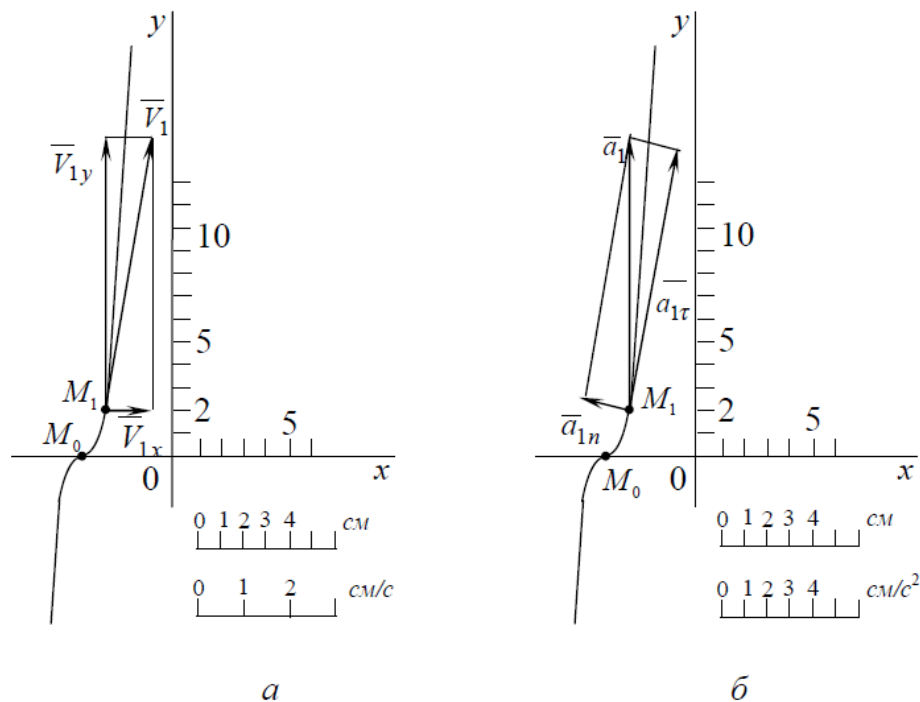


Рисунок 4.8

Приклад 2

Дано: $x = -4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ (см); $y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$ (см); $t_1 = 1$ (с). (1)

Знайти: вид траєкторії точки, положення точки на траєкторії, її швидкість, прискорення, складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії для моменту часу t_1 .

Розв'язання

1. Рівняння руху (1) можна рахувати як параметричні рівняння траєкторії точки. Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, виключимо параметр t з рівнянь (1).

$$\text{Отримаємо: } \begin{cases} x = -4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right); \\ y = -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right); \\ \frac{y+3}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right); \end{cases} \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1.$$

Отримане рівняння являє собою рівняння еліпса. Осі еліпса симетричні декартовим осям координат, а його центр знаходиться на осі Oy у положенні $(0; -3)$.

2. Швидкість та прискорення точки знайдемо за її проєкціями на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \text{ (см/с); } V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \text{ (см/с).}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{4\pi^2}{9} \cos\frac{\pi}{3}t, \text{ (см/с}^2\text{); } a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{2\pi^2}{9} \sin\frac{\pi}{3}t, \text{ (см/с}^2\text{).}$$

За знайденими проекціями визначаються модуль швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 1}.$$

та модуль прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{2\pi^2}{9} \sqrt{3 \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 1}.$$

Модуль дотичного прискорення точки: $a_\tau = \left| \frac{dV}{dt} \right|$,

$$a_\tau = \left| \frac{\frac{6\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{\sqrt{3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 1}} \right|.$$

Модуль нормального прискорення точки: $a_n = \frac{V^2}{\rho}$.

Якщо радіус кривизни траєкторії ρ у точці, яку ми розглядаємо, невідомий, то a_n можна визначити за формулою:

$$a_n = \frac{|V \cdot a|}{V}.$$

При русі точки у площині формула набуде вид:

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{\frac{4\pi^2}{9}}{\sqrt{3 \sin^2 a + 1}}.$$

Модуль нормального прискорення можна визначити також за формулою:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Радіус кривизни $\rho = \frac{V^2}{a_n}$.

Приклад 3

Дано: $x = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3$ (см); $y = 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right)$ (см); $t_1 = 1$ (с). (1)

Знайти: вид траєкторії точки, положення точки на траєкторії, її швидкість, прискорення, складові прискорення, а також радіус кривизни траєкторії для моменту часу t_1 .

Розв'язання

1. Отримаємо рівняння траєкторії точки в координатній формі, виключивши параметр t з рівнянь (1).

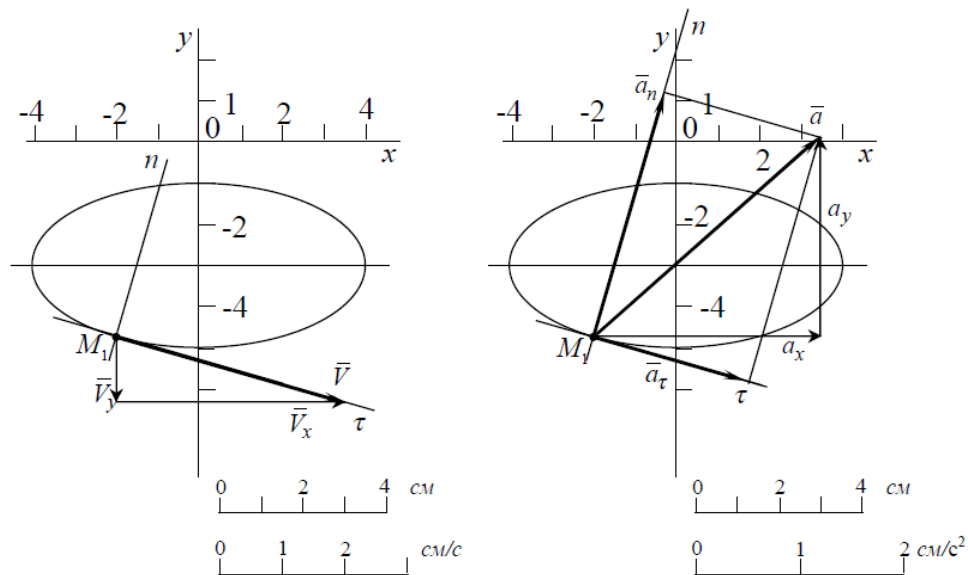


Рисунок 4.9

Отримаємо:
$$\begin{cases} x = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + 3; & \left(\frac{x-3}{7}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right); \\ y = 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right); & \left(\frac{y-2}{7}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right); \end{cases}$$

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{49} = \sin^2\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$ - рівняння кола радіусом $R = 7$ см та центром С (3;

2).

2. Знайдемо положення точки М на траєкторії у заданий момент часу.

$$x = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + 3 = 7 \sin\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) + 3 = 7 \cdot 0,5 + 3 = 6,5 \text{ см};$$

$$y = 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi \cdot 1^2}{6}\right) = 2 - 7 \cdot 0,866 = -4,06 \text{ см}.$$

3. Визначимо швидкість точки М.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 7 \cdot \frac{2\pi}{6}t \cdot \cos\frac{\pi t^2}{6} = 7 \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1}{6} \cos\frac{\pi}{6} = 6,35 \text{ см/с}.$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -7 \cdot \frac{2\pi}{6}t \cdot \left(-\sin\frac{\pi t^2}{6}\right) = 7 \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1}{6} \sin\frac{\pi}{6} = 3,66 \text{ см/с}.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{6,35^2 + 3,66^2} = 7,33 \text{ см/с}.$$

4. Визначимо повне прискорення точки М.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{14\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{6}t \cdot \left(-\sin\frac{\pi t^2}{6}\right) + \frac{14\pi}{6} \cos\frac{\pi t^2}{6} = 2,51 \text{ см/с}^2.$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{14\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi t^2}{6} \right) + \frac{14\pi}{6} \sin \frac{\pi t^2}{6} = 10,3 \text{ см/с}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10,3 \text{ см/с}^2.$$

5. Визначимо дотичне та нормальне прискорення точки М.

$$a_\tau = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \right| = 7,32 \text{ см/с}^2.$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{10,6^2 - 7,32^2} = 7,67 \text{ см/с}^2.$$

6. Визначимо радіус кривизни траєкторії.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{7,33^2}{7,67} = 7 \text{ см}$$

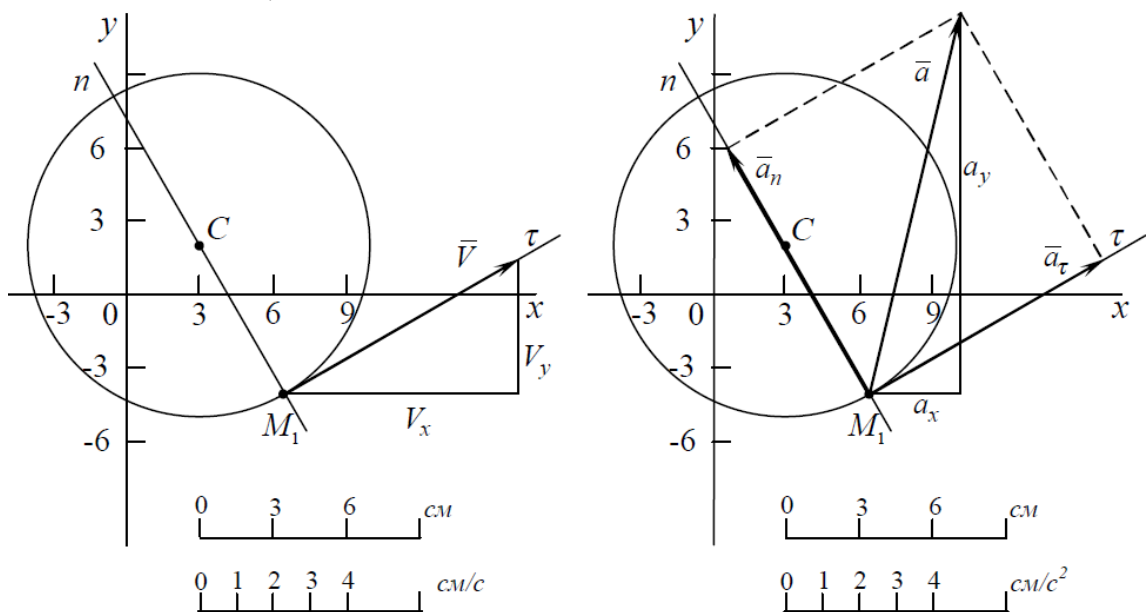


Рисунок 4.10

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Що називають траєкторією руху точки?
2. Як задається рух точки векторним способом?
3. Як задається рух точки координатним способом?
4. Як задається рух точки натуральним способом?
5. Як визначається швидкість точки при векторному, координатному і натуральному способах завдання руху?
6. Як визначається прискорення точки при векторному і координатному способах завдання руху?
7. Як визначається дотичне і нормальне прискорення точки?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

Мета роботи: Визначення кінетичної енергії механічної системи.

Методичні рекомендації до виконання роботи

5.1 Кінетична енергія матеріальної точки та механічної системи

Кінетична енергія матеріальної точки – це скалярна міра механічного руху, рівна половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2} m V^2. \quad (5.1)$$

Одиниця вимірювання кінетичної енергії в системі СІ – 1 Дж.

Кінетична енергія механічної системи – це сума кінетичних енергій всіх матеріальних точок, що утворюють систему:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j V_j^2}{2}. \quad (5.2)$$

5.2 Кінетична енергія твердого тіла

5.2.1 Поступальний рух

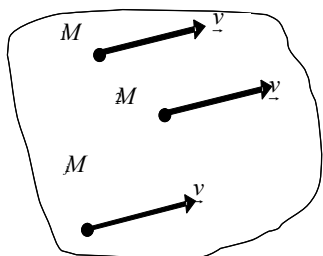


Рисунок 5.1

При цьому виді руху швидкості усіх точок тіла однакові $\overline{V}_j = \overline{V}$ (рис. 5.1). Із формули (5.2):

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j V_j^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j = \frac{m V^2}{2}, \quad (5.3)$$

де m – маса тіла.

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

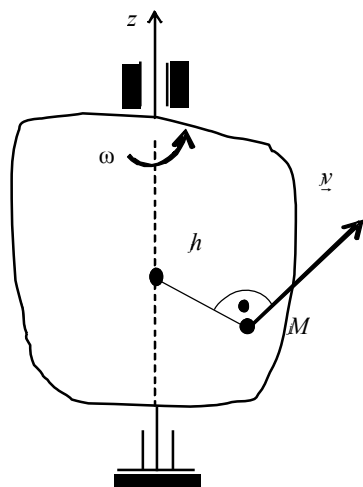


Рисунок 5.2

5.2.2 Обертальний рух

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої вісі з кутовою швидкістю ω швидкість точки M_j (рис. 5.2), яка знаходиться на відстані h_j від осі обертання, $V_j = \omega h_j$. Із формули (5.2) отримаємо:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j V_j^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \omega^2 h_j^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j h_j^2.$$

Тут $\sum_{j=1}^N m_j h_j^2 = J_z$ – момент інерції тіла відносно вісі обертання.

$$\text{Таким чином, } T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (5.4)$$

тобто кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої вісі, дорівнює половині добутку його моменту інерції відносно вісі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

5.2.3 Плоский рух

Кінетична енергія тіла, яке здійснює плоский рух, дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху зі швидкістю центра мас й кінетичної енергії обертального руху навколо вісі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині руху:

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (5.5)$$

Приклад 1. Визначити кінетичну енергію круглого однорідного циліндра, який котиться без ковзання по нерухомій площині (рис. 5.3). Маса циліндра дорівнює m , швидкість його центра мас V_c .

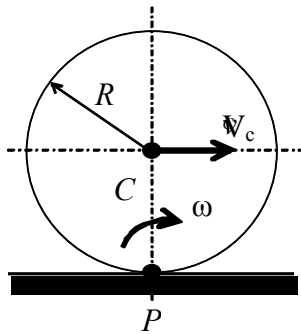


Рисунок 5.3

Миттєвий центр швидкостей циліндра знаходиться в точці P касання циліндра й нерухомої площині, тому його

кутова швидкість $\omega = \frac{V_c}{CP} = \frac{V_c}{R}$. Момент інерції циліндра

відносно поздовжньої вісі $J_z = \frac{mR^2}{2}$.

Із формули (5.5) отримаємо

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{V_c^2}{R^2} = \frac{3}{4} m V_c^2.$$

5.3 Робота сили

Для кількісного опису результату дії сили при переміщенні точки її прикладання використовують поняття *роботи сили*. Нехай точка прикладання сили F отримала елементарне переміщення $d\vec{r}$ (рис. 5.4). Елементарна робота сили – це скалярна міра її дії, що дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання

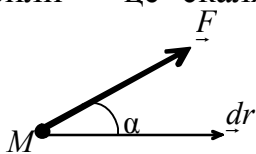


Рисунок 5.4

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.6)$$

Одиниця вимірювання роботи в системі СІ – 1 Н·м = 1 Дж.

Робота сили тяжіння

$$A = \pm mgh,$$

де знак «плюс» відповідає переміщенню центра тяжіння вниз, знак «мінус» – переміщенню догори. Таким чином, робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії центра тяжіння тіла и може бути визначена тільки його вертикальним переміщенням.

Робота сили пружності

$$A = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2),$$

де x_1, x_2 – початкова й кінцева деформація пружини.

Робота сили пружності додатна, якщо початкова деформація більше кінцевої по модулю, й від’ємна в протилежному випадку. Вона залежить тільки від початкового й кінцевого положення грузу M .

Робота сили, прикладеної до твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої вісі $A = M_z(\bar{F})(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Робота постійної сили $A = F \cdot \Delta r = F \Delta r \cos \alpha$.

Робота сил опору кочення $A = -N\delta \frac{S_c}{R}$,

5.4 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх діючих на точку сил на тому самому переміщенні

$$T_k - T_n = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (5.7)$$

5.5 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, діючих на точки системи, на тому самому переміщенні

$$T_k - T_n = \sum_{j=1}^N A_j^e + \sum_{j=1}^N A_j^i. \quad (5.8)$$

Приклад 2. Механізм, розташований у вертикальній площині, починає рух із стану спокою під дією сил тяжіння (положення зліва, рис. 5.5). Вантаж 1, опускаючись донизу, приводить у рух шків 2 і шарнірно пов’язаний з ним шатун 3, а повзун 4 рухається вздовж вертикальних напрямних.

Визначити швидкість вантажу 1 в момент, коли шків повернеться на кут π рад (положення праворуч, рис. 5.5), вважаємо шків однорідним циліндром радіусом R , а шатун – однорідним стержнем; $r = 0,5 R$. Маса тіл прийняти наступними: $m_1 = m_2 = m_3 = m, m_4 = 0,5m$. Опором руху знехтувати.

Розв’язок

Так як система складається із твердих тіл, з’єднаних шарнірами без тертя й гнучким тросом, масою якого нехтуємо, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю. Рух системи починається із стану спокою, тому початкова кінетична енергія $T_1 = 0$, з рівняння(5.8) отримаємо

$$T_k = \sum_{j=1}^N A_j^e. \quad (5.9)$$

Кінетична енергія системи в кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до складу системи

$$T_k = T_{k1} + T_{k2} + T_{k3} + T_{k4}. \quad (5.10)$$

Вантаж 1 рухається поступально, шків 2 обертається навколо нерухомої вісі. Їх кінетичні енергії:

$$T_{k1} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m V_1^2; \quad T_{k2} = \frac{1}{2} J_{z_2} \omega_2^2.$$

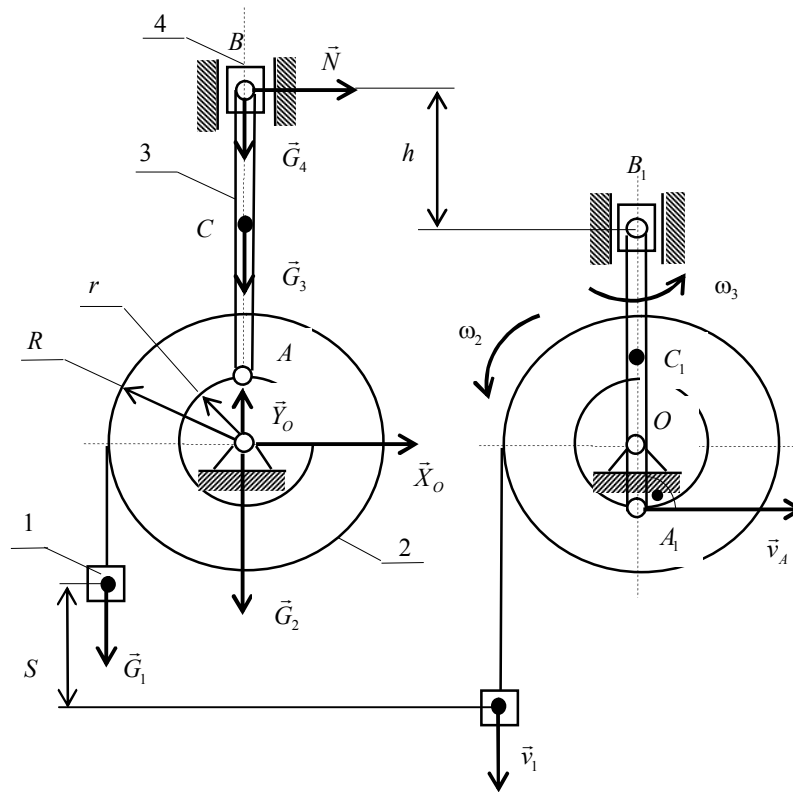


Рисунок 5.5

Повзун 4 також рухається поступально, але в кінцевому положенні системи (див. рис. 5.5, праворуч) займає крайнє нижнє положення, тому його швидкість дорівнює нулю, кінетична енергія $T_{\kappa 4} = 0$. Точка B_1 є миттєвим центром швидкостей шатуна 3, який здійснює плоский рух. Його кінетичну енергію визначимо за формулою

$$T_{\kappa 3} = \frac{1}{2} J_{z3} \omega_3^2.$$

Моменти інерції шківів 2 і шатуна 3 (однорідних тіл) визначимо за формулами:

$$J_{z2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 = \frac{1}{2} m R^2; \quad J_{z3} = \frac{1}{2} m_3 l^2 = \frac{1}{2} m l^2,$$

де l – довжина шатуна.

Кутова швидкість шківів $\omega_2 = \frac{V_1}{R}$, швидкість точки A

$$V_A = \omega_2 r = \frac{V_1}{R} 0,5R = 0,5V_1.$$

Кутова швидкість шатуна

$$\omega_3 = \frac{V_A}{A_1 B_1} = \frac{0,5V_1}{l} = \frac{V_1}{2l}.$$

Тоді отримаємо

$$T_k = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{V_1^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \cdot \frac{V_1^2}{4l^2} = \frac{19}{24}mV_1^2. \quad (5.11)$$

Розглянемо зовнішні сили, які діють на систему. Сума робіт зовнішніх сил

$$\sum_{j=1}^N A_j^e = A_{G1} + A_{G2} + A_{G3}.$$

Роботи сил тяжіння:

$$\begin{aligned} A_{G1} &= m_1 gS = mgS; \\ A_{G3} &= m_3 gh = mgh; \quad ; \\ A_{G4} &= m_4 gh = 0,5mgh. \end{aligned}$$

Визначивши переміщення центрів ваги $S = \pi R, h = 2r = R$, отримаємо суму робіт зовнішніх сил

$$\sum_{j=1}^N A_j^e = mg\pi R + mgR + 0,5mgR = mgR(1,5 + \pi). \quad (5.12)$$

Прирівнявши (5.11) і (5.12), визначимо швидкість вантажу 1

$$\frac{19}{24}mV_1^2 = mgR(1,5 + \pi); \quad V_1 = \sqrt{\frac{24}{19}gR(1,5 + \pi)}.$$

Завдання для дослідження

Механічна система під дією сил тяжіння приходить в рух із стану спокою. Враховується тертя ковзання тіла А і опір коченню тіла D, яке котиться без ковзання. Іншими силами опору та масами нерозтяжних нитей нехтувати. Необхідно визначити швидкість тіла А, коли воно пройде шлях $S_A = S$.

