Національний університет “Чернігівський колегіум” імені Т.Г. Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

Освітнього ступеня «магістр»

на тему

Формування дослідницької компетентності учнів під час вивчення застосувань похідної у профільному навчанні математики

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 61

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Штаба А.С.

Науковий керівник:

к. п. н., доцент Філон Л. Г.

Чернігів − 2020

Роботу подано до розгляду «_____» ____________________ 20__ року.

Студентка __________ ______________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник __________ ______________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент __________ ______________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри ____

протокол №____ від «_____» ____________________ 20__ року
Студентка допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії

Завідувач кафедри _______________ ______________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

У період всезагального розвитку суспільства доцільно змінювати традиційну освіту і розробляти новітні стратегії, які будуть орієнтовані на розвиток і формування у школярів необхідних життєвих навичок. Суспільство нашого часу потребує людей, які здатні на самопізнання, пошук та самоосвіту, креативне використання своїх знань, навичок та вмінь, саморозвиток та самостійно приймати рішення.

Освіта, що орієнтована на науку, представляє собою спеціалізований метод навчання, заснований на дослідно-спрямованому навчанні, що надає змогу поглиблено вивчати профільні предмети та здобувати компетентності, потрібні для досліджень, експериментів, винаходів та конструкторської діяльності [32, с.79].

Щоб оновити успішність сучасної школи, необхідна якісна освіта, орієнтована на компетентнісний підхід. Проблему досконального розуміння системи і грамотного навчання школярів шляхом впровадження компетентнісного підходу активно схвалюють більшість сучасних педагогів-науковців та освітян практиків.

Бути математично компетентним означає вміти бачити і використовувати математику на практиці в реальному житті, адже, саме це для спеціалістів будь-яких профілів є необхідним у їхній загальній культурі. Однією зі складових математичної компетентності є дослідницька компетентність.

На сьогодні все актуальнішим стає питання створення методичної концепції організації науково-дослідницької діяльності учнів профільних закладів, спрямованої на формування у них наукового світогляду, набуття навичок самостійності в науковій практиці, дослідах та пошуковій діяльності, ріст та розвиток їх інтелекту, творчості, моральності, а також психічних, фізичних та соціальних якостей, порив до саморозвитку та самостійного навчання [32, с. 79].

Основу побудови змісту та організації процесу навчання математики на сучасному етапі реформування вітчизняної освіти становить компетентнісний підхід. Навчання математики в класах фізико-математичного профілю спрямоване на набуття учнями насамперед математичної компетентності як ключової так і предметної [32, с.79].

У профільній математичній освіті є досить великі перспективи забезпечити не лише компетентне оволодіння математичними знаннями та уміннями школярів для досягнення великих можливостей, а й формувати навички та уміння, необхідні їм щодня та майбутній професійній діяльності, тобто формуємо в учнів навички використання дослідницької компетентності.

Розділ алгебри та початків аналізу «Похідна та її застосування» посідає значиме місце в курсі математики і на профільному рівні її вивчення надає можливість тренувати в школярів просторове мислення і логіку, та математичну, алгоритмічну та інформаційну культуру, розвиває практичні вміння учня, а саме, наполегливість, тактовність висловлення і культура поведінки, обґрунтування власних міркувань тощо. Тема похідної широко застосовується на практиці, саме тому посідає важливе місце в формуванні математичних компетентностей школярів. Використовуючи дану тему, можливе вирішення завдань різних предметів: біології, астрономії, хімії, фізики, техніки, економіки тощо. Отже, яку б спеціальність (професію) учні не виберуть в майбутньому, вони повинні мати базові знання з теми «Похідна та її застосування», які будуть використовувати в подальшому і, при потребі, вдосконалювати та поглиблювати.

Для курсу математики диференціальне числення є важливою складовою, оскільки при вивченні даної теми досліджують властивості функцій, за допомогою яких будують графіки, обчислюють площу геометричних фігур та об'єм тіл, розв'язують задачі на найбільше й найменше значення, поглиблюють знання з історії математики. Дослідження даної теми актуальне тим, що для великої кількості задач елементарної математики в закладах загальної середньої освіти можливе «елементарне» та «неелементарне» розв’язування. Застосовуючи похідну, як правило, можна більш ефективно розв’язувати задачі. Маємо змогу оцінити силу, красу і велич новітнього апарату математики. Таким чином, розгляд та дослідження теми «Похідна та її застосування» спрямоване на формування дослідницької діяльності.

В шкільному курсі математики над проблемним питанням вивчення похідної працювали такі педагоги, як Л. С. Капкаєва, Т. В. Думанська, З. І. Слєпкань, О. Е. Корнійчук, , В. Д. Погребний та інші, які мають спільну думку, що дана тема має вагоме значення для розвитку учнів.

Дослідницька діяльність розглядалася у роботах вчених нашого часу, а саме А. Альбрехт, К. Баханова, С. Васильєвої, В. Гнєдашева, В. Голобородька, Л. Задорожної, Т. Кудрявцева, І. Лернера, О. Матюшкіна, М. Махмутова, В. Паламарчук, О. Пометун, С. Сєрової, А. Сиротенко, Г. Фреймана та ін. У даних роботах розгортається не тільки важливість дослідницької діяльності школярів у розвитку особистості, а й визначення основних способів для організації такої діяльності. Науковцями обґрунтована проблема навчання і дидактичні бази формування логічного мислення школярів, розроблені творчо-прогресивні технології, а також започаткували пошуково-проблемні методи в процесі навчання.

Особливостями формування дослідницької діяльності займалися такі науковця як Недодатко Н. Г. , Філон Л. Г., Лук’янова С. М., Дремова І. А. та інші.

Мета дослідження полягає у визначенні та обґрунтуванні організаційно-педагогічних умов та розробці компетентнісно-орієнтованих методичних рекомендацій формування дослідницької компетентності учнів під час вивчення застосувань похідної, експериментальній перевірці ефективності їх реалізації у профільному навчанні математики.

Предмет дослідження – система задач на застосування похідної, спрямована на формування дослідницької компетентності учнів та методика навчання їх розв’язування.

Об’єкт дослідження – навчання алгебри і початків аналізу на профільному рівні у закладах загальної середньої освіти.

Відповідно до мети дослідження визначено такі **завдання дослідження**:

1) проаналізувати науково-методичні джерела стосовно трактування компетентнісного підходу у навчанні математики;
2) з’ясувати шляхи формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики;
3) аналіз навчальних програм з математики та підручників для учнів 10-х класів з алгебри та початків аналізу стосовно дослідницької компетентності учнів;
4) проаналізувати тему «Похідна та її застосування» з точки зору компетентнісного підходу;
5) сформувати методичні рекомендації до формування дослідницької правильності школярів для вивчення теми «Похідна та її застосування»
6) розробити систему задач на формування дослідницької компетентності учнів та рекомендації до її використання у навчальному процесі;
7) провести апробацію запропонованих методичних рекомендацій дослідження.

Для досягнення мети і виконання окреслених завдань було використано такі **методи дослідження**:

- аналіз психологічної, педагогічної, науково-навчальної та методичної літератури з даної проблеми;
- вивчення і аналіз впровадження компетентісного підходу у навчанні алгебри та початків аналізу;
- спостереження;
- педагогічний експеримент.

Питання навчальної дослідницької діяльності є багатоаспектним, його досліджували з точки зору філософії, психології, педагогіки, методики навчання окремих навчальних дисциплін тощо.

Особливої значимості воно набуває в контексті формування дослідницької компетентності особистості. Зокрема, на необхідності формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників наголошено у дослідженні [22].

Актуальними залишаються питання організації навчально-дослідницької діяльності з математики на профільному рівні її вивчення, формування дослідницьких умінь школярів під час розв’язування математичних задач [32].

Тези кваліфікаційної роботи представлені у «Збірник тез доповідей всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених» [35].

Розділ 1. Теоретичні засади формування дослідницької компетентності учнів у профільному навчанні математики

1.1. Компетентнісний підхід у навчанні математики

Механізм освіти постійно оновлюється та вдосконалюється. Одне із впроваджень вдосконалення - компетентнісний підхід до вивчення матеріалу, за допомогою якого формуються компетентності. Таким чином, у вчителя постає проблема - реалізація грамотного підходу до навчального процесу, зокрема, на уроках алгебри і початків аналізу. Ми розглянемо це питання в період вивчення теми «Похідна та її застосування».

Детально розглянемо поняття «компетенція» і «компетентність».

«Компетенція – це об'єктивна категорія, суспільно визнаний рівень знань, умінь, навичок, ставлень тощо у певній сфері діяльності людини як абстрактного носія. Компетентність – це інтегративне утворення особистості, що поєднує в собі знання, уміння, навички, досвід і особистісні якості, які обумовлюють прагнення, готовність і здатність розв'язувати проблеми і завдання, що виникають в реальних життєвих ситуаціях, усвідомлюючи при цьому значущість предмету і результату діяльності» [5, с. 29]. Компетенція - це ідеальна нормативна основа навчального процесу, яка формує якості випускника, а компетентність – це результат, тобто рівень прояву (сформованості).

Г. Ф. Звєрєва каже, що «компетенція – це сукупність взаємопов'язаних якостей особистості (знань, умінь, навичок, способів діяльності), які є заданими до відповідного кола предметів і процесів та необхідними для якісної продуктивної дії по відношенню до них, а в свою чергу компетентність – це володіння людиною відповідною компетенцією, що містить її особистісне ставлення до предмета діяльності» [9, с. 7].

Згідно з навчальною програмою [21] «навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей», до яких належить:

- Спілкуватися державною (або рідною у разі відмінності) мовою.
- Спілкуватися мовами іноземних країн.

- Математична грамотність.
- У природничих науках і технологіях базові компетентності.
- Інформаційна та цифрова компетентність.
- Навики розвиватись та вчитись впродовж всього життя.
- Підприємливість та ініціативність.
- Соціально-громадянська компетентність.
- Ерудиція та самовираження у культурній сфері.
- Здоровий спосіб життя та екологічна грамотність [21, с. 3-6].

Звичайно, що вчитель математики на своїх уроках має надавати багато уваги формуванню в школярів усіх вище вказаних компетентностей, а в першу чергу - математичної грамотності.

М. С. Головань констатує: «У наукових публікаціях і нормативних документах немає однозначного трактування поняття «математична компетентність». Одні автори тлумачать математичну компетентність як якість особистості, інші – як уміння застосовувати знання та уміння на практиці; як поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини; як досвід діяльності; як особистісне утворення, що характеризує здатність учня здійснювати математичну діяльність» [6, с. 36]. Наведемо деякі визначення поняття «математична компетентність»:

1) «інтегративна особистісна якість, заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, що свідчать про готовність і здатність здійснювати математичну діяльність» [6, с.23];

2) «уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [26, с.15].

1.2. Дослідницька математична компетентність учнів

Дослідницьку компетентність ми будемо розглядати спираючись на такі поняття як «компетенція» та «компетентність».

Дослідницька компетентність - це готовність індивідуально і самостійно мислити, але виявляється вона в суперечках, дискусіях, при обговореннях та публічних виступах, тому комунікативні навички учасників осмислення проблеми для формування дослідницької діяльності учнів відіграють вирішальну роль в успіху.

Принципи дослідницької діяльності:

- природність - проблема не повинна бути надуманою, а має бути цікавою. Виявляємо значиму для учня проблему в рамках досліджуваної теми;
- усвідомленість - розуміння проблеми, мети, завдань, ходу і результатів дослідження;
- самодіяльність - використання власного досвіду;
- наочність і культуродоцільність - традиції світорозуміння і взаємодії, характерні для даної соціальної спільноти.

Об'єднання теоретичних і практичних дослідницьких умінь утворюють модель дослідницької компетентності.

Розглянемо поняття дослідницької діяльності. Дослідниця М. О. Князян, говорить про те, що «дослідницька діяльність – це один із видів творчої діяльності учнів, що характеризується рядом особливостей:

1. Дослідницька діяльність пов'язана з розв'язанням учнями творчих завдань.

2. Дослідницька діяльність обов'язково повинна проходити під керівництвом спеціаліста.

3. Головним є отримання нових знань. Завдання повинні бути посильні для учнів.

4. Дослідницькою діяльністю можуть займатися всі учні: і ті, які мають високий рівень підготовки, і ті, які мають середній рівень» [12].

Відповідно з «концепцією проблемно-розвивального навчання», головними функціями дослідницької діяльності виступають наступні: забезпечення провідного шляху засвоєння знань, вдосконалення наукової діяльності учнів, розвиток пізнавальних та інтелектуальних мотивів навчання та вдосконалення дослідницьких умінь та творчих здібностей учнів [12].

