НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» імені Т. Г. Шевченка
Кафедра математики та економіки

Л. О. Соколенко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до навчання курсу для студентів
спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
та спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Частина 1
«Вступ до аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної»

Чернігів
2023

УДК 517 (092)
С 59

Рецензенти:

Лось Валерій Миколайович – доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Тур Ганна Іванівна **–** кандидат педагогічних наук, методист відділу природничо-математичних дисциплін ЧОІППО імені К. Д. Ушинського.

С 59 **Соколенко Л. О. Математичний аналіз** : Методичні рекомендації до навчання курсу «Математичний аналіз» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності 122 Комп’ютерні науки. **Частина 1 «Вступ до аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної»**. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023. 156 с.

Методичні рекомендації до навчання курсу «Математичний аналіз». Укладено на основі програми навчальної дисципліни «Математичний аналіз» підготовки бакалаврів галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) та галузі знань 12 Інформаційні технології, спеціальності 122 Комп’ютерні науки. Розраховані на студентів першого курсу спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) та спеціальності 122 Комп’ютерні науки денної та заочної форм навчання.

УДК 517 (092)

Рекомендовано до друку вченою радою природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка (протокол № 3 від 30 жовтня 2023 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Ви починаєте вивчати навчальну дисципліну ***«Математичний аналіз»***, метою вивчення якої для студентів, які опановують освітньо професійні програми 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки, є оволодіння математичним апаратом, необхідним для аналізу, моделювання та розв'язування теоретичних і практичних інженерних задач.

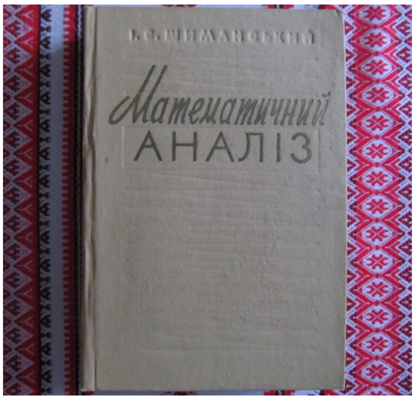
Під час навчання курсу студенти ваших спеціальностей мають оволодіти наступними ***компетентностями***: 1) здатність до абстрактного та логічного мислення, використання методів аналізу та синтезу, індукції й дедукції, узагальнення і конкретизації; 2) набуття гнучкого способу мислення, який дозволяє зрозуміти та розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне ставлення до розглядуваних концепцій; 3) здатність до пошуку, аналізу та опрацювання інформації з різних джерел; 4) здатність до ефективної організації власної діяльності, до роботи як незалежно і самостійно, так і в команді; 5) здатність до математичного, логічного і алгоритмічного мислення, побудови математичних та інформаційних моделей, обґрунтування вибору методів розв'язування задач, проектування, розробки та аналізу алгоритмів, оцінювання їх ефективності та складності, інтерпретації отриманих результатів; 6) здатність використовувати знання природничо-математичних, гуманітарних та соціально-економічних дисциплін у власній професійній діяльності; 7) здатність до виявлення закономірностей випадкових явищ, застосування методів статистичної обробки, в тому числі в професійній діяльності, та оцінювання даних з використанням інформаційних технологій.

Навчальну дисципліна ***«Математичний аналіз»*** вивчається протягом двох семестрів першого курсу. На її вивчення відводиться 9 кредитів ECTS, по 4,5 кредити у кожному семестрі.

Оскільки однією з компетентностей є здатність до пошуку, аналізу та опрацювання інформації з різних джерел, то зупинимось більш детально на питанні вибору підручників, посібників та збірників задач, призначених для навчання даного курсу.

Відомості з історії створення підручника з математичного аналізу на Україні.

У **1960 р.** вийшов у світ підручник **І. Є. Шиманського «Математичний аналіз»**, що широко використовувався у педагогічних інститутах України. Його автор Іван Євгенович Шиманський (1896-1982 р.р.) – педагог, математик, методист математики, професор Київського державного педагогічного інституту імені О. М. Горького, який з 1953 року по 1971 рік був завідувачем кафедри елементарної математики та методики навчання математики фізико-математичного факультету КДПІ імені О.М. Горького. І. Є. Шиманський був чудовим лектором, який читав студентам лекції з математичного аналізу.

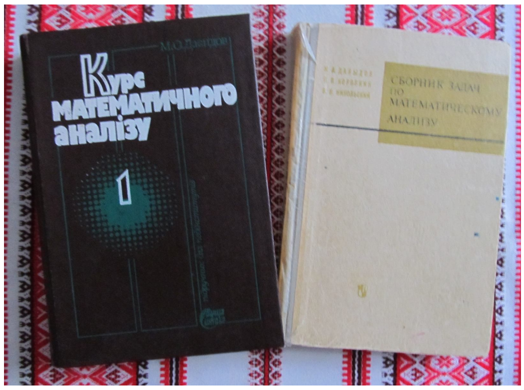


Математичний аналіз. Шиманський І. Є.
«Вища школа», 1972, 623 с.

І. Є. Шиманський

З 1976 року по 1979 рік Давидов Микола Олексійович (1917-1998 р.р.) – математик, педагог, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики з 1965 року по 1989 рік КДПІ імені О. М. Горького (нині Українського державного університету імені Михайла Драгоманова) написав «Курс математичного аналізу» у 3-х частинах, який було перевидано у 1990-1992 р.р. [1]–[3].

Давидов М.О. та його учні,
серед яких Бурляй М.Ф., Михалін Г.О.,
Соколенко О.І. та ін.



Підручник та збірник задач
Давидова М.О.

Шкіль Микола Іванович (1932-2015 р.р.) – педагог, математик, доктор фізико-математичних наук, академік АПН України, з 1973 р. по 2003 р. ректор КДПІ імені О. М. Горького (нині УДУ імені Михайла Драгоманова) є автором та співавтором підручників з курсів «Математичний аналіз» та «Вища математика».

Трьохтомник «Вища математика» написано ним у 1994 р. у співавторстві з Колесник Тамарою Всеволодівною (нар. 1938 р.) – професором кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М. П. Драгоманова.

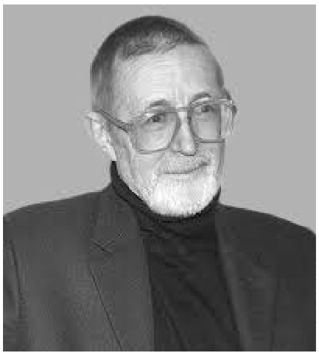
Кафедра математики КДПІ імені О. М. Горького

Шкіль М. І. читає лекцію з матаналізу перед студентами НПУ імені М. П. Драгоманова

У 2002 році вийшли підручники та посібники з курсів «Математичний аналіз» та «Вища математика».у видавництвах «Академія» та «Либідь», авторами та співавторами яких є математики Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О., Соколенко О. І. та інші.

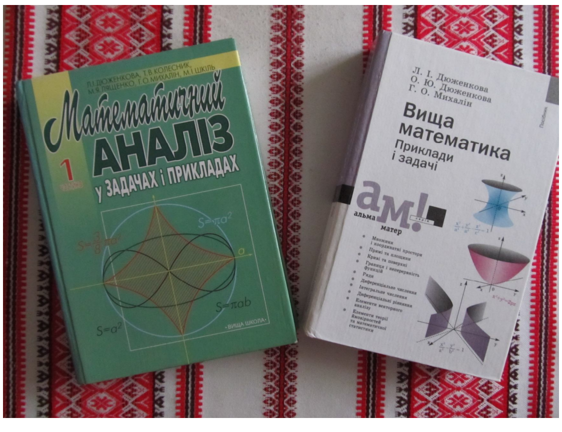
Дюженкова Л. І.

Дюженкова О. Ю.



Михалін Г. О.

Соколенко О. І.



Підручники Дюженкової Л. І., Дюженкової О. Ю., Михаліна Г. О. та ін.

Підручники Соколенка О. І.

Дані підручники та збірники задач адаптовані для викладання курсів **«Математичний аналіз»** [6] та **«Вища математика»** [7], [8], [9] для студентів вищих навчальних закладів математичних та нематематичних спеціальностей. Тому ми і використовуємо їх для навчання студентів курсу «Математичний аналіз», які опановують освітньо професійні програми 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки.

Підручники та посібники [5]–[9], [11]–[12] та [18], [21], [22] також допоможуть вам засвоїти даний курс.

До навчальної програми курсу **«Математичний аналіз»** [19] включено **6 змістових модулів**, а саме:

1. Вступ до аналізу.

2. Диференціальне числення функції однієї змінної.

3. Інтегральне числення функції однієї змінної.

4. Диференціальне числення функцій кількох змінних.

5. Диференціальні рівняння.

6. Ряди.

Зміст цих модулів сприяє оволодінню студентами всіма згаданими у **ОПП 014 Середня освіта (Інформатика)** та **122 Комп'ютерні науки** компетентностями.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Лосю В. М., кандидату педагогічних наук, методисту відділу природничо-математичних дисциплін ЧОІППО Тур Г. І. за цінні поради під час підготовки рукопису методичних рекомендацій до друку.

II. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

I СЕМЕСТР

Змістовий модуль 1. Вступ до аналізу

Тема 1. Поняття множини. Числові множини. Поняття про множину. Способи задання множин. Відношення між множинами. Універсальна множина. Операції над множинами. Основні властивості операцій. Множина R дійсних чисел. Потужність множин. Рівнопотужні множини. Зліченні множини. Зліченність множини раціональних чисел. Множини потужності континуум. Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин.

Тема 2. Функції однієї змінної. Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції. Способи задання. *Класифікація функцій за їхніми властивостями* (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції). *Класифікація функцій за їхньою будовою*. Арифметичні операції над функціями (сума, різниця, добуток, частка функцій). Композиція (суперпозиція) функцій. Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції. Класифікація елементарних функцій. Побудова графіків функцій елементарними прийомами.

Тема 3. Числові послідовності та їх границі. Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Теореми про границі послідовностей (теорема про єдиність границі; теорема про обмеженість збіжної послідовності; арифметичні властивості границь; теореми про границі, пов’язані з нерівностями (про граничний перехід у нерівності, про границю проміжної послідовності)). Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Монотонні послідовності. Число e. Лема про вкладені відрізки. Лема Больцано-Вейєрштрасса. Критерій Коші збіжності послідовності.

Тема 4. Границя функції однієї змінної. Неперервність функції. Поняття границі функції. Теореми про границі функції (теорема про єдиність границі; теореми про арифметичні властивості границь; теорема про граничний перехід у нерівності, теорема про границю проміжної функції. Однобічні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

Поняття неперервності функції в точці. Теореми про функції, неперервні в точці. Однобічна неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку. Обмеженість функцій (перша теорема Вейєрштрасса). Існування найбільшого і найменшого означень функції (друга теорема Вейєрштрасса). Теорема про перетворення функції на нуль (перша теорема Больцано-Коші). Теорема про проміжне значення (друга теорема Больцано-Коші). Поняття рівномірної неперервності. Теорема Кантора. Теорема про існування і неперервність оберненої функції.

Змістовий модуль 2.
Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 5. Похідна. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної. Теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції; про похідну суми, різниці, добутку і частки). Диференційовність складної та оберненої функцій. Диференціювання елементарних функцій. Однобічні похідні. Похідні вищих порядків.

Тема 6. Диференціал. Означення диференціала функції та його геометричний зміст. Основні правила і формули диференціювання функцій. Застосування диференціала в наближених обчисленнях. Поняття диференціалів вищих порядків.

Тема 7. Застосування похідної. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші. Теорема Тейлора. Формула Тейлора. Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора. Застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях. Правило Лопіталя. Дослідження функцій за допомогою похідних. Умови монотонності та сталості функції. Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної. Достатні умови екстремуму в термінах першої та другої похідних. Напрям опуклості та точки перегину графіка функції. Теорема про напрям опуклості графіка функції. Необхідна умова точки перегину. Достатня умова точки перегину. Асимптоти графіка функції. Загальне дослідження і побудова графіків функцій.

Змістовий модуль 3.
Інтегральне числення функції однієї змінної

Тема 8. Невизначений інтеграл. Задачі, що приводять до поняття первісної. Поняття первісної функції. Основна властивість первісної. Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами). Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування деяких трансцендентних функцій.

Тема 9. Визначений інтеграл. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування. Означення визначеного інтеграла. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Фізичний зміст визначеного інтеграла. Умови інтегрованості функцій (Необхідна умова інтегрованості функції. Суми Дарбу. Достатня умова інтегрованості функції). Властивості визначеного інтеграла (найпростіші властивості визначеного інтеграла, адитивна властивість визначеного інтеграла, теорема про середнє для визначеного інтеграла). Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Теорема про існування первісної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 10. Застосування визначеного інтеграла. Невласні інтеграли. Геометричні застосування: обчислення площ, обчислення об'ємів тіл обертання, обчислення довжин дуг, обчислення площ поверхонь обертання). Застосування визначеного інтеграла у фізиці. Невласні інтеграли.

II СЕМЕСТР

Змістовий модуль 4.
Диференціальне числення функцій кількох змінних

Тема 11. Функції багатьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних. Поняття $n-$вимірного евклідового простору. Множини точок $n-$вимірного евклідового простору. Відстань між точками в $n-$вимірному точковому просторі. Околи точок. Поняття функції багатьох змінних. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Теорема Вейєрштрасса. Теорема Больцано-Коші.