В задачі позначено:

m_A, m_B, m_D, m_E – маси тіл А, В, D, E;

$R_B, r_B, R_D, r_D, R_E, r_E$ – радіуси великих і малих кіл тіл В, D, E;

ρ_B, ρ_D, ρ_E – радіуси інерції тіл В, D, E відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центр тяжіння;

α – кут нахилу площини до горизонту;

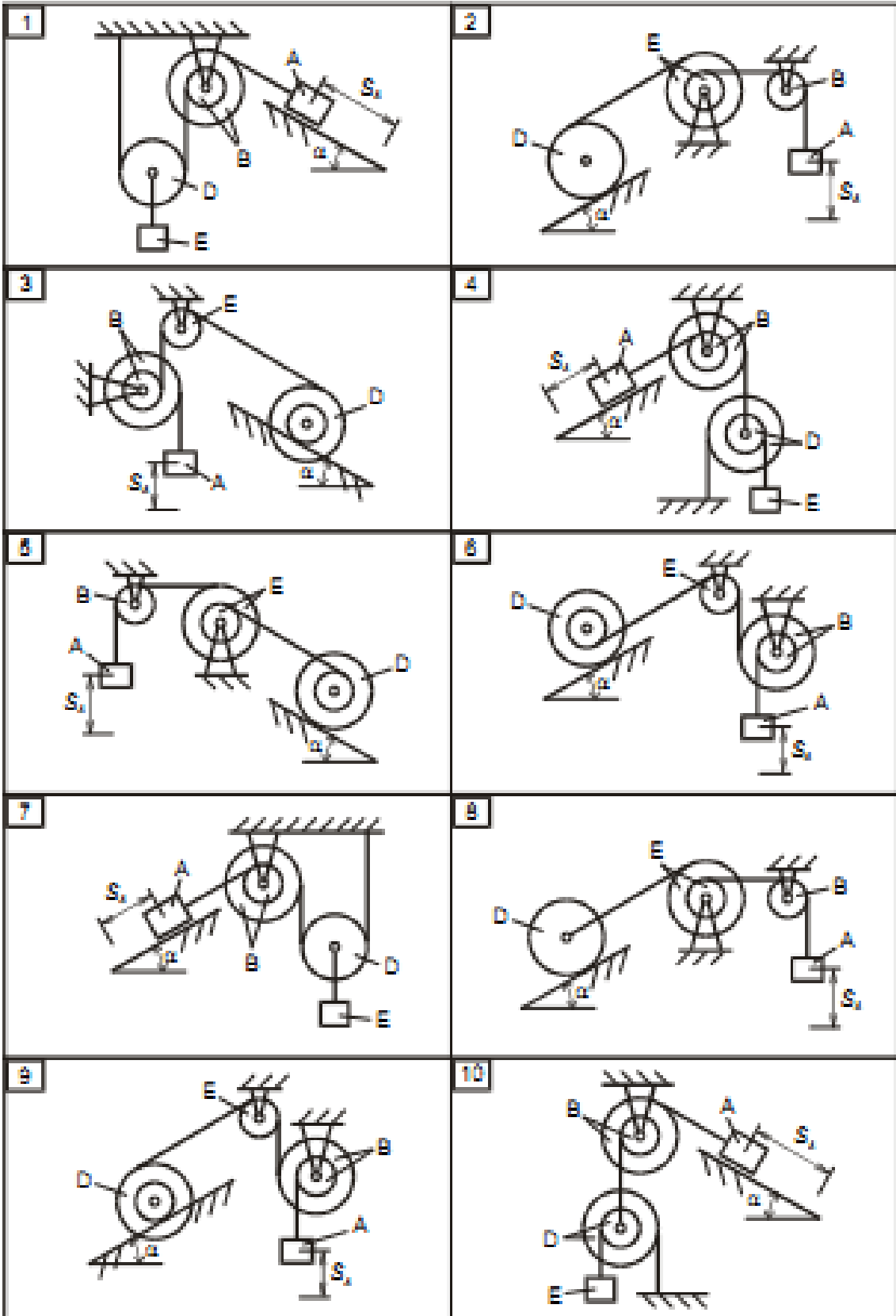
f – коефіцієнт тертя ковзання тіла А;

k – коефіцієнт тертя кочення тіла D.

Блоки та котки, радіуси інерції яких не вказані, вважати однорідними суцільними циліндрами. Вважати величину $m = 10\text{кг}$. Вихідні дані наведені в таблиці 5.1, схеми на рис.5.6-5.7.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

№ ва- рианта	№ ри- сунка	m_A , кг	m_B , кг	m_E , кг	m_D , кг	R_B , м	r_B , м	ρ_B , м	R_E , м	r_E , м	ρ_E , м	R_D , м	r_D , м	ρ_D , м	α , °	f	k , см	S , м
1	1	5m	4m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,1	-	1
2	2	6m	5m	4m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	45	-	0,2	2
3	3	4m	m	2m	m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,6	0,2	0,3	15	-	0,1	1,5
4	4	8m	6m	3m	2m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	30	0,2	-	3
5	5	7m	5m	4m	m	-	-	-	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	50	-	0,3	4,5
6	6	9m	8m	3m	3m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,9	0,3	0,5	20	-	0,4	1,5
7	7	6m	2m	3m	2m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	2,5
8	8	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	-	0,4	-	15	-	0,1	4
9	9	7m	5m	3m	3m	0,6	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,5	0,7	20	-	0,4	2
10	10	5m	4m	2m	m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,7	0,3	0,4	50	0,25	-	1
11	11	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,5	0,1	0,2	0,8	0,4	0,5	30	-	0,3	3,5
12	12	9m	7m	5m	4m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	70	0,1	-	2
13	13	6m	3m	2m	m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	4,5
14	14	7m	5m	4m	2m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	-	0,6	-	20	-	0,1	3
15	15	4m	3m	2m	m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	60	0,2	-	1,5
16	16	5m	4m	2m	m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	0,7	0,4	0,5	30	-	0,3	1
17	17	6m	5m	4m	2m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,4	-	20	-	0,1	2
18	18	4m	m	2m	m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	65	0,15	-	1,5
19	19	8m	6m	3m	2m	-	-	-	0,9	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	3
20	20	7m	5m	4m	m	0,5	0,1	0,3	-	-	-	0,6	0,3	0,4	45	-	-	4,5
21	21	9m	8m	3m	3m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,7	0,3	0,4	30	-	0,3	1,4
22	22	6m	2m	3m	2m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,3	60	0,25	-	2,5
23	23	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	20	-	0,1	4
24	24	7m	5m	3m	3m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,9	0,3	0,5	15	-	0,3	2
25	25	5m	4m	2m	m	0,5	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	75	0,1	-	1
26	26	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	25	-	0,2	3,5
27	27	9m	7m	5m	4m	0,7	0,4	0,5	-	-	-	0,8	0,5	0,7	30	-	0,3	2
28	28	6m	3m	2m	m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	70	0,2	-	4,5
29	29	7m	5m	4m	2m	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	0,6	-	20	-	0,1	3
30	30	4m	3m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	1,5



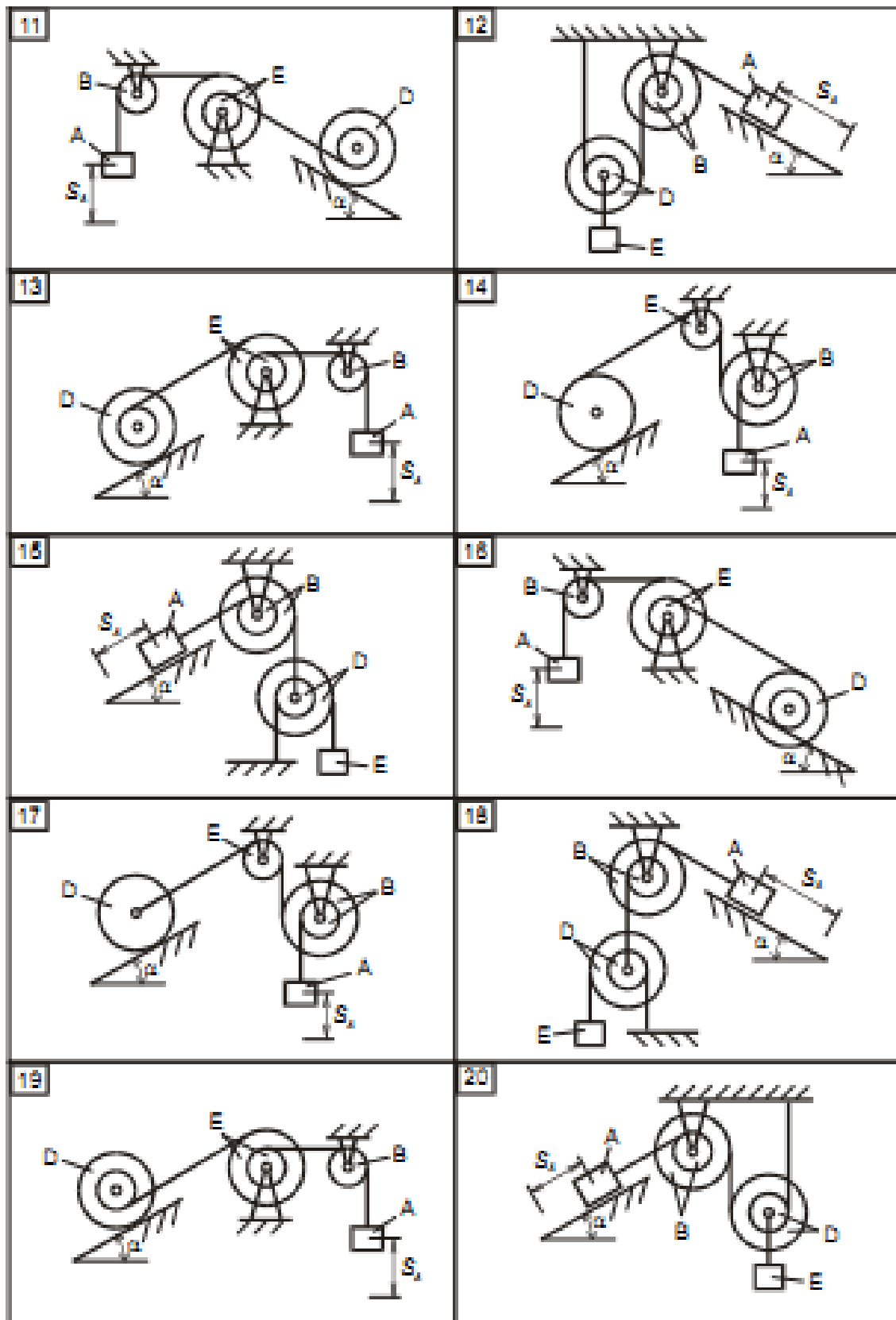


Рисунок 5.6

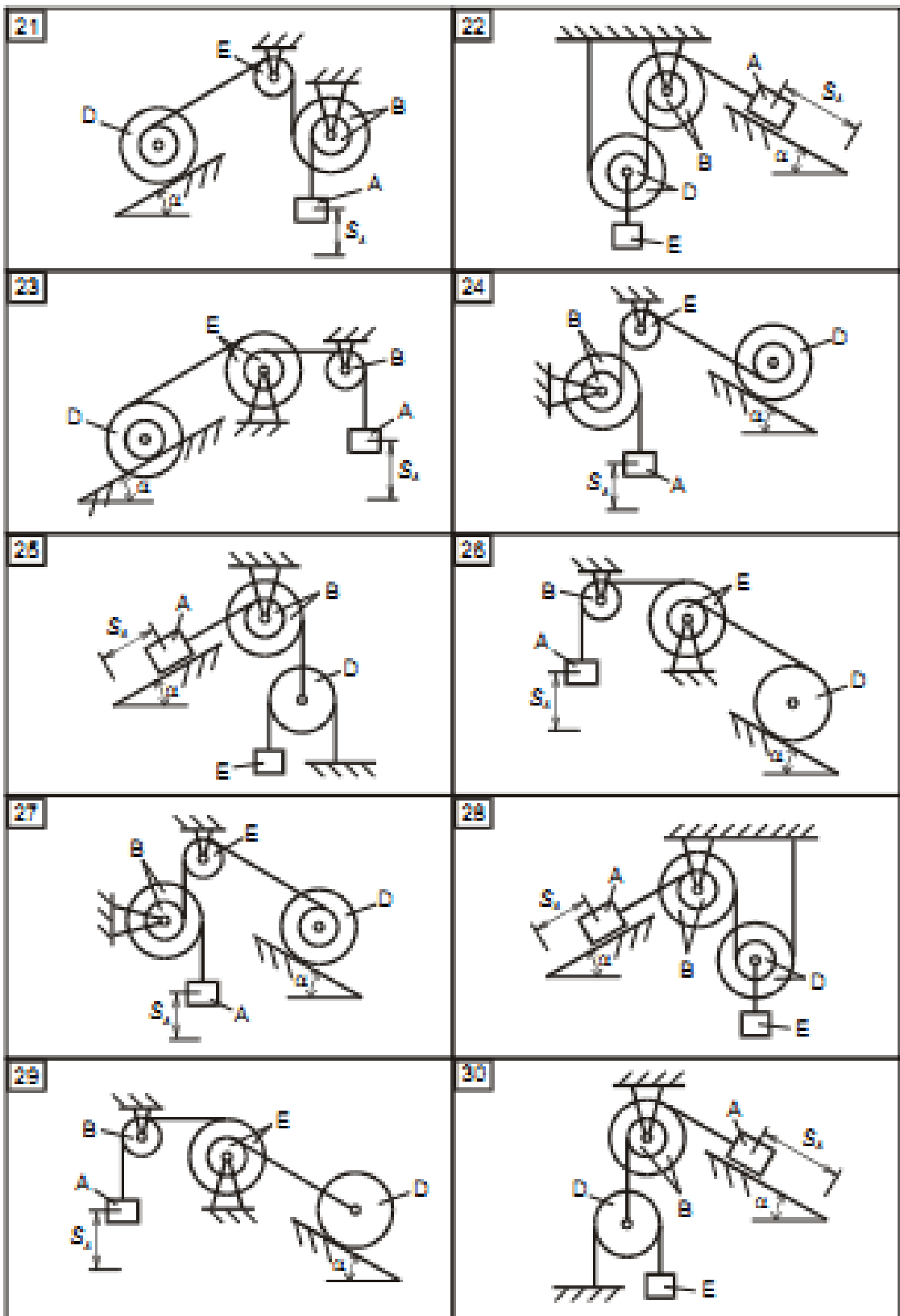


Рисунок 5.7

Вказівки:

1. Вибрати напрямок S_A, V_A та визначити швидкості й переміщення всіх тіл системи в залежності від S_A, V_A .
2. Обчислити кінетичну енергію системи.

3. Обчислити суму робіт всіх зовнішніх сил, що діють на систему.
4. Записати теорему про зміну кінетичної енергії системи.
5. Із отриманого співвідношення визначити швидкість тіла А.

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Як визначити кінетичну енергію точки та механічної системи?
2. Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла при поступальному, обертовому та плоскому руху?
3. Чому дорівнює робота сили тяжіння?
4. Чому дорівнює робота сили пружності?
5. Від чого залежить робота сили, прикладеної до тіла обертання?
6. Як визначити роботу сил опору?
7. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки?
8. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

ВИПРОБУВАННЯ СТАЛЕВОГО ЗРАЗКА НА РОЗТЯГ

Мета роботи: ознайомлення зі стандартними випробуваннями металів на розтяг; визначення основних механічних характеристик та найменування сталі за експериментально отриманою діаграмою розтягу.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Випробування на розтяг проводять у відповідності з ГОСТ 1497–84 «Металлы. Методы испытаний на растяжение» з метою визначення наступних характеристик їх механічних властивостей: межі пропорційності; модуля пружності; фізичної або умовної межі текучості; тимчасового опору; відносного видовження після розриву; відносного звуження поперечного перерізу після розриву.

Зразки для випробування

Для випробувань прокатної сталі на розтяг використовують стандартні циліндричні зразки з п'яти- або десятикратним співвідношенням розрахункової довжини L_0 до діаметра d_0 (рис. 6.1).

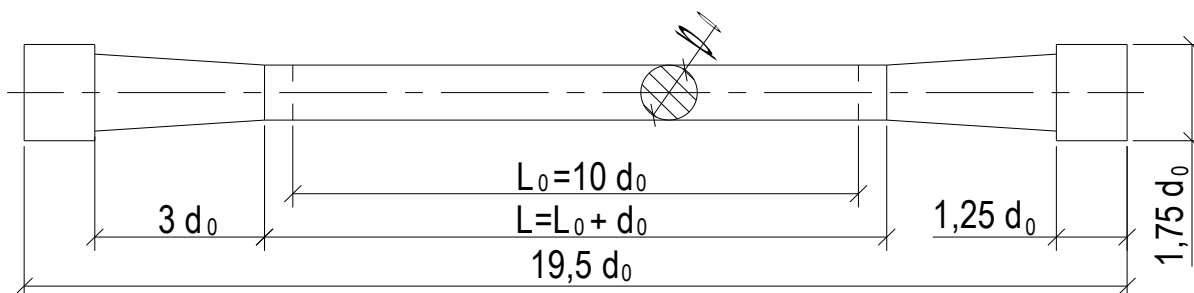


Рисунок 6.1 – Пропорційний циліндричний зразок

В захватах випробувальної машини зразок закріплюється за потовщені голівки (струбцини) на його кінцях. Руйнування зразка в межах розрахункової довжини L_0 забезпечується за рахунок перехідних конічних частин між голівками і циліндричною частиною. Для запобігання впливу цих потовщень на результати випробування довжина циліндричної частини зразка L робиться довшою за розрахункову L_0 на величину діаметра d_0 .

6.1 Машина для випробувань

Випробування проводять на гідравлічній розривній машині Р-10 з електронним керуванням, призначеній для статичних випробувань зразків на розтяг, стиск та згин (при відповідній комплектації). Кінематична схема машини типу Р показана на рис. 6.2.

Керування машиною здійснюється за допомогою комп'ютерної програми РМ-5, інтерфейс якої дозволяє відображати результати випробування на моніторі ЕОМ (6) у вигляді діаграми розтягу в режимі "абсолютна деформація-зусилля" або "відносна деформація-напруження". При перегляді раніше збереженого файлу можна змінювати крок сітки діаграми та відображати точки на діаграмі маркерами для найбільш точної обробки результатів.

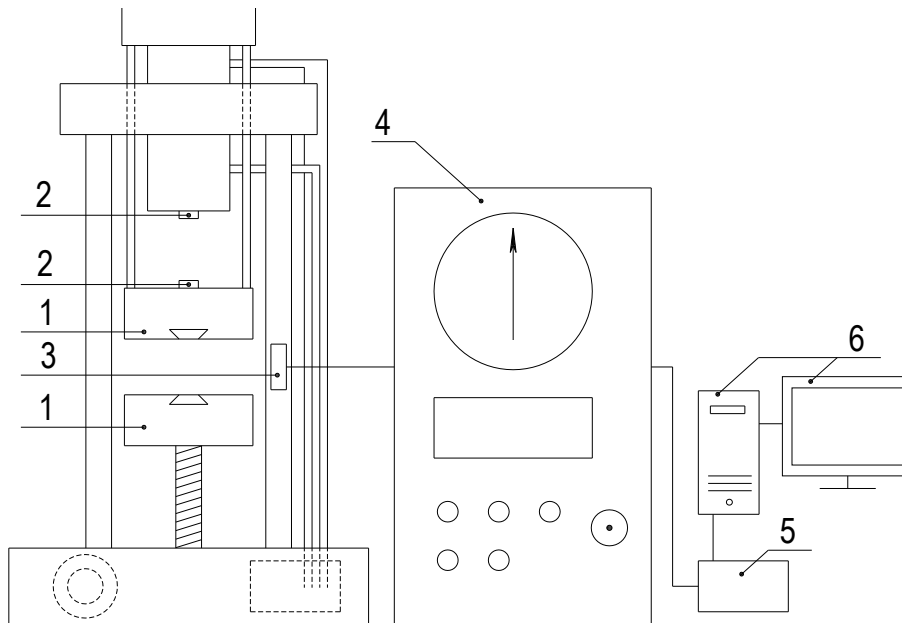


Рисунок 6.2 – Кінематична схема розривної машини Р-10

1 – платформи з захватами для кріплення зразка при випробуванні на розтяг; 2 – стискуючі циліндри для встановлення зразка при випробуванні на стиск; 3 – датчик введення даних для програми РМ-5; 4 – силовимірювальний блок з органами керування; 5 – блок керування універсальний; 6 – ЕОМ з установленою програмою РМ-5

6.3. Проведення випробувань

Перед початком випробування необхідно підготувати машину, виконуючи наступну послідовність дій:

- закріпити зразок в захватах для кріплення в нижній та верхній платформах (1) (для випробування на розтяг) або розташувати зразок між стискуючими циліндрами (2) (для випробування на стиск);
- увімкнути електроживлення машини;
- встановити стрілки силовимірювача (4) в нульове положення;
- увімкнути блок керування універсальний (5);
- створити файл поточного випробування.