Таким чином, у структурі дослідницької компетентності зазвичай виділяють такі компоненти:

– мотиваційно-ціннісний;

Цей компонент наявний при вивченні теми «Похідна та її застосування», тому що після вивчення основних теорем про застосування похідної (необхідна та достатня умова існування екстремуму, знаходження найбільшого та найменшого значень функції та відрізку та інше) йтиме мова про використання похідної при розв’язуванні рівнянь та доведенні нерівностей з її допомогою, також розглядаються задачі прикладного змісту. Таким чином, ми можемо на уроках мотивувати учнів до вивчення похідної, оскільки вона дуже важлива при розв’язуванні різноманітних задач і вправ.

– когнітивний;

– діяльнісно-практичний;

Також важливий компонент у розгляді даної теми. При вивченні похідної розглядаються на уроках багато практичних вправ із застосуванням похідної.

– рефлексивний компонент;

При розв’язуванні задач прикладного змісту на застосування похідної потрібно вміло дати пояснення та аналіз отриманої відповіді, тому даний компонент дослідницької діяльності є також використовуваним та важливим.

На нашу думку, вдосконалення дослідницької компетентності учнів - першочергове завдання, що стоїть перед новітньою системою освіти, бо вона має виховати в учня наполегливість, допомогти закріпити і поглибити знання, сформувати здатність і готовність до розв’язування складних нестандартних задач. Це сприятиме підвищенню інтересу до вивчення математики. А тема

«Похідна та її застосування» має багато можливостей у формуванні даної компетентності.

З огляду компетентнісного підходу «дослідницька компетентність розглядається як інтегральна характеристика особистості учня, що виражається в готовності і здатності самостійно освоювати і здобувати нові знання в результаті перенесення смислового контексту діяльності від функціонального до перетворювального, базуючись на наявних знаннях, вміннях, навичках і способах діяльності» [7, с.56].

Дослідницька компетентність ставить перед собою завдання виконання учнями дослідницьких навчальних задач із результатом, який заздалегідь для них невідомий, напрямлений на створення уявлення про об’єкти чи явища навколишнього середовища, під проводом вчителя.

Потреба оперувати математичною компетентністю, в тому числі дослідницькою, пов’язана з тими вимогами, які на сьогодні нам диктує суспільство. Насамперед, завдання вчителя – організувати таку дослідницьку діяльність для учня, за якої він буде самостійно знаходити інформацію, формулювати власну точку бачення і буде вміти отримані знання застосовувати на практиці.

Отже, «компетентнісно-орієнтоване навчання спрямоване на практичний результат, що зумовлює принципові зміни в організації освітнього процесу, який бере напрямок на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань і умінь учнів».

1.3. Шляхи формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики

Дослідницьку компетентність треба розглядати як складову частину загальної математичної компетентності.

Навчальна дослідницька діяльність спрямована на «одержання суспільно значущих нових знань про певні об’єкти, процеси або явища і має у своєму процесі певні етапи (стадії): етап планування (проектування) дослідження, етап застосування методів до об’єкта дослідження з метою отримання потрібних результатів, етап формулювання та інтерпретації результатів дослідження».

Навчально-дослідна діяльність містить такі компоненти [7, с.58-59]:

- проектувальний компонент, що вимагає навиків, умінь та спроможності знаходження та формулювання проблем, вказування на об’єкт та предмет дослідження, формулювати мету та гіпотезу дослідження, визначати базові поняття;

- інформаційний компонент вимагає володіти методами підбирати дані відповідно до гіпотез, створювати масиви емпіричних даних, опрацьовувати різні джерела інформації і т.д.;

- аналітичний компонент, що вибір і використання універсальних та спеціальних методів дослідження, розвинуте логічне мислення, творчі здібності і здатності (інтуїція, здатність до інсайту, відкриття, продуктивного мислення);

- практичний компонент, який прогнозує створення, передавання та упровадження результатів дослідження у практику.

Таким чином, дослідницька діяльність заснована на здатності розпізнавати проблему, формулювати гіпотезу, вибирати і аналізувати дані, потрібні для дослідження, вибирати відповідні методи дослідження та обробки даних, зберігати проміжні і кінцеві результати досліджень, обговорювати і інтерпретувати результати досліджень і вміти на практиці їх використовувати [7, с.59].

Дослідницькі навички дозволяють звикнути до системи інтелектуальних і практичних вмінь людини, необхідної для самостійного дослідження. Основою дослідницьких дій є інтелектуальні навички, а практичне – це система оволодіння деякими пошуковими методами, що дає певні результати – нові засвоєні знання, отримані факти та закономірності.

Учні самостійно вирішують нове завдання з впровадженням деяких елементів: дослідження, спостереження, незалежний аналіз фактів, спрямованих на створення якісно нових цінностей, які важливі для розвитку особистості і направляють кожного учня до досягнення індивідуального і особливого успіху.

Сенс дослідницької технології в тому, щоб навчальний процес набув властивість створювати нове знання, актуальне для сьогодення і майбутнього пізнавального суб'єкта.

Дослідницька діяльність властива людині від природи. Її прояв - вміння людини не просто дивитися, а бачити, спостерігати. Дослідження важко уявити без творчості. Тут розвивається спостережливість, незалежність в судженнях, високий інтелект, багатство внутрішнього світу.

Три основні елементи дослідницької компетентності того, хто навчається:

- виділення мети діяльності;
- визначення предмета, засобів діяльності, реалізація намічених дій;
- рефлексія, аналіз результатів.

Вчитель здійснює тренування мотиваційного компонента, забезпечуючи позитивне ставлення учнів до математичної діяльності; виховує пізнавальну зацікавленість. На уроках педагог використовує висловлювання відомих вчених. Вправи по шифрування дають можливість швидко змінити якість знань школярів і познайомити з відомими математиками-науковцями.

При вивченні курсу математики вчителю бажано використовувати деталі історії науки. Таким чином ми сприятимемо розвитку дослідницької компетентності в учнів. Г. Лейбніц підкреслював: «Хто хоче обмежитись сучасним, без знання минулого, той ніколи сучасного не зрозуміє». Використання історизму розвитку математики, дозволяє вирішувати певні педагогічні завдання:

1) ріст зацікавленості до вивчення предмета;
2) формування в учнів загальної культури;

3) формування дослідної грамотності;

4) формування наукового мислення;

5) гуманістичне виховання.

Для того, щоб успішно брати участь в сучасному суспільному житті, людина повинна володіти деякими прийомами математичної діяльності та навиками їх застосовувати для розв’язування прикладних завдань. Під час роботи над завданнями цього типу учнів навчають елементам математичного моделювання; вони не тільки засвоюють необхідні математичні концепції, а й розуміють взаємозв'язок між теорією і практикою, усвідомлюючи важливість і необхідність вивчати предмет та формують ключові поняття.

Забезпечують гармонійну взаємодію учнів із суспільством прикладні задачі, зокрема ті, що залишаються актуальними впродовж століть. Вони сприяють розвитку дослідницької компетентності учнів.

Систематичне розв’язування задач за прикладним напрямком допомагає формувати в учнів механізми знань, умінь і навичок, робота з якими розвиває вміння розуміти зміст і застосовувати отримані знання на практиці, аналізувати результати, робити узагальнення, порівняння, відповідні висновки, розширюють бачення учнів.

Текстові арифметичні задачі є елементом науково-дослідного дослідження. Вони являють собою відображення типових життєвих ситуацій, саме тому їх можна вважати документами свого часу, а збірник завдань – збірник документів.

Формування вагомого компонента математичної компетентності будується на базі диференційованого індивідуального підходу. І тоді використовується велика різноманітність різних форм організації основної навчальної діяльності школярів: індивідуальна, групова, фронтальна, робота в парах.

Впровадження в навчальний процес системи навчально-дослідних завдань можна здійснювати поетапно (підготовчий, формування умінь, вдосконалення умінь, оцінка досягнутих результатів). Для кожного етапу визначаються конкретні методи та форми навчально-дослідницької діяльності.

На підготовчому етапі десятикласники ознайомлюються з технологією дослідження та шляхами його розвязування, зразками окремих дій.

Під час фронтальної роботи на заняттях в класі формуються навчально-дослідницькі навички розв'язування задач.

Можливо створювати навчально-дослідницькі вміння покомпонентно. Процес даного навчання складається з етапів послідовних дій:

1. Встановлення позитивної мотивації навчання та дослідницької діяльності.

2. Перегляд змісту, структури навчального дослідницького вміння та його важливість.

3. Навчання виконувати індивідуальні дії і загальний розвиток навичок.

4. Розв'язування завдань, що потребують застосувати знань та вмінь.

5. Використання навичок у нових обстановах [22].

Реалізацію навчально-дослідницької діяльності необхідно здійснювати не тільки на уроках, а і в позаурочний час. Необхідно залучувати учнів до участі в різноманітних олімпіадах та конкурсах, квестах, до участі в наукових конференціях.

На уроках дослідницьку діяльність можна здійснювати за допомогою мультимедійного забезпечення з використанням різноманітних математичних програм (GRAN, GRAN 1, GRAN 2, Advanced Grapher; програми динамічної математики GeoGebra, GeoGebra 5.0, ресурси Web 2.0). Інформаційно-комунікаційні технології в першу чергу унаочнюють складний абстрактний матеріал. За допомогою таких програм можна дослідити різні математичні проблеми, створити модель реального об'єкта та інше.

Розділ 2. Методичні рекомендації по формуванню дослідницької компетентності учнів профільних класів під час вивчення застосувань похідної

2.1. Аналіз навчальних програм та альтернативних підручників з алгебри та початків аналізу на предмет дослідження

Серед пріоритетних завдань загальної середньої освіти є формування особистості учня, розвиток здібностей і обдарувань, наукового світогляду. Підготовка випускника закладу загальної середньої освіти, здатного орієнтуватися в сучасному динамічному інформаційному просторі, здобувати знання впродовж усього життя та застосовувати їх до розв'язування складних професійних завдань, вимагає підвищення якості організації освітньої діяльності [32, с.79].

За програмою [21] вартою є організація дослідницької, тобто проблемно-пошукової діяльності учнів на уроках, позакласних та факультативних заняттях з математики.

Починаючи з 2018-2019 навчального року в зміст навчальної програми з математики вносяться певні уточнення щодо формування компетентностей в учнів, а також наскрізних ліній.

Окрім математичної компетентності, завдання вчителя на уроці алгебри та початків аналізу при вивченні теми «Похідна та її застосування» – це формування інших дев'яти компетентностей. У навчальній програмі ще виділяються чотири наскрізні лінії ключових компетентностей, зокрема: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність» [21].

Також зазначено, що основна мета вивчення теми «Похідна та її застосування» у класі з профільним вивченням математики - ознайомити учнів з використанням поняття і властивостей похідної для розв'язування завдань, безпосередньо визначення властивостей функції, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Після отримання знань з даної теми учні мають:

- **формулювати** означення похідної та **пояснювати** її геометричний і фізичний зміст;
- **знаходити** кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; **знаходити** похідні функцій;
- **застосовувати** похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;
- **знаходити** найбільше і найменше значення функції на проміжку;
- **розв'язувати** прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;
- **застосовувати** результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;
- **описувати** поняття опуклості функції та точок перегину;
- **застосовувати** другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;
- **досліджувати** функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функцій [21].

Міністерством освіти і науки (МОН) у переліку навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників для викладання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні в 10 класі запропонований підручник [19]. На наш погляд, в даному підручнику теоретичний матеріал по введенню понять математичного аналізу запропоновано на достатньо доступному для учнів рівні при поглибленому вивченні математики. На початку тексту параграфів запропоновано приклади розв'язування однієї або декількох типових завдань. Для зручної роботи з підручником авторами введено умовні позначення, згідно яких можна з'ясувати, що в підручнику присутня рівнева диференціація завдань, їх достатньо велика кількість, і для того, щоб їх всі розв'язати замало часу відведено на тему, але з іншого боку у вчителя завжди є великий вибір завдань, які можна розв'язати з учнями на уроці і дати на домашнє опрацювання. Підручник також містить коротку інформацію про видатних математиків, що може послугувати зацікавленості і якості мотивації учнів. Тема «Похідна та її застосування» подана в другому розділі підручника в параграфах з 34 по 44.

Отже, розглянувши даний підручник [19], робимо висновки, що в ньому є багато задач різного рівня складності, адже, саме це є реалізацією принципів рівневої диференціації та особливого індивідуального підходу в навчанні, формування пізнавального інтересу до математики. З використанням таких різноманітних завдань вчитель має можливість впроваджувати компетентнісний підхід та формувати математичну грамотність. Також зазначимо, що школярі мають можливість самостійно розвивати свої здібності та навчатись, бо після кожного правила або теореми є приклад, в якому показано принцип їх застосування.