Тема 12. Частинні похідні, диференційованість і диференціал функції багатьох змінних. Означення частинних похідних та їх знаходження. Диференційовність функції в точці. Диференціал функції. Поняття частинних похідних вищих порядків.

Тема 13. Екстремуми функції багатьох змінних. Локальні екстремуми функції багатьох змінних. Необхідні умови локального екстремуму. Достатні умови локального екстремуму. Дослідження функцій двох змінних на екстремуми.

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема 14. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Поняття про диференціальне рівняння. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв'язок диференціального рівняння. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння органічного зростання (спадання). Моделювання процесів диференціальними рівняннями.

Тема 15. Деякі типи диференціальних рівнянь другого порядку. Означення диференціального рівняння 2-го порядку. Задача Коші. Загальний та частинний розв'язок диференціального рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку (неоднорідні, однорідні). Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння гармонічних коливань.

Змістовий модуль 6. Ряди

Тема 16. Числові ряди. Поняття числового ряду. Поняття збіжності числового ряду. Приклади збіжних та розбіжних рядів. Найпростіші властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Збіжність додатних рядів. Перша та друга порівняльна ознака збіжності додатних рядів. Ознака Коші збіжності додатних рядів. Ознака Д'Аламбера збіжності додатних рядів. Інтегральна ознака Коші збіжності додатних рядів. Збіжність довільних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Теорема Лейбніца. Сполучна властивість збіжних рядів. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.

Тема 17. Функціональні ряди. Поняття функціональної послідовності. Збіжність та рівномірна збіжність функціональної послідовності. Поняття функціонального ряду. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду. Достатня ознака для рівномірної збіжності функціонального ряду (*ознака Веєрштрасса*). Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Тема 18. Степеневі ряди. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Радіус збіжності степеневого ряду. Властивості суми степеневого ряду. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у степеневі ряди. Розвинення в степеневі ряди функцій $e^x, \sin x, \cos x$. Біномний ряд. Розвинення в степеневі ряди функції $\ln(1+x)$, $arctg\, x$. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

III. ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС

Змістовий модуль 1.
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

Тема 1. ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Мета навчання: систематизувати математичні поняття відомі зі шкільного курсу математики з теми «**МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ З НИМИ**»; ввести поняття строге і нестроге включення, множини потужності континуум, обмежені й необмежені числові множини, грані числових множин; розглянути основні властивості операцій над множинами; приклади зліченних множин, зокрема зліченність множини раціональних чисел; приклади множини потужності континуум; приклади обмежених й необмежених числових множин та граней числових множин.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Поняття про множину. Способи задання множин.	[1] Р1 § 1.1; [8] Р1 § 1.1.
2	Відношення між множинами: строге і нестроге включення, рівність множин. Універсальна множина.	[1] Р1 § 1.1; [8] Р1 § 1.1.
3	Операції над множинами. Основні властивості операцій.	[1] Р1 § 1.1; [8] Р1 § 1.1.
4	Множина R дійсних чисел.	[1] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.
5	Потужність множин. Рівнопотужні множини.	[1] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.
6	Зліченні множини. Зліченність множини раціональних чисел.	[1] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.
7	Множини потужності континуум.	[1] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.
8	Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин.	[1] Р1 § 1.2; [8] Р1 § 1.1.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Множина – одне з фундаментальних неозначуваних понять математики. Воно береться з безпосереднього досвіду і не зводиться до найпростіших понять.
За Г. Кантором множина – це сукупність, клас, група об’єктів, об’єднаних, за якоюсь ознакою.
Об’єкти довільної природи, з яких складається множина, називають її елементами.</td></tr>
<tr><td>A, B, C – позначаються множини. a, b, c – позначають елементи множин.</td><td>Символічний запис $a \in A$ означає, що a належить множині A.
Символічний запис $b \notin B$ означає, що b не належить множині B.
<u>Приклад.</u> $5 \in N, 0 \notin N$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Множини бувають скінченними та нескінченними.
Скінченнна множина – це множина, яка складається із скінченного числа елементів.
Множина, що не є скінченною, називається нескінченною.</td></tr>
<tr><td>Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою, і позначається Ø.</td><td><u>Приклад.</u> Множина дійсних розв’язків рівняння $x^2+1=0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Множина, що не є порожньою називається непорожньою.
Множина вважається заданою, якщо про будь-який об’єкт можна сказати, належить він цій множині чи ні.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Способи задання множин</u></td></tr>
<tr><td>1) Скінченні множини задаються переліком їхніх елементів.</td><td><u>Приклад.</u> $A=\{a, b, c, d\}$</td></tr>
<tr><td>2) Нескінченні множини не можуть задаватися переліком їхніх елементів.
Такі множини задаються за допомогою характеристичної властивості їхніх елементів, тобто властивості, яку мають усі елементи цієї множини і тільки вони. Записують так $M=\{x \mid P(x)\}$.</td><td><u>Приклад.</u> $B=\{x \mid x \in N, x>5\}$.
За допомогою характеристичної властивості можуть задаватись також і скінченні множини.
<u>Приклад.</u> Множину $C=\{-3, 1, 4\}$ можна записати так:
$C=\{x \mid x \in Z, (x+3)(x-1)(x-4)=0\}$.</td></tr>
</table>

Відношення між множинами: строге і нестроге включення, рівність множин. Універсальна множина	
<u>Означення 1.</u> Множина ***B*** називається **підмножиною** множини ***A***, якщо кожний елемент множини ***B*** є елементом множини ***A***. $a \in B \Rightarrow a \in A$ для кожного $a \in B$. Позначають $B \subset A \; або \; A \supset B$.	З означення випливає $A \subset A$, $\varnothing \subset A$. $B \subseteq A$ означає, що $B \subset A$ або $B = A$ – **нестроге включення**. **<u>Приклад.</u>** $M = \{a, b, c\}$. Підмножини $\varnothing$, ($\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$) – **власні підмножини**, $\{a, b, c\}$.
<u>Означення 2.</u> Підмножина ***B*** множини ***A*** називається **власною підмножиною** або **правильною частиною** множини ***A,*** якщо ***B*** є непорожня множина і в ***A*** знайдеться хоча б один елемент, якого немає в ***B.*** **<u>Означення 3.</u>** Дві множини ***A*** і ***B*** називаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини ***A*** є елементом множини ***B*** і навпаки, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ і $B \subset A$.	
При вивченні множин певний інтерес становлять множини, які є спорідненими між собою. Так, це множини певних геометричних фігур на площині та в просторі. У зв'язку з цим природною є домовленість про те, що розглядувані в кожному конкретному випадку множини є підмножинами деякої більш об'ємної множини. Цю множину називають універсальною і позначають ***U*** або Ω.	
Операції над множинами. Основні властивості операцій	
Із даних множин ***A*** і ***B*** можна утворити нові множини, застосовуючи операції об'єднання, перерізу і віднімання множин.	
<u>Означення 4.</u> Множину, що складається з елементів, кожен з яких належить множині ***A*** <u>або</u> множині ***B***, називають ***об'єднанням*** (сумою) множин ***A*** та ***B*** і позначають $A \bigcup B$. $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \; або \; x \in B\}$.	**<u>Приклад.</u>** ***A*** – множина парних натуральних чисел. ***B*** – множина непарних натуральних чисел. $A \bigcup B = N$.
<u>Означення 5.</u> Множину, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множині ***A*** <u>і</u> множині ***B***, називають ***перерізом*** (добутком) множин ***A*** та ***B*** і позначають $A \bigcap B$. $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \; і \; x \in B\}$.	**<u>Приклад.</u>** ***A*** – множина правильних многокутників, ***B*** – множина паралелограмів. $A \bigcap B$ – множина квадратів.

Для n множин, де $n>2$, операції перерізу і об'єднання визначаються аналогічно.	
Означення 6. Множину, що складається з елементів, кожен з яких належить і множині ***A*** і не належить множині ***B***, називають різницею множин ***A*** та ***B*** і позначають ***A\B***. Операцію знаходження різниці множин називають ***відніманням множин.***	**Приклад.** $A=\{a,b,k,1\}$, $B=\{c, \mathrm{d}, \mathrm{k}, \mathrm{m}\}$, то $\boldsymbol{A \backslash B}=\{a,b,l\}$.
Означення 7. Нехай ***A*** – підмножина множини Ω. Різницю $\Omega \backslash A$ називають ***доповненням множини A*** до множини ***A*** і позначають $C_{\Omega}A$.	**Приклад.** $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, то $C_{\Omega}A=\{2,4,6\}$.

Основні властивості операцій

1. $\left.\begin{array}{l}A\bigcup B=B\bigcup A\\ A\bigcap B=B\bigcap A\end{array}\right\}$ – ***(комутативність об'єднання і перерізу).***

2. $\left.\begin{array}{l}(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)\\ (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)\end{array}\right\}$ – ***(асоціативність об'єднання і перерізу).***

3. $\left.\begin{array}{l}A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\\ A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\end{array}\right\}$ – ***(дистрибутивність перерізу відносно об'єднання та дистрибутивність перерізу відносно об'єднання).***

4. $(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$ ***(дистрибутивність перерізу відносно різниці).***

5. Якщо $A\subset B$, то $A\bigcup B=B$ і $A\bigcap B=A$.

6. $\left.\begin{array}{l}(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'\\ (A\bigcap B)'=A'\bigcup B'\end{array}\right\}$ – ***закони де Моргана.***

7. $A\bigcup A'=U$. **8.** $A\bigcup \varnothing=A$. **9.** $A\bigcup A=A$.
10. $A\bigcap\varnothing=\varnothing$. **11.** $A\bigcap A=A$.

Взаємно однозначна відповідність.

Нехай маємо дві множини A і B. Кажуть, що між множинами A і B встановлено ***взаємно однозначну відповідність***, якщо вказаний закон φ, за яким кожному елементу $a\in A$ поставлений у відповідність єдиний елемент $b\in B$ і при цьому будь-який елемент $b\in B$ відповідний одному і тільки одному елементу $a\in A$.

Еквівалентність множин Якщо між множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність, то говорять, що ці множини ***еквівалентні***, і пишуть $A \sim B$.	**<u>Приклад.</u>** N – множина натуральних чисел. N_{2n} – множина парних натуральних чисел. $N \sim N_{2n}$.
Дві скінченні множини будуть еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакової кількості елементів.	
Множина R дійсних чисел	
Числова множина – це множина, кожен елемент якої є числом.	Серед числових множин назвемо насамперед такі: **1)** ***множина натуральних, чисел*** $N = \{1, 2, ..., n, ...\}$; **2)** ***множина цілих чисел*** $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$; **3)** ***множина раціональних чисел*** $Q = \left\{ x \,\middle\vert\, x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}$.
Між цими множинами існує зв'язок: $N \subset Z \subset Q$. Проте множини **Q** не досить навіть для того, щоб при фіксованій одиниці вимірювання довжини виміряти довільний відрізок прямої. **<u>Твердження.</u>** Довжину гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника, катет якого є одиничним відрізком (одиницею довжини), не можна виразити ніяким раціональним числом.	
Об'єднання множин Q та I називають **множиною дійсних чисел** і позначають R; таким чином, $R = Q \cup I$. Найчастіше вживані числові множини (відрізки, півінтервали, інтервали, скінченні, нескінченні). Всі ці множини називаються ***проміжками.***	Причому $[a; b]$ називають ***відрізком,*** $[a; b), (a; b], [a; +\infty)$ і $(-\infty; b]$ – ***півінтервалами,*** а $(a; b), (a; +\infty), (-\infty; b)$ і $(-\infty; +\infty)$ – ***інтервалами.***
Проміжки $[a; b], (a; b), [a; b)$ і $(a; b]$ називаються ***скінченними***; де a і b – їхні кінці, а число $b - a$ – довжина. Решта проміжків називаються ***нескінченними***; числа a і b, що фігурують в позначеннях вище розглянутих нескінченних проміжків, також іноді називають їхніми ***кінцями***.	

Абсолютним значенням (або *модулем*) дійсного числа x називається число, яке позначається $|x|$ і визначається за формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \ge 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Властивості модуля

1. $|x| \ge 0$. **2.** $|x| = |-x|$. **3.** $-|x| \le x \le |x|$.

4. $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$.

5. $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $|x| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$.

6. $(\forall\, a > 0)$ $|x| > a \Leftrightarrow x < -a,\ або\ \ x > a$.

7. $(\forall\, a > 0)$ $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a,\ або\ \ x \ge a$.

Для будь-яких чисел x і y маємо такі співвідношення.

8. $|x+y| \le |x| + |y|$.

9. $\big|\,|x| - |y|\,\big| \le |x-y|$.

10. $|xy| = |x| \cdot |y|$.

11. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, якщо $y \ne 0$.

Між множиною* R *і множиною точок координатної прямої встановлено взаємно однозначну відповідність.

$$x \leftrightarrow M(x).$$

***Властивість неперервності* множини R.**

Якщо X і Y – непорожні підмножини множини **R**, які мають ту властивість, що $(\forall\, x \in X)\, i\, (\forall\, y \in Y)\, x \le y$, то $(\exists\, c \in R)\, x \le c \le y$ $(\forall\, x \in X)\, i\, (\forall\, y \in Y)$ (Рис.1).