Створення файлу поточного випробування включає:

- введення параметрів випробування (розтяг чи стиск) (рис. 6.3) та параметрів зразка, що випробовується (рис. 6.4);

- встановлення граничного зусилля, необхідного для проведення експерименту та швидкості переміщення верхньої платформи (задається обертанням штурвалу на силовимірному блоці (4)).

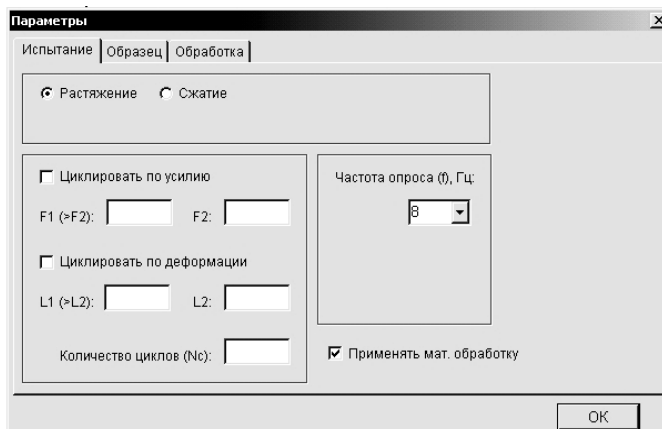


Рисунок 6.3 – Введення параметрів випробування

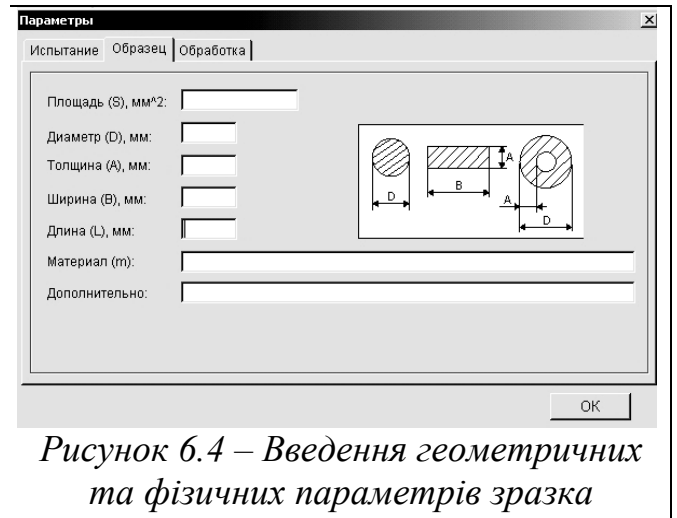


Рисунок 6.4 – Введення геометричних та фізичних параметрів зразка

Процес завантаження зразка відображається на моніторі у вигляді діаграми залежності видовження зразка від зусилля, прикладеного до нього (рис. 6.5). Після завершення випробування робочий файл необхідно зберегти для подальшої обробки результатів.

6.4 Обробка результатів випробування

Зображена на рис. 6.5 діаграма відтворює видовження зразка при зростанні навантаження. Оскільки абсолютне видовження зразка фіксується по переміщенню верхньої платформи машини, то на початковому етапі завантаження (ділянка О'А) діаграма окрім видовження відображає ущільнення зразка із захватами та незначне змінання поверхні струбцин. Для визначення початку відліку абсолютних видовжень прямолінійну ділянку АВ діаграми необхідно продовжити до перетину з віссю деформацій в точці 0 (рис. 6.5).

На початковій стадії навантаження характерна прямопропорційна залежність між зусиллям розтягу та подовженням зразка, що на діаграмі відображається прямолінійною ділянкою ОВ – зоною пропорційності. На цій стадії справедливий закон Гуку. За точкою В характер роботи матеріалу різко змінюється, діаграма викривляється і починається інтенсивне наростання залишкових пластичних деформацій без суттєвого збільшення величини навантаження, що відображається на діаграмі ділянкою С'С – площиною текучості.

Збільшення деформацій в зоні текучості відбувається за рахунок деформації проміжних шарів та мікросувів кристалів, площини зсуву яких співпадають з площинами найбільших дотичних напружень. При цьому кристали, напрямок максимальної міцності яких співпадає з напрямком дії сили, не втрачають здатність чинити опір навантаженню і крива діаграми починаючи з точки С піднімається до точки D, відображаючи зону зміцнення. На початковій стадії випробування зразка деформація рівномірно

розподіляється по його довжині. В момент, коли навантаження досягає максимуму (точка D на діаграмі), залишкова деформація стає локальною, концентруючись навколо найслабшої ділянки, і починається утворення шийки – місцевого звуження поперечного перерізу зразка. Внаслідок інтенсивного зменшення площі поперечного перерізу розтяг зразка відбувається при меншому навантаженні і на діаграмі з'являється спадаюча ділянка DK – *зона місцевої текучості*.

По характерних точках діаграми, записаної від силовимірювача та вимірювача деформацій розривної машини в координатах навантаження – абсолютне видовження ($P-\Delta l$), будується умовна діаграма розтягу в координатах напруження – відносне видовження ($\sigma-\varepsilon$). При цьому напруження визначається як відношення сили P до початкової площі поперечного перерізу зразка A_0 (площі поперечного перерізу робочої частини зразка до випробування):

$$\sigma = \frac{P}{A_0},$$

а відносні видовження – як відношення абсолютного видовження зразка Δl до початкової розрахункової довжини зразка l_0 :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Така діаграма розтягу є умовною, оскільки в зоні місцевої текучості при зменшенні навантаження фактичні напруження матеріалу в шийці (відношення сили до дійсної площі поперечного перерізу) постійно зростають за рахунок інтенсивного зменшення площі поперечного перерізу. За отриманою діаграмою визначаються механічні характеристики металу.

6.4.1 Характеристики міцності

Межа пропорційності – напруження, до якого зберігається пропорційна залежність між зусиллям та видовженням (напруженням та відносною деформацією) зразка.

Межа пропорційності визначається по діаграмі розтягу як напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між зусиллям та видовженням досягає такої величини, що тангенс кута нахилу дотичної до кривої «зусилля – видовження» в точці P_{nc} з віссю зусиль збільшується на 50% порівняно з лінійною ділянкою діаграми. Для визначення точки P_{nc} на діаграмі (Рис. 6.6.) на довільному рівні в межах прямолінійної ділянки ОВ проводять горизонтальну пряму eh . На цій прямій відкладають відрізок fh рівний половині відрізка ef . Через точку h та початок координат проводять пряму Oh і паралельно їй проводять дотичну pq до діаграми розтягу. Точка дотику (точка В) визначає шукане зусилля P_{nc} .

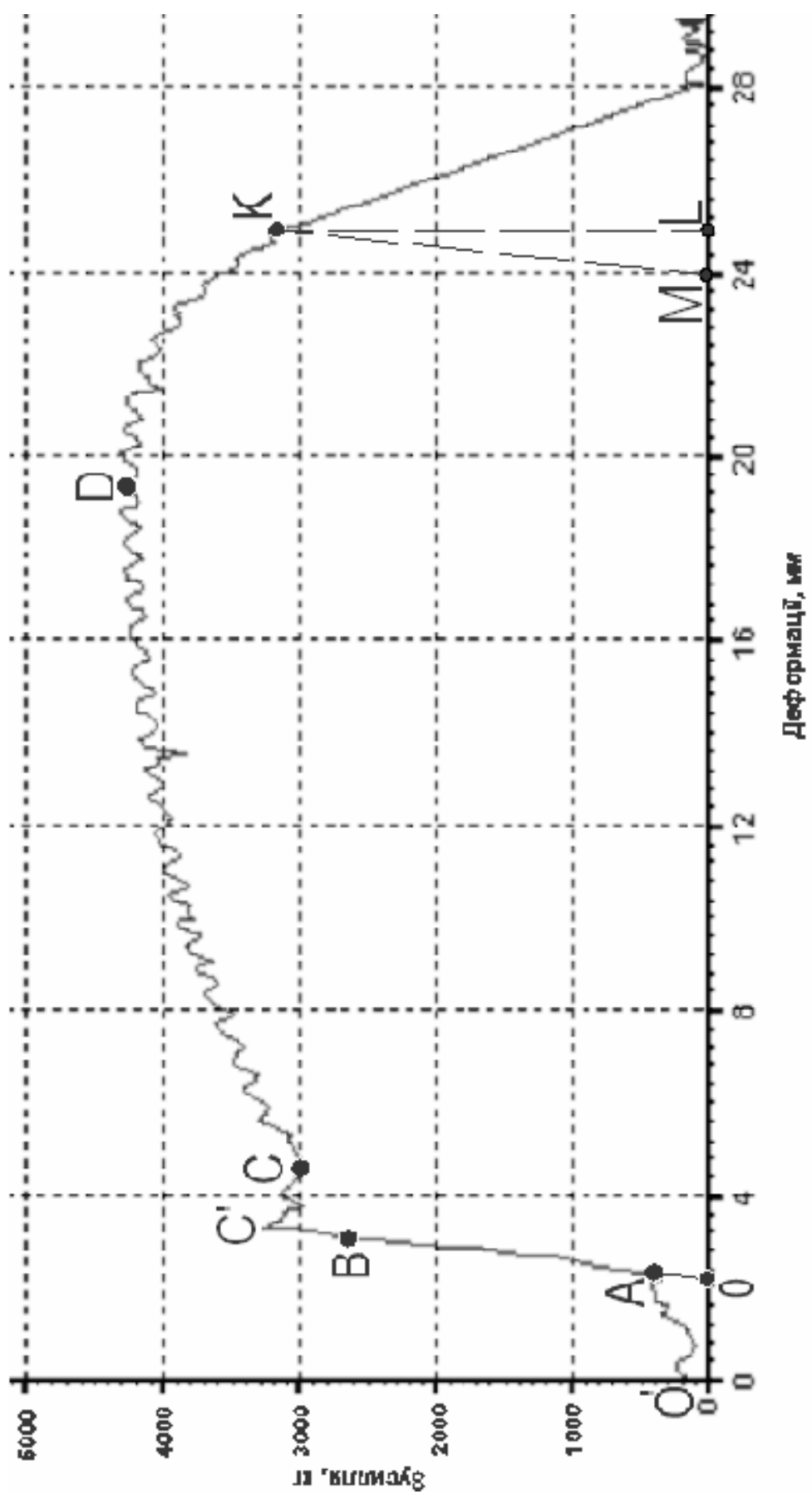


Рисунок 6.5 – Машинна діаграма розтягу

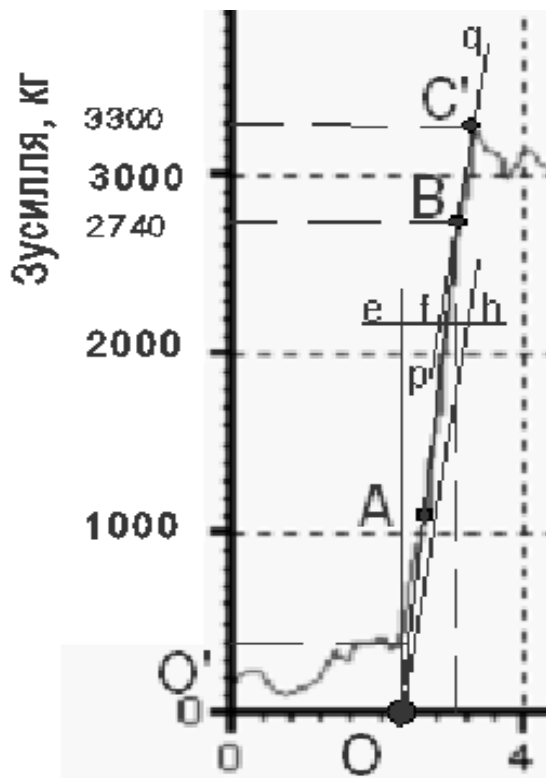


Рисунок – 6.6

Визначення зусиль, що відповідають фізичній σ_m , нижній $\sigma_{mн}$, верхній $\sigma_{mв}$ та умовній $\sigma_{0,2}$ межі текучості для найбільш характерних видів діаграм проілюстровано на рис. 6.7.

При відсутності на діаграмі площадки текучості (Рис. 6.7.д) визначається умовна межа текучості $\sigma_{0,2}$. Для цього визначають величину пластичної деформації з врахуванням встановленого допуску (0,2% від робочої довжини зразка L). Знайдену довжину збільшують пропорційно масштабу діаграми і відкладають по осі видовжень відрізок отриманої довжини OE. З точки E проводять пряму, паралельну OA. Точка перетину прямої з діаграмою відповідає зусиллю умовної межі текучості $P_{0,2}$.

Межа міцності (тимчасовий опір) – напруження, що відповідає максимальному зусиллю, яке сприймається зразком до руйнування.

6.4.2 Модуль пружності

Модуль пружності матеріалу визначається як відношення приросту напружень до відповідного приросту відносного видовження в межах пружної деформації.

$$E = \frac{\Delta P \cdot l_0}{A_0 \cdot \Delta l}$$

Різниця відліків навантаження ΔP та відповідних їм видовжень зразка Δl визначається на ділянці діаграми при значенні сили від 10 – 15% до 70 – 80% від межі пропорційності.

Межа текучості – напруження, при якому деформація зразка відбувається без помітної зміни навантаження.

Залежно від характеру діаграми розтягу розрізняють:

- межу текучості фізичну σ_m або нижню $\sigma_{mн}$ – найменше напруження, при якому зразок деформується без помітного збільшення зусилля розтягу;
- верхню межу текучості $\sigma_{mв}$ – напруження, що відповідає першому піку, зареєстрованому до початку текучості робочої частини зразка;
- умовну межу текучості з допуском на величину пластичної деформації при навантаженні $\sigma_{0,2}$ – напруження, при якому пластична деформація досягає 0,2% від робочої довжини зразка L .

6.4.3 Характеристики пластичності

В момент розриву повне видовження зразка дорівнює Δl (відрізок OL на діаграмі рис. 6.5) і складається з пружної деформації (визначається відрізком ML), яка зникає після розриву, та залишкового видовження (OM), яке визначає довжину зразка після руйнування. Виражені у відсотках відносно залишкове видовження та відносне звуження після розриву є характеристиками пластичності матеріалу.

Відносне залишкове видовження визначається як відношення приросту розрахункової довжини зразка після руйнування до початкової розрахункової довжини зразка:

$$\delta = \frac{(l_k - l_0)}{l_0} \cdot 100\%.$$

Приріст розрахункової довжини зразка після розриву визначається по діаграмі розтягу як довжина відрізка OM. Для цього з точки K проводять пряму, паралельну ділянці OB діаграми. Точка перетину цієї прямої з віссю деформацій і визначає положення точки M.

Відносне звуження після розриву – це відношення різниці початкової площі поперечного перерізу зразка A_0 та мінімальної площі поперечного перерізу після розриву A_k до початкової площі перерізу зразка:

$$\psi = \frac{(A_0 - A_k)}{A_0} \cdot 100\%.$$

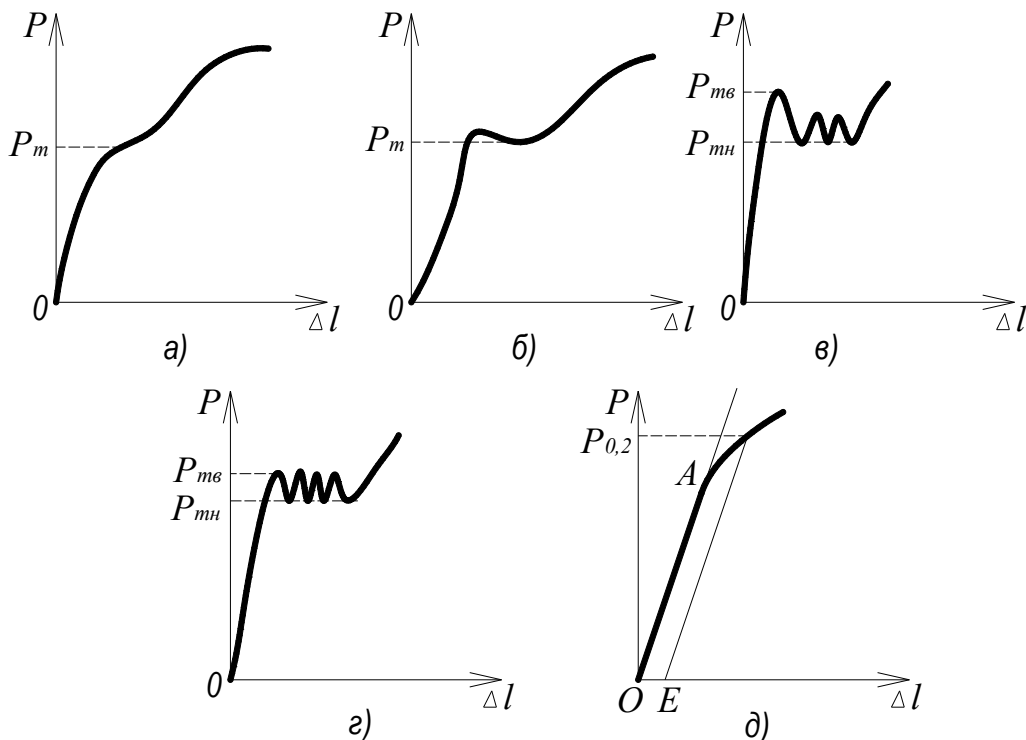


Рисунок 6.7 – Визначення зусиль P_m , P_{mn} , P_{mv} , $P_{0,2}$

Для визначення площі поперечного перерізу циліндричного зразка після розриву A_K заміряють мінімальний діаметр d_K по двох взаємно перпендикулярних напрямках. По середньому арифметичному цих двох значень обчислюють площу поперечного перерізу.

За отриманими характеристиками міцності та пластичності визначають найменування сталі у відповідності з ГОСТ 27772 – 88 «Прокат для строительных стальных конструкций» (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Механічні властивості прокату при розтязі

Сталь	Межа текучості σ_m ,	Тимчасовий опір σ_M ,	Відносне
	кгс/мм ² , (МПа)	кгс/мм ² , (МПа)	видовження
	для прокату товщиною до 10 мм включно		
	не менше		
C235	24 (240)	37 (370)	26
C245	25 (250)	38 (380)	25
C255	26 (260)	39 (390)	25
C275	28 (280)	40 (400)	24
C285	29 (290)	41 (410)	24
C345	35 (350)	50 (500)	21

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Яка мета роботи?
2. Які параметри характеризують міцність матеріалу?
3. Які параметри характеризують пластичність матеріалу?
4. Назвіть характерні точки діаграми розтягу.
5. Які деформації мають місце в процесі деформації зразка до руйнування?

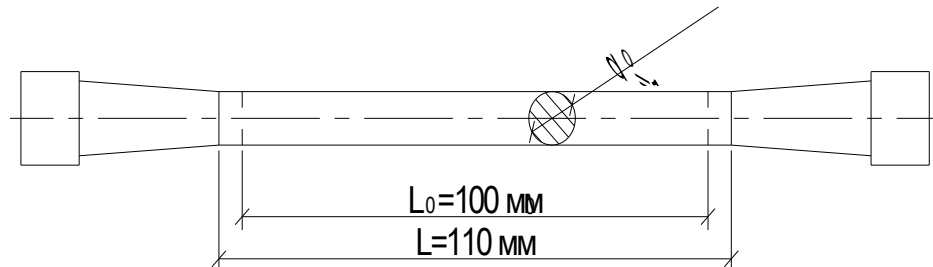
ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ 6

1. Випробувальна машина: *гідравлічна розривна машина P – 10.*

2. Ескізи та розміри зразка:

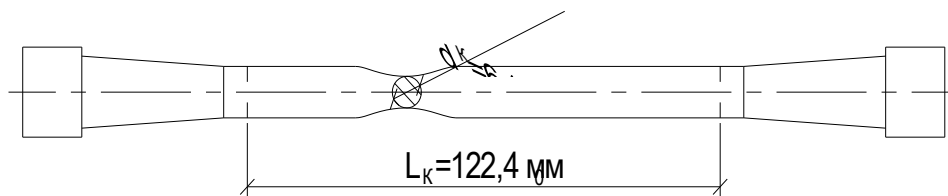
а) до випробування:

$d_0 = 10 \text{ мм}$; $L_0 = 100 \text{ мм}$; $A_0 = 78,54 \text{ мм}^2$.