Починаючи з 2018 навчального року багато шкіл почали використовувати новий підручник таких авторів як А. Г. Мезляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [18]. Так як концепція спеціалізованого навчання року була змінена і вивчення математики відбувається двохрівнево – базово і профільно, то отримуємо, що для учнів, які навчалися у 8-9 класах за поглибленим рівнем програми, розроблено навчальну програму з математики для продовження поглибленого вивчення. Тому підручник [18] для профільного рівня навчання, але уточнено, що за ним мають можливість навчатись і учні, які починали вивчення математики на поглибленому рівні у 8 класі, саме тому він має більше теоретичного та практичного матеріалу, ніж звичайний підручник профільного рівня.

Вивчаючи тему «Похідна та її застосування», можна використовувати підручник профільного рівня авторів: О. С. Істер, О. В. Єргіна [10], Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова [1].

Також зазначимо, що більша кількість задач, спрямованих на формування дослідницької коспетентності вивчаючи тему «Похідна та її застосування», міститься у підручниках поглибленого рівня, наприклад, підручник [19].

Звісно, коли рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь зростає, тоді якість знань учнів стає вищою. Знання, отримані учнями, зводяться в теоретичні поняття, які в свою чергу відображають внутрішні зв’язки предметів і явищ та проявляються безпосередньо у способах діяльності старшокласників. Для забезпечення впровадження в навчальний процес системи навчально-дослідних завдань необхідна цілеспрямована підготовка вчителів до організації навчально-дослідницької діяльності школярів.

Впроваджуючи компетентнісний підхід у вивчення математики, створюють умови для універсального розвитку дитини, і при цьому від вчителя вимагається розвивати національну свідомість учнів, вміння алгоритмічно міркувати, навчати розрізняти проблеми, які виникають у навколишній практиці, і розв’язувати їх засобами математики, щоб створити умови для формування позитивних якостей особистості.

2.2. Теоретико-математичні основи застосування похідної з точки зору компетентнісного підходу

Зробимо логічний математичний аналіз теми «Похідна та її застосування», використовуючи підручник [17], з погляду реалізації компетентнісного підходу.

Бажано при вирішенні завдань, що ведуть до концепції похідної, продовжувати діяти відповідно до алгоритму, як показано розробкою В. В. Корольського [13,с.19] для вищих навчальних закладів, з іншого боку, буде більш практично адаптувати завдання запропоновані школярам використовуючи візуальні дані, наближені до життєвих ситуацій, замість запропонованих абстрактних об'єктів.

Для того, щоб сформувати предметну математичну компетентність та розуміння означення похідної разом з учнями приходять до висновку про геометричний та механічний змісти похідної на прикладах задач про дотичну до графіка функції та про миттєву швидкість.

Після розгляду способу знаходження похідної за допомогою означення, ознайомлюються з таблицею похідних. За допомогою формування дослідницької компетентності перед учнями ставлять задачу – знайти похідні зазначених функцій.

Про те, що використовувати таблицю похідних важливо учні переконаються на практиці, але спочатку їм потрібно розглянути загальні методи знаходження похідних різних видів функцій.

Вчителі достатньо часу приділяють питанню правил обчислення похідних, а також застосуванню цих правил на практиці, тому, при виконанні учнями завдань практичного змісту працюють синтез та аналіз, система узагальнення та трансформації, пошук, оскільки потрібна оцінка фактів, активно працює уява. Отже, під час виконання практичних завдань формуються всі компоненти математичної грамотності, а саме дослідницька.

Далі розглядаються основні теореми диференціального числення: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа.

Дані теореми потрібно доводити, що, як свідчить З. І. Слєпкань [28, с.414], «не викликає в учнів труднощів, тому зазвичай пропонують їм розглядати доведення самостійно. Дане завдання спрямоване на формування такої компетентності як «вміння вчитися впродовж життя» та дослідницької компетентності».

Потім ознайомлюються із застосування похідної до дослідження функцій.

Пояснення ознак зростання, спадання та сталості функцій розпочинають з ілюстрацій графіків функцій, які учні вже знають, а саме параболи, гіперболи, прямої, паралельної осі Ox. Властивості монотонності цих функцій вже були доведені, тому їх тільки пов'язують з використанням похідної.

Якщо розглядають графік функції $y = x^2$, то показують, що на проміжку $x\epsilon(0; \infty)$, де, як відомо, функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатним напрямком осі Ox, тобто похідна у цих точках додатна, аналогічно показують, що на проміжку $x\epsilon(-\infty; 0)$ похідна від'ємна.

У випадку розгляду прямої, паралельної осі Ox, яка задається функцією виду $y = b$, отримують, що похідна в будь-якій точці буде дорівнювати нулю. Дані спостереження підтверджують наступними теоремами.

Теорема 6 (ознака зростання функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 7 (ознака спадання функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема 8 (ознака сталості функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Теорема 9 (властивість зростаючої (спадної) функції).

Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \epsilon I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Дослідження функцій на монотонність є алгоритмічною вправою, тому зазвичай виокремлюють кроки дослідження на прикладі декількох функцій. Подібний алгоритм виклала у своєму посібнику З. І. Слєпкань [28, с.413]:

«Для того, щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) Знайти область визначення функції та точки розриву.
2) Знайти похідну.
3) Записати і розв’язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множин її розв’язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції.
4) Записати і розв’язати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множин її розв’язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції».

Візьмемо приклад з підручника [19, с.223] на застосування вищезгаданого алгоритму та теорем.

Завдання 1 [17, с.223]. Дослідити функцію на монотонність

$$y = 3x^5 - 5x^3 + 1.$$

Згідно вищезгаданого алгоритму перше, що треба знайти – це область визначення даної функції. Тут $D(y) = R$.

Наступний крок – це знаходження похідної:

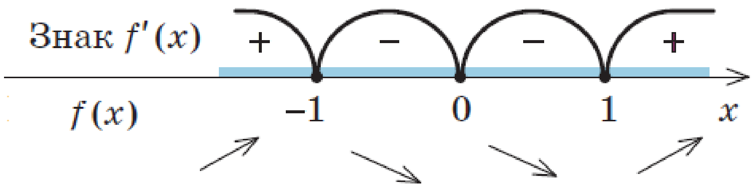
$$y' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$$

Далі потрібно знайти критичні точки, тобто прирівняти похідну до нуля і розв’язати рівняння:

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

Тут $x = 0, x = 1, x = -1.$

Далі позначаємо одержані критичні точки на області визначення і визначаємо знаки похідної функції і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками.



На основі одержаних позначень робимо висновок, що дана функція зростає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, а спадає на проміжку $[-1; 1]$.

Учням також показують, що теорему про ознаку сталості функції використовують ще для доведення тотожностей. Тоді, коли вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x \epsilon I$ використовується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \epsilon I$.

При розгляді теми «Точки екстремуму і екстремуми функції» учням акцентуються увагу на те, що точка максимуму і мінімуму – це точки екстремуму, а значення функції в цих точках – це екстремум функції. Школярі часто переплутують ці поняття і помиляються.

Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки.

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Потім, демонструючи на графіках, вводять означення точок максимуму і мінімуму. Похідну та точки екстремуму об'єднує наступна теорема.

Теорема 10 (про точки екстремуму).

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0.

Правдивість даної теореми слідує з теореми Ферма.

Природно виникає питання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна рівна нулю або не існує? Відповідь на це питання є заперечною. Вправами показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0.

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Враховуючи дане означення приходять до висновку, що точки екстремуму потрібно знаходити серед критичних точок.

Далі ознайомлюються з теоремами, які є достатніми умовами, що вказують, як використовуючи похідну можна відшукати точки екстремуму функції.

Теорема 11 (ознака точки максимуму функції).

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

Переходячи до відшукання максимуму і мінімуму функції зауважують, що екстремуми характеризують поводження функції в деякому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на її частині.

Потім, вивчивши необхідні та достатні умови існування точок екстремуму, вводиться алгоритм дослідження функцій на екстремум.

1) Знайти область визначення функції $f(x)$.

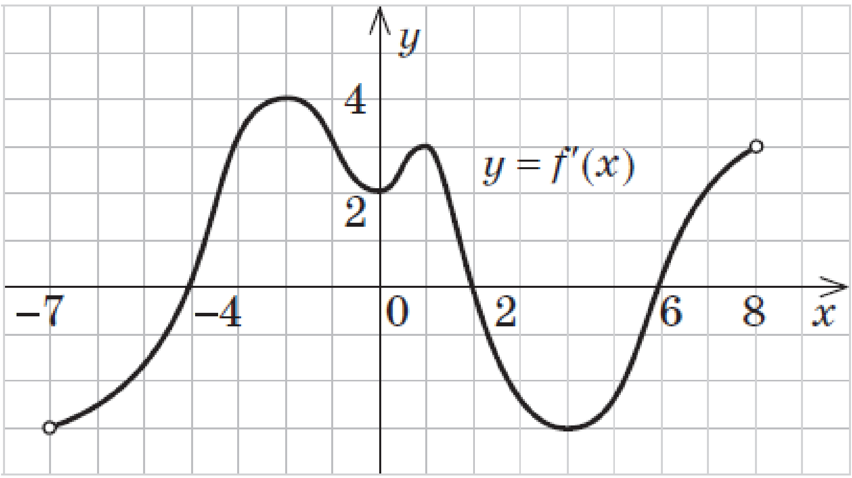
2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$ та визначити критичні точки.

3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки щодо точок максимуму і мінімуму.

4) Обчислити максимуми та мінімуму функції, підставивши у формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

Наведемо приклад на знаходження точок екстремуму.

Завдання 2 [17, с.231]. Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-7; 8)$. На малюнку наведено графік похідної. Знайти критичні точки функції. Вказати, які з них є точками мінімуму, а які – максимуму.



Критичні точки – це внутрішні точки області визначення, де похідна дорівнює нулю або не існує. Звернемо увагу на графік похідної даної функції, на якому бачимо, що похідна функції $f(x)$ існує на всій заданій області визначення. Отже, критичними будуть ті значення x, при яких похідна дорівнює нулю. А саме це значення -4, 2 і 6. У точках -4 і 6 похідна змінює знак з «-» на «+», отже, це точки мінімуму. У точці 2 похідна змінює знак з «+» на «-», отже, це точка максимуму.

Для функції f, неперервної на відрізку $[a; b]$, пошук найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку проводять, користуючись такою схемою.

1) Знайти похідну функції $f(x)$.

2) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать відрізку $[a; b]$.
3) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.
4) З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Якщо неперервна функція набуває найбільшого і найменшого значень, то вони можуть досягатись лише у стаціонарних точках і на кінцях відрізка, тому не перевіряють достатні умови існування екстремуму функції в стаціонарних точках. Позначають найменше та найбільше значення функції на відрізку відповідно наступним чином:

$$\min_{[a;b]} f(x), \max_{[a;b]} f(x).$$

Наведемо приклад.

Завдання 3 [17, с. 237]. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на відрізку $[1; 3]$.

Першим кроком слід зрозуміти, що даний відрізок належить області визначення даної функції. Областю визначення цієї функції є всі дійсні числа, тому даний відрізок належить до області визначення даної функції. Далі знаходимо похідну функції:

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

Знайдемо критичні точки. Для цього розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 12 = 0;$$

$$x = \pm 2.$$

З одержаних точок обираємо ті, які належать даному відрізку, тобто лише точку $x = 2$.

Обчислимо значення на кінцях відрізка та у вибраній критичній точці:

$$f(1) = 1, f(2) = -4, f(3) = 3.$$

Серед одержаний значень обираємо найбільше та найменше. Таким чином,

$$\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = -4, \quad \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3.$$

Учням слід акцентувати увагу, що після отримання знань про екстремуми вони мають можливість розв’язувати задачі не тільки з підручника, а і з дійсного життя. Деякі з них виділені у підручнику [19, с. 158]: «яку кількість продукції має випустити підприємство, щоб отримати найбільший прибуток, як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час, як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими». Запропонувавши текстові задачі, учні мотивуються вивчати тему та узагальнювати свої знання. Також схожі завдання формують математичну грамотність та такі наскрізні лінії ключових компетентностей, як: «екологічна безпека та сталий розвиток», «підприємливість та фінансова грамотність».

Учні, починаючи працювати з поняттям «опуклість функції», вивчають визначення другої похідної. Для цього в першу чергу розглядають задачу про миттєву швидкість, яка застосовує поняття з фізики та формує математичну компетентність та основні компетентності у природничих науках.

Зв'язок похідної та визначенням опуклості функції розглядають за допомогою наступних теорем.