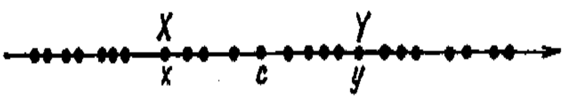


Рис. 1.

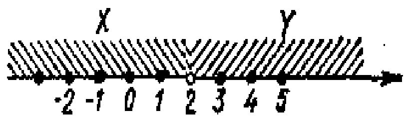


Рис. 2

Зміст властивості неперервності полягає в тому, що у множині **R** не має не тільки таких «стрибків», як, наприклад, у множині **N**, але і таких «дірок», як у множині **Q** (Рис. 2).

Потужність множин. Рівнопотужні множини

Потужність множини означається як те загальне, притаманнне всім множинам, еквівалентним даній множині, тобто всім множинам, елементи яких можна поставити у взаємно однозначну відповідність з елементами даної множини [16, с. 183].

Рівнопотужні множини це те саме, що ***еквівалентні множини.***

<u>Означення.</u> ***Кардинальним числом*** або ***потужністю*** певної множини M називають той клас K_α рівнопотужних множин, в якому ця множина міститься. Усім множинам одного класу приписується одна й та сама потужність. $n\ (M)$ – потужність множини ***M***. $n\ (A) = n\ (B) \Leftrightarrow A \sim B.$ Якщо множина ***A*** ***не еквівалентна*** множині ***B*** $(A \sim B_1,\ \ B_1 \subset B)$, то $n\ (B) > n\ (A)$ або $n\ (A) < n\ (B)$.	
Формули потужності множин $A \cup B$, $A \cup B \cup C$	
Якщо $A \cap B \neq \varnothing$ і $A \cap C \cap B \neq \varnothing$, то $n\ (A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, $n\ (A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.	
Зліченні множини. Зліченність множини раціональних чисел	
Множину, рівнопотужну множині натурального ряду чисел, називають ***зліченнною множиною.*** $h = \lvert\ p\ \rvert + \lvert\ \mathrm{q}\ \rvert$ – ***висота раціонального числа.***	**<u>Приклад.</u> Z ~ N.** 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, … . 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … . **<u>Приклад.</u> Q ~ N.** $Q = \left\{ x \;\middle|\; x = \dfrac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N \right\}$
Множина раціональних чисел із заданою висотою ***h*** є ***скінченною***. $h = 1$ $h = 2$ $h = 3$ $h = 4$ $Q = \left\{\dfrac{0}{1}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{1}, \dfrac{-1}{1}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{2}{1}, \dfrac{-2}{1}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{3}{1}, \dfrac{-3}{1}\right\} \cup \ldots$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 … .	
Множини потужності континуум	
Якщо множина A є еквівалентною множині $B = [0;1]$, то її називають ***континуальною*** та кажуть, що вона має *континуальну кількість елементів*, або *континуальну потужність*.	**<u>Приклад.</u>** Континуальними множинами є будь-який відрізок $[a;b]$, де $a < b$, множини $I, R, C.$
Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин	
<u>Означення 8.</u> Числова множина X називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке $c \in R$, що для	**<u>Приклад.</u>** Множина **N** є прикладом обмеженої знизу, і необмеженої зверху множини.

будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $x \le c$. Число c при цьому називається ***верхньою межею*** множини X.

<u>Означення 9.</u> Числова множина називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке $c \in R$, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $x \ge c$. Число c при цьому називається ***нижньою межею*** множини X.

Будь-який скінченний проміжок $([a;b],(a;b),(a;b],[a;b))$ є прикладом обмеженої множини.

Множина **R** є прикладом необмеженої множини.

Множина, що обмежена зверху і знизу, називається просто ***обмеженою.***

Множина, що не є обмеженою зверху (знизу), називається ***необмеженою зверху*** **(*знизу*).**

<u>Твердження.</u> Будь–яка обмежена зверху (знизу) множина X має безліч верхніх (нижніх) меж, які утворюють множину чисел, що обмежують X зверху (знизу).

<u>Означення 10.</u> Нехай числова множина X обмежена зверху. <u>Найменша верхня межа</u> множини X називається ***верхньою гранню*** цієї множини і позначається **sup*X*.**

<u>Означення 11.</u> Нехай числова множина X обмежена знизу. <u>Найбільша нижня межа</u> множини X називається ***нижньою гранню*** цієї множини і позначається **inf*X*.**

<u>Приклад.</u> Нехай $X = [a;b]$. Тоді число ***a***, а отже і будь-яке менше число є нижньою межею даної множини, а число ***b*** – її верхньою межею. Очевидно, число ***a*** – нижня грань множини ***X***, а число ***b*** – верхня грань, тобто ***a*=inf*X*, *b*=sup*X*.**

Теорема 1. Будь-яка обмежена зверху (знизу) непорожня числова множина має верхню (нижню) грань.

Теорема 2. Якщо ***X*** – обмежена зверху (знизу) непорожня числова множина і **β=supX (α=infX)**, то:

1) $(\forall\, x \in X)$ виконується нерівність $x \le \beta$ $(x \ge \alpha)$;

2) $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in X)$, що виконується нерівність $x > \beta - \varepsilon\ (x < \alpha + \varepsilon)$.

Для числової множини ***X***, необмеженої зверху (знизу), записують $\boldsymbol{sup X = +\infty}$ **(**$\boldsymbol{inf X = -\infty}$**).**

Тема 2. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Мета навчання: систематизувати математичні поняття функціональної змістової лінії шкільного курсу математики; ввести поняття незростаючої та неспадної функції; класифікувати функції за їхніми властивостями та їхньою будовою; ввести поняття оберненої функції та пригадати обернені тригонометричні функції; розглянути класифікацію елементарних функцій; пригадати елементарні прийоми побудови графіків функцій, відомі з курсу алгебри і початків аналізу.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції. Способи задання.	[1] Р1 § 1.4; [8] Р1 § 1.2.
2	*Класифікація функцій за їхніми властивостями* (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції).	[1] Р1 § 1.5; [8] Р1 § 1.2.
3	*Класифікація функцій за їхньою будовою.* Арифметичні операції над функціями (сума, різниця, добуток, частка функцій). Композиція (суперпозиція) функцій, складна функція.	[1] Р1 § 1.4; [8] Р1 § 1.2.
4	Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції.	[1] Р3 § 3.4; [8] Р1 § 1.2.
5	Класифікація елементарних функцій.	[1] Р1 § 1.5; [8] Р1 § 1.2.
6°	Побудова графіків функцій елементарними прийомами.	[22] РІІ § 1-7.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції. Способи задання	
<u>**Означення 1.**</u> Нехай задані непорожні множини $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$. Якщо вказано закон $\boldsymbol{f}$, за яким кожному елементу $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ ставиться у відповідність єдиний елемент $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}$, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині $\boldsymbol{X}$, зі значеннями у множині $\boldsymbol{Y}$. Функцію позначають одним із таких способів: $\boldsymbol{y=f(x)}$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$, або $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$, або $\boldsymbol{X}\xrightarrow{f}\boldsymbol{Y}$. При цьому елемент $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а відповідний елемент $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}$ – ***залежною змінною.***	

Множину X називають ***областю визначення функції*** f, а множину тих $y \in Y$, кожний з яких відповідає принаймні одному $x \in X$, – ***множиною значень функції*** f і позначають Y_f; очевидно, $Y_f \subset Y$. Закон f, що фігурує в означенні функції f, називають ***законом відповідності*** для цієї функції.
Функція може у всій області визначення набувати єдиного значення. У цьому разі її множина значень складається з одного елемента. Такі функції називають ***сталими***. Дві функції називають ***рівними*** або ***тотожними***, якщо вони мають ту саму область визначення і на кожному елементі з цієї області вони набувають однакових значень.
Нехай дана функція f: $X \to Y$. Якщо $X \subset \mathbf{R}$ і $Y \subset \mathbf{R}$, то функцію f називають ***числовою функцією числової змінної***, або коротко ***числовою функцією***.
Координатна площина. Графік функції. Між множиною точок координатної площини і множиною впорядкованих пар дійсних чисел установлено взаємно однозначну відповідність. $$M \leftrightarrow (x;y)$$ Множину впорядкованих пар дійсних чисел часто називають ***числовою площиною*** і позначають $\mathbf{R}_2$, а будь–яку впорядковану пару дійсних чисел – ***точкою числової площини***.
<u>**Означення 2.**</u> ***Графіком функції*** $y = f(x), x \in X,$ називають множину точок $(x;y)$ координатної площини, де $x \in X$, а $y = f(x)$.
Способи задання функцій. Щоб задати функцію, треба задати область визначення функції і закон відповідності. Найпоширеніші способи задання функцій такі: аналітичний, табличний, графічний.

Аналітичний спосіб означає задання функції формулою, що показує послідовність і кількість операцій над аргументом, які необхідні для того, щоб дістати відповідне значення функції.	<u>**Приклади.**</u> $y = 3x^2 + 5$, $y = 2\log_3(x-4)$, $y = 3^{x-7}$.

Класифікація функцій за їхніми властивостями (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції).

<table>
<tr><td colspan="2">Обмежені та необмежені функції</td></tr>
<tr><td>
<u>Означення 3.</u> Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається обмеженою зверху (знизу) на цій множині, якщо множина її значень обмежена зверху (знизу).
$(\exists M \in R)(\forall x \in X)\, f(x) \le M \ (f(x) \ge M).$
Функція $f(x)$, що обмежена зверху і знизу на множині X, називається просто обмеженою на цій множині.
$(\exists H \in R)(\forall x \in X)\, |f(x)| \le H$.
</td><td>
<u>Приклад.</u>
1) Функція $y = x^2$ є обмеженою знизу на R, оскільки $x^2 \ge 0$ для будь-якого $x \in \mathbf{R}$. Разом з тим ця функція є необмеженою зверху на R.
2) Функція $y = \sin x$ є обмеженою на R, бо існує число $H = 1$ таке, що $|\sin x| \le 1$ для будь-якого $x \in \mathbf{R}$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Функція $f(x)$, що визначена на множині X і не є обмеженою зверху (знизу) на цій множині, називається необмеженою зверху (знизу) на вказаній множині.
Функція $f(x)$, що обмежена зверху і знизу на множині X, називається обмеженою на цій множині, а функція $f(x)$, що визначена на множині X і не є обмеженою на цій множині, називається необмеженою на вказаній множині.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Монотонні функції</td></tr>
<tr><td>
<u>Означення 4.</u> Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається: а) зростаючою, б) спадною, в) незростаючою; г) неспадною на цій множині, якщо для будь-яких $x_1 \in X$ і $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, правильна відповідно нерівність:
а) $f(x_1) < f(x_2)$,
б) $f(x_1) > f(x_2)$,
в) $f(x_1) \ge f(x_2)$,
г) $f(x_1) \le f(x_2)$.
Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні функції на деякій множині називаються монотонними на цій множині, а зростаючі і спадні функції, крім того, називаються строго монотонними.
</td><td>
<u>Приклад.</u>
1. Функція $y = x$ є зростаючою на R.
2. Функція $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ є спадною на проміжку $(0;+\infty)$.
3. Функція $y = x^2$ не є монотонною на своїй області визначення – множині R, однак вона є спадною на проміжку $(-\infty;0)$ і зростаючою на проміжку $[0;+\infty)$.
</td></tr>
</table>

Парні і непарні функції

<u>Означення 5.</u> Функція $\boldsymbol{y=f(x)}$, $\boldsymbol{x\in X}$, називається ***парною*** (***непарною***), якщо її область визначення симетрична відносно нуля, тобто, якщо $\boldsymbol{x\in X}$, то й $\boldsymbol{-x\in X}$, і для будь-якого $\boldsymbol{x\in X}$ має місце рівність $f(-x)=f(x)$, $\left(f(-x)=-f(x)\right)$.	**<u>Приклад.</u>** **1.** Функція $y=x^5-3x-\sin x$ є непарною. **2.** Функція $y=4x^2+7\cos x$ є парною. **3.** Функція $y=x^4+2x^2+5$, $x\in[1;10]$, не є ні парною, ні непарною.

Періодичні функції

<u>Означення 6.</u> Функція $\boldsymbol{f(x)}$, визначена на **R**, називається ***періодичною***, якщо існує таке число $\boldsymbol{T\neq 0}$, що $f(x+T)=f(x)$ для будь-якого $x\in$ **R**. Число $\boldsymbol{T}$ при цьому називається ***періодом функції f(x)***.	**<u>Приклад.</u>** **1.** Функція $y=\sin 3x$ періодична. $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

Якщо T – період функції $\boldsymbol{f(x)}$, то й число $-T$ є також періодом цієї функції.

Дійсно $\boldsymbol{f(x)=f((x+T)-T)=f(x-T)}$.

Якщо число $\boldsymbol{T}$ – період функції $\boldsymbol{f(x)}$, то її періодами є також і числа $\boldsymbol{\pm kT}$, $\boldsymbol{k}\in$ **N**.

Дійсно $\boldsymbol{f(x)=f(x\pm T)=f((x\pm T)\pm T)=f(x\pm 2T)=\ldots=f(x\pm kT)}$.

Серед додатних періодів функції $\boldsymbol{f(x)}$ може існувати найменший період, який називається ***основним***.