б) після випробування:

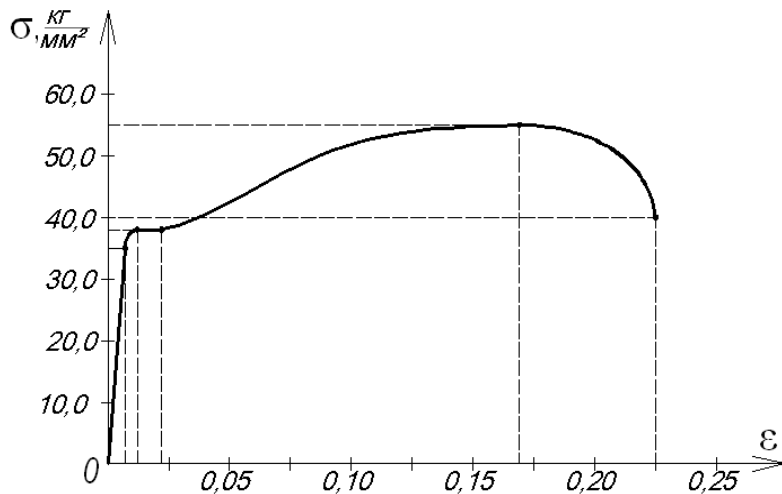
$d_k = 6,1 \text{ мм}$; $L_k = 122,4 \text{ мм}$; $A_k = 29,22 \text{ мм}^2$



3. Координати характерних точок діаграми розтягу:

№	Точка на діаграмі	Машинна діаграма розтягу в координатах $\Delta l - P$		Умовна діаграма розтягу в координатах $\varepsilon - \sigma$	
		$\Delta l, \text{ мм}$	$P, \text{ кг}$	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0}$	$\sigma = \frac{P}{A_0}, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$
1	Закінчення прямолінійної ділянки	0,7	2740	0,007	34,5
2	Початок площадки текучості	0,8	3300	0,008	42,0
3	Закінчення площадки текучості	2,2	3000	0,022	38,0
4	При найбільшому зусиллі розтягу	16,9	4300	0,169	54,5
5	Розрив	22,4	3180	0,224	40,5

4. Умовна діаграма розтягу



5. Механічні характеристики:

– межа пропорційності: $\sigma_{пц} = \frac{2740}{78,54} = 34,5 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 345 \text{ МПа} ;$

– межа текучості: $\sigma_{тн} = \frac{3000}{78,54} = 38 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 380 \text{ МПа} ;$

– межа міцності: $\sigma_{м} = \frac{4300}{78,54} = 54,5 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 545 \text{ МПа} .$

6. Напруження при розриві:

– умовне: $\sigma_p = \frac{3180}{78,54} = 40,5 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 405 \text{ МПа} ;$

– фактичне: $\sigma_{p, \text{факт}} = \frac{3180}{29,22} = 109 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} = 1090 \text{ МПа} .$

7. Модуль пружності матеріалу:

$(0,1 - 0,15) \cdot P_{пц} = 400 \text{ кг} \rightarrow \Delta l = 0,01 \text{ мм}$

$(0,7 - 0,8) \cdot P_{пц} = 2200 \text{ кг} \rightarrow \Delta l = 0,12 \text{ мм}$

$$E = \frac{\Delta P \cdot l_0}{\Delta l \cdot A_0} = \frac{(2200 - 400) \cdot 100}{(0,12 - 0,01) \cdot 78,54} = 2,08 \times 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \approx 200 \text{ ГПа}$$

8. Характеристики пластичності:

- відносне залишкове видовження $\delta = \frac{122,4 - 100}{100} \cdot 100\% = 22,4 \%$

- відносне залишкове звуження площі поперечного перерізу:

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\% = \frac{78,54 - 29,22}{78,54} \cdot 100\% = 63\% .$$

Висновки.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7

ВИПРОБУВАННЯ ДЕРЕВИНИ НА СКОЛЮВАННЯ ТА СТИСК

Мета роботи: ознайомлення зі стандартними випробуваннями деревини на сколювання вздовж волокон та на стиск по напрямку осей анізотропії. Визначення межі міцності для цих видів навантаження.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Деревина, яка є анізотропним матеріалом, має різні механічні характеристики в залежності від напрямку навантаження по відношенню до напрямку волокон. Виділяється три напрямки анізотропії: вздовж волокон, радіальний (перпендикулярно річним кільцям) і тангенціальний (дотично до річних кілець).

Випробування деревини проводять у відповідності з наступними нормативними документами: ГОСТ 16483.5 – 73* «Деревесина. Метод определения предела прочности при скальвании вдоль волокон»; ГОСТ 16483.10 – 73* «Деревесина. Метод определения предела прочности при сжатии вдоль волокон»; ГОСТ 16483.11 – 72* «Деревесина. Метод определения условного предела прочности при сжатии поперек волокон».

7.1. Зразки для випробування

Випробування на сколювання проводять по радіальній і тангенціальній площинах на зразках, форма і розміри яких повинні відповідати рис. 7.1, а. На стиск по трьох напрямках анізотропії випробовують зразки в формі прямокутної призми рис. 7.1, б.

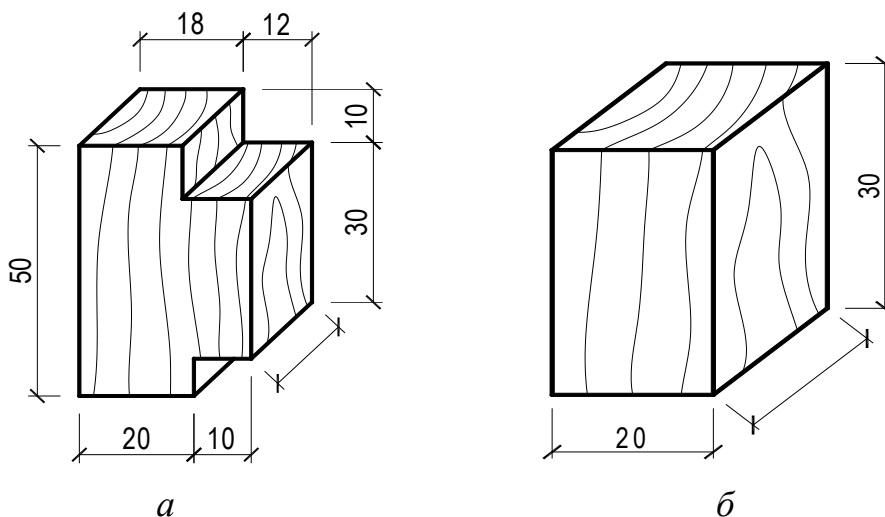


Рисунок 7.1 – Форма та розміри зразків для випробувань деревини:
а – на сколювання по тангенціальній площині; б – на стиск вздовж та впоперек волокон

7.2 Проведення випробувань

Розміри робочих площадок зразків міряють на середині довжини граней штангенциркулем з точністю до 0,1 мм.

Випробування проводять на гідравлічній розривній машині Р-10 (рис. 7.2). Зразки встановлюють на нижній циліндр 2 і піднімають платформу 1 так, щоб зразок доторкнувся до верхнього вирівнюючого циліндра. Після цього зразок рівномірно навантажують до руйнування. Швидкість навантаження (підйому верхньої платформи) повинна бути такою, щоб зразок зруйнувався через $1,0 \pm 0,5$ хв. після початку завантаження. Максимальне навантаження визначають по шкалі силовимірювального блоку 4 або за діаграмою стиску, отриманій за допомогою програми РМ-5. Значення руйнуючої сили визначається з точністю до 1%.

Для випробування на сколювання зразок закріплюється в спеціальному реверсному пристосуванні, що змінює напрямок сили. Реверсний пристрій та його застосування показано на рис. 3.2.

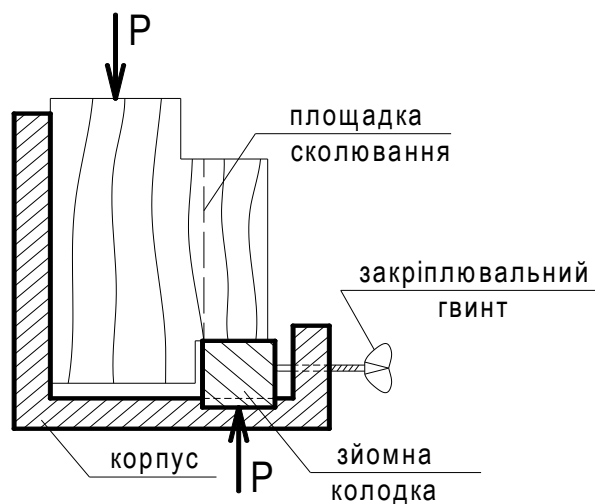


Рисунок 7.2 – Реверсне пристосування

Руйнування при сколюванні відбувається у вигляді відділення виступаючої частини зразка. Робочою в цьому випадку буде площадка, по якій відбувається сколювання.

При випробуванні на стиск зразки (рис. 7.1, б) розташовуються в залежності від напрямку стиску:

1) стиск вздовж волокон (рис. 7.3, а).

Руйнування характерне змінанням опорних граней зразка, появою поперечних складок, а іноді і поздовжніх тріщин;

2) радіальний стиск (рис. 7.3, б).

При стиску перпендикулярно річним кільцям в певний момент наступає явище, аналогічне текучості – висота зразка помітно зменшується при малому зростанні сили. Це відбувається за рахунок руйнування весняних (більш слабких) шарів деревини. В подальшому починається пресування зразка і сила необмежено зростає. Умовно моментом руйнування вважається втрата зразком 30% своєї початкової висоти.

3) тангенціальний стиск (рис. 7.3, в).

Стиск по дотичній до річних кілець теж закінчується пресуванням, але руйнування зразка може бути помічене за появою тріщин і розшаруванням.

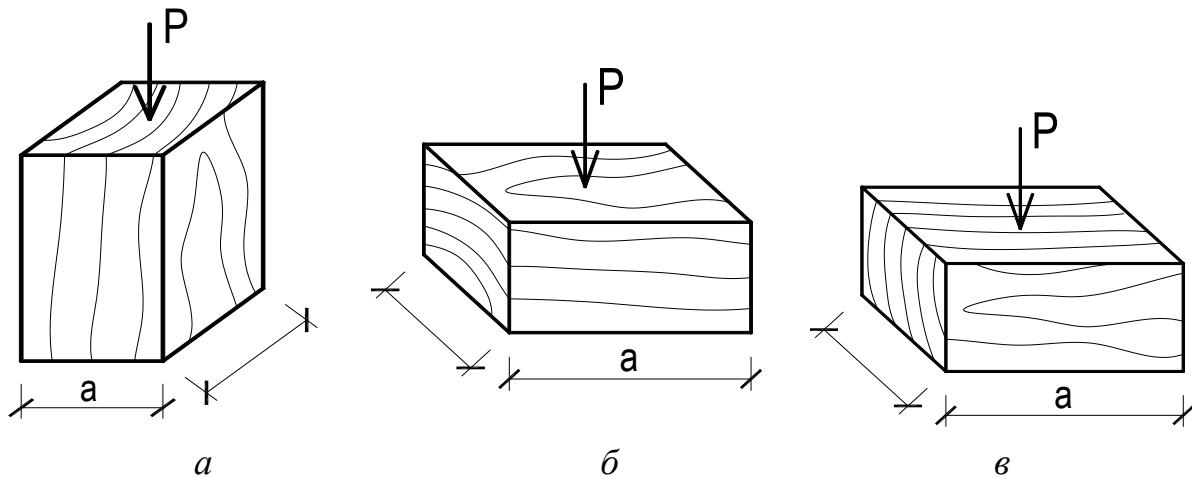


Рисунок 7.3 – Випробування зразків на стиск:

a – стиск вздовж волокон; *б* – радіальний стиск; *в* – тангенціальний стиск

7.3. Обробка результатів випробування

Межу міцності деревини при стиску визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{P_{\max}}{a \cdot b},$$

де P_{\max} – максимальне навантаження або навантаження, що відповідає умовній межі міцності; a , b – розміри робочої площі зразка.

Межу міцності деревини при сколюванні визначають за формулою:

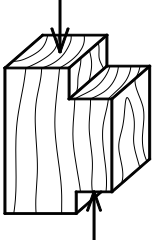
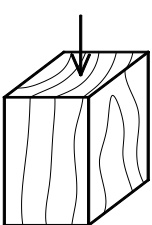
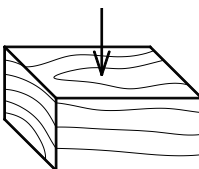
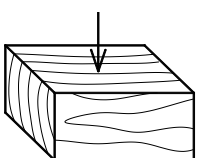
$$\tau = \frac{P_{\max}}{b \cdot l},$$

де b , l – ширина зразка та довжина площадки сколювання.

Значення межі міцності при стиску вздовж волокон необхідно округлювати до 0,5 кПа, в усіх інших випадках до 0,1 кПа.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ 7

1. Випробувальна машина: *гідравлічна розривна машина Р-10.*
2. Деревина: *сосна.*
3. Таблиця спостережень

Вид випробування	Сколювання вздовж волокон	Стиск		
		вздовж волокон	радіальний	танген- ціальний
Стандартний зразок і схема його завантаження				
Розміри робочої площі, мм	20×30	20×20	20×30	20×30
Робоча площа, мм ²	600	400	600	600
Руйнуюче навантаження, кг	263	2867	293	311
Межа міцності, $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	0,44	7,17	0,49	0,52
Межа міцності, МПа	4,38	71,65	4,88	5,18

Висновки

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Як розташована площина сколу відносно річних кілець деревини?
2. Як визначають площу сколу зразка?
3. Як визначають межу міцності деревини на скіл?
4. Які види випробувань проводять при стиску деревини?
5. Як визначають межу міцності деревини при стиску?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8

ВИПРОБУВАННЯ НА КРУЧЕННЯ ЗРАЗКІВ ПЛАСТИЧНОГО ТА КРИХКОГО МАТЕРІАЛІВ

Мета роботи: Порівняльне вивчення процесу руйнування та знаходження механічних характеристик сталевих та чавунних зразків при крученні.

Методичні рекомендації до виконання роботи

При крученні форма зразків майже не змінюється, що дозволяє достатньо точно знайти деформацію та відповідні напруження до моменту руйнування зразка включно.

Матеріал скручуваного стержня знаходиться в умовах складного (плоского) напруженого стану, причому по площадках, перпендикулярних та паралельних осі стержня виникають тільки дотичні напруження, а на площадках, похилених до осі стержня на кут 45° - тільки нормальні напруження (рис. 8.1).

Оскільки різні матеріали здатні чинити різний опір розтягу чи зсуву, можна чекати, що процес руйнування зразків із різних матеріалів при крученні буде проходити неоднаково, що легко встановити по виду руйнування, а саме:

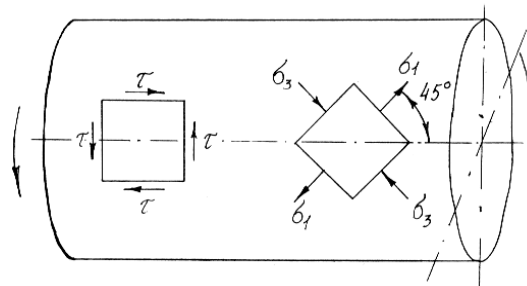


Рисунок 8.1

а) якщо переріз в місті руйнування перпендикулярний осі стержня, руйнування відбулося від зрізу (у пластичних матеріалів рис. 8. 2, а);

б) якщо руйнування відбулося по гвинтовій лінії - руйнування від розриву (крихкий матеріал, рис. 8. 2, б).

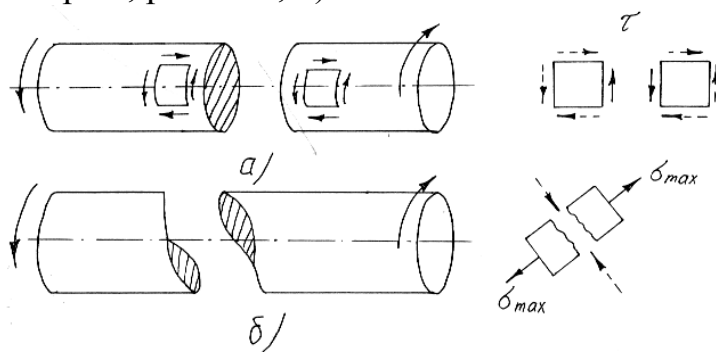


Рисунок 8.2

Величина границі пропорційності при крученні знаходиться за формулою

$$\tau_{nc} = \frac{T_{nc}}{W_P}, \quad (8.1)$$

де T_{nc} – крутний момент, відповідний границі пропорційності матеріалу;
 W_P – полярний момент опору перерізу зразка:

$$W_P = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (8.2)$$

Кут закручування, відповідний моменту, визначається за формулою

$$\varphi_{nc} = \frac{T_{nc} \cdot l}{G \cdot I_P}, \quad (8.3)$$

де l – довжина зразка; G – модуль пружності при крученні; I_P – полярний момент площі перерізу зразка:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} \quad (8.4)$$

Величина границі міцності при крученні не може бути точно знайдена. В теорії пластичності пропонується приблизна формула для знаходження границі міцності при крученні

$$\tau_{ек} = \frac{3T_{ен}}{4W_P}, \quad (8.5)$$

де $T_{ен}$ – крутний момент, відповідний границі міцності.

Оскільки лінія діаграми мало відхиляється від прямої, для чавуна приблизно можна рахувати, за формулою

$$\tau_{ен} = \frac{T_{ен}}{W_P}. \quad (8.6)$$

Робота виконується на машині КМ-50-1.

Порядок виконання роботи

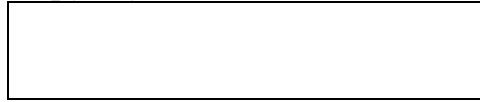
1. Накреслити ескіз зразка до руйнування.
2. Виміряти діаметр і довжину робочої частини зразку.
3. Встановити зразок в машину КМ-50-1 і виконати його скручування до руйнування.
4. Дістати зразок з машини, познайомитися з характером руйнування і зробити ескіз зразка після руйнування. Виміряти діаметр і довжину робочої частини зразка після руйнування,
5. Накреслити у звіті діаграму скручування.
6. Повторити операції пп. 1-5 для зразка іншого матеріалу.
7. Обчислити розрахункові характеристики матеріалу, результати

обчислень занести в таблицю звіту.

8. Результати досліджень занести в таблицю звіту.

Обробка результатів вимірювань

1. Ескіз зразка до руйнування

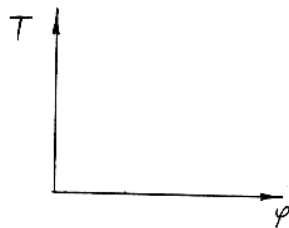


2. Характер руйнування

Ескіз зразка після руйнування



3. Діаграма кручення



4. Результати досліджень

Матеріал	Діаметр і довжина, мм				$W_P, \text{мм}^3$	Момент, Н мм		Напруження МПа		Примітка
	до руйнування		після руйнування			$T_{пц}$	$T_{вк}$	$\tau_{пц}$	$\tau_{вк}$	
	d_0	l_0	d_1	l_1						
Сталь										
Чавун										

5. Висновки

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Які напруження діють при крученні і як розподіляються по перерізу?
2. Як знаходяться напруження при крученні?
3. Як ведеться розрахунок на міцність при крученні?
4. Як знаходиться кут закручування при крученні?
5. За якими формулами визначають полярний момент інерції I_P і полярний момент опору W_P для площини кола?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК БРУСА НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ

Мета роботи: Дослідити напружений стан бруса при крученні. Визначити значення невідомого врівноважувального моменту T_0 . Визначити крутні моменти в перерізах бруса, побудувати епюру крутних моментів в перерізах бруса. З умови міцності визначити необхідні діаметри бруса на всіх його ділянках. Підібрати діаметри бруса з умови жорсткості. Виконати аналіз раціонального підбору діаметрів бруса. Визначити кути повороту поперечних перерізів ділянок бруса, побудувати епюру абсолютних та відносних кутів закручення перерізів бруса.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, якщо в поперечних перерізах бруса, під дією зовнішнього моменту виникає тільки один силовий фактор – крутний момент сил пружності M_k , то брус отримує деформацію кручення. Момент сил пружності та його напрям визначають в залежності від дії зовнішніх моментів за допомогою методу перерізів:

– крутний момент в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх обертових моментів, які прикладені до бруса по один бік від дослідного перерізу;

– крутний момент перерізу вважається додатним, якщо при погляді на відсічену частину з боку зовнішньої нормалі до перерізу, рівнодійний момент зовнішніх обертових моментів направлений проти годинникової стрілки.

Для розрахунку бруса (вала) на міцність та жорсткість при крученні необхідно знати закон зміни крутних моментів по всій його довжині.

Графічне зображення зміни крутних моментів вздовж осі бруса називають *епюра крутних моментів*.

Умова міцності при крученні має вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (9.1)$$

де M_k – крутний момент в небезпечному перерізі вала, Нм; $[\tau]$, τ_{\max} – розрахункові та допустимі дотичні напруження при крученні, Па; W_p – полярний момент опору перерізу, м³.

Знак дотичного напруження визначається знаком крутного моменту пружних сил M_k .

Жорсткість бруса (вала) визначається кутом закручення перерізу. Кут повороту одного перерізу відносно іншого називається абсолютним кутом закручення. Абсолютний кут закручення довільної ділянки вала визначається по формулі:

$$\varphi_i = \frac{M_{ki} \cdot l_i}{G_i \cdot J_{pi}}, \quad (9.2)$$

де M_{ki} – крутний момент на довільній ділянці, Н·м; l_i – довжина цієї ділянки, м; G_i – модуль пружності другого роду (модуль зсуву), Па; J_{pi} – полярний момент інерції перерізу на ділянці вала, м⁴.

Відносний кут закручення довільної ділянки вала визначається по формулі:

$$\Theta = \frac{\varphi_i}{l_i} = \frac{M_i}{G_i \cdot J_{pi}}. \quad (9.3)$$

Знаки абсолютних та відносних кутів закручення визначаються знаком крутного моменту.

По значенням відносних кутів закручення будується еюра кутів θ_i .

Тоді умова жорсткості при крученні буде мати вид

$$\Theta = \frac{M_{kmax}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta], \quad (9.4)$$

де $[\Theta]$ – допустимий відносний кут закручення.

При визначенні необхідного діаметра вала круглого перерізу на кожній ділянці з обчислених двох значень приймається більше і приводиться у відповідність з СТ СЭВ 514-77.

Знаючи обчислені кути закручення перерізі, які знаходяться на границях кожної з ділянок, можна побудувати епюру кутів закручення, яка представляє собою графічне зображення зміни кутів повороту перерізу вздовж осі відносно нерухомого (закріпленого) перерізу.

Приклад дослідження та розрахунку суцільного однорідного вала круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні.

Суцільний однорідний вал круглого перерізу з конструктивними розмірами $l_1 = 0,9$ м, $l_2 = 1,4$ м, $l_3 = 0,6$ м, $l_4 = 0,7$ м, навантажений зовнішніми обертовими моментами $T_1 = 570$ Н·м, $T_2 = 190$ Н·м, $T_3 = 640$ Н·м, $T_4 = 780$ Н·м і врівноважу вальним моментом T_0 . Матеріал бруса – вуглецева сталь; допустиме дотичне напруження $[\tau] = 80$ МПа, допустимий відносний кут закручення $[\theta] = 0,028$ рад/м.