Теорема 12 (ознака опуклості функції вниз).

Якщо для всіх x з деякого проміжку функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на даному проміжку.

Теорема 13 (ознака опуклості функції вгору).

Якщо для всіх x з деякого проміжку функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x) < 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на даному проміжку.

Теорема 14 (про точку перегину).

Якщо x_0 є точкою перегину функції $f(x)$ і в цій точці функція двічі диференційована, то $f''(x) = 0$.

Теорема 14 є необхідною, але не достатньою умовою для існування точки перегину. Точка x_0 буде точкою перегину однозначно, якщо функція $f(x)$ при переході через цю точку змінює знак на протилежний.

Також вводять для учнів алгоритм відшукання точок перегину.

1) Знайти область визначення та інтервали на яких функція неперервна.
2) Визначити другу похідну функції.
3) Знайти внутрішні точки області визначення, в яких друга похідна дорівнює нулю.
4) Нанести знайдені точки на координатну пряму і знайти знак другої похідної та характер поведінки функції на кожному інтервалі.
5) Зробити висновки, користуючись теоремами 12-14.

Наведемо приклад.

Завдання 4 [17, с. 244]. Дослідити функцію на опуклість та точки перегину:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1.$$

Першим кроком знаходимо область визначення даної функції. Маємо, що областю визначення цієї функції є всі дійсні числа, тому функція $f(x)$ неперервна в будь-якій точці своєї області визначення (як многочлен). Далі знаходимо другу похідну цієї функції:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x;$$

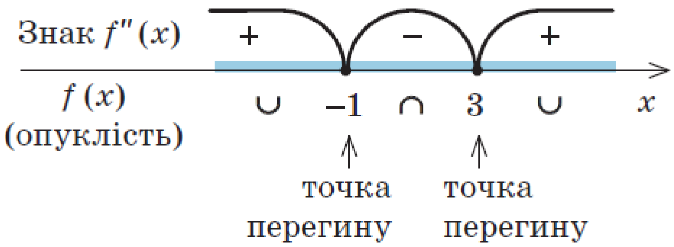
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3).$$

Далі знаходимо внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує або дорівнює нулю. Але оскільки наша функція неперервна на всій області визначення, то таким чином знаходимо ті точки, в яких друга похідна дорівнює нулю. Для цього розв’язуємо рівняння $f''(x) = 0$:

$$12(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

З теореми Вієта коренями даного тричлена є числа -1 і 3. Позначаємо одержані значення на області визначення функції, визначаємо знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення одержаними точками.



За цієї схемою робимо висновок, що функція опукла вниз на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$, а на інтервалі $(-1; 3)$ є опуклою вгору. Точками перегину будуть точки $x = -1$ та $x = 3$, оскільки в цих точках друга похідна змінює знак.

Щоб поглибити знання учнів про опуклість функції розглядають слідуючу теорему.

Теорема 15.

Якщо функція f опукла вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Пояснюють учням, що існують функції, графіки яких є невідомими, але їх можлива побудова дослідивши функції за допомогою похідної. Таке дослідження виконують за алгоритмом:

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3) Знайти точки перетину з осями координат.
4) Знайти проміжки зростання та спадання.
5) Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.
6) Знайти проміжки опуклості функції і точки перегину.
7) Побудувати графік функції, використовуючи результати досліджень.

Таким чином, ми розглянули основну теорію та рекомендації для вивчення теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні в курсі алгебри і початків аналізу з впровадженням компетентнісного підходу.

2.3. Методичні рекомендації до формування дослідницької компетентності учнів при дослідженні функцій за допомогою похідної

О. О. Клименко підкреслює в своїй роботі наступні напрямки здобуття дослідницької компетентності [11, с. 9]:

- «формулювати математичні задачі;
- будувати аналітичні моделі задач;
- висувати та перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень;
- інтерпретувати результати, отримані формальними методами;
- систематизувати отримані результати, досліджувати межі справедливості отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, шукати аналогії в інших розділах математики».

Похідна важливим інструментом для дослідження функцій. При цьому спеціально організована діяльність сприяє формуванню дослідницької компетентності.

Наведемо приклад методичних рекомендацій стосовно формування дослідницької компетентності під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Завдання 5 [10]. З'ясувати чи є поданий на рисунку графік (де $y = -1$, $y = 1$, $x = -1$ – асимптоти), графіком функції $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

Розв'язання

І. Постанова проблеми

Ставимо перед учнями задачу дізнатись чи є поданий на рисунку 2.1 графік (де $y = -1, y = 1$, $x = -1$ *– асимптоти), графіком функції* $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

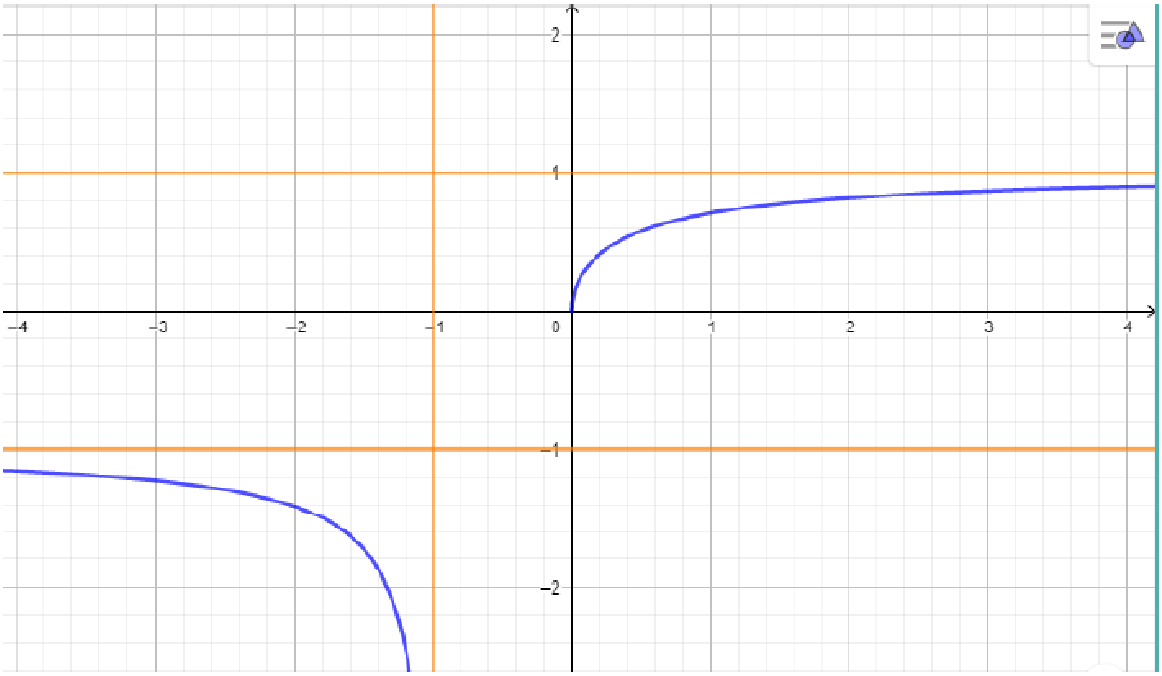


Рис. 2.1. Графік

II. Висування гіпотез стосовно розв’язання проблеми

Учні мають зробити висновок, що це завдання можливо розв’язати, якщо дослідити властивості даної функції методами диференціального числення, які вони вже вивчали на минулих уроках. Потім після обговорення помічають для себе послідовність етапів розв’язування задачі.

III. Моделювання розв’язку.

1) Область визначення функції.

$x^2 + x > 0$

$x(x+1) > 0$

$x_1 = 0, x_2 = -1$

Отримуємо $D(y) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

Розглянемо межі:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-1}} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1-0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Маємо, що $x = -1$ – вертикальна асимптота. *(Звертаємо увагу учнів на рисунок 2.1 і робимо відповідний висновок).*

Знаходимо похилі асимптоти виду $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = 1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y - kx) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -1$$

Отже, $y = 1$ і $y = -1$ – горизонтальні асимптоти. Як бачимо на рисунку 2.1, графік побудованої функції нескінченно наближається до відповідних прямих.

2) Точки перетину з осями координат.

Функція не має точок перетину з осями координат, оскільки отримані результати не належить області визначення. *(Зауважуємо, що точка* $(0;0)$ *особлива, бо функція до неї нескінченно наближається).*

3) Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+(-x)}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$$

Функція не є ні парною ні непарною, ні періодичною. *(Дійсно, на рисунку 2.1, графік не є симетричним ні відносно вісі Oy, ні відносно початку координат. Періодично функція не повторюється).*

4) Монотонність.

Знаходимо першу похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+x} - \frac{x\cdot(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}}{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2} = \frac{2x^2+2x-2x^2-x}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3} =$$

$$= \frac{x}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x^2+x}}$$

Отже, маємо критичні точки $x = 0$ і $x = -1$.

Досліджуємо знак похідної на інтервалах, на які критичні точки ділять область визначення функції. Функція спадає на інтервалі $(-\infty; -1)$ та зростає на інтервалі $(0; +\infty)$ *(Пропонуємо учням, використовуючи означення зростаючої і спадної функції, пояснити, як поводить себе функція на кожному з проміжків. Порівняти свої міркування зі знайденими аналітично результатами).*

5) Точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.

Функція згідно аналітичного розв'язання екстремумів не має *(Запропонувати учням згадати означення екстремумів функції та за графіком переконатися, що таких точок функція, які володіють вказаними в означеннях властивостями, не має).*

6) Проміжки опуклості і точки перегину.

$$y'' = \left(\frac{x}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+x}^3 - 3x\sqrt{x^2+x}^2 \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^6} = -\frac{4x^2+x}{4\left(\sqrt{x^2+x}\right)^5}$$

Прирівняємо отриману функцію до нуля і знайдемо наступні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -\frac{1}{4}$. Дослідимо знак похідної на інтервалах, на які дані точки ділять область визначення функції. Функція опукла на інтервалах $(-\infty; 1)$, $(0; +\infty)$, точок перегину немає *(Звертаємо увагу учнів, що обидві частини графіка функції, дійсно, опуклі догори).*

IV. Висновки та презентація результатів

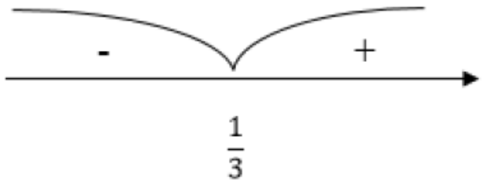
Таким чином, графік на рисунку 2.1 є графіком даної функції, оскільки всі досліджені властивості функції можна «побачити» на побудованому графіку. *(Заважуємо учням на отриману схему повного дослідження функції).*

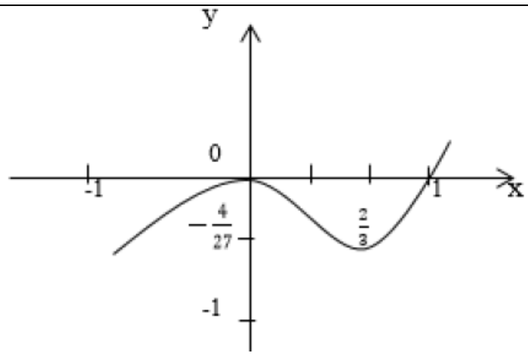
Отже, можна вважати, що виконання даних завдань, формує в учнів дослідницьку компетентність, бо потребує від них використовувати отримані знання та напрацьовані алгоритми в інших ситуаціях.

Завдання 6 [19]. Дослідити функцію $y = x^3 - x^2$ та побудувати її графік за допомогою алгоритму.

Розв’язання.