<u>Означення 6.1.</u> Функція $\boldsymbol{f(x)}$, визначена на множині $\boldsymbol{X}$, називається ***періодичною на цій множині***, якщо існує таке число $\boldsymbol{T\neq 0}$, що $\boldsymbol{x\pm T\in X}$ і $\boldsymbol{f(x+T)=f(x)}$ для будь-якого $\boldsymbol{x\in X}$.

$(\exists T\neq 0)(x\pm T\in \mathrm{X})\, f(x+T)=f(x)(\forall x\in X)$.

Функція, що не є періодичною, називається ***неперіодичною***.

Класифікація функцій за їхньою будовою. **Арифметичні операції над функціями** (сума, різниця, добуток, частка функцій). **Композиція (суперпозиція) функцій.**

Арифметичні операції над функціями

Якщо дві функції f і g мають спільну область визначення X, то ***сумою, різницею, добутком* і *часткою*** їх називаються відповідно функції, визначені на тій самій множині такими формулами: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, якщо $g(x)\neq 0$, для всіх $x\in X$.	**<u>Приклад.</u>** Сумою функцій $y_1=x^2+1$ і $y_2=3x+4$ є функція $y=x^2+3x+5$.

Операція знаходження суми (добутку, різниці, частки) функцій називається ***додаванням*** (***множенням***, ***відніманням***, ***діленням***) ***функцій***; всі ці операції називаються ***арифметичними операціями над функціями.***

Композиція (суперпозиція) функцій, складна функція

<u>Означення 7.</u> Нехай дані функції **φ** і f такі, що $Y_\varphi \subset X_f$, де Y_φ – множина значень функції **φ**, а X_f – область визначення функції f. Нова функція F, визначена на X_φ – області визначення функції **φ**, яка кожному $x\in X_\varphi$ ставить у відповідність число $f(\varphi(x))$, називається ***складною функцією*** від x (композицією функцій **φ** і f).	**<u>Приклад.</u>** Композицією функцій $\varphi(x)=3x^2+1$ і $f(x)=\sqrt{x}$ є функція $(f\circ\varphi)(x)=\sqrt{3x^2+1}$.

Функція **φ** називається ***внутрішньою***, а f – ***зовнішньою функцією.*** Для функції F вживають також позначення $f\circ\varphi$:

$(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x)),\ x\in X_\varphi$.

Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції

<u>Означення 8.</u> Нехай дано функцію f, визначену на множині X, і нехай Y – множина значень цієї функції. Якщо функція f така, що при кожному фіксованому $y\in Y$ рівняння $y=f(x)$ має єдиний розв'язок $x\in X$, то можна розглядати функцію **φ**, яка кожному $y\in Y$ ставить у відповідність число $x\in X$ таке, що $f(x)=y$.	**<u>Приклад</u>.** Розглянемо функцію $y=2x$. Для цієї функції множина **R** є як областю визначення, так і множиною значень. При кожному фіксованому $y\in R$ рівняння $y=2x$ має єдиний розв'язок $x=\frac{y}{2}$. Отже, функція $y=2x$ має обернену функцію $x=\frac{y}{2}$.

Ця функція $x=\varphi(y)$, $y\in Y$, називається ***оберненою функцією*** до функції $y=f(x)$, $x\in X$, і позначається так: $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$.

Функція $y=f(x)$, $x\in X$, при цьому називається ***прямою функцією***.

Множиною значень оберненої функції є область визначення прямої функції.

Якщо незалежну змінну оберненої функції позначити через x, а залежну змінну через y, то замість функції $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$, матимемо функцію $y=f^{-1}(x), x\in Y$.

При такій заміні будь-яка точка $M(x;y)$ графіка функції $y=f(x)$, $x\in X$, ***або*** $x=f^{-1}(y)$, $y\in X$, стане точкою $M'(y;x)$ графіка функції $y=f^{-1}(x)$, $x\in Y$.

Точки $M(x;y)$ і $M'(y;x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, тому й графіки прямої функції $y=f(x)$, $x\in X$, і оберненої до неї функції $y=f'(x)$, $x\in Y$, мають таку саму властивість (рис. 1).

Знаючи графік прямої функції, неважко дістати графік оберненої до неї функції як множину точок, симетричних графіку прямої функції відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

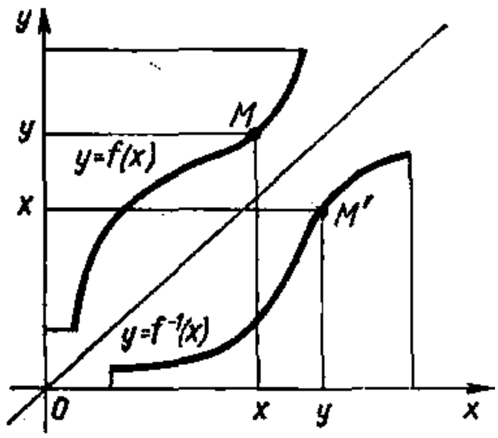


Рис. 1

З означення оберненої функції випливає, що ***функція f областю визначення і множиною значень якої є відповідно множини X і Y, має обернену функцію тоді і тільки тоді, коли вона задає взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y.***

Таку властивість мають строго монотонні функції.

<u>Теорема</u> (*достатня умова існування оберненої функції*).

Нехай дано функцію f, визначену на множині **X**, і нехай **Y** – множина значень цієї функції. Якщо функція f зростаюча (спадна) на множині **X**, то для неї існує обернена функція f^{-1}, що є визначеною і зростаючою (спадною) на множині Y.

Обернені тригонометричні функції	
1) Функція *y*=arcsin*x*. Функція $y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ є зростаючою на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, її множиною значень є відрізок $[-1;1]$. Отже, для функції $y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, існує обернена функція (див. теорему).	Цю функцію позначають $y=\arcsin x$ (читають «арксинус *x*»). Вона визначена і є зростаючою на відрізку $[-1;1]$, множиною її значень є відрізок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
2) Функція *y*=arccos*x*. Функція $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$, є спадною на відрізку $[0;\pi]$, її множиною значень є відрізок $[-1;1]$. Отже, для функції $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$, існує обернена функція.	Цю функцію позначають $y=\arccos x$ (читають «арккосинус *x*»). Вона визначена і є спадною на відрізку $[-1;1]$, множиною її значень є відрізок $[0;\pi]$.
3) Функція *y*=arctg*x*. Функція $y=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, її множиною значень є множина **R**. Отже, для функції $y=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, існує обернена функція.	Цю функцію позначають $y=arctg\ x$ (читають «арктангенс *x*»). Вона визначена і є зростаючою на множині **R**, множиною її значень є інтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
4) Функція *y*=arcctg*x*. Функція $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(0;\pi)$, є спадною на інтервалі $(0;\pi)$, множиною її значень є множина **R**. Отже, для функції $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(0,\pi)$, існує обернена функція.	Цю функцію позначають $y=arcctg\ x$ (читають «арккотангенс *x*»). Вона визначена і є спадною на множині **R**, множиною її значень є інтервал $(0;\pi)$.
Завдання 1. До практичного заняття 2 повторити графіки обернених тригонометричних функцій.	
Класифікація елементарних функцій	
1. ***Цілі раціональні*** функції – це функції виду $\boldsymbol{P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}$, де $\boldsymbol{a_i}$ **(*i*=0, 1, 2, ..., *n*)** – числа.	$P(x)=5x^4+7x^3+2x^2-8x+9$.

Цілі раціональні функції називають також многочленами, а числа a_i **(*i*=0, 1, 2, ..., *n*)** – коефіцієнтами цих многочленів; якщо $a_n \neq 0$, то ціле невід'ємне число *n* називають степенем даного многочлена.

Функція $f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}$, є згідно з даним означенням многочленом, який називають нульовим многочленом; останньому не приписується ніякого степеня. Многочлен, що не є нульовим, називається ненульовим многочленом.

2. Раціональні **функції** – це функції виду $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, **де *P*(*x*) і *Q*(*x*) – многочлени (*Q*(*x*)** – *ненульовий многочлен*).	$R(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-2x+7}$.

Якщо ***Q*(*x*)** – ненульовий многочлен нульового степеня, то раціональна функція $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – це ціла раціональна функція.

Якщо раціональна функція не є цілою, то вона називається дробово–раціональною функцією. Отже, як множина цілих раціональних функцій, так і множина дробово–раціональних функцій є підмножиною множини раціональних функцій.

3. *Ірраціональні* функції – це функції, що не є раціональними і можуть бути задані формулою, в якій композиція раціональних функцій і степеневих з раціональним показником та чотири арифметичні операції виконуються скінченне число разів.	$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-8x+1}{x^3-x^2-5}}-\sqrt{2x^3-3x^2+3}$, – ірраціональна функція.
4. *Трансцендентні* функції – це елементарні функції, що не є раціональними або ірраціональними.	Тригонометричні, обернені тригонометричні, показникова і логарифмічна функції є трансцендентними функціями.

Побудова графіків функцій елементарними прийомами.

Завдання. Повторити з курсу алгебри і початків аналізу 10-11 кл. на практичне заняття №2.

Тема 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ГРАНИЦІ

Мета навчання: систематизувати знання про числові послідовності, означити поняття границі послідовності та розкрити її геометричний зміст; розглянути теореми про границі послідовностей; означити поняття нескінченно малої та нескінченно великої, монотонної послідовностей; розглянути число *e*, лему про вкладені відрізки, лему Больцано-Вейєрштрасса та критерій Коші збіжності послідовності.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Числова послідовність.	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.
2	Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі.	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.
3	Теореми про границі послідовностей (теорема про єдиність границі; теорема про обмеженість збіжної послідовності; арифметичні властивості границь; теореми про границі, пов'язані з нерівностями (про граничний перехід у нерівності, про границю проміжної послідовності)).	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.
4	Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.
5	Монотонні послідовності. Число *e*. Лема про вкладені відрізки.	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.
6	Підпослідовності. Лема Больцано-Вейєрштрасса. Критерій Коші збіжності послідовності.	[1] Р2 § 2.6; [8] Р1 § 1.5.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Числова послідовність	
Означення 1. Будь-яка функція виду f: $\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ називається ***числовою послідовністю*** або просто ***послідовністю.*** Число $f(n)$, $n\in\mathbf{N}$, позначається через x_n і називається ***n-м членом послідовності f***: $\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, число n – його ***номером***, а саме число $f(n)\in\mathbf{R}$ – ***значенням*** цього члена. Послідовність f: $\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ позначається також (x_n), або в розгорнутому вигляді $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Член послідовності задається його значенням і номером. Якщо $n>k$, то член послідовності x_n називається членом, який слідує за членом x_k.	

Якщо $n>k$, то член послідовності x_n називається членом, який слідує за членом x_k.

Множина членів послідовності еквівалентна множині **N**. Отже, множина членів послідовності завжди нескінченна, в той час як множина значень членів послідовності, тобто множина значень функції f: **N**→**R** може бути скінченною множиною, зокрема складатися з одного елемента. В останньому випадку, тобто тоді, коли у послідовності всі значення її членів збігаються, вона називається ***сталою***.

<u>Приклади.</u>

1) $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

2) $1, 4, \ldots, n^2, \ldots$;

3) $-1, 8, \ldots, (-1)^n n^3, \ldots$;

4) $3, 3, \ldots, 3, \ldots$.

Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі

<u>Означення 2.</u> Число a називається ***границею послідовності*** **(**x_n**)**, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке натуральне число $n_0=n_0(\varepsilon)$, що для всіх натуральних $n>n_0$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\in N)(\forall\, n>n_0)\,|\, x_n-a\,|<\varepsilon \qquad (1)$$

Те, що число a є границею послідовності (x_n) прийнято записувати так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n\to a \text{ при } n\to\infty \qquad (2)$$

(читають: «границя x_n при n, що прямує до ∞, дорівнює a», відповідно «x_n прямує до a при n, що прямує до ∞»).

Будь-який інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ називають ε-околом (або просто околом) точки (числа) a.

Оскільки нерівність (1) рівносильна нерівностям $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, то має місце таке <u>геометричне тлумачення</u>:

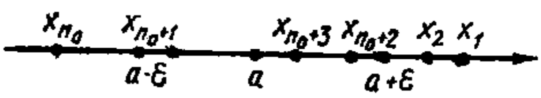


Рис. 1

Який би не був ε-окіл точки a, всі точки x_n, починаючи з деякого номера n, потрапляють в цей окіл, тобто існує таке натуральне число $n_0=n_0(\varepsilon)$, що всі точки $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$ потрапляють у вказаний окіл.

Що ж до точок $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$, то вони можуть належати або не належати ε-околу точки a. Таким чином, якщо поза ε-околом точки a є точки x_n, то їх є скінченна кількість.