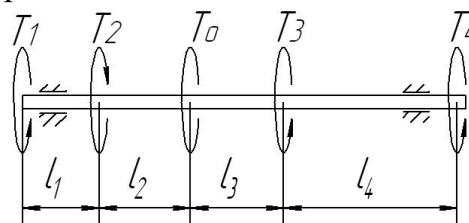


Рисунок 9.1

2. Визначення врівноважувального моменту.

Під дією зовнішніх обертових моментів вал знаходиться в рівновазі. Заданося напрямом дії врівноважу вального моменту T_0 (рис. 9.1).

Тоді з умов рівноваги можна визначити значення врівноважувального моменту та напрям його дії.

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 + T_3 + T_4 = 0.$$

$$\text{Звідси } T_0 = T_1 - T_2 + T_3 + T_4 = 570 - 1900 + 640 + 780 = 1800 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Додатне значення моменту T_0 свідчить про те, що попередньо обраний його напрям співпадає з дійсним напрямом.

2. Визначення крутних моментів та побудова їх епюри.

Вал, який розглядається, має чотири ділянки. Для визначення внутрішніх силових факторів – крутних моментів скористуємось методом перерізів. Для цього подумки розсічемо вал на чотири ділянки. В місцях розрізу вкажемо крутні моменти, що виникають в перерізах (рис.9.2.2).

Для обчислення значення крутних моментів будемо складати рівняння рівноваги.

Ділянка I: $0 \leq z_1 \leq l_1$ або $0 \leq z_1 \leq 0,9 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - M_K^I = 0, \quad M_K^I = T_1 = 570 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

Ділянка II: $0 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$ або $0 \leq z_2 \leq 2,3 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - M_K^{II} = 0, \quad M_K^{II} = T_1 - T_2 = 570 - 190 = 380 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

Ділянка III: $0 \leq z_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$ або $0 \leq z_3 \leq 2,9 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 - M_K^{III} = 0,$$

$$M_K^{III} = T_1 - T_2 - T_0 = 570 - 190 - 1800 = -1420 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

Ділянка IV: $0 \leq z_4 \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ або $0 \leq z_4 \leq 3,6 \text{ м}$

$$\sum M_{Az} = 0, \quad T_1 - T_2 - T_0 + T_3 - M_K^{IV} = 0,$$

$$M_K^{IV} = T_1 - T_2 - T_0 + T_3 = 570 - 190 - 1800 + 640 = -780 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

За отриманими значеннями крутильних моментів M_K будуюмо їх епюру (рис. 5.2.3).

3. Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови міцності.

Умова міцності при крученні має вид: $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau]$.

Для суцільного однорідного вала круглого перерізу полярний момент опору перерізу визначається по формулі: $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Для заданого матеріалу вала – вуглецева сталь, допустиме дотичне напруження становить $[\tau] = 80 \text{ ГПа} = 80 \cdot 10^9 \text{ Па}$ (додаток Б, табл.2).

Тоді з врахуванням останнього, з умови міцності діаметр вала обчислюємо по формулі: $d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi \cdot [\tau]}}$.

Визначаємо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

$$\text{Ділянка I: } d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}^I}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 33,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}^{II}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}^{III}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 44,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\kappa}^{IV}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9}} = 36,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

4. *Визначення діаметрів вала на кожній ділянці з умови жорсткості*

Умова жорсткості при крученні має вид: $\Theta = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{G \cdot J_p} \leq [\Theta]$.

Полярний момент інерції перерізу J_{pi} на ділянці суцільного однорідного вала круглого перерізу визначається по формулі: $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Тоді з врахуванням останнього з умови жорсткості діаметр вала обчислюємо по формулі: $d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}}$.

Визначимо потрібні діаметри вала на всіх ділянках.

$$\text{Ділянка I: } d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^I}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 570}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 40,1 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка II: } d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^{II}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 380}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 36,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка III: } d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^{III}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1420}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 50,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{Ділянка IV: } d_4 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\kappa}^{IV}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 780}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,028}} = 43,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Потрібні діаметри вала на кожній ділянці, знайдені з умови жорсткості більші, ніж відповідні, що визначені з умови міцності при крученні. Приймаємо більші значення діаметрів вала.

Відповідно до СТ СЭВ 514-77 (ряд *Ra40*) необхідно прийняти стандартні значення діаметрів вала на ділянках:

$d_1 = 0,042 \text{ м} = 42 \text{ мм}; d_2 = 0,038 \text{ м} = 38 \text{ мм}; d_3 = 0,05 \text{ м} = 50 \text{ мм}; d_4 = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм}.$

5. *Визначення абсолютних та відносних кутів повороту поперечних перерізів ділянок вала.*

При дослідженні вала на жорсткість при крученні визначають кути закручення перерізів вала. По формулам обчислимо абсолютні та відносні кути закручення перерізів на кожній ділянці вала.

Ділянка I:

$$\varphi_1 = \frac{M_K^I \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} = \frac{M_K^I \cdot l_1 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 0,9 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,021 \text{ рад},$$

$$\Theta_1 = \frac{M_i}{G_i \cdot J_{pi}} = \frac{M_K^I \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{570 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,042^4} = 0,023 \text{ рад/м}.$$

Ділянка II:

$$\varphi_2 = \frac{M_K^{II} \cdot l_2}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_K^{II} \cdot l_2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 1,4 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,033 \text{ рад},$$

$$\Theta_2 = \frac{M_K^{II}}{G \cdot J_{p2}} = \frac{M_K^{II} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{380 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,038^4} = 0,024 \text{ рад/м}.$$

Ділянка III:

$$\varphi_3 = \frac{M_K^{III} \cdot l_3}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_K^{III} \cdot l_3 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 0,6 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,05^4} = -0,014 \text{ рад},$$

$$\Theta_3 = \frac{M_K^{III}}{G \cdot J_{p3}} = \frac{M_K^{III} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_3^4} = \frac{-1420 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,05^4} = -0,023 \text{ рад/м}.$$

Ділянка IV:

$$\varphi_4 = \frac{M_K^{IV} \cdot l_2}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_K^{IV} \cdot l_2 \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 0,7 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,017 \text{ рад},$$

$$\Theta_4 = \frac{M_K^{IV}}{G \cdot J_{p4}} = \frac{M_K^{IV} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d_4^4} = \frac{-780 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,045^4} = -0,024 \text{ рад/м}.$$

Аналізуючи отримані значення відносних кутів закручення встановлюємо, що умова жорсткості вала виконується: $\Theta_{max} \leq [\Theta]$, тобто $0,024 \text{ рад/м} \leq 0,028 \text{ рад/м}$.

Визначимо абсолютні кути повороту перерізів в граничних точках В, С, D, E відносно умовно нерухомого перерізу А:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_1 = 0,021 \text{ рад};$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,021 + 0,033 = 0,054 \text{ рад};$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,021 + 0,033 - 0,014 = 0,040 \text{ рад};$$

$$\varphi_{E-A} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,021 + 0,033 - 0,014 - 0,017 = 0,023 \text{ рад}.$$

Отримані значення ординат відкладаються в обраному масштабі відповідно перерізів і їх кінцівки послідовно з'єднуються прямими лініями. Отримані графічні зображення є епюрами кутових переміщень (рис.9.2.4) і відносних кутів закручення (рис. 9.2.5).

Завдання до виконання роботи

Виконати дослідження та розрахунок суцільного вала круглого перерізу на міцність та жорсткість при крученні. Вихідні дані до дослідження надані в таблицях 9.1 і 9.2.

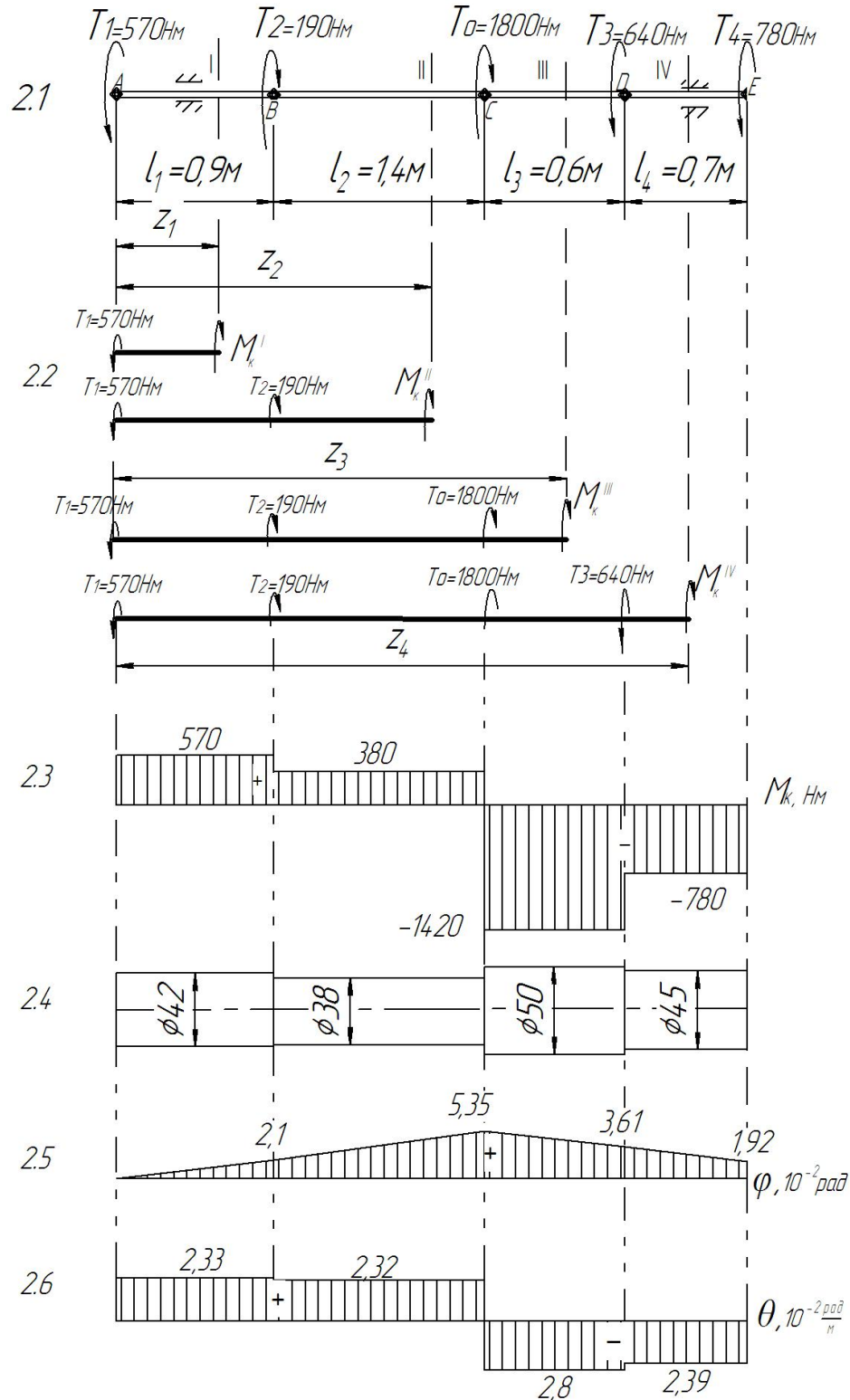


Рисунок 9.2 – Дослідження валу на міцність та жорсткість при крученні

Зміст звіту

1. Аналіз схеми навантаження вала.
2. Визначення чисельного значення та напрямку невідомого рівноважувального моменту T_0 .
3. Визначення крутних моментів в перерізах вала та побудовання епюри крутних моментів M_k .
4. Визначення необхідних діаметрів вала на кожній ділянці з умови міцності при крученні.
5. Визначення необхідних діаметрів вала на кожній ділянці з умови жорсткості. Остаточний висновок про розміри діаметрів на ділянках вала.
6. Розрахунок абсолютних та відносних кутів закручення вала та побудова їх епюри.
7. Визначення переміщення перерізів валу.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані до розрахунку вала при крученні

Букви прізвища	Номер схеми	Зовнішні моменти, Нм				Розміри вала, м				[τ], МПа	[θ], рад/м
		T_1	T_2	T_3	T_4	l_1	l_2	l_3	l_4		
А, Б, В	1	100	100	110	210	0,4	0,5	0,1	0,7	10	0,02
Г, І, Д	2	200	200	120	220	0,5	0,6	0,2	0,8	20	0,022
Е, Ж, З,	3	300	300	130	230	0,6	0,7	0,3	0,9	30	0,024
І, Ї, К	4	400	400	140	240	0,7	0,8	0,4	1,0	40	0,025
Л, М, Н	5	500	500	150	250	0,8	0,9	0,5	0,4	50	0,028
О, П, Р	6	600	600	160	260	0,9	1,0	0,6	0,5	60	0,03
С, Т, У	7	700	700	170	270	1,0	1,1	0,7	0,6	70	0,032
Ф, Х, Ц	8	800	800	180	280	0,9	1,2	0,8	0,7	80	0,034
Ч, Ш, Щ,	9	900	900	190	290	0,8	1,3	0,9	0,8	90	0,035
Є, Ю, Я	0	1000	1000	200	300	0,7	1,4	1,0	0,9	100	0,025
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь.

Наприклад: І В А Н Ч Е Н К О В

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

З таблиці обираємо: схема 4, $T_1=100\text{Нм}$, $T_2=100\text{Нм}$, $T_3=150\text{Нм}$, $T_4=290\text{Нм}$,
 $l_1=0,6\text{м}$, $l_2=0,9\text{м}$, $l_3=0,4\text{м}$, $l_4=0,5\text{м}$, $[\tau]=10\text{МПа}$,

$[\theta]=0,02\text{рад/м}$.

Таблиця 9.2 – Схеми навантаження вала

<p>①</p>	<p>⑥</p>
<p>②</p>	<p>⑦</p>
<p>③</p>	<p>⑧</p>
<p>④</p>	<p>⑨</p>
<p>⑤</p>	<p>⑩</p>

Питання до захисту лабораторної роботи

1. При якому навантаженні прями́й брус отримує деформацію кручення?
2. Що представляє собою еюра крутильних моментів і як вона будується? Для чого вона потрібна?
3. Як записується умова міцності при крученні?
4. Що представляє собою еюра напружень при крученні вала?
5. Що розуміють під жорсткістю вала при крученні?
6. Що розуміють під абсолютним та відносним кутом закручення вала?
7. Як записується умова жорсткості при крученні?
8. Що представляє собою еюра кутів закручення і як вона будується?
9. Що таке відносний кут закручення? Чи має сенс поняття сумарного відносного кутів закручення для ступінчатого вала?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЇ БАЛКИ ПРИ ЗГІНІ

Мета роботи: експериментальне визначення прогинів і кутів повороту перерізів балки та порівняння їх з теоретичними значеннями.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Аналітичним шляхом деформації балок визначають одним з методів: шляхом безпосереднього інтегрування, методом начальних параметрів Мора або Верещагіна.

Для простої балки, яка навантажена зосередженою силою F на відстані a від опори В (рис. 10.1), прогин в будь-якому переріз D (на відстані a від опори В) визначається за формулою:

$$f_D = \frac{F \cdot a \cdot b \cdot (l^2 - a^2 - b^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot I} \quad (10.1)$$

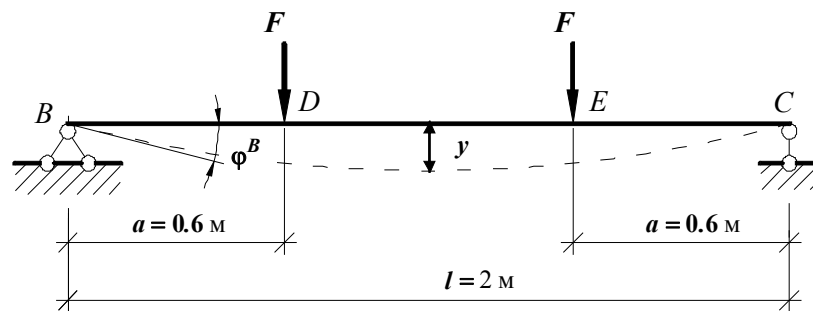


Рисунок 10.1

Кут повороту перерізу на опорі В

$$\varphi_B = \frac{Fab(l+b)}{6lEI} \quad (10.2)$$

на опорі С

$$\varphi_C = \frac{Fab(l+b)}{6lEI} \quad (10.3)$$

Якщо $a = a_1 = b = b_1 = 0,5l$ (рис. 10.2)

прогин
$$f_C = \frac{Fl^3}{48EI} \quad (10.4)$$

кут повороту
$$\varphi_B = \varphi_C = \frac{Fl^2}{16EI} \quad (10.5)$$

Установка для проведення експерименту являє собою двохопорну балку з індикатором для визначення переміщень (рис. 10. 2). Індикатор

годинникового типу 1 визначає безпосередньо прогин посередині прольоту U_C , а індикатор 2 визначає переміщення Δ , за допомогою якого кут повороту перерізу на опорі А визначається за формулою

$$\Theta \approx \text{tg}\Theta = \frac{\Delta}{h} \quad (10.6)$$

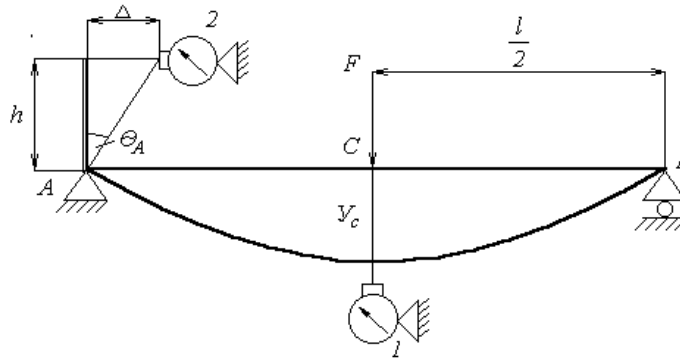


Рисунок 10. 2

Теоретично переміщення в указаних перерізах балки слід визначати методом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння пружної лінії.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти довжину прольоту і розміри поперечного перерізу балки.
2. За формулами 8.4 і 8.5 визначити теоретичні значення прогину U_C посередині балки в точці С і кута повороту φ_B на опорі В при навантаженні балки силою $F=20$ Н. Прийняти для сталі модуль пружності першого роду $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
3. Навантажити балку посередині силою $F=20$ Н і встановити за допомогою індикатора І прогин U_C в точці С, і за індикатором 2 визначити переміщення Δ . За формулою 6.6 знайти кут повороту перерізу на опорі А.
4. Результати занести в таблицю звіту.
5. Скласти звіт.

Обробка результатів вимірювань

Довжина прольоту l , мм	Розміри поперечного перерізу балки		Навантаження F , Н	Переміщення Δ (індикатор 2)	Прогин точки С (індикатор 1), U_C мм
	товщина δ , мм	ширина b мм			

1. Модуль пружності першого роду $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

2. Осьовий момент інерції $I_Z = \frac{b\delta^3}{12} = \underline{\hspace{2cm}}$ мм³.

3. Кут повороту перерізу на опорі А:

експериментальний $\Theta_l \approx \text{tg}\Theta = \frac{\Delta}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$ рад.

теоретичний $\Theta_T = \frac{F\ell^2}{16EI} \underline{\hspace{2cm}}$ рад.

розходження $\frac{\Theta_T - \Theta_l}{\Theta_T} \cdot 100\% = \underline{\hspace{2cm}}\%$.

4. Прогин в точці С:

експериментальний $U_{c_l} = \underline{\hspace{2cm}}$ мм.

теоретичний $U_{c_T} = \frac{F\ell^3}{48EI} = \underline{\hspace{2cm}}$ мм.

Розходження $\frac{U_{c_T} \cdot U_{c_l}}{U_{c_T}} \cdot 100\% = \underline{\hspace{2cm}}\%$.

Висновки

Питання до захисту лабораторної роботи

1. Які величини відносяться до переміщень при згині?
2. Яка залежність існує між прогином і кутом повороту?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння пружної лінії балки?

Як визначаються довільні сталі, виникаючі при інтегруванні диференціального рівняння пружної лінії балки.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНІ

Мета роботи: Проаналізувати схему навантаження балки. Дослідити рівновагу двохопорної балки при випробуваннях на згин. Визначити внутрішні силові фактори в перерізах балки, а саме поперечні сили та згинаючі моменти. З умови міцності підібрати три різновиди поперечних перерізів: круглого, прямокутного та двотаврового перерізу. Проаналізувати отримані результати, виявити раціональний профіль перерізу, порівнявши маси балок.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Відомо, що при деформації згину в поперечних перерізах балок виникають внутрішні силові фактори – моменти згину і поперечні сили. При одночасній дії в перерізі обох силових факторів, згинаючих моментів і поперечних сил, згин називають поперечним, а при відсутності поперечної сили – чистий згин.

Внутрішні силові фактори визначають використовуючи метод перерізів.

Поперечна сила Q_y в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які лежать по один бік від перерізу, і вважаються додатними, якщо рівнодійна зовнішніх сил, розміщених ліворуч (праворуч) від перерізу, направлена вгору (вниз) (рис.11.1).