№	Алгоритм	Пояснення	Хід роботи
1	$D(y)$	Всі значення, що може приймати аргумент x.	$D(y) = R$
2	Дослідити парність (непарність), періодичність функції	Якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна. Якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна.	$y(x) = x^3 - x^2$ $y(-x) = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2)$ Функція ні парна, ні непарна
3	Знайти точки перетину з віссю Ox Знайти точки перетину з віссю Oy	Точки, ордината яких дорівнює 0 ($y = 0$) Точки, абсциса яких дорівнює 0 ($x = 0$)	$x^3 - x^2 = 0$ $x^2(x-1) = 0$ $x^2 = 0$; $x - 1 = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $y = 0$
4	Знайти похідну та критичні точки	Критичні точки – точки, в яких похідна дорівнює 0 або не існує.	$y' = 3x^2 - 2x$ $x(3x-2) = 0$ $x = 0$ $x = \frac{2}{3}$
5	Дослідити на монотонність	Якщо на деякому проміжку $y' > 0$, то функція зростає на цьому проміжку, якщо $y' < 0$, то функція спадає на проміжку.	 $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ функція спадає $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ функція зростає

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Знайти точки екстремуму і екстремальні точки</td>
<td>Якщо похідна при переході через критичну точку змінює знак «-» на «+», то це точка мінімуму; якщо з «+» на «-» - точка максимуму.
Екстремальні значення функції
$y_{max} = y(x_{\max})$ та
$y_{min} = y(x_{\min})$</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty;\ 0)$</td><td>0</td><td>$(0; \frac{2}{3})$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$(\frac{2}{3}; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-\frac{4}{27}$</td><td>↗</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table>
$$x_{max} = 0$$
$$x_{min} = \frac{2}{3}$$
$$y_{max} = 0$$
$$y_{min} = -\frac{4}{27}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Знайти проміжки опуклості та точки перегину</td>
<td>Для точок перегину функції y виконується $y''(x) = 0$
Якщо $y''(x) < 0$, то функція $y(x)$ опукла вгору, якщо $y''(x) > 0$, то функція $y(x)$ опукла вниз.</td>
<td>
$$y'' = 6x - 2$$
$$x = \frac{1}{3}$$


На проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ функція опукла вгору, а на проміжку - вниз
</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>Будуємо графік функції</td>
<td></td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

2.4. Елементи дослідницької діяльності під час вивчення застосування похідної до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем

Велика кількість традиційних елементарних завдань (доведення нерівностей, тотожностей, дослідження і розв'язування рівнянь тощо) ефективно можна розв'язати використовуючи поняття «похідна». Саме застосування похідної дає можливість строго формулювати безліч природних законів.

Розгляди різних фізичних процесів та геометричних закономірностей зводяться до розв'язання рівнянь, нерівностей. Дуже часто використання похідної дає змогу дослідити властивості функцій лівої і правої частин рівнянь, нерівностей та тотожностей, побудувати їх графіки. По-перше, це ускладнює розв'язування, а по-друге, робить роботу більш цікавою, придає їй дослідницький характер.

Завдання 7 [24, с. 251]. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$$

Розв'язання. Учням потрібно розв'язати ірраціональне рівняння. Пригадуючи методи, якими вони розв'язували ірраціональні рівняння, зрозуміло, що жоден з них не підходить, оскільки використовуючи їх отримаємо рівняння восьмого степеня. Таким чином, учням пропонується оцінити значення лівої та правої частин рівняння:

$$g(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2,$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}.$$

Щоб оцінити значення функції $f(x)$, зрозуміло що потрібно використати поняття найбільшого та найменшого значень функції та знайти їх. Потім ми зробимо відповідні висновки.

Отже, дослідимо функцію $f(x)$ на найбільше і найменше значення за допомогою похідної.

$D(f)$: $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 3-x\geq 0, \end{cases}$ тобто $1\leq x\leq 3$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Похідна не існує в точках 1 і 3 з області визначення функції $f(x)$, але ці точки не є внутрішніми для $D(f)$, отже, вони не є критичними.

$f'(x) = 0,\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0,$

$\sqrt{x-1} = \sqrt{3-x},\ x - 1 = 3 - x,$

$x = 2$ – критична точка ($f'(2) = 0$).

Неперервна функція $f(x)$ задана на відрізку [1;3], тому вона набуває найбільшого та найменшого значень або на кінцях відрізка, або в критичній точці з цього відрізка. Оскільки $f(1) = f(3) = \sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 2$, тобто $f(x) \le 2$. Крім того, $g(x) \ge 2$, отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2, \\ (x-2)^2 + 2 = 2 \end{cases} \qquad x = 2.$$

Відповідь: 2.

Завдання 8 [24, с. 252]. Розв'язати рівняння:

$$2x + \cos x = \pi$$

Розв'язання. Маємо тригонометричне рівняння. В учнів виникає проблемне питання як його розв'язати, оскільки методи, які вони знають, не підходять до розв'язування такого рівняння. Але можемо помітити, що дане рівняння $2x + \cos x = \pi$ має корінь

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \pi, \text{ тобто } \pi = \pi\right).$$

Після цього необхідно показати, що інших коренів це рівняння не має. А для цього скористаємося якраз похідною: інших коренів не має, бо функція $f(x) = 2x + \cos x$ зростаюча (її похідна $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всіх значеннях x з області визначення: $D(f) = R$).

Тому робимо висновок, що $x = \frac{\pi}{2}$ - єдиний корінь цього рівняння.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Завдання 9 [24, с. 253]. Довести нерівність $x^2 + 3 \ge 4\sqrt{x}$ при $x \ge 1$.

Доведення. Щоб довести цю нерівність достатньо провести доведення нерівності $x^2 + 3 - 4\sqrt{x} \geq 0$, де $x \geq 1$. А для цього учням необхідно скористатися похідною.

Розглянемо функцію

$$f(x) = x^2 + 3 - 4\sqrt{x} \text{ при } x \geq 1$$

(де в область визначення функції $x \geq 0$ належить даний проміжок).

Похідна

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x^3}-1)}{\sqrt{x}} > 0 \text{ при } x > 1.$$

Таким чином, функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(1; +\infty)$, а врахувавши, що функція $f(x)$ неперервна в точці 1 (вона неперервна також на всій області визначення), отримуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжку $[1; +\infty)$. Але $f(1) = 0$. Тоді при $x \geq 1$ значення $f(x) \geq f(1) = 0$.

Таким чином, $x^2 + 3 - 4\sqrt{x} \geq 0$, тобто $x^2 + 3 \geq 4\sqrt{x}$ при $x \geq 1$, те, що повинні були довести. (Зауважимо, що при $x > 1$ значення $f(x) > f(1) = 0$, а при $x = 1$ задана нерівність перетворюється на рівність.)

Під час розв'язування задач з параметрами використовують похідну для дослідження функцій на монотонність та екстремуми, а також для дослідження функції та побудови її графіка, для запису рівнянь дотичних до графіків функцій, для знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

Проілюструємо на прикладі застосування похідної до розв'язування завдання з параметром.

Завдання 10 [24, с. 255]. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ спадає при всіх $x \epsilon R$.

Розв'язання. Тут аналізуємо умову задачі. Оскільки необхідно показати, що функція спадає на всій числовій прямій, тому необхідно скористатися теоремою 7 з пункту 2.2 про ознаку спадання функції.

Тобто спочатку знайдемо похідну. Вона буде записана у вигляді многочлена, який ми будемо аналізувати залежно від значення параметра a.

Проведемо детальне розв’язання.

Область визначення функції $D(y) = R$. Функція диференційована на всій числовій прямій:

$$y' = 3(a+2)x^2 - 6ax + 9a.$$

Дана функція спадна для всіх $x \epsilon R$, якщо $y' \leq 0$ на всьому числовому проміжку (де рівняння $y' = 0$ має тільки скінченну кількість розв’язків).

Якщо $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ і нерівність $y' \leq 0$ не виконується на всій числовій прямій ($12x - 18 \leq 0$ тільки при $x \leq 1{,}5$).

Якщо $a \neq -2$, то похідна є квадратичною функцією відносно змінної x, яка набуває значень $y' \leq 0$ на всій числовій прямій тоді й тільки тоді, коли виконуються умови $a + 2 < 0, D \leq 0$.

З нерівності $a + 2 < 0$ одержуємо $a < -2$. З нерівності $D \leq 0$ маємо:

$$36a^2 - 4 \cdot 3(a+2) \cdot 9a \leq 0,$$

$$36a(a - 3a - 6) \leq 0,$$

$$36a(-2a - 6) \leq 0,$$

$$-72a(a+3) \leq 0.$$

Зважаючи на одержану умову $a < -2$, маємо, що $-72a > 0$. Тоді отримаємо $a + 3 \leq 0$, тобто $a \leq -3$. Отже, отримали, що $a \leq -3$.

Відповідь: $(-\infty; -3]$.

Завдання 11. Розв'яжіть рівняння

$$3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x).$$

Так як не маємо формул, що б дозволили перетворити одночасно показникові та тригонометричні вирази, то розв'язувати задане рівняння будемо, використовуючи властивості функцій, а саме, оцінимо область значень функцій, які розміщені у лівій та у правій частинах рівняння. Для функції, яка стоїть у правій частині рівняння, це легко зробити і без похідної, а для дослідження функції, що стоїть у лівій частині рівняння, зручно використати похідну.

ОДЗ даного рівняння — усі дійсні числа R. Оцінимо ліву і праву частини рівняння. Оскільки cos $2\pi x$ набуває всіх значень від -1 до 1, то $1 + \cos 2\pi x$ набуває всіх значень від 0 до 2. Тоді функція $g(x) = 3(1 + \cos 2\pi x)$ набуває всіх значень від 0 до 6. Отже, $0 < g(x) < 6$.

Функцію $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$ дослідимо за допомогою похідної. Область визначення цієї функції – всі дійсні числа. Знайдемо похідну:

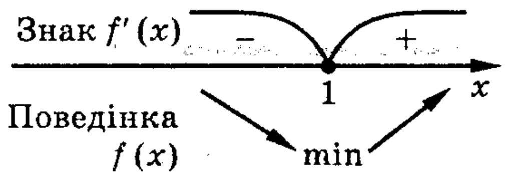
$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{2-x} \ln 3 = 3^{2-x} \ln 3 \,(3^{2x-2} - 1).$$

Вона існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$$f'(x) = 0,$$

$$3^{2-x} \ln 3 \,(3^{2x-2} - 1) = 0.$$

Так як $3^{2-x} \ln 3 \neq 0$, то $3^{2x-2} - 1 = 0$, $3^{2x-2} = 1$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$ — критична точка. Позначаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і відмічаємо знаки похідної на всіх отриманих проміжках.



Неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму (у ній похідна змінює знак з мінуса на плюс). Тоді в цій точці функція набуває свого найменшого значення: $f(1) = 6$. Отже, $f(x) > 6$.

Враховуючи, що $g(x) \leq 6$, одержуємо, що задане рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = 6; \\ g(x) = 6. \end{cases}$$

Але значення 6 функція $f(x)$ набуває тільки при $x = 1$, що задовольняє і другому рівнянню системи $g(1) = 3(1 + \cos 2\pi x) = 6$). Таким чином, отримана система (а тому, і дане рівняння) має єдиний розв'язок $x = 1$.

Завдання 12. Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$

Застосовуючи до даного рівняння схему розв'язування показникових рівнянь, зможемо реалізувати тільки перший її пункт – позбавитися числових доданків у показниках степенів. Але звести всі степені до однієї основи чи до двох основ так, щоб отримати однорідне рівняння, чи перенести всі члени в один бік і розкласти отриманий вираз на множники – не можемо. Таким чином, приходимо до того, що потрібно застосувати властивості заданих функцій. Але і тут не вийде використати скінченність ОДЗ (оскільки вона є нескінченною), оцінку лівої і правої частин рівняння (обидві знаходяться в межах від 0 до $+\infty$). Отже, сподіваємось на можливість використати властивості монотонності функції. Оскільки, ми не маємо змоги використати теореми про корені (в обох частинах заданого рівняння стоять зростаючі функції), то *будемо підбирати корені цього рівняння і доводити, що інших коренів не існує* (для зручності спочатку зводимо рівняння до виду $f(x) = 0$). Послідовно підставляючи $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, з'ясовуємо, що $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має три корені. Для доведення, що більше коренів не існує, достатньо довести, що у функції *f(x)* не більше трьох проміжків зростання або спадання; а, враховуючи неперервність $f(x)$ на всьому числовому проміжку, для цього достатньо довести, що у неї не більше двох критичних точок, тобто рівняння $f'(x) = 0$ має не більше двох коренів. Розглядаємо рівняння $f'(x) = 0$, після перетворення якого можна зробити аналогічні дії, але для двох коренів. Робивши перетворення рівняння $f'(x) = 0$, врахуємо, що всі його члени мають однаковий степінь - x (тобто воно є однорідним відносно трьох функцій від змінної x, а саме: 2^x, 3^x, 4^x). За допомогою ділення обох частин рівняння $f'(x) = 0$ на степінь з основою 2, 3 або 4 вдається зменшити кількість виразів із змінною на один.

Дане рівняння еквівалентне рівнянню

$$2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0,$$

тобто $8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Введемо позначення $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$.

Так як $f(0) = 8 + 2 – 7 - 3 = 0$, $f\,(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f\,(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: 0, 1, 3. Доведемо, що інших коренів у рівняння (1) не існує. Для цього достатньо довести, що у функції f (x) є не більше трьох проміжків зростання або спадання, а, враховуючи неперервність функції f (x) на всьому числовому проміжку, достатньо довести, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення: D (*f*) = *R*.