<table>
<tr><td>Символ $[x]$ означає найбільше ціле число, що не перевищує x. Наприклад, $[2]=2$, $[0{,}99]=0$, $[-2{,}3]=-3)$.
Послідовність (x_n), яка має границю a, називається збіжною до числа a, або просто збіжною, а будь-яка послідовність, що не має границі, називається розбіжною.</td>
<td><u>Приклад.</u>
Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.
<u>Доведення.</u>
Візьмемо довільне число ε>0 і складемо нерівність $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.
Оскільки $\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$, то для всіх натуральних $n>n_0=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],1\right\}$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. Цим рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ доведена.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Означення 3.</u> Послідовність називається обмеженою зверху (знизу), якщо множина її значень обмежена зверху (знизу). Іншими словами, послідовність (x_n) обмежена зверху (знизу), якщо існує таке $c\in\mathbf{R}$, що для будь-якого $n\in\mathbf{N}$ виконується нерівність $x_n\le c$ $(x_n\ge c)$.
$$(\exists c\in R)(\forall n\in N)\, x_n\le c\ (x_n\ge c)$$
Послідовність, що обмежена як зверху, так і знизу, називається обмеженою.
Отже, послідовність (x_n) обмежена, якщо існують такі $a\in\mathbf{R}$ і $b\in\mathbf{R}$, що для всіх $n\in\mathbf{N}$ виконується умова $a\le x_n\le b$.
Ця умова, очевидно, рівносильна тому, що існує таке $c\in\mathbf{R}$, що для всіх $n\in\mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_n|\le c$.
$$(\exists c\in R)(\forall n\in N)\,|x_n|\le c$$
Послідовність, що не є обмеженою зверху (знизу), називається необмеженою зверху (знизу), а послідовність, що не є обмеженою, називається необмеженою.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теореми про границі послідовностей</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 1. (про єдиність границі).
Послідовність може мати тільки одну границю.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 2. (про обмеженість збіжної послідовності) – необхідна ознака збіжності послідовності.
Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.</td></tr>
<tr><td>Достатня ознака розбіжності послідовності.
Послідовність розбігається, якщо вона необмежена.</td>
<td><u>Приклади.</u>
1) $1, 4, \ldots, n^2, \ldots$;
2) $-1, 8, \ldots, (-1)^n n^3, \ldots$.
Розбіжні послідовності тому, що кожна з них необмежена.</td></tr>
</table>

Якщо ж послідовність обмежена, то питання про її збіжність залишається ще не з'ясованим.

Приклад.

0, 1, … , $\frac{1+(-1)^n}{2}$, … обмежена і розбіжна.

Однак серед обмежених послідовностей є як збіжні, так і розбіжні.

Будь-яка збіжна послідовність обмежена.

Арифметичні властивості границь

Означення 4. Якщо (x_n) і (y_n) – дві послідовності, то їхньою ***сумою, різницею, добутком* і *часткою*** (згідно з загальним означенням суми, різниці, добутку і частки функцій) називаються відповідно послідовності

$(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ (у випадку частки вважається, що $y_n \neq 0 \ \forall n \in N$).

Теорема 3. Якщо послідовності (x_n) і (y_n) збіжні, то збіжні також їхні *сума, різниця і добуток*, причому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{4}$$

а якщо, крім того, $y_n \neq 0 \quad (\forall n \in N)$ і $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то і *частка послідовностей* (x_n) і (y_n) також збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}. \tag{5}$$

Наслідок. Якщо послідовність (x_n) збіжна і k – число, то послідовність (kx_n) також є збіжною, причому

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = k \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{6}$$

Аналогічними є теореми для алгебраїчної суми і добутку будь-якої скінченної кількості збіжних послідовностей.

Зауваження. Твердження, обернені до останньої теореми, не є правильними.

Приклад.

Кожна з послідовностей $0, 1, \ldots, \frac{(-1)^n + 1}{2}, \ldots$ і $1, 0, \ldots, \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2}, \ldots$ є розбіжною, а їхня сума – послідовність **1, 1, ..., 1, ...** – є збіжною до **1.**

Теореми про границі, що зв'язані з нерівностями
Теорема 4 (*про граничний перехід у нерівності*). Якщо члени $\boldsymbol{x}_n$ і $\boldsymbol{y}_n$ збіжних послідовностей (x_n) і (y_n), починаючи з деякого номера n, задовольняють нерівність $$x_n \le y_n \qquad (7)$$ то їхні границі задовольняють таку саму нерівність: $$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad (8)$$
Теорема 5 (*про границю проміжної послідовності*). Нехай члени послідовностей $(x_n), (y_n)$ і (z_n), починаючи з деякого номера n, задовольняють нерівності $$x_n \le y_n \le z_n \qquad (9)$$ і нехай $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a. \qquad (10)$$ Тоді послідовність (y_n) також збіжна і $$\lim_{n\to\infty} y_n = a. \qquad (11)$$

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності	
<u>**Означення 5.**</u> Послідовність (α_n), що має границю, яка дорівнює нулю, називається ***нескінченно малою.*** $$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon))\ (\forall n > n_0)\ \lvert \alpha_n \rvert < \varepsilon.$$	<u>**Приклад.**</u> Послідовність (x_n). нескінченно мала, якщо $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$.
<u>**Твердження.**</u> Для того, щоб послідовність (x_n) мала границю a, необхідно і достатньо, щоб послідовність (α_n) з n-м членом $\alpha_n = x_n - a$ була ***нескінченно малою.***	
<u>**Означення 6.**</u> Послідовність (β_n) називається ***нескінченно великою***, якщо $$(\forall M > 0)(\exists\, n_0 = n_0(M) \in N)(\forall n > n_0, n \in N)\lvert \beta_n \rvert > M$$ При цьому пишуть $$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \text{ або } \beta_n \to \infty \text{ при } n \to \infty \qquad (12)$$ Якщо має місце співвідношення (12) і члени послідовності (β_n), починаючи з деякого номера n, набувають тільки додатних (від'ємних) значень, то пишуть $$\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty \text{ або } \beta_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty, \qquad (13)$$ $$\lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty \text{ або } \beta_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty \qquad (14)$$ Таким чином, з умов (13) або (14) випливає умова (12).	<u>**Приклад.**</u> Послідовність (x_n) нескінченно велика, якщо $x_n = \dfrac{12n^3}{n^2-2}$.

Властивості **нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей.**

1. Якщо послідовність **(x_n)** **обмежена**, а послідовність **(y_n)** **нескінченно велика**, причому $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то послідовність $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ є **нескінченно малою**.

2. Якщо послідовність **(x_n)** така, що послідовність **$(|x_n|)$** **обмежена знизу додатним числом**, а послідовність **(y_n)** **нескінченно мала**, причому $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то послідовність $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ є **нескінченно великою.**

Границю послідовності, про яку йшлося раніше, іноді називають ***скінченною границею.***

Тому послідовність **(x_n),** що має нескінченну границю, границі не має, тобто вона є ***розбіжною***.

Монотонні послідовності. Число *e*. Лема про вкладені відрізки

Означення 7. Послідовність **(x_n)** називається: а) ***зростаючою***, б) ***спадною***, в) ***незростаючою***, г) ***неспадною***, якщо $\forall n \in \mathbf{N}$ правильна відповідно нерівність: а) $x_n < x_{n+1}$, б) $x_n > x_{n+1}$, в) $x_n \geq x_{n+1}$, г) $x_n \leq x_{n+1}$.	**Приклад 1.** Послідовність (n^2) є зростаючою. **Приклад 2.** Послідовність $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ є спадною.

Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні послідовності називаються ***монотонними***, а зростаючі і спадні послідовності, крім того, називаються ***строго монотонними.***

Теорема 6. **(*достатня ознака існування границі послідовності*).**

Нехай послідовність **(x_n)** є *зростаючою* або *неспадною*. Якщо вона обмежена <u>зверху</u> числом $\boldsymbol{b}$, то існує границя цієї послідовності, яка дорівнює числу $\boldsymbol{\beta}$, що задовольняє умову $\boldsymbol{\beta \leq b}$. Якщо ж вона <u>необмежена зверху</u>, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Нехай послідовність **(x_n)** є *спадною* або *незростаючою*. Якщо вона обмежена <u>знизу</u> числом a, то існує границя цієї послідовності, яка дорівнює числу α, що задовольняє умову $\alpha \geq a$. Якщо ж вона <u>необмежена знизу</u>, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Число *e*.

Теорема 7. Послідовність $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ є збіжною.

Для доведення цієї теореми використовують наступну лему.

Лема. Якщо число $x \geq -1$, то $\forall n \in N$ виконується нерівність

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{15}$$

(нерівність Бернуллі).

Границю послідовності (x_n) з n-м членом $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ позначають буквою e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{16}$$

Можна довести, що ***e*** – ірраціональне число (не є раціональним числом) і що з точністю до 10^{-15} $e \approx 2{,}718281828459045$.

<u>Лема про вкладені відрізки.</u>

<u>Означення.</u> Послідовність відрізків

$$[a_1;b_1],[a_2;b_2],\ldots,[a_n;b_n],\ldots \tag{17}$$

називається ***послідовністю вкладених відрізків***, якщо $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset.\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$, тобто коли

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \tag{18}$$

для всіх $n \in N$.

Послідовність вкладених відрізків (17) називається ***стяжною***, якщо

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0. \tag{19}$$

Лема. Для довільної стяжної послідовності вкладених відрізків існує єдина точка, що належить всім відрізкам цієї послідовності.

Підпослідовності. Нехай дана послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Із неї можна виділити нескінченним числом способів нову послідовність

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

де індекс n_k пробігає нескінченну зростаючу послідовність натуральних чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.

Послідовність (x_{n_k}) називають **підпослідовністю послідовності** (x_n).

Якщо послідовність збіжна, то будь-яка її підпослідовність також збіжна і при тому до того ж числа.

Проте з того, що послідовність (x_n) має збіжну підпослідовність не випливає, що сама вона збіжна.

Лема (лема Больцано-Вейерштрасса). З будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Теорема 8 (критерій Коші збіжності послідовності).

Для того, щоб послідовність (x_n) була збіжною, необхідно і достатньо, щоб
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \in N, m \in N, n > n_0, m > n_0)\, |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Про послідовність (x_n), про яку йде мова в цій теоремі, кажуть, що вона задовольняє умову Коші.

Умову Коші формулюють і в такій формі:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \in N, n > n_0, \forall\, p \in N)\, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Тема 4. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

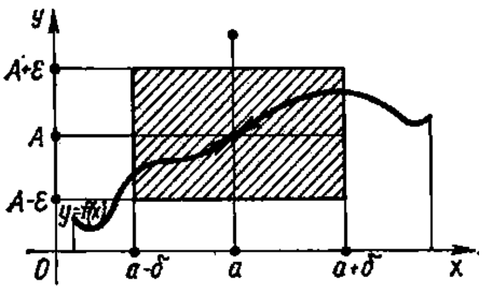
Мета навчання: систематизувати та розширити знання про границю функції, розглянути теореми про границі функції; ввести поняття однобічної границі функції, нескінченно малої та нескінченно великої функцій; розглянути деякі важливі границі; систематизувати та розширити знання про неперервність функції у точці, розглянути теореми про функції неперервні в точці; ввести поняття однобічної неперервності; розглянути розривні функції, точки розриву та їх класифікацію, властивості функцій, неперервних на відрізку.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття границі функції.	[1] Р2 § 2.1; [8] Р1 § 1.5.
2	Теореми про границі функції (теорема про єдиність границі; теореми про арифметичні властивості границь; теорема про граничний перехід у нерівності, теорема про границю проміжної функції).	[1] Р2 § 2.2; [8] Р1 § 1.5.
3	Однобічні границі функції.	[1] Р2 § 2.1; [8] Р1 § 1.5.
4	Деякі важливі границі.	[1] Р2 § 2.3; [8] Р1 § 1.5.
5	Нескінченно малі і нескінченно великі функції.	[1] Р2 § 2.5; [8] Р1 § 1.5.
6	Поняття неперервності функції в точці.	[1] Р3 § 3.1; [8] Р1 § 1.6.

7	Теореми про функції, неперервні в точці.	[1] Р3 § 3.1; [8] Р1 § 1.6.
8	Однобічна неперервність.	[1] Р3 § 3.2; [8] Р1 § 1.6.
9	Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація.	[1] Р3 § 3.2; [8] Р1 § 1.6.
10	Властивості функцій, неперервних на відрізку.	[1] Р3 § 3.3; [8] Р1 § 1.6.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	Приклад
Поняття границі функції	
Означення 1. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. Число A називається ***границею функції*** f в точці a, якщо $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x, 0<\lvert x-a\rvert<\delta)\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$. Якщо число A є ***границею функції*** f в точці a, то це записують так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ (1) або $f(x)\to A$ при $x\to a$.	
 Рис. 1	Нерівність $0<\lvert x-a\rvert<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta,\ x\neq a$. Нерівність $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.
Отже, рівність (1) має таке ***геометричне тлумачення***: Які б не взяти дві прямі $y=A-\varepsilon$ та $y=A+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$, знайдуться прямі $x=a-\delta$ та $x=a+\delta\ (\delta>0)$ такі, що частина графіка функції f, яка відповідає всім токам $a-\delta<x<a+\delta, x\neq a$ потрапляє всередину прямокутника, обмеженого прямими $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$, $x=a-\delta$, і $x=a+\delta$ (рис. 1). Що ж до точки $(a; f(a))$ (якщо в точці a функція f визначена), то вона може належати або не належати цьому прямокутнику. Якщо число $\varepsilon>0$ прямує до нуля, то цей прямокутник стягується до точки $(a; A)$, і, отже, коли точка x наближається до точки a, то точка $(x; f(x))$ наближається до точки $(a; A)$.	