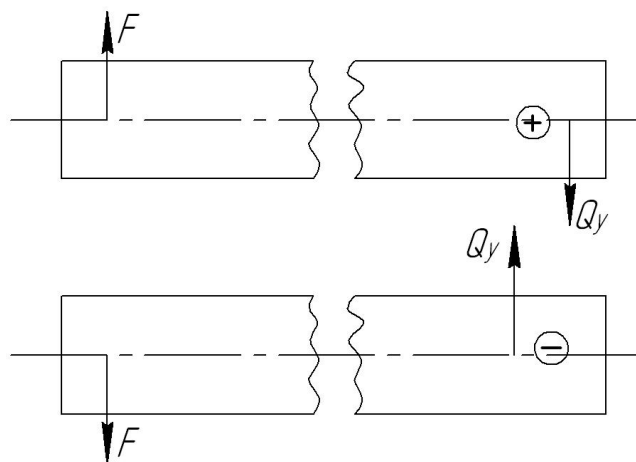


Рисунок 11.1 – Поперечні сили в перерізі при згині балки

Згинаючі моменти в перерізах балки дорівнюють алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених до балки по один бік від перерізу, відносно центра ваги перерізу, що досліджується. Згинаючий момент вважається додатним, якщо зовнішнє навантаження вигинає балку випуклістю вниз і від'ємним, якщо вигин балки направлений вгору (рис.11.2).

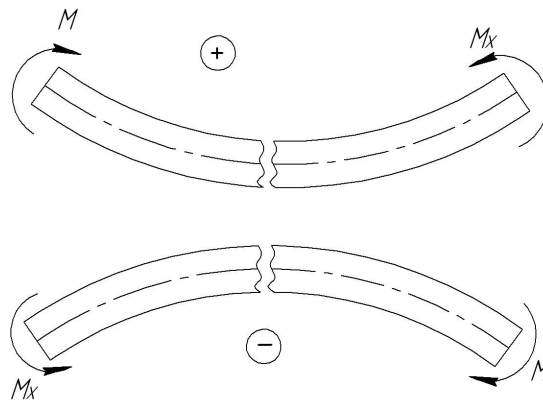


Рисунок 11.2 – Згинаючі моменти в перерізах балки

Між функціями згинаючого моменту M_x , поперечною силою Q_y , і інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності: $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, $\frac{dQ_y}{dz} = q$.

Графічне зображення зміни згинаючих моментів по довжині балки називається епюрою згинаючих моментів.

Графічне зображення зміни поперечних сил по довжині балки називається епюрою поперечних сил.

Дослідження двохопорних балок з метою перевірки умови міцності починають з визначення опорних реакцій відповідно існуючих методик.

Далі балку уявно розбивають на ділянки. Якщо балка представляє собою брус постійного поперечного перерізу з однорідного матеріалу, то границі ділянок визначаються перерізами, в яких змінюються тільки зовнішні навантаження.

На основі методу перерізів і диференціальних залежностей можна зробити висновок про характер епюр згинаючого моменту M_x , поперечної сили Q_y в залежності від діючих на балку навантажень.

Для епюр поперечних сил мають місце наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, епюра Q_y зображується похилою прямою;
- на ділянці, вільній від розподіленого навантаження, епюра Q_y зображується лінією паралельною осі балки;
- в перерізі балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі Q_y має місце «скачок» значення поперечної сили, що чисельно дорівнює модулю зосередженої сили.

Для епюр згинаючих моментів існують наступні взаємозв'язки:

- на ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра M_x зображується квадратичною параболою;
- на ділянці, вільному від рівномірно розподіленого навантаження, епюра M_x зображується прямою лінією;

– в перерізі балки, де діє зовнішній момент, на епюрі M_X виникає «скачок» значення згинаючого моменту, що дорівнює модулю зовнішнього моменту;

– на ділянці, де поперечна сила дорівнює нулеві, епюра M_X – пряма лінія, паралельна осі балки;

– на ділянках з розподіленим навантаженням згинаючий момент приймає екстремальні значення, в точках, де епюра поперечної сили змінює знак (перетинає ось Oz).

При згині в поперечних перерізах балки виникають нормальні і дотичні напруження.

Нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{M_{Xi} \cdot Y_i}{J_i}, \quad (11.1)$$

де M_{Xi} – згинаючий момент в даному перерізі, Н·м;

Y_i – відстань від зазначеної точки до нейтральної осі, м ;

J_i – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі.

Умова міцності при згині має вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{Xmax}}{W_X} \leq [\sigma], \quad (11.2)$$

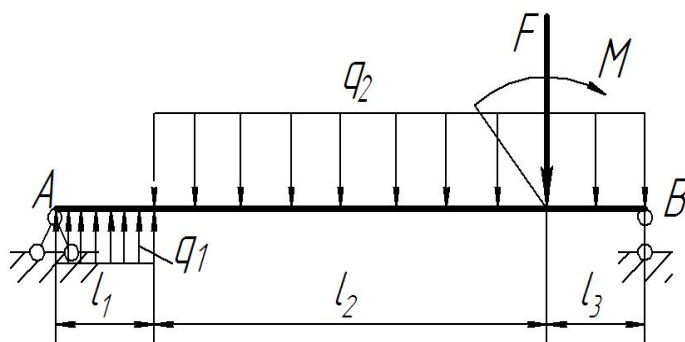
де M_{Xmax} – максимальний згинаючий момент в перерізах балки, Н·м;

$W_X = \frac{J_X}{Y_{max}}$ – осьовий момент опору перерізу відносно нейтральної осі, м³;

осі, м³;

$[\sigma]$ – допустиме напруження для даного матеріалу балки.

Приклад дослідження та розрахунку балки на згин.



Балка з конструктивними розмірами $l_1 = 1\text{ м}$, $l_2 = 4\text{ м}$, $l_3 = 1\text{ м}$, знаходиться під дією зовнішнього моменту $M = 20\text{ кН}\cdot\text{м}$, зосередженої сили $F = 50\text{ кН}$, розподіленого навантаження інтенсивністю $q_1 = 20\text{ кН/м}$, $q_2 = 2q_1 = 40\text{ кН/м}$.

Матеріал балки вуглецева сталь марки Ст3. Допустиме напруження $[\sigma] = 160\text{ МПа}$.

1. Визначення опорних реакцій балки.

Позбавивши балку в'язей, замінимо їх дію відповідними реакціями – реакціями опор. Опорні реакції визначаємо з умов рівноваги довільної системи сил:

$$\sum M_A(F_i) = 0$$

$$q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) - M - F \cdot (l_1 + l_2) + R_B \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$\Sigma M_B(F_i) = 0,$$

$$-R_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3 = 0;$$

Розв'язуючи рівняння отримуємо:

$$R_B = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left(l_1 + \frac{l_2 + l_3}{2} \right) + M + F \cdot (l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{-20 \cdot \frac{1^2}{2} + 40 \cdot 5 \cdot 3,5 + 20 + 50 \cdot 5}{1 + 4 + 1} = 160 \text{ кН}$$

$$R_A = \frac{-q_1 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + q_2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \frac{l_2 + l_3}{2} - M + F \cdot l_3}{(l_1 + l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{-20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 4 + 1 \right) + 40 \cdot (4 + 1) \cdot \frac{1 + 4}{2} - 20 + 50 \cdot 1}{1 + 4 + 1} = 70 \text{ кН}$$

Додатні значення отриманих реакцій опор свідчать про те, що попередньо обрані напрями реакцій є дійсними.

Правильність обчислення опорних реакцій перевіримо за допомогою рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad R_A + q_1 \cdot 1 - q_2 \cdot 5 + R_B = 0,$$

$$70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 5 + 160 = 0.$$

Умова рівноваги виконується, значить реакції опор знайдені вірно.

2. *Визначення внутрішніх силових факторів: згинальних моментів та поперечних сил в перерізах балки при згині.*

Досліджувана балка має три ділянки, для яких будемо визначати згинальні моменти та поперечні сили.

$$\text{Ділянка I: } 0 \leq Z_1 \leq l_1 \quad \text{або} \quad 0 \leq Z_1 \leq 1 \text{ м,}$$

$$\text{Рівняння поперечних сил} \quad Q_Y^I = R_A + q_1 \cdot Z_1 = 70 + 20 \cdot Z_1.$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 0 = 70 \text{ кН}$$

$$Z_1 = 1 \text{ м} \quad Q_Y^I = 70 + 20 \cdot 1 = 90 \text{ кН.}$$

$$\text{Рівняння згинальних моментів} \quad M_X^I = R_A \cdot Z_1 + \frac{q_1 \cdot Z_1^2}{2} = 70 \cdot Z_1 + 20 \frac{Z_1^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad M_X^I = 0$$

$$Z_1 = 1\text{ м} \quad M_X^I = 70 \cdot 1 + 20 \frac{1^2}{2} = 80\text{ кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності з диференціальними залежностями Q і M_X , епюра M_X на ділянці буде обмежена увігнутою кривою без екстремуму.

$$\text{Ділянка II: } l_1 \leq Z_2 \leq l_1 + l_2 \quad \text{або} \quad 1 \leq Z_2 \leq 5\text{ м},$$

Рівняння поперечних сил

$$Q_Y^{II} = R_A + q_1 \cdot Z_1 - q_2(Z_2 - 1) = 70 + 20 \cdot Z_1 - 40(Z_2 - 1).$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_2 = 1\text{ м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 0 = 90\text{ кН}$$

$$Z_2 = 5\text{ м} \quad Q_Y^{II} = 70 + 20 \cdot 1 - 40 \cdot 4 = -70\text{ кН}.$$

Рівняння згинальних моментів

$$M_X^{II} = R_A \cdot Z_2 + q_1 \cdot (Z_2 - 0,5) - \frac{q_2 \cdot (Z_2 - 1)^2}{2} = 70 \cdot Z_2 + 20(Z_2 - 0,5) - 40 \frac{(Z_2 - 1)^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_2 = 1\text{ м} \quad M_X^{II} = 70 \cdot 1 + 20 \cdot (1 - 0,5) - 40 \cdot 0 = 80\text{ кНм}$$

$$Z_2 = 5\text{ м} \quad M_X^{II} = 70 \cdot 5 + 20 \cdot (5 - 0,5) - 40 \frac{(5 - 1)^2}{2} = 120\text{ кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: на ділянці Q_Y – лінійна убуваюча функція, що міняє знак, значить, M_X – опукла криволінійна функція, що має екстремум в границях даної ділянки.

Абсцису точки екстремуму знайдемо з виразу:

$$\frac{dM_X}{dZ} = Q_Y = 70 + 20 \cdot 1 - 40(Z_2 - 1) = 0, \text{ звідки } Z_2 = 3,25\text{ м}.$$

Згинальний момент в точці екстремуму $M_{X_{max}}$ дорівнює:

$$M_{X_{max}}^{II} = 70 \cdot 3,25 + 20 \cdot (3,25 - 0,5) - 40 \frac{(3,25 - 1)^2}{2} = 181\text{ кНм}.$$

$$\text{Ділянка III: } 0 \leq Z_3 \leq l_3 \quad \text{або} \quad 0 \leq Z_3 \leq 1\text{ м},$$

$$\text{Рівняння поперечних сил} \quad Q_Y^{III} = -R_B + q_2 \cdot Z_3 = -160 + 40 \cdot Z_3.$$

Значення поперечних сил на границях ділянки:

$$\text{при } Z_3 = 0 \quad Q_Y^{III} = -160 + 40 \cdot 0 = -160\text{ кН}$$

$$Z_3 = 1\text{ м} \quad Q_Y^{III} = -160 + 40 \cdot 1 = -120\text{ кН}.$$

$$\text{Рівняння згинальних моментів} \quad M_X^{III} = R_B \cdot Z_3 - \frac{q_2 \cdot Z_3^2}{2} = 160 \cdot Z_3 - 40 \frac{Z_3^2}{2}$$

Значення згинальних моментів на границях ділянки:

$$\text{при } Z_3 = 0 \quad M_X^{III} = 0$$

$$Z_3 = 1\text{ м} \quad M_X^{III} = 160 \cdot 1 - 40 \frac{1^2}{2} = 120\text{ кНм}.$$

Аналізуючи отримані значення робимо висновок: тому, що Q_Y є лінійна зростаюча функція, що не змінює на ділянці знак, то у відповідності з диференціальними залежностями Q і M_X , епюра M_X на ділянці буде обмежена вигнутою кривою без екстремуму.

За отриманими значеннями Q_Y та M_X будуємо епюри поперечних сил та згинаючих моментів (рис. 11.3).

3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

За умовами задачі вимагається визначити раціональний профіль перерізу балки. Для цього, використовуючи умову міцності при згині

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{X \max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

визначимо потрібний момент опору перерізу та розміри різних видів поперечного перерізу балки:

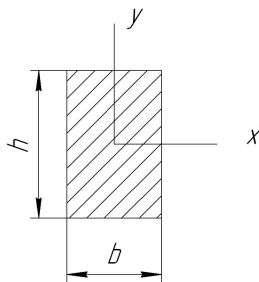
$$W_X \geq \frac{M_{X \max}}{[\sigma]} = \frac{181 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

- для балки круглого перерізу $W_X = \frac{\pi d^3}{32}$, звідки діаметр балки визначиться як,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_X}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,226 \text{ м}.$$

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду $Ra40$ приймаємо для балки круглого перерізу діаметр $d = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

Площа поперечного перерізу $A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,24^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$.



Для балки прямокутного перерізу зі співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b} = 1,7$ момент опору перерізу буде дорівнювати:

$$W_X = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{1,7^2 \cdot b^3}{6} = 0,482 b^3.$$

Тоді сторона перерізу

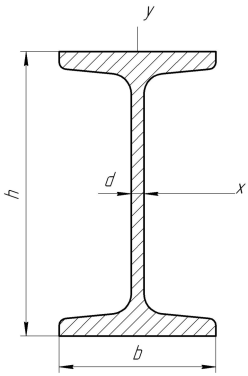
$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_X}{0,482}} = \sqrt[3]{\frac{1,13 \cdot 10^{-3}}{0,482}} = 0,133 \text{ м},$$

сторона перерізу $h = 1,7b = 1,7 \cdot 0,133 = 226 \text{ мм} = 0,226 \text{ м}$.

У відповідності з СТ СЭВ 514-77 з ряду $Ra40$ приймаємо для балки прямокутного перерізу розміри $b = 140 \text{ мм} = 0,14 \text{ м}$, $h = 240 \text{ мм} = 0,24 \text{ м}$.

Площа прямокутного поперечного перерізу балки буде дорівнювати

$$A_2 = b \cdot h = 0,14 \cdot 0,24 = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$



Визначимо площу перерізу двотаврової балки. По сортаменту ГОСТ 8239-72 (додаток В) по моменту опору перерізу обираємо двотавр №45, з моментом опору $W_x = 1220 \text{ см}^3$ і площею поперечного перерізу $A_3 = 83 \text{ см}^2 = 0,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$.

4. *Аналіз металоемності балок різного поперечного перерізу.*

Металоемність балок трьох досліджуваних перерізів можна оцінити, порівнюючи їх площі:

$A_1 : A_2 : A_3 = 4,52 : 3,36 : 0,83$, або прийняв одну, найменшу з них за одиницю, маємо $A_1 : A_2 : A_3 = 5,44 : 4,05 : 1,0$.

Порівняння показує, що найбільш економічним є двотавровий переріз балки, а найменш економічним – круглий.

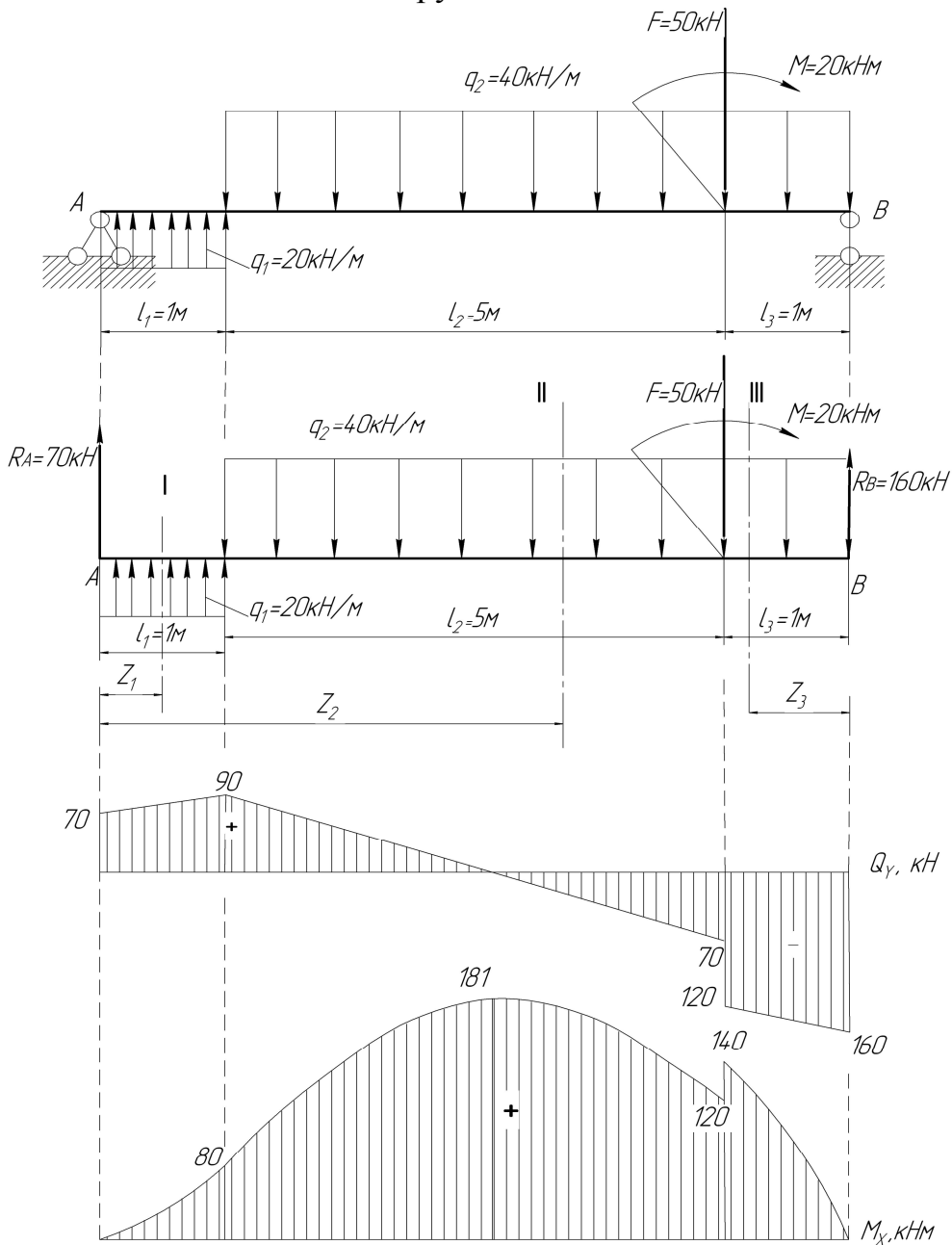


Рисунок 11.3 – Схема дослідження валу на згин

Завдання до виконання роботи

Виконати дослідження та розрахунок балки на міцність при згині.

Вихідні дані та схеми навантаження балок для дослідження надано в таблицях 11.1. і 11.2.

Зміст звіту

1. Аналіз схеми навантаження балки.
2. Визначення внутрішніх силових факторів в перерізах балки, а саме поперечних сил та згинаючих моментів.
3. Підбір трьох різновидів поперечних перерізів: круглого, прямокутного (з співвідношенням сторін $k = \frac{h}{b}$) та двотаврового перерізу з умови міцності.
4. Аналіз отриманих результатів, виявлення раціонального профілю перерізу шляхом порівняння маси балок.

Таблиця 11.1 – Вихідні дані для дослідження балки на згин

Буква прізвища	Номер схеми	F, кН	M, кНм	q, кН/м	Розміри балки, м			[σ]	$k = \frac{h}{b}$
					l_1	l_2	l_3		
А, Б, В	1	10	10	20	1,0	2,0	0,8	80	1,5
Г, І, Д	2	20	20	18	1,2	2,8	0,9	90	1,6
Е, Ж, З,	3	30	30	30	1,3	2,6	1,0	100	1,7
І, Ї, К	4	40	40	32	1,4	2,4	1,1	110	1,8
Л, М, Н	5	50	50	24	1,5	2,2	1,2	120	1,9
О, П, Р	6	60	60	25	1,6	2,0	1,3	130	2,0
С, Т, У	7	70	70	35	1,7	2,8	1,4	140	1,9
Ф, Х, Ц	8	80	80	40	1,8	2,6	1,5	150	1,8
Ч, Ш, Щ,	9	90	90	25	1,9	2,4	1,4	160	1,7
Є, Ю, Я	0	100	100	20	2,0	2,2	0,8	150	1,6
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Примітка: При виборі варіанту слід пронумерувати букви прізвища і відповідно до номеру букви обирати дані з таблиці. Для всіх варіантів матеріал вала – вуглецева сталь марки Ст3.

Наприклад: І В А Н Ч Е Н К О В

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

*З таблиці обираємо: схема 4, $F_1=10\text{кН}$, $M=10\text{кНм}$, $q = 24\text{кН/м}$,
 $l_1= 1,9\text{м}$, $l_2=0,9\text{м}$, $l_3= 2,6\text{м}$, $[\sigma] = 110\text{МПа}$, $k = 2,0$*

Таблиця 11.2 – Схеми двохопорних балок для дослідження на згин

Варіанти схем балок для дослідження на згин	

Питання до захисту лабораторної роботи

1. При якому навантаженні балка випробовує чистий, а при якому – поперечний згин?
2. Які типи опор використовують для закріплення балки на основі?
3. Як визначаються опорні реакції балки?
4. Як складаються рівняння поперечних сил і згинальних моментів в довільному перерізі на ділянках вала?
5. Як визначаються знаки поперечних сил і згинальних моментів?
6. Яка диференціальна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою та зовнішнім розподіленим навантаженням?
7. Як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки і як вони змінюються по висоті балки?
8. Як записується умова міцності при згині?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТИСНУТОГО СТЕРЖНЯ

Мета роботи: Дослідження явища втрати стійкості стиснутих стержнів та експериментальна перевірка формули для визначення критичної сили.