Похідна $f\,'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ існує при будь-яких значеннях *x*. Таким чином, критичними точками будуть тільки ті значення *x*, при яких $f\,'(\mathrm{x}) \;=\; 0$. Отримуємо рівняння

$$8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0.$$

Так як $3^x \neq 0$, то після ділення обох частин останнього рівняння на 3^x отримуємо еквівалентне рівняння

$$8 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \qquad (1)$$

Для доведення того, що останнє рівняння має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція

$$\varphi(x) = 8 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3,$$

яка стоїть у лівій частині рівняння, має не більше двох проміжків зростання чи спадання, а враховуючи неперервність цієї функції на всьому числовому проміжку, достатньо довести, що вона має тільки одну критичну точку. Справді,

$$\varphi'(x) = 8 \ln 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{3} + 2 \ln 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{4}{3}$$

існує при всіх значеннях *x*. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення *x,* при яких $\varphi'(x) = 0$. Одержуємо однорідне рівняння

$$8 \ln 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{3} + 2 \ln 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{4}{3} = 0$$

Так як $4\ln 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то після ділення обох частин рівняння на цей вираз отримуємо еквівалентне рівняння

$$2\ln\frac{2}{3} + 2^x \cdot \ln\frac{4}{3} = 0.$$

Тоді маємо

$$2^x = -\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}.$$

Враховуючи, що $\ln\frac{2}{3} < 0$, а $\ln\frac{4}{3} > 0$, отримуємо, що $-\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}} > 0$.

Таким чином, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді функція φ *(x)* має єдину критичну точку і тому рівняння (1) має не більше двох коренів. Це означає, що функція f *(x)* має не більше двох критичних точок. Тоді і дане рівняння має не більше трьох коренів. Але три корені даного рівняння ми вже знаємо: 0, 1, 3. Отже, інших коренів дане рівняння не має.

Відповідь: 0, 1, 3.

Завдання 13. Розв'яжіть нерівність

$$x^{11} - x^6 - 2x < -4.$$

Дану нерівність не можна розв'язати використовуючи рівносильні перетворення, тому необхідно використати метод інтервалів. Для цього нерівність потрібно привести до виду $f(x) < 0$, де $f(x)$ — неперервна в будь-якій точці своєї області визначення функція ($f(x)$ — неперервна функція, оскільки це многочлен).

Пригадуємо схему розв'язування нерівності методом інтервалів.

1. Знайти ОДЗ нерівності.
2. Знайти нулі функції: f (x) $= 0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції f (x) у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, врахвавши знак даної нерівності.

Для відшукання нулів функції потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$, яке не вдається розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, тому для розв'язування доцільно використати властивості функції f (x), а саме, її монотонність, яку можна обґрунтувати за допомогою похідної.

Дана нерівність еквівалентна нерівності $x^{11} - x^6 - 2x + 4 < 0$. Функція $f(x) = x^{11} - x^6 - 2x + 4$ неперервна в будь-якій точці своєї області визначення, тому для розв'язування нерівності можливо використати метод інтервалів.

Знайдемо похідну функції $f\,(x)$:

$$f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2.$$

Введемо позначення $x^5 = t$, тоді

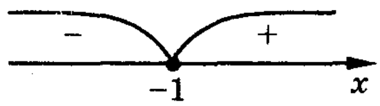
$$f'(x) = 11t^2 - 6t + 2.$$

Оскільки квадратний тричлен $11t^2 - 6t + 2$ має від'ємний дискримінант, тоді для всіх t

$$11t^2 - 6t + 2 > 0.$$

Таким чином, для всіх x значення $f'(x) > 0$. Тоді функція $f(x)$ зростає на всьому числовому проміжку і рівняння $f(x) = 0$ може мати тільки один корінь.

Оскільки $f(-1) = 0$, то $x = -1$ — єдиний нуль функції $f(x)$.



Позначаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.

Відповідь: $(-\infty;\ -1)$.

Завдання 14 [10, с.411]. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(|x| - |y|) = \cos y - \cos x\,, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. По-перше учні можуть запропонувати – знайти область допустимих значень змінних, що входять до цієї системи.

Маємо $x \geq 0, y \geq 0$. Таким чином, $|x| = x$, $\sqrt{y} = y$.

Враховуючи ОДЗ змінних, можна буде переписати систему у більш зручний вигляд:

$$\begin{cases} 2x + \cos x = 2y + \cos y\,, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Учні помічають, що ліва та права частини першого рівняння системи відрізняються лише змінними.

Розглядають функцію $f(t) = 2t + \cos t$.

Тому, перше рівняння системи можна записати у наступному вигляді: $f(x) = f(y)$.

Застосуємо похідну для аналізу такої функції:

$$f'(t) = 2 - \sin t.$$

Оскільки $f'(t) > 0$ для будь-якого t, зокрема і для $t \geq 0$, то функція $f(t) = 2t + \cos t$ зростає на проміжку $[0: +\infty)$, а тому з рівності $f(x) = f(y)$ отримаємо, що $x = y$.

Таким чином, система майже розв'язана. Підставимо у друге рівняння замість змінної y змінну x, отримаємо $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 6$, $2\sqrt{x} = 6$; $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$. Тому $y = 9$.

Відповідь. $(9; 9)$.

2.5. Розв'язування текстових задач на найбільше та найменше значення за допомогою похідної як засіб формування дослідницької компетентності

Так як для формування дослідницької компетентності необхідно встановити зв'язки з попередніми результатами, будувати аналітичні моделі та формулювати математичні завдання, то на заняттях доречно пропонувати вправи прикладного змісту та схему їх розв'язування.

У шкільному курсі математики 10-го класу геометричні завдання, які можна розв1язувати використовуючи поняття похідної, є лише при вивченні поняття найбільшого та найменшого значень функції.

Розглянемо наприклад завдання, які можна давати учням при розгляді теми «Найменше та найбільше значення функції» при викладанні математики на будь-якому рівні.

Завдання 15 [29]. Молодий підприємець Юрій в період економічної кризи вирішив викупити нерентабельне переробне підприємство і запросив економіста Германа допомогти з розрахунками по оптимізації витрат. Одна із задач, поставлених перед Германом, була наступна: знайти, за яких умов витрата жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності буде найменша.

Розв'язання.

Перший етап. Складаємо математичну модель.

Відома форма банки і відомо, що вона повинна бути заданої ємності. Це є істотним для складання моделі. Істотним є також вимога, щоб витрата жесті виготовлення банки була мінімальною. Ця вимога означає, що площа повної поверхні банки, що має форму циліндра, повинна бути найменшою; істотні також розміри банки. Несуттєві для складання математичної моделі чисельне значення ємності банки і вид консервів, для яких банка призначена.

Позначивши ємність банки через V см^3. Сформулюємо задачу: Визначити розміри циліндра з об'ємом V см^3 так, щоб площа його повної поверхні була найменшою.

Для розв'язання завдання позначимо радіус основи циліндра через x, а висоту його через h (всі вимірювання в сантиметрах).

Тоді об'єм циліндра

$$V = \pi x^2 h \rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Повна поверхня циліндра

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + + \frac{2\pi x V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Отже,

$$S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Так як змінна x може набувати тільки додатних значень, то розв'язання задачі зводиться до знаходження найменшого значення $S(x)$ на проміжку $(0; \infty)$.

Другий етап. Працюємо з складеною моделлю.

Відшукаємо похідну $S'(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Щоб знайти критичні точки розв'яжемо рівняння $S'(x) = 0$.

Корінь рівняння: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

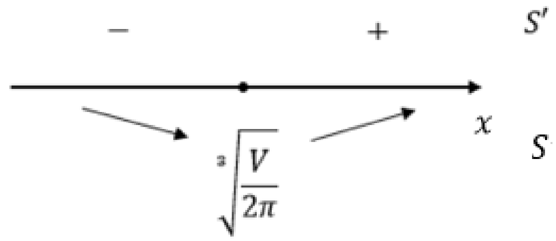


Рис. 2.2. Дослідження на точки екстремуму

Таким чином, в точці $x = S(x)$ маємо мінімум. Отже, функція в цій точці досягає найменшого значення. Отже, площа повної поверхні циліндра, що має об'єм V, буде найменшою при

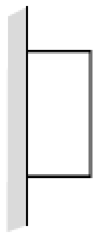
$$h = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},$$

а саме тоді, коли циліндр рівносторонній.

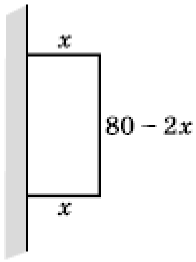
Третій етап. Відповідаємо на питання задачі.

Найменша витрата жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності буде досягнуто за умови, що діаметр основи і висоти банки рівні між собою.

Завдання 16 [10, с.217]. Парканом, довжина якого 80 м, треба огородити з трьох сторін ділянку прямокутної форми якомога більшої площі. Знайдіть розміри такої ділянки (мал. 1).



Мал.1



Мал. 2

Розв'язання. Так як в задачі маємо паркан прямокутної форми і його довжина 80 м, тому розглядаємо прямокутник з певною довжиною і шириною. Далі розглядаємо цю задачу з точки зору геометрії.

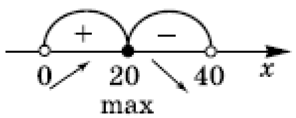
1) Введемо позначення x (у м) – довжина однієї з двох паралельних сторін паркана (мал. 2), тоді сусідня сторона буде мати довжину $80 - 2x$, де $0 < x < 40$.

Складемо функцію залежності площі ділянки від довжини її сторони x:

$$S(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

Ця функція є математичною моделлю задачі. Тому задача знаходження розмірів ділянки зводиться до знаходження значення x, при якому функція $S(x)$ на проміжку $(0; 40)$ набуватиме найбільшого значення.

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$, за умови $x\epsilon(0; 40)$.



Мал. 3

$S'(x) = 80 - 4x = 0$; тоді $x = 20$. Маємо, що $x_{max} = 20$ (мал. 3).

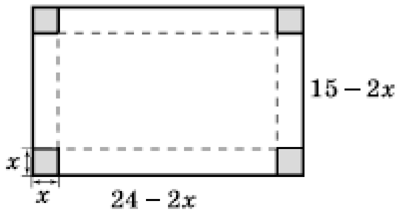
Оскільки $S(x) = 80x - 2x^2$ неперервна на $(0; 40)$ і має єдину точку екстремуму – точку максимуму $x_{max} = 20$, то саме в цій точці $S(x)$ досягає найбільшого значення. Отже, розміри ділянки будуть

$$20 \text{ м} \qquad \text{і} \qquad 80 - 2 \cdot 20 = 40 \text{ м}.$$

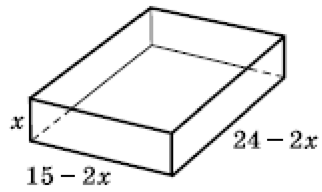
Відповідь. 20 м і 40 м.

Наступне завдання є в більшості українських підручників з алгебри та початків аналізу в темі «Похідна та її застосування», зокрема в пункті про знаходження найбільшого та найменшого значення функція. Завдання є опорною текстовою задачею. Також вона є в деяких закордонних підручниках, а саме Швеції.

Завдання 17 [10, с.218]. З аркуша картону прямокутної форми, розміри якого 15×24 см, вирізавши у його кутах квадрати так, як показано на малюнку 4, виготовили відкриту коробку найбільшого об'єму. Знайдіть об'єм цієї коробки.



Мал. 4



Мал. 5

Розв'язання. За допомогою зображених малюнків 4 та 5 учні переводять дану задачу на мову геометрії.

Пропонується позначити довжину сторони вирізаного квадратика через x (см), тоді кожна зі сторін прямокутника, який буде дном коробки, зменшаться на і дорівнюватиме $24-2x$ (см) і $15-2x$ (см), $0<x<7{,}5$.

Далі, так як в задачі мова йде про об'єм коробки, тобто об'єм прямокутного паралелепіпеда, тому учні складають функцію залежності об'єму коробки від довжини сторони вирізаних квадратів (мал. 5):

$$V(x)=x(15-2x)(24-2x),$$

тобто

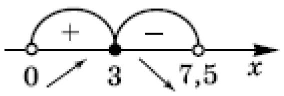
$$V(x)=360x-78x^2+4x^3.$$

Далі постає завдання знайти найбільше значення функції $V(x)$ на проміжку $(0;7{,}5)$.

Маємо

$$V'(x)=360-156x+12x^2.$$

$$V'(x)=0,\text{ коли } x_1=3;\ x_2=10.$$



Мал. 6

Значення $x_2=10$ – не належить проміжку $(0;7{,}5)$, маємо $x_{max}=3$ (мал. 6).