<u>Означення 2.</u> Нехай функція f визначена для всіх x, що задовольняють нерівність $\|x\|>K\ (x>K, x<-K)$ при деякому $K>0$. Число A називається ***границею функції*** f при $x\to\infty\ (x\to+\infty, x\to-\infty)$ якщо $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,M=M(\varepsilon)>K)(\forall\,x, \|x\|>\mathrm{M})\|f(x)-A\|<\varepsilon$ Записують $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$).
<u>Геометричне тлумачення:</u> які б ми не взяли дві прямі $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ знайдеться пряма $x=M\ (M\ge K, K>0)$ така, що частина графіка функції *f*, яка відповідає всім $x>M$, потрапляє всередину півсмуги, обмеженої прямими $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$ і $x=M$, що лежить праворуч від прямої $x=M$ (рис. 2).

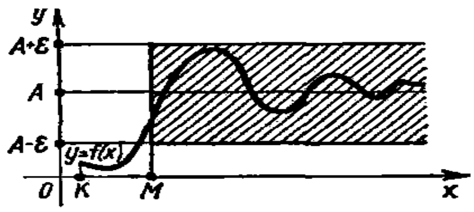


Рис. 2

Оскільки $\varepsilon>0$ може бути як завгодно малим, то з віддаленням точки $x\ (x>K)$ праворуч від точки K точка $(x; f(x))$ наближатиметься до прямої $y=A$.

Будь-який інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ називається ε *– околом* точки (числа) a.

Якщо ж ***a***=∞ (***a***=+∞, ***a***=–∞), то під околом ***a*** розуміють множину тих чисел ***x***, що задовольняють нерівність |***x***|>***M*** (***x***>***M***, ***x***<–***M***), де ***M***>**0.**

Довільний окіл ***a*** (***a*** – число або ∞ (+∞, –∞)) позначають символом ***U***(***a***). Перерізом двох околів $U_1(a)$ і $U_2(a)$ є знову деякий окіл ***U***(***a***).

<u>Означення 3</u>. Нехай функція *f* визначена в деякому околі a (a – число або ∞ (+∞, –∞)), крім, можливо, самої точки a. Число A називається ***границею функції*** *f* при $x\to a$, якщо

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\,U(a))(\forall x\in U(a), x\ne a)|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Теореми про границі функції (теорема про єдиність границі; теореми про арифметичні властивості границь; теорема про граничний перехід у нерівності, теорема про границю проміжної функції)
Розглянемо властивості функції *f*, що має границю при $x\to a$ (a – число або ∞ (+∞, –∞)).
Теорема 1 (про єдиність границі). Границя функції *f* при $x\to a$ (де a – це число ∞(+∞ або –∞)), якщо вона існує, єдина.
Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ (a – число або ∞ $(+\infty;-\infty)$), то функція f обмежена на множині тих точок області визначення, які належать деякому околу **U(**a**).**

Теорема 3 (про арифметичні властивості границь). Якщо кожна з функцій f і g має границю при $x \to a$ (a – число або $\infty(+\infty;-\infty)$), то кожна з функцій $f \pm g$, $f \cdot g$ також має границю при $x \to a$ причому

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x), \tag{3}$$

а якщо, крім того, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, то і функція $\frac{f}{g}$ також має границю при $x \to a$ причому

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \tag{4}$$

Виходячи з означення суми, різниці, добутку і частки функцій, рівності (2)–(4) можна записати ще так:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x), \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \tag{4.1}$$

Наслідок. Якщо функція f має границю при $x \to a$ (a – число або $\pm\infty$ і k – число), то функція kf також має границю при $x \to a$ причому

$$\lim_{x\to a}(kf(x)) = k \lim_{x\to a} f(x) \tag{5}$$

Справедливими є теореми для алгебраїчної суми і добутку будь-якої скінченної кількості функцій, кожна з яких має границю в одній і тій самій точці.

Твердження, обернені до останньої теореми, не є правильними.

Теорема 4 (про граничний перехід у нерівності). Якщо для функцій f і g, кожна з яких має границю при $x \to a$ (a – число або ∞ ($+\infty,-\infty$)), існує окіл $U(a)$ такий, що $\forall\, x \in U(a)$, $x \neq a$, виконується нерівність

$$f(x) \leq g(x), \tag{6}$$

то

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x). \tag{7}$$

Теорема 5 (про границю проміжної функції). Якщо для функцій f і g, кожна з яких має границю при $x \to a$ (a – число або ∞ (+∞, –∞)), яка дорівнює числу A, і функції φ, визначеної в деякому околі a, існує окіл $U(a)$ такий, що $\forall x \in U(a, x \neq a)$, виконуються нерівності

$$f(x) \le \varphi(x) \le g(x), \tag{8}$$

то функція φ також має границю при $x \to a$ і

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A. \tag{9}$$

Однобічні границі функції

<u>**Означення 4.**</u> Нехай a – деяка точка (деяке число). Будь-який півінтервал $[a; a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, називають **правим ε-околом** (або просто *правим околом*) точки (числа) a, а будь-який півінтервал $(a-\varepsilon; a]$, $\varepsilon > 0$, – **лівим ε-околом** (або просто *лівим околом*) точки (числа) a.

Означення 5. Нехай функція f визначена в деякому правому (лівому) околі точки a, крім, можливо, самої точки a. Число A називається ***правою (лівою) границею функції f в точці*** a, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x, a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a))\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записують

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to a+0,$$

$$(\lim_{x \to a-0} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to a-0).$$

Права і ліва границі функції в точці називаються ***односторонніми границями функції в цій точці.***

Теорема 6 (*про зв'язок між границею функції в точці та її однобічними границями в цій самій точці*). Для того щоб функція f мала границю в точці a, яка дорівнює числу A, необхідно і достатньо, щоб існували і права, і ліва границі функції f в точці a, кожна з яких дорівнює числу A.

Виходячи з означень правого і лівого околів точки (числа) a, вважають, що околи –∞ і +∞ є відповідно правим і лівим околами ∞.

А виходячи з цього та з позиції означень однобічних границь функції в скінченній точці, вважають, що границя функції f при $x \to -\infty$ і границя функції f при $x \to +\infty$ є відповідно <u>правою</u> і <u>лівою</u> границями функції f при $x \to \infty$.

Теорема 7. Для того щоб функція f мала границю при $x\to\infty$, яка дорівнює числу A, <u>необхідно і достатньо</u>, щоб існували і права, і ліва границі функції f при $x\to\infty$ тобто існували границі функції f і при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$, кожна з яких дорівнює числу A.

Праву і ліву границі функції f в точці a (при $x\to\infty$) називають ***однобічними границями*** цієї функції в точці a (при $x\to\infty$).

Деякі важливі границі

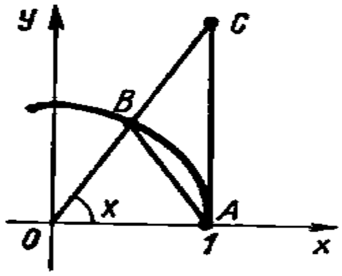


Рис. 3.

Теорема 8. Правильна рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема 9. Справджується така рівність

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Нескінченно малі і нескінченно великі функції

<u>**Означення 6.**</u> Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x\to a$ (a – число або ∞ ($+\infty$, $-\infty$)), якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

<u>**Приклад.**</u>

$\alpha(x)=x\sqrt[3]{x^2}$ – ***нескінченно мала*** при $x\to 0$.

Твердження 1. Для того, щоб функція f, визначена в деякому околі a (a – число або ∞ ($+\infty$, $-\infty$)), крім, можливо, самої точки a, мала границю при $x\to a$, яка дорівнює числу A, необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(x)=f(x)-A$ була нескінченно малою при $x\to a$.

Твердження 2. Сума, різниця і добуток двох нескінченно малих функцій при $x\to a$ є також нескінченно малими функціями при $x\to a$.

Випливає з теореми 3.

<u>**Означення 7.**</u> Якщо частка двох нескінченно малих функцій при $x\to a$ має відмінну від нуля границю, то такі дві нескінченно малі функції називаються ***нескінченно малими одного порядку***, причому ці дві нескінченно малі функції називаються ще ***еквівалентними***, якщо границя їх частки дорівнює 1.

<u>**Приклад.**</u>

При $x\to 0$ $y=x,\ y=\sin 5x$ – н.м. одного порядку.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$

$y=x,\ y=\sin x$ – ***еквівалентні*** (перша важлива границя).

<u>Означення 8.</u> Якщо ж частка $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двох нескінченно малих функцій при $x \to a$ має границю, що дорівнює 0, то $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою функцією вищого порядку***, ніж $\beta(x)$, а $\beta(x)$ – ***нескінченно малою функцією нижчого порядку***, ніж $\alpha(x)$.	**<u>Приклад.</u>** При $x \to 0$ $\alpha(x) = \sin^2 x$ – **н.м. *вищого порядку*, ніж** $\beta(x) = x$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin x = = 1 \cdot 0 = 0.$
<u>Означення 9.</u> Функція *f*, визначена в деякому околі *a* (*a* – число або ∞(+∞, –∞)), крім, можливо, самої точки *a*, називається ***нескінченно великою функцією*** при $x \to a$, якщо $(\forall M > 0)(\exists U(a))(\forall x \in U(a), x \neq a) \mid f(x) \mid > M$ При цьому пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, або $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, (10) і кажуть, що функція *f* має ***нескінченну границю*** при $x \to a$, яка дорівнює ∞.	**<u>Приклад.</u>** $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ – ***нескінченно велика функція*** при $x \to 0$.

Якщо має місце співвідношення (10) і функція *f* у деякому околі *a*, крім, можливо, самої точки *a*, набуває тільки додатних (від'ємних) значень, то пишуть

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ або } f(x) \to +\infty \text{ при } x\to a, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \text{ або } f(x) \to -\infty \text{ при } x\to a, \tag{12}$$

і кажуть, що функція *f* має ***нескінченну границю*** при *x*→*a*, яка дорівнює +∞ (–∞).

Таким чином, з умов (11), (12) випливає умова (10). Але може справджуватися відношення (10) тоді як не справджуватимуться ні (12) ні (13).	**<u>Приклад.</u>** Для функції $y = \frac{1}{x}$ при $x \to 0$ має місце співвідношення (10), у той час як не має місця ні (11), ні (12).

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій.

1. Якщо функція ***f*** <u>обмежена</u> в деякому околі ***a*** (***a*** – число або **∞ (+∞, –∞)**), а функція ***g*** <u>нескінченно велика</u> при ***x*→*a***, то функція $\frac{f}{g}$ є <u>нескінченно малою</u> при *x*→*a*.

2. Якщо функція f задовольняє в деякому околі $U(a)$ (a – число або ∞ ($+\infty$, $-\infty$)) нерівність $|f(x)|\geq K>0$, а функція g <u>нескінченно мала</u> при $x\to a$, причому $g(x)\neq 0$ $\forall x\in U(a)$, $x\neq a$, то функція $\dfrac{f}{g}$ є <u>нескінченно великою</u> при $x\to a$.

Поняття неперервності функції в точці

<u>**Означення 1.**</u> Нехай функція f визначена в деякому околі точки a. Функція f називається ***неперервною в точці*** a, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

<u>**Означення 2.**</u> Нехай функція f визначена в деякому околі точки a. Функція f називається ***неперервною в точці*** a, якщо $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x, |\,x-a\,|<\delta)|\,f(x)-f(a)\,|<\varepsilon$.

Тут у нерівності $|x-a|<\delta$ не потрібно, щоб $|x-a|>0$, оскільки при $x=a$ нерівність $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ виконується.

Оскільки нерівності $|x-a|<\delta$ і $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ рівносильні відповідно нерівностям $a-\delta<x<a+\delta$ і $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$, то той факт, що функція f неперервна в точці a, допускає таке <u>**геометричне тлумачення**</u>:

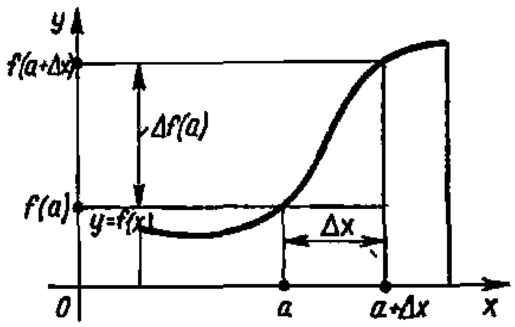


Рис. 3

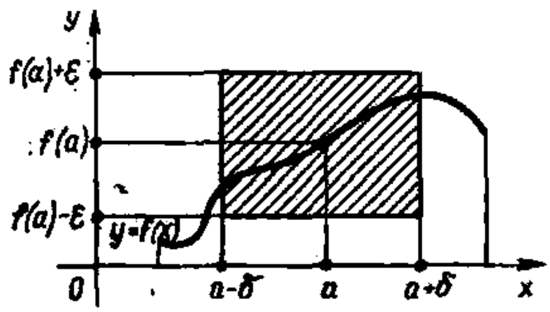


Рис. 4

Які б ми не взяли дві прямі $y=f(a)-\varepsilon$ і $y=f(a)+\varepsilon\,(\varepsilon>0)$, знайдуться дві прямі $x=a-\delta$ і $x=a+\delta\,(\delta>0)$ такі, що частина графіка функції f, яка відповідає всім точкам $x\in(a-\delta;a+\delta)$, потрапляє всередину прямокутника, обмеженого прямими $y=f(a)-\varepsilon$, $y=f(a)+\varepsilon$, $x=a-\delta$ і $x=a+\delta$ (рис. 3).