Методичні рекомендації до виконання роботи

У стержнів, довжина яких значно більша поперечних розмірів, при відповідній величині осьової стискаючої сили може відбуватися втрата стійкості прямолінійної форми рівноваги. Це явище називається *поздовжнім згином*, а величину осьової сили, при якій стиснутий стержень втрачає прямолінійну форму рівноваги – критичною *силою рівноваги* $F_{кр}$ її визначають за формулою Ейлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (12.1)$$

де E – модуль поздовжньої пружності для матеріалу стержня; I_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня, l – довжина стержня; μ – коефіцієнт приведення довжини який залежить від способу закріплення кінців стержня.

Формулою Ейлера можна користуватись, якщо втрата стійкості стержня виникає при напруженнях менших границі пропорційності, тобто для стержнів у яких гнучкість λ більша граничної $\lambda_{\text{гран}}$. Гранична гнучкість визначається за формулою

$$\lambda_{\text{гран}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}, \quad (12.2)$$

де $\sigma_{\text{пц}}$ – границя пропорційності матеріалу стержня.

Якщо розрахункова гнучкість стержня $\lambda < 100$ то теоретичне значення критичної сили $F_{кр}^{\text{теор}}$ визначаються за формулою Ясинського:

$$F_{кр}^{\text{теор}} = \sigma_{кр} \cdot A_1 = (a - b\lambda)A, \quad (12.3)$$

де A – площа поперечного перерізу стержнів; $\sigma_{кр}$ – критична напруга у поперечних перерізах стиснутого стержня, яка при $\lambda = 40-100$ визначається за емпіричною формулою Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (12.4)$$

де a і b – коефіцієнти, які залежать від матеріалу і визначаються за таблицями довідників. Пристрій для проведення експерименту (рис. 12.1) складається з плити 1, з якою жорстко з'єднаний (защемлений) нижній кінець стержня 2. Верхній кінець стержня вільний. До верхнього кінця за допомогою поперечини 3 підвішений піддон 4, на якому встановлюються вантажні гирі 7. Для фіксації стержня у вертикальному положенні до

верхнього його кінця підвішений висок 5. Регулювання положення стержня здійснюється гвинтами 6.

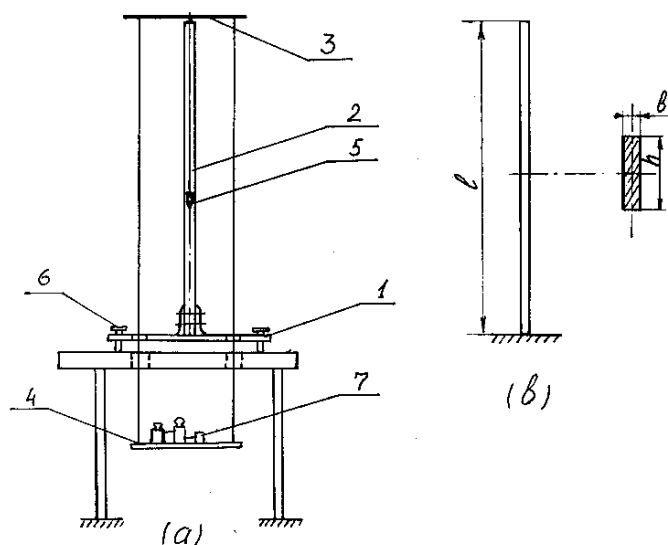


Рисунок 12.1 – Схема установки

Порядок виконання роботи

1. Заміряти параметри стержня: довжину l , мм; розміри поперечного перерізу (рис. 12.1, в): h , мм; b , мм.

2. Визначити :

площу поперечного перерізу стержня $A = h \cdot b = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}^2$;

мінімальний момент інерції перерізу $I_{\min} = \frac{hb^3}{12} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}^4$;

мінімальний радіус інерції $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ мм}$;

коефіцієнт довжини, який враховує спосіб закріплення кінців стержня $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$

гнучкість $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. Якщо $\lambda \geq 100$ визначити теоретичне значення критичної сили за формулою Ейлера :

$$F_{кр}^T = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Н} ,$$

де E – модуль пружності при розтягу, для Ст.3 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

4. Якщо $\lambda = 40-100$, визначити теоретичне значення критичної сили за формулою Ясинського :

$$F_{кр}^T = \sigma_{кр,A} \cdot A = (a - b\lambda) \cdot A = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Н} ,$$

де a і b - коефіцієнти. Можна прийняти $a = 300 \text{ МПа}$; $b = 1,14 \text{ МПа}$

5. За допомогою гвинтів встановити стержень у вертикальне положення. Контроль здійснювати за допомогою виска 5.

6. На піддон обережно (без ударів та поштовхів) класти вагові гирі до тих пір, поки стержень не втратить стійкість. При цьому стержень втрачає прямолінійну форму. Вага гир, які знаходяться в цей момент на піддоні (разом з вагою піддона) і становить величину експериментальної критичної сили.

7. Визначити розходження між теоретичним та експериментальним значеннями критичної сили :

$$\Delta\% = \frac{F_{кр}^T - F_{кр}^e}{F_{кр}^T} \cdot 100\% = \underline{\hspace{2cm}} \%$$

Обробка результатів вимірювань

Параметри стержня:

довжина $\ell = \underline{\hspace{2cm}}$ мм ;

товщина $b = \underline{\hspace{2cm}}$ мм ;

ширина $h = \underline{\hspace{2cm}}$ мм ;

площа поперечного перерізу $A = h \cdot b = \underline{\hspace{2cm}}$ мм²;

мінімальний момент інерції перерізу $I_{\min} = \frac{hb^3}{12} = \underline{\hspace{2cm}}$ мм⁴;

радіус інерції $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \underline{\hspace{2cm}}$ мм ;

коефіцієнт довжини $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$

теоретичне значення критичної сили $F_{кр}^T = \underline{\hspace{2cm}}$ Н ,

експериментальне значення критичної сили $F_{кр}^e = \underline{\hspace{2cm}}$ Н ,

розходження між теоретичним та експериментальним значенням критичної сили

$$\Delta\% = \frac{F_{кр}^T - F_{кр}^e}{F_{кр}^T} \cdot 100\% = \underline{\hspace{2cm}} \%$$






Висновки:

Питання до захисту лабораторної роботи

1. В чому полягає явище втрати стійкості ?
2. Що називається критичною силою ?
3. Як визначається критична сила для гнучких стержнів ?
4. Як впливають на величину критичної сили умови закріплення кінців стержня ?
5. Як визначається критична сила для стержнів середньої гнучкості ?
6. Що називається гнучкістю стержня ?
7. Які межі застосування формули Ейлера ?

4. ПРИКЛАДИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Встановіть відповідність між назвою в'язі та її схематичним зображенням

1) 	А) нерухомий циліндричний шарнір
2) 	Б) напівзащемлена опора
3) 	В) рухомий циліндричний шарнір
4) 	Г) стержневий шарнір
5) 	Д) жорстке защемлення

2. Встановіть правильну відповідність значення проекції сили на вісь від кута нахилу сили до осі.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\alpha = 0^\circ$ | А) $F_x = 0$ |
| 2) $\alpha = 90^\circ$ | Б) $F_x = -F$ |
| 3) $\alpha = 180^\circ$ | В) $F_x = F$ |
| 4) $\alpha < 90^\circ$ | Г) $F_x = -F \cos \alpha$ |
| 5) $\alpha > 90^\circ$ | Д) $F_x = F \cos \alpha$ |

3. Чи вірне це ствердження?

Якщо на тіло діє тільки дві сили, то їх називають парою сил.

4. Вкажіть правильну послідовність визначення рівнодійної системи сил правилом векторного багатокутника:

- 1) отриманий вектор є рівнодійна
- 2) послідовно відкласти вектори сил у обраному масштабі зберігаючи їх напрям
- 3) з'єднати початок першого вектора з кінцем останнього
- 4) обрати вихідну точку

5. Кількісна міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення, або деформуватися називається _____ (написати у називному відмінку)

6. Які з вказаних розділів входять до курсу теоретична механіка?

(оберіть одну відповідь):

- 1) статика, кінематика, динаміка
- 2) статика, динаміка теорія напружень
- 3) теорія удару статика, кінематика
- 4) механіка, динаміка, теорія напруження
- 5) механіка статика, кінематика
- 6) теорія удару, теорія напруження, механіка

7. Чи вірне це ствердження?

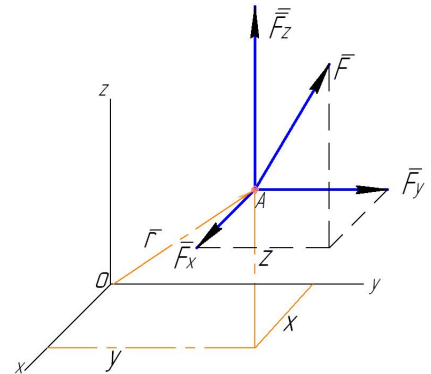
Матеріальна точка це найменший за геометричними ознаками об'єкт, розмірами якого в умовах даної системи відліку можна знехтувати.

8. Встановіть відповідність між виразом визначення проекцій моменту сили на вісь та їх позначенням

1) $M_{Ox}(\vec{F}) =$ А) $= z \cdot F_x - x \cdot F_z$

2) $M_{Oy}(\vec{F}) =$ Б) $= y \cdot F_z - z \cdot F_y$

3) $M_{Oz}(\vec{F}) =$ В) $= x \cdot F_y - y \cdot F_x$



9. Які об'єкти досліджуються в теоретичній механіці? (оберіть хоча б одну відповідь)

- 1) механічна система
- 2) вільне тіло
- 3) абсолютно тверде тіло
- 4) матеріальна точка
- 5) сила
- 6) швидкість руху

10. Що можна визначити користуючись правилом векторного багатокутника (вказіть одну правильну відповідь)

- 1) центр збіжних сил
- 2) модуль рівнодійної сили
- 3) алгебраїчну суму сил
- 4) вектор рівнодійної системи сил
- 5) врівноважений вектор сили

11. Чи вірно вказана формула для визначення модуля головного вектора просторової системи сил?

$$|R| = R_x + R_y + R_z$$

12. Векторна величина, що дорівнює геометричній сумі системи сил, називається _____ системи сил. (написати у називному відмінку)

13. Яким чином визначається модуль рівнодійної двох сил розміщених під кутом одна до одної? (оберіть одну відповідь):

- 1) по теоремі синусів
- 2) по теоремі косинусів
- 3) по теоремі Піфагору
- 4) алгебраїчною сумою
- 5) векторним добутком діючих сил

14. Фізична величина, яка дорівнює добутку модуля сили на найкоротшу відстань від лінії дії сили до обраної точки називають _____ (написати у називному відмінку)

15. Оберіть правильне визначення плеча сили. (вказіть одну правильну відповідь)

- 1) перпендикуляр до площини дії сили
- 2) відстань від центру моментів до точки прикладання сили
- 3) перпендикуляр з центру моментів до лінії дії сили
- 4) радіус-вектор з центру моментів до точки дії сили
- 5) довжина вектору сили

16. Векторна сума моментів всіх сил довільної просторової системи сил відносно точки О (центра зведення) називається__ __ (написати в називному відмінку)

17. Встановіть відповідність між кінематичними параметрами та характером руху точки

1	рівномірний	А	$\vec{V} \neq 0, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{V}$
2	пришвидшений	Б	$\vec{V} \neq 0, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{V}$
3	уповільнений	В	$\vec{V} = 0, \vec{a} = 0$
4	нерухомий	Г	$\vec{V} = const, \vec{a} = 0$

18. Встановіть відповідність між способом задавання руху точки та його математичним виразом.

1	векторний	А	$X = f(t)$
2	натуральний	Б	$\vec{r} = f(t)$
3	координатний	В	$S = f(t)$

19. Вкажіть фізичні величини, що вивчаються в кінематиці. (Дайте хоча б одну правильну відповідь).

- 1) сила
- 2) швидкість
- 3) переміщення
- 4) реакція
- 5) пришвидшення
- 6) маса

20. Непереривна лінія, яку описує точки в своєму русі називається _____ (вставити в називному відмінку).

21. Оберіть правильне спрямування вектору швидкості точки (Дайте одну правильну відповідь)

- 1) вздовж траєкторії

- 2) в напрямку руху
- 3) до центру кривизни траєкторії
- 4) по дотичній до траєкторії
- 5) по нормалі до траєкторії

22. Вкажіть якими формулами обчислюється швидкість точки при координатному способі задавання руху. (Дайте хоча б одну правильну відповідь)

- 1) $\vec{V} = V_X \cdot \vec{i} + V_Y \cdot \vec{j} + V_Z \cdot \vec{k}$
- 2) $\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt} \vec{\tau}$
- 3) $V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$
- 4) $\vec{V} = \vec{S}_X + \vec{S}_Y + \vec{S}_Z$
- 5) $V_X = \frac{dX}{dt} \quad V_Y = \frac{dY}{dt} \quad V_Z = \frac{dZ}{dt}$
- 6) $\vec{V} = \vec{r}_X + \vec{r}_Y + \vec{r}_Z$

23. Прискорення точки при натуральному способі задавання руху. (Дайте хоча б одну правильну відповідь).

- 1) $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$
- 2) $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$
- 3) $\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{\tau}$
- 4) $a_n = \frac{1}{\rho} V^2$
- 5) $a = \frac{dS}{dt}$
- 6) $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

24. Кінематичними параметрами руху обертального руху тіла є: (дайте одну правильну відповідь)

- 1) закон руху, швидкість точок, пришвидшення точок
- 2) закон руху, кутова швидкість, кутове пришвидшення
- 3) кутова швидкість, кутове пришвидшення, швидкість точок
- 4) кутове пришвидшення, пришвидшення точок, закон руху
- 5) кут оберту, швидкість точок, пришвидшення точок
- 6) кутова швидкість, кутове пришвидшення

25. Чи вірно, що при поступальному русі тіла всі його точки мають однакову по модулю і за напрямом швидкість і пришвидшення.

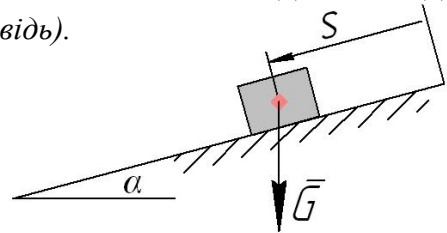
26. Фізична величина, що характеризує дію сили та тіло протягом її руху і дорівнює добутку вектора сили на час її дії називається _____ (вказіть у називному відмінку).

27. Встановіть відповідність між теоремою динаміки та її математичним виразом.

1)	теорема про зміну кількості руху	А)	$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_i^e$
2)	теорема про зміну кінетичного моменту	Б)	$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \sum \vec{S}_i^e$
3)	теорема про зміну кінетичної енергії	В)	$m\vec{r}_C = \sum \vec{F}_i^e$
4)	теорема про рух центру мас	Г)	$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(F_i^e)$

28. Вкажіть правильне визначення роботи сили тяжіння для випадку вказаному на рисунку. (дайте одну правильну відповідь).

- 1) $A = G \cdot s$
- 2) $A = G \cdot s \cdot \sin \alpha$
- 3) $A = G \cdot s \cdot \cos \alpha$
- 4) $A = -G \cdot s \cdot \sin \alpha$
- 5) $A = -G \cdot s \cdot \cos \alpha$



29. Встановіть відповідність задач динаміки їх змісту та способу розв'язання.

	Вид задачі		Зміст задачі		Спосіб розв'язання
1	Пряма задача динаміки	А	По відомим законам та параметрам руху визначають сили, що діють на тіло	б	Інтегруванням основного закону динаміки
2	Зворотна задача динаміки	Б	Знаючи сили, що діють на тіло визначають параметри та закон руху цього тіла	а	Диференціюванням законів руху тіла

30. Вектор кількості руху має напрям (оберіть одну правильну відповідь)

- 1) співпадає з напрямом вектора швидкості тіла
- 2) направлений протилежно вектору швидкості тіла
- 3) направлений вздовж траєкторії

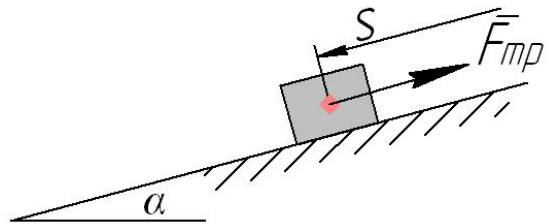
- 4) направлений перпендикулярно до вектора швидкості тіла
- 5) співпадає з напрямом пришвидшення тіла

31. Вкажіть якою формулою виражається теорема про зміну кількості руху матеріальної точки (дайте хоча б одну правильну відповідь)

- 1) $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = (\sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j) \cdot (t - t_0)$
- 2) $\frac{m dS}{dt} = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j$
- 3) $\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}(\bar{F}_i^e) + \bar{S}(\sum \bar{F}_i^j)$
- 4) $\frac{m d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j$
- 5) $m\bar{S}'' = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^j$

32. Вкажіть правильне визначення роботи сили тертя ковзання для випадку, зображеного на рисунку. (дайте одну правильну відповідь).

- 1) $A = -F_{mp} \cdot s$
- 2) $A = F_{mp} \cdot s \cdot \sin \alpha$
- 3) $A = F_{mp} \cdot s$
- 4) $A = -F_{mp} \cdot s \cdot \sin \alpha$
- 5) $A = -F_{mp} \cdot s \cdot \cos \alpha$



33. Вкажіть, чому дорівнює кінетичний момент матеріальної точки. (дайте хоча б одну правильну відповідь)

- 1) $L_Z = J \cdot \omega$
- 2) $M_Z(\bar{K}) = \bar{K} \times \bar{r}$
- 3) $M_Z = \sum \bar{F}_i \times \bar{r}$
- 4) $M_Z(K) = K \cdot r \cdot \sin(\angle \bar{K} \bar{r})$
- 5) $L_Z = mh^2 \cdot \omega$

34. Встановіть відповідність формули кінетичної енергії руху фізичного об'єкту характеру його руху.

1)	Поступальний рух тіла	А	$E = \frac{m \cdot V^2}{2}$
2)	Обертальний рух тіла	Б	$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}$

3)	Плоско-паралельний рух тіла	В	$E = \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega^2}{2}$
4)	Обертальний рух матеріальної точки	Г	$T = \frac{m \cdot V_C^2}{2}$
5)	Поступальний рух матеріальної точки	Д	$T = \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}$

35. Вкажіть, чому дорівнює модуль імпульсу сили ? (Дайте одну правильну відповідь).

- 1) $F = m \cdot a$
- 2) $S = F \cdot V$
- 3) $S = F \cdot t$
- 4) $A = F \cdot s$
- 5) $K = F \times mV$

36. Вкажіть формулу для теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній (кінцевій) формі. (дайте одну правильну відповідь).

- 1) $E - E_0 = \sum A(F_i)$
- 2) $T - T_0 = \sum A(F_i^e)$
- 3) $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A(F_i)$
- 4) $mV - mV_0 = \sum S(F_i)$
- 5) $m \frac{dV}{ds} = \sum F_i$

37. Які теореми відносяться до загальних теорем динаміки? (дайте хоча б одну правильну відповідь).

- 1) теорема Гюйгенса про момент інерції відносно паралельних осей
- 2) теорема про рух центру мас механічної системи
- 3) теорема про зміну кількості руху
- 4) теорема Карно про втрату кінетичної енергії
- 5) теорема про зміну кінетичного моменту
- 6) теорема про зміну кінетичної енергії

5. ПРИКЛАД КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» ІМЕНІ Т. Г.
ШЕВЧЕНКА

КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

з дисципліни Технічна механіка

Шифр і назва напряму підготовки 014.10 Середня освіта. Трудове навчання та технології (Автосправа; графічний дизайн); 015.20 Професійна освіта (Транспорт); 015.21 Професійна освіта (Харчові технології)

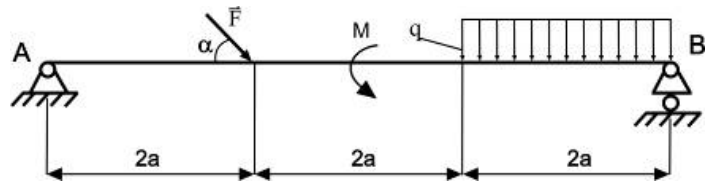
ЗАВДАННЯ НА КОНТРОЛЬНУ РОБОТУ №1

Теоретична частина:

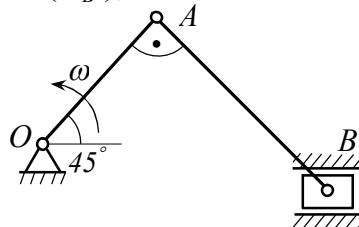
1. Якими є проєкції швидкостей двох точок плоскої фігури на вісь, яка проходить через ці точки?
2. Запишіть формулу для визначення кількості руху системи, маса якої - M , швидкість центра мас - \vec{V}_C .

Практична частина:

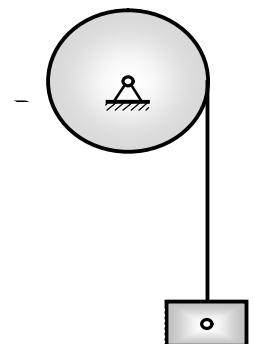
1. Визначити опорні реакції балки, якщо: $F=18$ кН; $a=6$ м; $q=2$ кН/м; $M=36$ кН·м; $\alpha = 30^\circ$.



2. Механічна система, для якої $OA = 0,1$ м і $AB = 0,2$ м, в заданий момент часу перебуває в положенні, зображеному на рисунку. При цьому кутова швидкість ланки OA становить $\omega = 1$ с⁻¹. Визначити кутову швидкість ланки AB (ω_{AB}) та швидкість точки B (\vec{v}_B), показавши їх на розрахунковій схемі.