Оскільки $V(x)=360x-78x^2+4x^3$ неперервна на $(0;7{,}5)$ і має точку максимуму $x_{max}=3$, то саме в ній $V(x)$ набуватиме найбільшого значення. Знайдемо його:

$$\max_{(0;7,5)} V(x)=V(3)=3\cdot 9\cdot 18=486\ (\text{см}^3).$$

Отже, найбільший об'єм цієї коробочки 486 $см^3$.

Відповідь. 486 $см^3$.

Такий тип завдань є дуже змістовним і потребує серйозного логічного мислення, але надає високий рівень наочності та дозволяє показати методи використання похідної в житті, тому є дуже доцільним.

Ми підібрали деякі задачі прикладного змісту, які також можна запропонувати учням як на уроці розв'язування текстових задач, так і на факультативних заняттях з математики.

Завдання 18 [29]. Сашко вирішив зробити своїй мамі подарунок до 8 березня і замовив у друга Дениса шкатулку з дорогоцінного металу. В майстерню він приніс шматок листа з цього металу розміром 32 см на 20 см. Потрібно виготовити відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізаючи по кутах квадрати і загинаючи кромки, що залишилися. *(Відповідь: при* $x = 4$ *см об'єм шкатулки буде найбільший).*

Завдання 19 [29]. Легенда про заснування Карфагена свідчить, що коли фінікійський корабель пристав до берега, місцеві жителі погодилися продати прибулим стільки землі, скільки можна застелити шкурою бика. Але хитра фінікійська цариця Дідона розрізала цю шкуру на ремінці, зв'язала їх і відгородила ременем велику ділянку землі, що примикала до моря. Вважаючи берег моря прямолінійним, а огороджену ділянку прямокутною, спробуйте приблизно визначити, яку площу мала змогу, зайняти Діодона, якщо розмір шкури 4 $м^2$, а ширина ремінців, на які Дідона її розрізала, 1 мм. *(Відповідь: 1* $км^2$*).*

Завдання 20 [29]. Паперовому змію, який має форму кругового сектора, бажають надати таку форму, щоб він вміщав в даному периметрі $P = 80$ см найбільшу площу. Якими мають бути розміри паперового змія? *(Відповідь: 20, 40).*

Етапи розв'язування даного типу задач наведені у чинних підручниках з алгебри і початків аналізу (наприклад, у підручнику [24]).

Завдання вчителя – організувати дослідницьку діяльність учнів під час розв'язування подібних задач; навчити їх співвідносити прикладну задачу геометричного змісту і абстрактну задачу на знаходження найбільшого та найменшого значення функції, застосовувати набуті знання на практиці.

На етапі формалізації (побудови математичної моделі задачі) відбувається спостереження, з'ясування суті задачі, дослідження зв'язків і відношень між геометричними об'єктами. Учні висувають гіпотези: яку з невідомих геометричних величин, зручно позначити через х, як інші величини виразити через х. Пропонуємо учням сформулювати мету дослідницької задачі: величину про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від х та дослідити побудовану функцію на найбільше або найменше значення. Таке дослідження найчастіше проводять за допомогою похідної. Учні мають змогу ознайомитися із застосуванням диференціального числення до дослідження геометричних величин, до розв'язування прикладних задач. Корисно проаналізувати інші можливі способи такого дослідження, а також впевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової прикладної задачі [35, с.95-97].

Завдання 21 [29]. Функція прибутку фірми має вигляд:

$$P(Q) = R(Q) - C(Q) = \frac{2}{5}Q^2 - 4Q + 20,$$

де $R(Q) -$ виручка, $C(Q) -$ витрати. Скільки слід фірмі виробляти продукції, якщо її виробничі потужності обмежені обсягом виробництва $Q = 3$. *(Відповідь: при* $Q = 3$ *вигідно нічого не виробляти).*

Зрештою розв'язавши подібні задачі, можемо запропонувати учням попрацювати над проектом, який буде показувати в яких сферах сучасного життя можна користуватися поняттям похідної. Школярі мають збагнути, що за допомогою похідної можна розв'язувати багато різних життєвих завдань практичного характеру.

Необхідність оволодіння учнями саме дослідницької компетентності пов'язана з вимогами, які диктує сучасне суспільство. Поява нових форм переробки та отримання інформації, розширення і ускладнення соціального досвіду зумовили важливість даної компетентності. Завдання вчителя – організовувати дослідницьку діяльність учнів, навчити їх самостійно знаходити інформацію, формувати власну точку зору, вміти її аргументувати і використовувати одержані знання в практиці.

Важливо відмітити, що в науковій літературі з методики навчання математики проблема залучення учня до навчання та дослідницької діяльності реалізується через розв'язання спеціальних дослідницьких завдань або через додаткову роботу над завданням, які були показані у даній роботі.

В результаті формування даної компетентності – здатність учня переносити дослідницький підхід на будь-які сфери діяльності і використовувати її в різних життєвих ситуаціях, що говорить про багатофункціональність, універсальність і надпредметність дослідницької компетентності.

2.6. Експериментальна перевірка основних положень дослідження

З метою з'ясування ефективності даної роботи по формуванню дослідницької компетентності учнів було проведено апробацію деяких результатів дослідження.

На першому етапі проводився теоретичний аналіз навчальних планів, програм, літератури з теми дослідження. Вивчалася психолого-педагогічна та навчально-методична література з питань формування дослідницької компетентності учнів під час вивчення застосувань похідної у профільному навчанні математики.

На другому етапі дослідження здійснювався пошук та добір задач на застосування похідної, спрямованих на формування дослідницької компетентності учнів.

На третьому етапі проводилася апробація розроблених матеріалів. Нами розроблена добірка задач та методичних рекомендацій стосовно її застосування використовувалася під час повторення навчального матеріалу з теми.

Апробація була проведена в 11 класі фізико-математичного профілю Чернігівського обласного педагогічного ліцею кандидатом педагогічних наук, доцентом, а також науковим керівником кваліфікаційної роботи – Філон Лідією Григорівною.

Так як тема «Похідна та її застосування» вивчалася в 10 класі 2019-2020 н. р., то учні її вивчали дистанційно. Тому у вересні 2020-2021 н. р. для учнів 11 класу було проведено повторення, узагальнення і систематизацію знань з цієї теми.

Велика кількість завдань з теми «Похідна та її застосування» присвячена дослідницькій діяльності. Вони є невід'ємною частиною начального процесу. Більшість прикладних задач наведена в темі «Найбільше та найменше значення функції», тому для проведення апробації ми використовували підручник [24], в ньому наведено наступні задачі.

Завдання 22 [34.3.11]. На сторінці текст займає 384 см^2. Верхнє і нижнє поля мають бути по 2 см, праве і ліве – по 3 см. Якими мають бути розміри сторінки з точки зору економії паперу?

Такі задачі будуть корисні та цікаві для учнів, оскільки показують застосування похідної на практиці, а також розвивають дослідницьку компетентність учнів.

Головні теореми курсу теми «Похідна та її застосування», які застосовуються у практичних розрахунках, представлені необхідною і достатньою умовами існування екстремумів. Тому прикладні задачі, в основі яких лежать дані теореми, використовуються для повторення чи закріплення знань і формувань вмінь застосовувати ці теореми в інших умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі.

Прикладні задачі, зокрема природничого характеру, при вивченні теми «Похідна» пропонуємо використати з навчального посібника [30]. Автори підручника стверджують: «Прикладні задачі – один із дієвих та ефективних способів для формування в учнів вмінь і навичок застосовувати набуті в курсі алгебри та початків аналізу знання і вміння в нестандартних ситуаціях».

Розглянемо задачу прикладного змісту.

Завдання 23 [30, с.48].. У живильне середовище вносять популяцію, що налічує 1000 бактерій. Чисельність цієї популяції зростає за законом $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, де t вимірюється в годинах. Знайдіть максимальний розмір цієї популяції.

Розв'язання. Оскільки в завданні учням необхідно знайти максимальний розмір популяції бактерій, тому дана задача звелась до відшукання найбільшого значення функції. А для цього застосовується похідна.

Знайшовши похідну функції $p'(t) = \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$ і розв'язавши рівняння $p'(t) = 0$, учні з'ясовують, що стаціонарними точками є $t_0 = \pm 10$. Оскільки час $t > 0$, то на всій області визначення функція має єдину стаціонарну точку $t_0 = 10$. При переході через цю точку знак похідної змінюється з «+» на «-», отже, на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_0 = 10$ є точкою максимуму функції. Максимальний розмір цієї популяції дорівнює $p(10) = 1050$ бактерій.

Відповідь. 1050 бактерій.

Дане завдання є прикладом задачі природничого змісту, математична модель якої містить в умові. Її можна розглянути під час актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед викладанням достатньої умови існування екстремуму в точці. Оскільки учні будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, доречно розв1язати цю задачу та запропонувати на самостійне розв'язування схожі задачі.

Завдання 24 [30, №3.14]. Реакція організму на введені ліки може виражатися у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу чи інших фізіологічних показників. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків, а ступінь реакції y визначається функцією $y = f(x) =$

$x^2(a-x)$, де a – деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

Завдання 25 [30, №3.15]. Швидкість зростання y популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0{,}001x(100-x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкість зростання дорівнює нулю.

Після вивчення другої похідної пропонуємо комплекс завдань, пов'язаних з повним дослідження функції та побудові графіка цієї функції. Такі завдання також розвивають в учнів дослідницьку компетентність. Для розв'язування таких завдань учні, по-перше, повинні мати великий багаж знань про функції і безпосередньо про похідну, а по друге – використовуючи наведений алгоритм розв'язування такого завдання проводять дослідження.

Завдання можна розглянути і на уроці, дати як на самостійну роботу, так і на контрольну роботу. Можна провести заняття по групам, де в кожній групі провести дослідження функції.

Наведемо декілька таких вправ з підручника [24].

Завдання 26 [24, № 35.3]. Дослідіть функцію за розширеною схемою та побудуйте її графік:

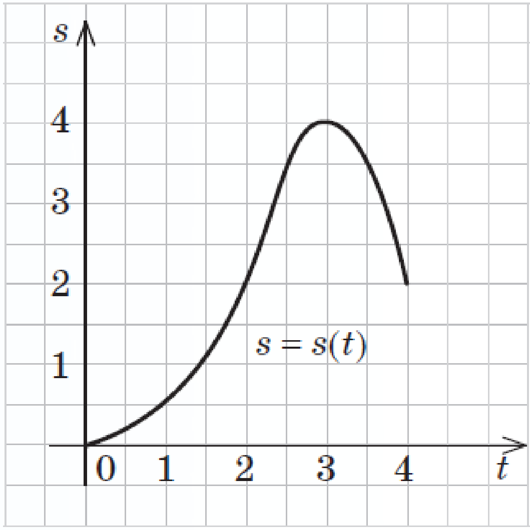
1) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$; 7) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$.

3) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$;

Вкотре хочеться звернути увагу на те, що всебічний розвиток математичних компетентностей учнів є досить важливою складовою навчального процесу.

Для проведення апробації за основу взято два основних підручника для 10-х класів загальноосвітніх навчальних закладів – це підручники [18] та [24].



У підручнику [24] майже після кожної теми є окремий блок завдань «Виявіть свою компетентність», це є особливісю даного підручника. Розглянемо деякі завдання, які містяться в темі «Похідна та її застосування».

Завдання 27 [24, № 31.11]. Закон руху матеріальної точки задано графіком залежності шляху s від часу t (див. мал.).

1) знайдіть середню швидкість точки з моменту часу $t = 2$ до $t = 3$.

2) порівняйте швидкості точки в моменти часу $t_1 = 2$ і $t_2 = 3$.

3) Чи змінювала точка напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?

Завдання 28 [24, № 32.13]. Наведіть приклад моделі складеної функції з реального життя.

Завдання 29 [24, № 34.3.16]. Човен перебуває на відстані 3 км від найближчої точки берега А. Пасажир човна хоче дістатися села В, розташованого на березі на відстані 5 км від А (ділянка АВ берега прямолінійна). Швидкість човна 4 км/год; пасажир, вийшовши з човна, може пройти за годину 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село В за найкоротший час?

Наведемо декілька задач, які можна використовувати при розв'язуванні вправ на уроці чи на факультативних заняттях з математики для учнів 10-х класів або для повторення, узагальнення та систематизації знань з теми в 11 класі.

Завдання 30 [30, с.48]. Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Завдання 31 [30, с.50]. Зміщення у відповідь на м’язове подразнення (одиничний імпульс) описується рівнянням Релея $y = kte^{-\frac{t^2}{2}}$, де $t > 0$. Знайдіть швидкість та прискорення залежно від часу.