Оскільки $\varepsilon>0$ може бути як завгодно малим, то з наближенням точки x до точки a точка $(x;\,f(x))$ наближатиметься до точки $(a;\,f(a))$.

Поняття неперервності функції в точці на мові приростів

Нехай функція f визначена в деякому околі точки a і x – довільна точка з цього околу, відмінна від точки a.

Різницю $x-a$ називають ***приростом незалежної змінної*** (або ***приростом аргументу***) x в точці a і позначають Δx (читають «дельта x»). Таким чином,

$$\Delta x = x - a,$$

звідси випливає, що $x = a + \Delta x$.

Кажуть також, що початкове значення a незалежної змінної x набуло приросту Δx. Внаслідок цього значення функції зміниться на величину

$$f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$$

Цю різницю називають ***приростом функції** f **в точці*** a, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x, і позначають $\Delta f(a)$ (читають «дельта f в точці a», або «дельта f від a»), тобто за означенням

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) \qquad (2)$$

Коротко $\Delta f(a)$ позначають Δf або Δy (рис. 3).

Позначення $\Delta f(a)$ через Δy зв'язане з позначенням функції f через $y = f(x)$.

Якщо точка a фіксована, то приріст (2) функції f в точці a є функція від Δx. Якщо $x \to a$, то $\Delta x \to 0$, і, навпаки, якщо $\Delta x \to 0$, то $x \to a$.

Якщо має місце рівність (1), то

$$\Delta f(a) = f(x) - f(a) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (3)$$

Правильне й обернене твердження: з (3) випливає (1).

Таким чином, показано, що означенню 1 (2) еквівалентне таке означення.

<u>**Означення 3.**</u> Функція f, визначена в деякому околі точки a, називається ***неперервною в точці*** a**,** якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0.$$

Теореми про функції, неперервні в точці

Теорема 1. Якщо функція неперервна в деякій точці, то вона обмежена в деякому околі цієї точки.

Теорема 2 (*про арифметичні операції над неперервними функціями*).

Якщо кожна з функцій f і g неперервна в точці a, то кожна з функцій $f \pm g$, $f \cdot g$ також є неперервною в точці a, а якщо, крім того, $g(a) \neq 0$, то і функція $\frac{f}{g}$ також є неперервною в точці a.

Теорема 3 (*про неперервність складної функції*). Якщо функція φ неперервна в точці a і функція f неперервна в точці $b=\varphi(a)$, то складна функція $F=f\circ\varphi$ неперервна в точці a.

Однобічна неперервність

<u>Означення 4.</u> Нехай функція f визначена в деякому правому (лівому) околі точки a. Функція f називається ***неперервною в точці*** a ***справа*** (***зліва***), якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)\ \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)\right) \qquad (4)$$

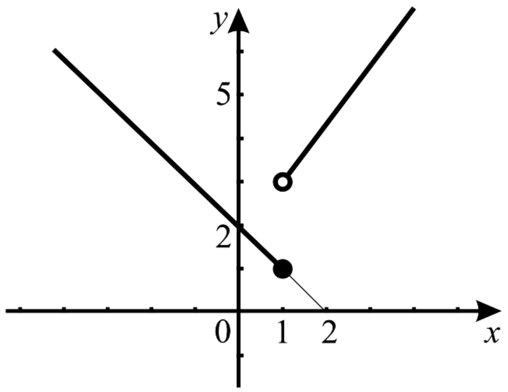


Рис. 5

<u>Приклад.</u>

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, \text{ якщо } -\infty<x\le 1,\\ 2x+1, \text{ якщо } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-x+2)=1=f(1).$

Отже, $f(x)$ неперервна в точці $x=1$ ліворуч.

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(2x+1)=3\ne f(1)$

Отже, $f(x)$ не є неперервною в точці $x=1$ праворуч.

Теорема 4. Для того щоб функція f була неперервною в точці a, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в точці a і праворуч, і ліворуч.

Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація

<u>Означення 5.</u> Нехай функція f визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. Якщо функція f не є неперервною в точці a, то вона називається ***розривною в цій точці***, а точка a називається ***точкою розриву функції*** f.

<u>Приклад.</u>

Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо } 0<x<1,\\ 3, & \text{якщо } 1\le x<3,\\ -x+6, & \text{якщо } 3<x<6.\end{cases}$$

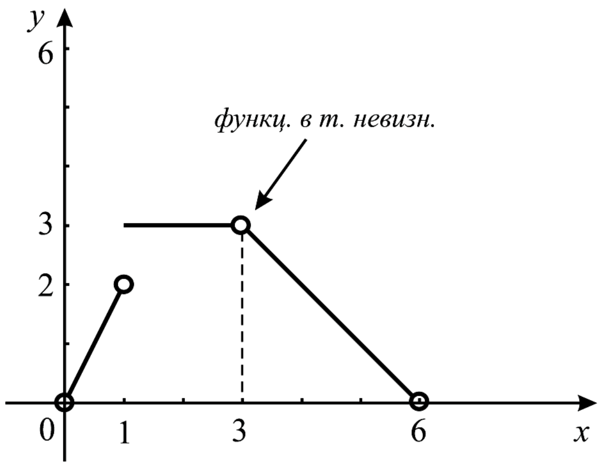


Рис. 6

Розв'язання.

1) Дана функція в точці $x=1$ розривна, оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=2$, а $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=3$ і, отже, за **теоремою 6 (с.40)** *(про зв'язок між границею функції в точці та її однобічними границями в цій самій точці)* функція f не має границі в точці $x=1$.

2) Функція f в точці $x=3$ має границю, яка дорівнює 3, оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=3$ і $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=3$, але розглядувана функція не є визначеною в точці $x=3$. Тому функція f є розривною в точці $x=3$.

3) В кожній точці інтервалу (0; 6), відмінній від 1 і 3, функція f неперервна.

<u>Означення 6.</u> Функція f, визначена в деякому правому (лівому) околі точки a, крім, можливо, самої точки a, що не є неперервною в точці a праворуч (ліворуч), називається ***розривною в цій точці праворуч (ліворуч)***, а точка a називається ***точкою розриву функції f праворуч (ліворуч).***

<u>Приклад.</u> Дана функція f розривна в точці $x=1$ ліворуч, оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=2\neq 3=f(1)$, і неперервна в точці $x=1$ праворуч, оскільки $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=3=f(1)$.

Ця функція в точці $x=3$ розривна і праворуч, і ліворуч, оскільки вона не є визначеною в даній точці.

У кожній точці інтервалу (0;6), відмінній від 1 і 3, функція f, будучи неперервною, неперервна і праворуч, і ліворуч.

<u>Означення 7.</u> Точка a розриву функції f називається ***точкою розриву першого роду***, якщо існують і права, і ліва границі (скінченні) цієї функції в точці a.

Точка a розриву функції f, що не є точкою розриву першого роду, називається ***точкою розриву другого роду.***

<u>Приклад.</u> Для розглянутої функції f, $x=1$ і $x=3$ – точки розриву першого роду; точок розриву другого роду вона не має.

А для функції $y=\dfrac{1}{x}$, наприклад, $x=0$ – точка розриву другого роду.

Властивості функцій, неперервних на відрізку	
Обмеженість функцій	
<u>Означення 8.</u> Функція f називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, неперервна в точці a праворуч, і неперервна в точці b ліворуч зліва. **Теорема 5.** (*перша теорема Вейерштрасса*). Функція, неперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку.	
Існування найменшого і найбільшого значень функції	
<u>Означення 9.</u> Нехай функція f визначена на множині X. Значення $f(c), c \in X$, називається ***найменшим (найбільшим) значенням функції*** f ***на множині*** X, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $f(c) \le f(x) \, (f(c) \ge f(x))$. Найменше і найбільше значення функції не завжди існують. **Теорема 6.** (*друга теорема Вейерштрасса*). Якщо функція неперервна на відрізку, то серед її значень на цьому відрізку існують найменше і найбільше.	
Теорема про перетворення функції на нуль	
Теорема 7. (*перша теорема Больцано-Коші*). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка має значення, протилежні за знаком, то існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$, така, що $f(c) = 0$.	**<u>Приклад.</u>** Довести, що рівняння $\cos x - x = 0$ має розв'язок в інтервалі $(0;\pi)$. **Доведення.** Покладемо $f(x) = \cos x - x$. Ця функція неперервна на відрізку $[0;\pi]$ і на кінцях його має значення, протилежні за знаком: $f(0) = 1, f(\pi) = -(1+\pi)$. Отже, вона задовольняє всі умови теореми 7, згідно з якими існує принаймні одна точка $c \in (0;\pi)$, де $f(c) = 0$. Число c і є розв'язком даного рівняння.
Теорема про проміжне значення	
Теорема 8 (*друга теорема Больцано-Коші*). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f(a) \ne f(b)$, то для будь-якого числа C, що міститься між числами $f(a)$ і $f(b)$, існує точка $c \in (a;b)$, така, що $f(c) = C$.	<u>Зауваження.</u> Властивість функції, виражена теоремою 7 (8), пов'язана з тим, що ця функція неперервна на своїй **«суцільній»** області визначення. **Наприклад**, функція $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо } 2 \le x \le 3, \end{cases}$ неперервна на своїй області визначення – множині $X = [0;1] \cup [2;3]$ в точках 0 і 3 має значення різних знаків, але ніде не набуває нульового значення.

Змістовий модуль 2.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 5. ПОХІДНА

Мета навчання: розглянути різноманітні задачі природознавства, які приводять до поняття похідної, систематизувати знання про похідну, розглянути її геометричний та фізичний зміст; розглянути теореми про функції диференційовні в точці, диференційованість складної, оберненої та елементарних функцій; означити однобічні похідні та похідні вищих порядків.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної.	[1] Р4 § 4.1; [8] Р1 § 1.7.
2	Геометричний та фізичний зміст похідної.	[1] Р4 § 4.1; [8] Р1 § 1.7.
3	Теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції; про похідну суми, різниці, добутку і частки).	[1] Р4 § 4.2; [8] Р1 § 1.7.
4	Диференційовність складної та оберненої функцій.	[1] Р4 § 4.2; [8] Р1 § 1.7.
5	Диференціювання елементарних функцій.	[1] Р4 § 4.3; [8] Р1 § 1.7.
6	Однобічні похідні.	[1] Р4 § 4.4; [8] Р1 § 1.7.
7	Похідні вищих порядків.	[1] Р4 § 4.6; [8] Р1 § 1.7.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної	
До поняття похідної приводять загальновідомі задачі природознавства (про визначення: миттєвої швидкості та прискорення, сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції, швидкості зростання популяції), представлені у таблиці 1.	

У таблиці виділено 4 кроки спільного способу розв'язування названих задач:

1) надання незалежній змінній x приросту Δx,

2) знаходження приросту залежної змінної Δy,

3) складання відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке виражає ***середню швидкість*** зміни функції.

4) знаходження $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, яка є ***швидкістю зміни функції*** заданого значення аргументу x.

Цю границю в математиці називають ***похідною,*** вона є результатом узагальнення способу розв'язування розглянутого виду задач, під час якого змінні x і y позбавляються конкретного змісту і розглядаються абстрактно.

Функція	*Приріст аргументу*	*Приріст функції*	*Середня швидкість зміни функції*	*Миттєва швидкість зміни функції*
1	2	3	4	5
1. $S = S(t)$ – шлях, який проходить тіло за час t; [м]	Δt	$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$	$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_c$ – **швидкість** [м/с]
2. $v = v(t)$ – швидкість нерівномірного руху тіла, де t – час; [м/с]	Δt	$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$	$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} a_c$ – **прискорення** [м/с^2]
3. $q = q(t)$ – кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t; [Кл]	Δt	$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$	$I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$	$I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} I_c$ – **сила струму** [А]

4. $\varphi = \varphi(t)$ – кут повороту тіла за час *t*; [рад]	Δt	$\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$	$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$	$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \omega_c$ – **кутова швидкість** [рад/с]
5. $m = m(l)$ – маса будь-якої частини неоднорідного стержня завдовжки *l*; [г]	Δl	$\Delta m = m(l+\Delta l) - m(l)$	$\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{m(l+\Delta l) - m(l)}{\Delta l}$	$\rho = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \rho_c$ – **лінійна густина стержня** [г/см]
6. $A = A(t)$ – робота, яка здійснюється у момент часу *t*; [Дж]	Δt	$\Delta A = A(t+\Delta t) - A(t)$	$W_c = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$	$W = \lim\limits_{\Delta t \to 0} W_c$ – **потужність** [Вт]
7. $Q = Q(T)$ – кількість теплоти, яку необхідно надати тілу, щоб змінити його температуру на *T* градусів; [Дж]	ΔT	$\Delta Q = Q(T+\Delta T) - Q(T)$	$C_c = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q(T+\Delta T) - Q(T)}{\Delta T}$	$C = \lim\limits_{\Delta t \to 0} C_c$ – **питома теплоємність речовини даного тіла** [Дж /°C]
8. $C = C(t)$ – концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу *t*; [моль/л]	Δt	$\Delta C = C(t+\Delta t) - C(t)$	$v_{ср} = \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t}$	$v_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp}$ – **швидкість хімічної реакції**
9. $P = P(t)$ – чисельність популяції в момент часу *t*; [особин]	Δt	$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$	$v_{cn} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$	$v_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cn}$ – **швидкість зростання популяції**

Таблиця 1. Задачі природознавства
(фізичні, хімічна, біологічна)

<u>Означення 1.</u> Нехай функція f визначена в деякому околі точки a і нехай $\Delta f(a)$ – приріст функції f в точці a, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Якщо відношення $\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ має границю при $\Delta x \to 0$, то ця границя називається ***похідною функції*** f ***в точці*** a і позначається $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Геометричний та фізичний зміст похідної

Нехай лінія l є графіком функції f, визначеної і неперервної в деякому околі точки a.