3. Механічна система починає рухатися під дією ваги P_A вантажу A зі стану спокою. Визначити швидкість та прискорення вантажу A в той момент часу, коли він опуститься на висоту $h = 1$ м, якщо $P_A = 400$ Н, $P_B = 200$ Н, $g \approx 10$ м/с². Масою троса та силами опору знехтувати. Вал B вважати однорідним суцільним циліндром радіуса R . Визначити також натяг троса.



Завдання розглянуте і ухвалене на засіданні кафедри загально технічних дисциплін та креслення

Протокол № від 201_р.

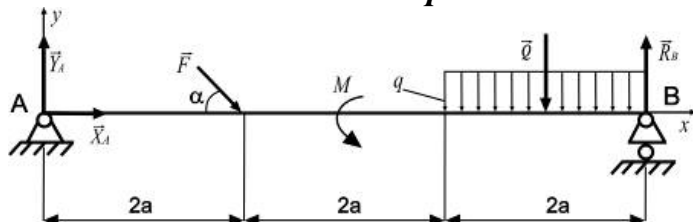
Зав. кафедрою, к.п.н., доц. _____ В. С. Люлька

Еталонна відповідь до ККР №1

Теоретична частина

1. Проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на вісь, що проходить через ці точки, однакові.
2. $\vec{K} = M \cdot \vec{V}_C$

Практична частина



1. Визначити опорні реакції балки, якщо:
 $F=18 \text{ кН}$; $a=6 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.
 $q=2 \text{ кН/м}$; $M=36 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

1. Розв'язок.

- 1). Розглянемо рівновагу балки АВ.
- 2). На неї діють активні сили \vec{F} , \vec{Q} і пара сил із моментом M .
 $(Q = q \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \text{ кН})$.
- 3). В'яжами для балки є нерухомий шарнір А і рухомий шарнір В.
- 4). Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad X_A + F \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad Y_A - F \sin \alpha - Q + R_B = 0 \quad (2)$$

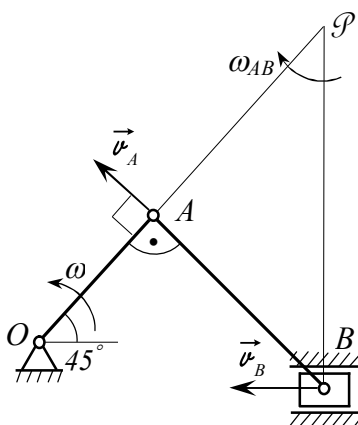
$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \quad -F \sin \alpha \cdot 2a + M - Q \cdot 5a + R_B \cdot 6a = 0 \quad (3)$$

$$\text{з (1)} \Rightarrow X_A = -F \cos \alpha = -18 \cdot 0.87 \approx -15.67 (\text{кН});$$

$$\text{з (3)} \Rightarrow R_B = (F \sin \alpha \cdot 2a - M + Q \cdot 5a) / 6 \cdot a = (18 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 6 - 36 + 24 \cdot 5 \cdot 6) / 6 \cdot 6 = 22 (\text{кН})$$

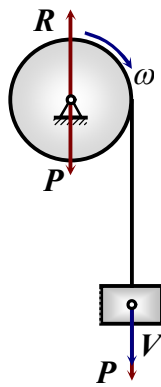
$$\text{з (2)} \Rightarrow Y_A = F \sin \alpha + Q - R_B = 18 \cdot 0.5 + 24 - 22 = 11 (\text{кН}).$$

2. Розв'язок: В обертальному русі ланки OA $V_A = \omega \cdot OA = 0,1 \text{ м/с}$, напрям \vec{v}_A - в площині обертання, під прямим кутом до кривошипа OA в бік обертання. Швидкість точки B (\vec{v}_B) за напрямком визначається напрямними повзуна. Миттєвий центр швидкостей (т. P) ланки AB , що перебуває в плоскопаралельному русі, - в точці перетину перпендикулярів до згаданих векторів швидкостей, проведених у відповідних точках. Досліджуючи миттєвий обертальний рух AB навколо P , маємо: $\omega_{AB} = V_A / AP$, $V_B = \omega_{AB} \cdot BP$. З рисунка $AP = AB = 0,2 \text{ м}$, $BP = AB \cdot \sqrt{2}$. Таким чином $\omega_{AB} = 0,5 \text{ с}^{-1}$, $V_B = 0,1 \sqrt{2} \approx 0,141 \text{ м/с}$.



3. Розв'язання.

1). Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи. Для незмінної механічної системи, яка приводиться в рух із стану спокою:



$$T = \sum A_k^e. \quad (1)$$

2). Визначаємо кінетичну енергію системи як функцію від швидкості вантажу A :

$$T = T_A + T_B. \quad (2)$$

Кінетичну енергію тіл системи визначаємо в залежності від характеру руху.

Тіло A (поступальний рух):

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 = \frac{P_A}{2g} V_A^2$$

Тіло B (обертвий рух):

$$T_B = \frac{1}{2} I_{Bz} \omega_B^2 = \frac{1}{4} m_B R^2 \cdot (V_A / R)^2 = \frac{P_B}{4g} V_A^2,$$

де $\omega_B = V_A / R$, $I_{Bz} = \frac{1}{2} m_B R^2$.

Для системи, згідно з (2), отримуємо:

$$T = \frac{P_A}{2g} V_A^2 + \frac{P_B}{4g} V_A^2 = \frac{2P_A + P_B}{4g} V_A^2. \quad (3)$$

3). Визначаємо суму робіт зовнішніх сил на заданому переміщенні механічної системи:

$$\sum A_k^e = A_{P_A}. \quad (4)$$

Для інших сил: $A_{P_B} = A_{R_B} = 0$ (сили прикладені в нерухомій точці).

Далі знаходимо:

$$A_{P_A} = P_A h.$$

Тоді

$$\sum A_k^e = P_A h. \quad (5)$$

4). Прирівнюємо (3) та (5), визначаємо швидкість тіла A :

$$\frac{2P_A + P_B}{4g} V_A^2 = P_A h, \Rightarrow V_A = 2 \sqrt{\frac{P_A}{2P_A + P_B} gh}.$$

Прискорення тіла A :

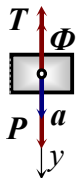
$$a_A = \dot{V}_A = (2/V_A) \cdot \frac{P_A}{2P_A + P_B} g \dot{h} = \frac{2P_A}{2P_A + P_B} g, \text{ де } \dot{h} = V_A.$$

Знаходимо числові значення величин:

$$V_A = 2 \sqrt{\frac{400}{2 \cdot 400 + 200} \cdot 10 \cdot 1} = 4 \text{ м/с},$$

$$a_A = \frac{2 \cdot 400}{2 \cdot 400 + 200} \cdot 10 = 8 \text{ м/с}^2.$$

5). Визначаємо силу натягу троса, для чого застосуємо принцип Д'Аламбера для тіла A , як для матеріальної точки.



$$\Phi_A = m_A a_A = P_A \frac{a_A}{g},$$

$$\sum F_{ky} + \sum R_{ky} + \sum \Phi_{ky} = 0,$$

$$P_A - T_A - \Phi_A = 0, \text{ звідки}$$

$$T_A = P_A - \Phi_A = P_A \left(1 - \frac{a_A}{g}\right) = 400 \cdot 0.2 = 80 \text{ Н}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Иоселевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С. Прикладная механика, - М.: Машиностроение, 1985. – 560с.
2. Ковалев Н.А. Прикладная механика. – М.: Высш. Школа, 1982. – 400с.
3. Прикладная механика / Под ред. К.М. Заблонского. – М.: Машиностроение, 1979. – 280с.
4. Прикладная механика / Под ред. В.М. Осецкого. – М.: Машиностроение, 1977. – 488с.
5. Писаренко Г.С. и др.. Сопротивление материалов. К.: Техника, 1979. – 696с.
6. Беляев М.Н. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1966. – 348с.
7. Ободевский Б.А., Ханин С.Е., Сопротивление материалов в примерах и задачах. – Харьков: Высш. Школа, 1981. – 270с.
8. Мовнин М.С. и др.. Руководство к решению задач по технической механике. – М.: Высш. Шк., 1977. – 400с.
9. Бутенин И.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1 : Статика и кинематика.– М.: Наука, 1985.– 240 с.
10. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. I : Статика. Кинематика.– М.: Высш. школа, 1984.– 343 с.
11. Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс.– М.: Наука, 1986.– 336 с.
12. Теоретическая механика. Терминология, вып. 90.– М.: Наука, 1977.– 46 с.
13. Ільчишина Д.І., Шальда Л.М. Теоретична механіка.– К.: УМК ВО, 1991.– 252 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Таблиця А1 – Значення допустимих напружень деяких конструкційних матеріалів

Матеріал	Твердість, НВ	Допустимі напруження, МПа	
		розтяг	стиск
Чавун	170 – 240	14	50
Низьковуглецева сталь марки Ст3	150 – 170	160	160
Вуглецева якісна марки сталь 45	160 – 190	200	200
Конструкційна легована сталь марки 40Х	265 – 315	300	300
Мідь	3,5	80	80
Латунь	55 – 150	100	100
Бронза	66 – 200	80	100
Дюралюміній	45 – 113	125	125

Таблиця А2 – Значення модуля пружності деяких конструкційних матеріалів

Матеріал	Модуль пружності E, МПа	Модуль зсуву G, МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5 - 2,2 \cdot 10^5$	$0,81 \cdot 10^5$
Чавун	$1,15 \cdot 10^5 - 1,6 \cdot 10^5$	$0,45 \cdot 10^5$
Мідь та її сплави (латунь, бронза)	$1,0 \cdot 10^5$	$0,25 \cdot 10^5$
Дюралюміній	$0,7 \cdot 10^5 - 0,99 \cdot 10^5$	$0,27 \cdot 10^5$
Склопластик	$1 \cdot 10^4$	$0,22 \cdot 10^5$
Деревина: вздовж волокон	$0,11 \cdot 10^5$	$0,006 \cdot 10^5$
поперек волокон	$0,05 \cdot 10^5 - 0,14 \cdot 10^5$	-
Бетон	0,03	-

ДОДАТОК Б

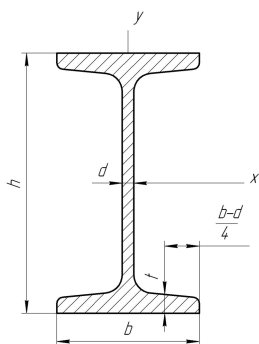
Таблиця Б1 – Нормальні лінійні розміри по СТ СЭВ 514-77 (витяг лінійних розмірів з стандарту в інтервалі від 10 до 950мм)

Ряд															
Ra5	Ra1	Ra2	Ra4	Ra5	Ra1	Ra2	Ra4	Ra5	Ra1	Ra2	Ra4	Ra5	Ra1	Ra2	Ra4
10	10	10	10	25	25	25	25	63	63	63	63	160	160	160	160
			10.5				26				67				170
		11	11			28	28			71	71			180	180
			11.5				30				75				190
	12	12	12		32	32	32		80	80	80		200	200	200
			13				34				85				210
		14	14			36	36			90	90			220	220
			15				38				95				240
16	16	16	16	40	40	40	40	100	100	100	100	250	250	250	250
			17				42				105				260
		18	18			45	45			110	110			280	280
			19				48				120				300
	20	20	20		50	50	50		125	125	125		320	320	320
			21			56	56				130				340
		22	22				60				140			360	360
		24	24								150				380

Примітка: Ряд Ra 5 слід ряду Ra10, ряд Ra10 – ряду Ra20 і т.д. Значення нормальних лінійних розмірів по ряду Ra40 при $l > 380$ мм: 400; 420; 450; 480; 500; 560; 600; 630; 670; 710; 750; 800; 850; 950; 950мм

ДОДАТОК В

Таблиця В1 – Сталь гарячекатана. Балки двотаврові (ГОСТ8239 – 72)



Позначення:

- h – висота балки;
- b – ширина балки;
- d – товщина стінки;
- t – середня товщина полки;
- J_x – момент інерції
- W_x – момент опору
- S_x – статичний момент площі напівперерізу;
- i_x – радіус інерції.

Номер профілю	Маса 1 п.м., кг	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	Довідникові величини для осей						
		h	b	d	t		x – x				y – y		
							J_x , см ⁴	W_{x_2} , см ³	i_x , см	S_{x_2} , см ³	J_y , см ⁴	W_{y_2} , см ³	i_y , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	35	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	0572	81,7	5,73	46,5	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,5	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	25,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	106	34,3	2,5
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,8
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	265	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,50	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	3,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101,0	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1118	1356	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,60	1491	1725	182,0	3,54

ДОДАТОК Г

Таблиця Г1 – Середні значення коефіцієнта корисної дії механічних передач

Передача	к.п.д. η	Передача	к.к.д. η
Закрита зубчата: з циліндричними колесами з конічними колесами Відкрита зубчата передача	0,97 – 0,98 0,96 – 0,97 0,95 – 0,96	Ланцюгова: Закрита Відкрита	0,95 – 0,97 0,9 – 0,95
Закрита черв'ячна при числі заходів черв'яка: $z_1 = 1$ $z_1 = 2$ $z_1 = 4$	0,70 – 0,75 0,8 – 0,85 0,8 – 0,95	Пасова: з плоским пасом з клиновим і поліклиновим пасом	0,96 – 0,98 0,95 – 0,97
Примітка: 1. Витрати на тертя в підшипниках оцінюються множителем $\eta_0 = 0,99 - 0,995$ на обидві опори вала. 2. В приводах з паралельними передачами значення ККД враховують один раз. 3. В механізмах кранів витрати на тертя враховується в блоках і в канатах: $\eta_6 = 0,96 - 0,98$.			

Таблиця Г2 – Електродвигуни асинхронні серії 4А ГОСТ 19523-81. Технічні характеристики

Тип двигуна	Номінальна потужність, кВт	Частота обертання, об/хв.	ККД	$\cos \varphi$	$\frac{T_n}{T_n}$	$\frac{T_{\max}}{T_n}$
1	2	3	4	5	6	7
Синхронна частота обертання 3000 об/хв.						
4A71B2	1,1	2810	0,78	0,87	2,0	2,2
4A80B2	2,2	2850	0,83	0,87	2,1	2,6
4A90L2	3,0	2840	0,84	0,88	2,1	2,5
4A100S2	4,0	2880	0,86	0,89	2,0	2,5
4A100L2	5,5	2880	0,88	0,92	2,0	2,5
4A112M2	7,5	2900	0,88	0,88	2,0	2,8
4A132M2	11,0	2900	0,88	0,90	1,7	2,8
4A160S2	15,0	2940	0,88	0,91	1,4	2,2
4A160M2	18,5	2940	0,88	0,92	1,4	2,2
4A180S2	22,0	2940	0,88	0,91	1,4	2,5
4A180M2	30,0	2945	0,90	0,95	1,4	2,5
4A200 M2	37,0	2945	0,90	0,98	1,4	2,5

1	2	3	4	5	6	7
4A200L2	45,0	2945	0,91	0,90	1,4	2,5
4A225M2	55,0	2945	0,91	0,92	1,4	2,5
4A250S2	75,0	2960	0,91	0,89	1,2	2,5
4A250M2	90,0	2960	0,92	0,90	1,2	2,5
4A280S2	110	18,5	0,92	0,90	1,2	2,5
Синхронна частота обертання 1500 об/хв.						
4A80A4	1,1	30,0	0,75	0,81	2,0	1,6
4A90L4	2,2	37,0	0,80	0,83	2,1	1,6
4A100S4	3,0	45,0	0,82	0,83	2,0	1,6
4A100L2	4,0	55,0	0,84	0,84	2,0	2,2
4A112M4	5,5	75,0	0,85	0,85	2,0	2,2
4A132S4	7,5	90,0	0,87	0,86	2,2	2,3
4A132M4	11,0	1460	0,88	0,87	2,2	2,3
4A160S4	15,0	1465	0,88	0,88	1,4	2,3
4A160M4	18,5	1465	0,89	0,88	1,4	2,3
4A180S4	22,0	1470	0,90	0,90	1,4	2,3
4A180M4	30,0	1470	0,91	0,89	1,4	2,3
4A200M4	37,0	1475	0,91	0,90	1,4	2,5
4A200LA	45,0	1475	0,92	0,90	1,4	2,5
4A225M4	55,0	1480	0,92	0,90	1,3	2,5
4A250S4	75,0	1480	0,92	0,90	1,2	2,3
4A250M4	90,0	1480	0,92	0,91	1,2	2,2
4A280S4	110,0	1475	0,92	0,91	1,2	2,3
Синхронна частота обертання 1000 об/хв.						
4A80B6	1,1	920	0,74	0,74	2,0	2,2
4A90B4	2,2	950	0,81	0,75	2,0	2,2
4A112MA6	3,0	955	0,81	0,76	2,0	2,5
4A112MB6	4,0	950	0,82	0,81	2,0	2,5
4A132S2	5,5	965	0,85	0,80	2,0	2,5
4A132M6	7,5	970	0,96	0,81	2,0	2,5
4A160S6	11,0	975	0,86	0,86	1,2	2,0
4A160M6	15,0	975	0,88	0,87	1,2	2,0
4A180M6	18,5	975	0,88	0,87	1,2	2,0
4A200M6	22,0	975	0,90	0,90	1,3	2,4
4A200L6	30,0	980	0,90	0,90	1,3	2,4
4A225M6	37,0	980	0,91	0,89	1,5	2,3
4A250S6	45,0	985	0,92	0,89	1,2	2,1
4A250M6	55,0	985	0,92	0,89	1,2	2,1
4A280S6	75,0	985	0,92	0,89	1,4	2,2
4A280M6	90,0	985	0,92	0,89	1,4	2,2
4A315S6	110,0	985	0,92	0,89	1,4	2,2
Синхронна частота обертання 750 об/хв.						

1	2	3	4	5	6	7
4A90LB8	1,1	700	0,7	0,68	1,6	1,9
4A112MA8	2,2	700	0,76	0,71	1,9	2,2
4A112M8	3,0	700	0,79	0,74	1,9	2,2
4A132S8	4,0	720	0,83	0,70	1,9	2,6
4A132M8	5,5	720	0,83	0,74	1,9	2,6
4A160S8	7,5	730	0,86	0,75	1,4	2,2
4A160M8	11,0	730	0,87	0,75	1,4	2,2
4A180M8	15,0	730	0,87	0,82	1,2	2,0
4A200M8	18,5	735	0,88	0,84	1,2	2,2
4A200L8	22,0	730	0,86	0,84	1,2	2,0
4A225M8	30,0	735	0,90	0,81	1,2	2,1
4A250S8	37,0	735	0,90	0,83	1,2	2,0
4A250S8	45,0	740	0,91	0,84	1,2	2,0
4A280S8	55,0	735	0,92	0,84	1,2	2,0
4A280S8	75,0	735	0,92	0,85	1,2	2,0
4A315S8	90,0	740	0,93	0,85	1,2	2,3
4A315M8	110,0	740	0,93	0,85	1,2	2,3

Таблиця Г3 – Середні значення передаточних відношень

Передачі		<i>и</i>
Зубчата:	з циліндричними колесами	3 – 6
	з конічними колесами	2 – 4
Черв'ячна		8 – 40
Ланцюгова		3 – 6
Пасова		2 – 4

ДОДАТОК Д

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ККР

Теоретична частина:

Практична частина

Разом: від 0 до 100 балів

ПОРЯДОК ПЕРЕВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ ЗА 100-БАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ В 5-БАЛЬНУ ТА ECTS

Критерії оцінювання	Кількість набраних балів	Оцінка за 4-х бальною шкалою	Рівень компетентності	Оцінка за шкалою ECTS	Значення оцінки ECTS
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>		<i>6</i>
Студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно здобувати знання, без допомоги викладача знаходить та опрацьовує необхідну інформацію, вміє використовувати набуті знання і вміння для прийняття рішень у нестандартних ситуаціях, переконливо аргументує відповіді, самостійно розкриває власні обдарування і нахили	90... 100	5	Високий (творчий)	A	відмінно
Студент вільно володіє вивченим обсягом матеріалу, застосовує його на практиці, вільно розв'язує вправи і задачі у стандартних ситуаціях, самостійно виправляє допущені помилки, кількість яких незначна	82...89	4	Достатній (конструктивно-варіативний)	B	дуже добре
Студент вміє зіставляти, узагальнювати, систематизувати інформацію під керівництвом викладача; в цілому самостійно застосовувати її на практиці; контролювати власну діяльність; виправляти помилки, серед яких є суттєві, добирати аргументи для підтвердження думок	74...81			C	добре

1	2	3	4		6
Студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень; з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, виправляти помилки, серед яких є значна кількість суттєвих	64...73	3	Середній (репродуктивний)	D	задовільно
Студент володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні	60...63			E	достатньо
Студент володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу	35...59	2	Низький (рецептивно-продуктивний)	FX	незадовільно з можливістю повторного складання
Студент володіє матеріалом на рівні елементарного розпізнання і відтворення окремих фактів, елементів, об'єктів.	1...34			F	непринятно з обов'язковим повторним вивченням

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

ЛАППО Ірина Миколаївна

ЛЮЛЬКА Василь Степанович

Навчально-методичний посібник
з дисципліни

**«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»
ЧАСТИНА 1: ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА,
ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

ДЛЯ ПІДГОТОВКИ БАКАЛАВРІВ
ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ТА ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

Технічний редактор

О. Клімова

Комп'ютерна верстка
та макетування

І. Липко

*Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія KB № 17500-6250 ПР від 16.11.2010 р.*

Підписано до друку 27.12.2018 р. Формат 60 x 84 1/16.
Папір офсетний. Друк на різнографі.
Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 3,60.
Наклад 50 прим. Зам. № 869/1.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т.Г. Шевченка.
14013, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
Тел. 65-17-99.
chnpu.tipograf@gmail.com