Завдання 32 [30, с.50]. З танкера, який потрапив у аварію, виливається у море нафта, утворюючи на поверхні моря круглу пляму, площа якої збільшується з постійною швидкістю 6 км^2/год. З якою швидкістю збільшується радіус нафтової плями у той момент, коли площа плями дорівнює 9 км^2?

Завдання 33 [30, с.54]. У країні Меланхолії виникла епідемія депресії, яка розповсюджується так, що відсоток p тих, що захворіли залежить від часу t (в добах) наступним чином, $p = 0{,}005(12t^2 - t^3)$, де $0 \leq t \leq 12$.

1) Скільки відсотків мешканців захворіє до кінця другої доби?
2) Скільки діб відсоток тих, хто захворіли, буде збільшуватись?
3) Починаючи з якої доби епідемія почне спадати?

Таким чином, ми розглянули різнотипові завдання, які пропонували при повторенні теми «Похідна та її застосування». За допомого таких вправ учитель на уроках алгебри та початків аналізу формує в учнів навички дослідницької компетентності.

Розв’язування представлених задач є елементом дослідницької діяльності, сприяє інтеграції, поглибленню знань учнів, формуванню їх дослідницької компетентності під час навчання математики.

Також наведемо для прикладу один із уроків, проведених під час апробації (конспект подано у додатку). Тема уроку: Застосування похідної до розв’язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведення нерівностей.

Метою уроку було сформувати навички й уміння застосовувати похідну до дослідження функції при розв’язуванні рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведенні нерівностей. Урок пройшов з дотримання всіх рекомендацій по формуванню дослідницької компетентності учнів, які були розроблені у даній роботі.

Прокоментуємо розв’язання деяких завдань з даного конспекту. Розглянемо наступне завдання.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29.$$

Під час розв’язування нерівності учні звертають увагу на те, що це ірраціональна нерівність і змінна міститься під знаком кореня. Тому можна знайти допустимі значення змінної, розв’язавши наступну систему:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 9-x\geq 0. \end{cases}$$

Отримаємо, $x\in[1;9]$.

Далі учням пропонується розглянемо ліву та праву частини цього рівняння як окремі функції

$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$ і $g(x)=x^2-10x+29$.

Далі вже йде безпосередньо застосування похідної, а саме знаходження екстремумів функцій на певному проміжку $[1;9]$. Учні встановлюють, що для функції $f(x)\leq 4$, а $g(x)\geq 4$. Тобто, $f(x)=g(x)=4$. Корінь цього рівняння $x=5$.

Розглянемо для прикладу застосування похідної ще до доведення наступної нерівності, яка представлена в конспекті уроку.

Приклад. Довести нерівність

$$0\leq x^3-2x^2+x\leq 2 \text{ де } x\in[0;2]$$

Почати розв’язування нерівності учням пропонується з розгляду функції $f(x)=x^3-2x^2+x$, де $x\in[0;2]$. Учні помічають, що якщо у цю функцію підставити крайні точки проміжку, то отримаємо відповідні значення - 0 та 2. Тобто нерівність запишеться наступним чином:

$$f(0)\leq x^3-2x^2+x\leq f(2).$$

Далі застосуємо похідну до знаходження найбільшого та найменшого значень цієї функції.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Знайдемо критичні точки. Це $x = 1$ та $x = \frac{1}{3}$.

Знайдемо значення функції в цих критичних точках:

$f(1) = 0$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

Так як функція f є неперервною на відрізку $[0; 2]$, то її найбільше та найменше значення знаходяться серед чисел 1 та $\frac{1}{3}$. Тому матимемо $0 \leq f(1) \leq 2$, $0 \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 2$.

Нерівність доведена.

Приклад. Доведіть нерівність:

$$\sin x < x \text{ для всіх } x > 0.$$

Пропонуємо учням переписати цю нерівність у наступному вигляді

$$x - \sin x > 0.$$

Тобто нам треба показати, що функція $f(x) = x - \sin x$ набуває додатних значень для всіх $x > 0$. Для цього учні зможуть скористатися знанням з теми «Ознаки зростання та спадання функції». Знайшовши похідну даної функції будемо мати, що вона набуває лише додатних значень, тому наша функція $f(x)$ зростаюча для всіх $x > 0$.

На основі цього робимо висновок, що нерівність доведена.

Отже, експериментальною перевіркою встановлено, що при вивченні теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні в учнів формується дослідницька компетентність. Таким чином, ми поглиблюємо інтерес школярів, підвищується ефективність пізнавальної та творчої діяльності для формування в них відповідних знань, умінь і навичок дослідницької позиції в сприйнятті й осмисленні навколишнього середовища.

Апробація підтвердила гіпотезу про те, що за допомогою похідної можна формувати дослідницьку компетентність учнів.

Висновки

Дослідницька компетентність – це цілісна, інтегративна якість особистості, що поєднує в собі знання, уміння, навички, досвід діяльності дослідника, ціннісні ставлення та особистісні якості і виявляється в готовності і здатності здійснювати дослідницьку діяльність з метою отримання нових знань шляхом застосування методів наукового пізнання, застосування творчого підходу в цілепокладанні, плануванні, прийнятті рішень, аналізі та оцінці результатів дослідницької діяльності [7, с. 61].

Природа дослідницької компетентності – являтися тільки в сукупності з мотивами та цінностями людини, а саме за наявності ціннісного смислового відношення, інтересу до даного виду діяльності.

У роботі зроблено аналіз науково-методичної та навчальної літератури з теми дослідження, проаналізовано навчальні програми з математики профільного і поглибленого рівня, а також підручників для учнів 10-11 класу з алгебри та початків аналізу.

Проведено логічний математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні навчання математики з огляду реалізації дослідницької компетентності.

Розгорнуто методичні особливості навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні та розроблено методику формування дослідницької компетентності учнів при вивченні даної теми.

У роботі наведено достатня кількість задач на формування дослідницької компетентності при застосуванні похідної до вивчення функцій, рівнянь, нерівностей та їх систем, до розв’язування текстових задач.

Проведено експериментальне дослідження, яке показало підвищення рівня зацікавленості учні до вивчення похідної та математики в цілому. Вони більш старанно почали відноситись до вивчення математики, мотивуючи це тим, що зрозуміли важливість математики у вирішенні проблем у багатьох сферах життя людини. Матеріали кваліфікаційної роботи подані у статті [35]. Конспект проведеного уроку поданий в додатках роботи.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальній посібник / Бевз Григорій Петрович. – 3-те видання, доповнене і перероблене.– К.: Вища школа, 1989. – 369 с.
3. Бібік Н. М. Компетентністна освіта – від теорії до практики / Н. М. Бібік., І. Г. Єрмаков, О. В. Овчарук. – К.: Плеяда, 2005. – 120 с.
4. Грищенко Г. О. , Філон Л. Г. Дослідницька компетентність учня з алгебри і початків аналізу: що це? //Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики», 30 травня – 1 червня 2018 р./Мін-во освіти і науки України,Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця: ТОВ «Ніланд-ЛТД», 2018.- С. 253-257.
5. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду / М. С. Головань // Вища освіта України. – 2008. – № 3. – с.23-30.
6. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / М. С. Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – № 1. – С. 35–39.
7. Головань М. С. Сутність та зміст поняття «дослідницька компетентність» / М. С. Головань, В. В. Яценко // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: збірник наукових праць. Випуск VII.– Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – с. 55- 62.
8. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / Гончаренко Семен Устинович. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.
9. Звєрєва Г. Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики: Методичний посібник для вчителів / Зверєва Галина Федосіївна. – Харків: РМК Московського РУО, 2008. – 81 с.

10.Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с. : іл.

11. Клименко О.О. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / О.О.Клименко // Управління освіти, сімї, молоді та спорту Білгород-Дністровської міської ради, 2018. – 56 с.

12. Князян М. О. Навчально-дослідна діяльність студентів як засіб актуалізації професійно значущих знань : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 “Теорія та історія педагогіки” / М. О. Князян. – Одеса, 1998.

13. Корольський В.В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Корольський Володимир Вікторович. – Кривий Ріг, 2013. – ч.2-а. – 393 с.

14. Ляшко М.Я. Застосування похідної до доведення тотожностей // У світі математики, №11. – К.: Радянська школа, 1980. – с.48-61.

15. Лященко М.Я. Геометричні задачі на екстремум // У світі математики, № 10,12. – К.: Радянська школа, 1979, 1981.

16.Лященко М.Я. Похідна та її застосування: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Радянська школа, 1985. – 153 с.

17. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.

18. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 512 с. : іл.

19. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – ч.1. – 256 с.: іл.

20. Муранова Н.П. Математика. Похідна та її застосування: навч.-метод. посіб. / Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко. – 2-ге вид., стер. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. – 128 с.
21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень, 2018 р.
22. Недодатко Н. Г. Формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 "Теорія та історія педагогіки" / Недодатко Н. Г. – Х., 2000.
23. Недодатко Н. Г. Теоретичні основи формування навчально-дослідницьких умінь / Н. Г. Недодатко // Вопросы педагогики высшей и средней школы : сборник научных трудов. – Кривой Рог, 1994. – С. 158–162.
24. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. – Харків: Вид-во «Ранок», 2018. – 272 с.: іл.
25. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти / О. В. Овчарук // Стратегія реформування освіти в Україні. – К.: КІС, 2003. – С.68-75.
26. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / Раков Сергій Анатолійович. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
27. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. доктора пед. наук / Раков Сергій Анатолійович. – К., 2005. – 503 с.
28. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, доповнене і перероблене / Слєпкань Зінаїда Іванівна. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.: іл.
29. Слівінська Л. А. Урок на тему: «Застосування похідної до дослідження функцій» / Л. А. Слівінська // Методичний вісник. – 2015. – №4.– с. 37-42.

30. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 128 с.
31. Филон Лидия, Швец Василий, Грищенко Галина. Содержание и характер исследовательской деятельности старшеклассников в контексте обучения их решению математических задач с параметрами // Международная научная конференция «Школьный куррикулум: проблемы и возможности для развития», (7-8декабря 2018 г., г. Кишинэу, Республика Молдова) Институт педагогических наук Молдовы. С. 61–66.
32. Філон Л.Г., Лук'янова С.М., Дремова І.А. Наукові ліцеї: особливості організації науково-дослідницької діяльності учнів з математики // Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції "Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи", м. Полтава, 19-20 листопада 2019 р. Полтава: Астрая, 2019. С.79-80.
33. Чайка В. М. Основи дидактики / В. М. Чайка. – К.: Академвидавництво, 2011. – 238 с.
34. Чепіль М. М. Педагогічні технології / М. М. Чепель, Н. З. Дудник // К.: Академвидавництво, 2012. – 222 с.
35. Штаба А. С., Філон Л. Г. Розв'язування геометричних задач на найбільше та найменше значення за допомогою похідної як елемент дослідницької діяльності учнів // Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих вчених (20 листопада 2020 р., м.Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т.Г.Шевченка, 2020. 114 с.

Додатки

Тема уроку. **Застосування похідної до розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведення нерівностей**

Мета уроку. Сформувати навички й уміння застосовувати похідну до дослідження функції при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведенні нерівностей.

Тип уроку. Урок застосування знань, формування навичок і вмінь.

Форма організації навчання. Урок-лекція.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Учень застосовує результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення нерівностей;

Структура уроку

1. Мотивація навчальної діяльності, повідомлення теми, мети і завдань уроку.

2. Актуалізація опорних знань.

3. Засвоєння нового матеріалу, творче перенесення знань і навичок в нові умови.

Завдання для роботи на уроці

Розв'яжіть рівняння:

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29$;
2. $x^5-x^3+2x-28=0$;
3. $x^3+6x+2\sqrt{10+x}=\cos\pi x$.

Розв'яжіть нерівність

$2x^9-x^5+x>2$.

Доведіть нерівність:

1. $\sin x<x$ для всіх $x>0$;
2. $0\le x^3-2x^2+x\le 2$ де $x\in[0;2]$.

Це завдання представлене на застосування найбільшого та найменшого значення функції на проміжку.

Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = \cos 2y - \cos 2x, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$$

4. Повідомлення домашнього завдання.

Знати властивості функції, що застосовуються до розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведення нерівностей.

Вміти застосовувати похідну до дослідження функції при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, доведенні нерівностей.

Розв'язати:

П. 39, приклад 3 (с.313);

№ 39.23. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x = \sin x$;

№39.25. Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$;

№39.27 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

П. 41, приклад 4 (с. 332);

№ 41.28. Доведіть нерівність $-20 \le x^3 - 3x^2 \le 16$, де $x\epsilon[-2; 4]$;

№41.30. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7} + \sqrt{1-x} = x^2 + 6x + 13$.

5. Підсумок уроку.

Підручник. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г.Мерзляк та ін..Х.: Гімназія, 2018. 400 с.