На лінії l візьмемо точки $M(a; f(a))$ та $P(a+\Delta x; f(a+\Delta x))$ і проведемо січну ***MP*** (рис. 2).

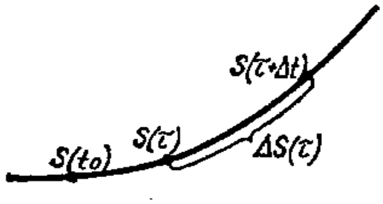


Рис. 1

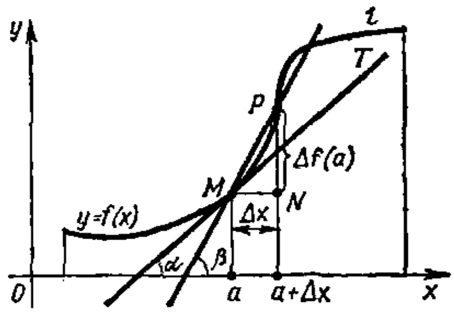


Рис. 2

Кутовий коефіцієнт MP $k = tg\,\beta$ визначається рівністю

$$k = tg\beta = \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

(див. прямокутний трикутник ***MPN***).

Нехай тепер $\Delta x \to 0$, тоді $\Delta f(a) \to 0$ (функція f неперервна в точці a) і $MP \to 0$ (це випливає з рівності $MP = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(a))^2}$) і, отже, точка ***P*** прямує до точки ***M***, залишаючись на лінії ***l***.

При цьому січна ***MP***, взагалі кажучи, змінює своє положення, обертаючись навколо точки ***M***, тобто змінюється кут ***β***.

Якщо функція ***f*** має похідну в точці ***a***, то маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \text{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \text{tg}\alpha = f'(a).$$

Існує пряма ***MT***, що є **граничним положенням січної** ***MP*** при прямуванні точки ***P*** вздовж лінії ***l*** до точки ***M***. Ця пряма називається ***дотичною до лінії l в точці M.***

Твердження 1 (геометричний зміст похідної). Графік функції f, визначеної і неперервної в деякому околі точки a, що має похідну в точці a, в точці $M(a; f(a))$ має дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $f'(a)$.

Твердження 2 (фізичний зміст похідної).

Нехай $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$, $t \geq t_0$ – закон руху матеріальної точки, тобто $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ – довжина шляху, який проходить матеріальна точка за час $\boldsymbol{t}$, що відраховується від деякого моменту часу $\boldsymbol{t_0}$.

І нехай $\Delta s(\tau)=s(\tau+\Delta t)-s(\tau)$ (рис. 1). Величину $\frac{\Delta s(\tau)}{\Delta t}$ називають ***середньою швидкістю руху*** матеріальної точки за проміжок часу Δt, починаючи з моменту часу τ, її позначають $v_c = \frac{\Delta s(\tau)}{\Delta t}$, а границя v_c при $\Delta t \to 0$ (якщо вона існує) є ***миттєвою швидкістю руху*** в момент часу τ, її позначають $\boldsymbol{v}$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(\tau)}{\Delta t} = v.$$

Якщо функція $\boldsymbol{s}$ має похідну в точці τ, то $v = s'(\tau)$ **(фізичний зміст похідної).**

Теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції; про похідну суми, різниці, добутку і частки)

<u>**Означення 2.**</u> Функція f називається диференційовною в точці a, якщо вона має похідну в цій точці.

Теорема 1. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці.

Обернене твердження до теореми 1, не є правильним: якщо функція неперервна в деякій точці, то звідси не випливає, що вона є диференційовною в цій точці.	<u>**Контрприклад.**</u> Функція $f(x)=\lvert x\rvert$ неперервна в точці $x=0$. $\Delta f(0)=\lvert\Delta x\rvert \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Але вона не є диференційовною у вказаній точці.

Арифметичні операції над диференційовними функціями

Теорема 2. (про похідну суми, різниці, добутку і частки). Якщо кожна з функцій f і g диференційована в точці a, то кожна з функцій $f \pm g$, fg також є диференційовною в точці a, причому

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \tag{2}$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \tag{3}$$

а якщо, крім того, $g(a) \neq 0$, то і функція $\frac{f}{g}$ також є диференційовною в точці a, причому

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \tag{4}$$

Наслідок 1. Якщо кожна з функцій $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_n}$ диференційовна в точці a, то функція $\mathbf{f_1+f_2+\ldots+f_n}$ також диференційовна в точці a, причому

$$(\mathbf{f_1+f_2+\ldots+f_n})'(a) = \mathbf{f_1}'(a)+\mathbf{f_2}'(a)+\ldots+\mathbf{f_n}'(a) \qquad (5)$$

Наслідок 2. Якщо функція f диференційовна в точці a і k – число, то функція kf також диференційовна в точці a, причому

$$(kf)'(a) = kf'(a) \qquad (6)$$

Наслідок 3. Якщо функція f диференційовна в точці a і $f(a)\neq 0$, то функція $\frac{1}{f}$ також диференційовна в точці a, причому

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} \qquad (7)$$

Диференційовність складної та оберненої функцій

Теорема 3 (про похідну складної функції). Якщо функція φ диференційовна в точці a і функція f диференційовна в точці $b=\varphi(a)$, то складна функція $F=f\circ\varphi$ диференційовна в точці a, причому

$$F'(a)=f'(b)\varphi'(a). \qquad (8)$$

Приклад. $y=\sqrt{1-x^2}$.

За теоремою 3 маємо:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теорема 4. (про похідну оберненої функції). Нехай функція f визначена, строго монотонна і неперервна в деякому околі точки a і нехай функція f диференційовна в точці a, причому $f'(a)\neq 0$. Тоді і обернена функція f^{-1} є диференційовною в точці $b=f(a)$, причому

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)} \qquad (9)$$

Диференціювання елементарних функцій

Операція диференціювання функцій

Нехай функція f, визначена на множині X, диференційовна в кожній точці множини X_1, що є непорожньою підмножиною множини X.

Якщо кожному $x\in X_1$ поставити у відповідність число $f'(x)$, то утвориться функція, відмінна, взагалі

Приклад 1. Похідна сталої функції, визначеної на множині R, у довільній точці a дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x)=x^2$ у довільній точці a.

Розв'язання. Оскільки ця функція визначена на $\boldsymbol{R}$, вона визначена також в деякому околі довільної точки $a\in R$.

кажучи, від *f*, з областю визначення X_1. Ця функція називається ***похідною функції*** *f* і позначається $f'(x)$. Операція відшукання похідної даної функції *f* називається ***диференціюванням функції.***	Маємо $\Delta f(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 = = 2a\Delta x + (\Delta x)^2 = = (2a+\Delta x)\cdot \Delta x.$ Тому $\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x} = 2a + \Delta x.$ Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2a+\Delta x) = 2a.$ Отже, $f'(a) = 2a.$

Приклади 1 і 2 показують, що коли $y = c$ (*число*), то $y' = 0$, а коли $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Для кожного з цих виразів вищевказана множина X_1 збігається з областю визначення відповідної функції.

Диференціювання основних елементарних функцій

Теорема 5. (про похідні основних елементарних функцій).

Мають місце такі формули:

1. $y = c$ (c – число),	$y' = 0$.	**5.** $y = \sin x$,	$y' = \cos x$.
2. $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$,	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.	**6.** $y = \cos x$,	$y' = -\sin x$.
2а. $y = x$,	$y' = 1$.	**7.** $y = tg\, x$,	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
2б. $y = \dfrac{1}{x}$,	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$.	**8.** $y = ctg\, x$,	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
2в. $y = \sqrt{x}$,	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.	**9.** $y = \arcsin x$,	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $y = a^x$ $(0 < a \ne 1)$,	$y' = a^x \ln a$.	**10.** $y = \arccos x$,	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3а. $y = e^x$,	$y' = e^x$.	**11.** $y = arctg\, x$,	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $y = \log_a x$ $(0 < a \ne 1)$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e.$ $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.	**12.** $y = arcctg\, x$,	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
4а. $y = \ln x$,	$y' = \dfrac{1}{x}$.		

Теореми 2 (*про похідну суми, різниці, добутку і частки*) та **теорема 3** (*про похідну складної функції*) називають ***правилами диференціювання функцій,*** а формули **теореми 5** (№ 1 – № 12) утворюють таблицю похідних основних елементарних функцій. Похідна будь-якої елементарної функції є також функцією елементарною.	**Приклад.** Продиференціювати функції: **1.** $y = x^3 - x\sqrt{x} + 7\sin x$. $y' = (x^3)' - (x^{\frac{3}{2}})' + (7\sin x)' =$ $= 3x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 7(\sin x)' =$ $= 3x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 7\cos x.$ **2.** $y = \cos(x^3 - 2x + 4)$. $y' = -\sin(x^3 - 2x + 4)\cdot(x^3 - 2x + 4)' =$ $= -\sin(x^3 - 2x + 4)\cdot(3x^2 - 2).$

Однобічні похідні та нескінченні похідні

<u>Означення 3.</u> Нехай функція f визначена в деякому правому (лівому) околі точки a. Якщо відношення $\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},\ \Delta x > 0\ (\Delta x < 0)$ (10) має праву (ліву) границю в точці a, то ця границя називається ***правою (лівою) похідною функції f в точці*** a і позначається $f'_+(a)$ або $f'_-(a)$.	**Приклад.** Права (ліва) похідна функції $f(x) = \|x\|$ в точці $x = 0$ дорівнює 1 (або –1).

За означенням

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \qquad (11)$$

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \qquad (12)$$

Теорема 6. Для того щоб функція f мала похідну в точці a, яка дорівнює числу A, необхідно і достатньо, щоб існували і права, і ліва похідні функції f в точці a, кожна з яких дорівнює числу A.

Теорема 7. Якщо функція f в деякій точці має праву (ліву) похідну, то вона неперервна в цій точці праворуч (ліворуч).

Означення 4. Нехай функція визначена в деякому околі точки *a*. Кажуть, що функція *f* має в точці *a* ***нескінченну похідну***, яка дорівнює ∞ (+∞, –∞), і пишуть $f'(a)=\infty$ ($f'(a)=+\infty$, $f'(a)=-\infty$), якщо $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=\infty$$ $$\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=+\infty,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=-\infty\right). \quad (13)$$ Аналогічно означається ***нескінченна права (ліва) похідна.***	**Приклад.** Для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ маємо $$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=$$ $$=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}\to+\infty$$ при $\Delta x\to 0$. Отже, $f'(0)=+\infty$.

Похідні вищих порядків

У п. 1 введено поняття похідної f'. Цю похідну за означенням називають ***похідною першого порядку*** або ***першою похідною*** розглядуваної функції.

Похідна першого порядку f', розглядувана як функція від *x*, що визначена на множині X_1, $X_1\subset X$, де X – область визначення функції *f*, сама може мати похідну $(f')'$, яка є функцією від *x*, визначеною на множині X_2, $X_2\subset X_1$.

Означення 5. Похідну похідної першого порядку функції *f* називають ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною*** цієї функції і позначають $f''(x)$.

Отже, за означенням $f''(x)=(f'(x))'$, $x\in X_2$. (14)

Аналогічно вводяться поняття ***похідної третього порядку*** або ***третьої похідної, похідної четвертого порядку*** або ***четвертої похідної*** і т. д.

Похідну похідної (*n*–1)-го порядку функції *f* називають ***похідною n-го порядку*** **або** ***n-ю похідною*** цієї функції і позначають $f^{(n)}(x)$.

Таким чином, за означенням $$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)', x\in X_n. \quad (15)$$ (тут $n=1, 2, \ldots$ і вважається, що $f^{(0)}(x)=f(x), x\in X$.) (16) Похідна ***n*-го** порядку даної функції *f* в даній точці *a* може існувати і не існувати.	**Приклад.** Знайти похідну 3-го порядку для функції. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2$. ***Розв'язання.*** $$y'=x^2-x,$$ $$y''(x)=\left(x^2-x\right)'=2x-1,$$ $$y'''(x)=(2x-1)'=2$$.

Тема 6. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Мета навчання: означити поняття диференціал та розглянути його геометричний зміст; розглянути основні правила і формули диференціювання функцій; розглянути застосування диференціала в наближених обчисленнях; означити поняття диференціалів вищих порядків.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Означення диференціала та його геометричний зміст.	[1] Р4 § 4.5; [8] Р1 § 1.8.
2	Основні правила і формули диференціювання функцій.	[1] Р4 § 4.5; [8] Р1 § 1.8.
3	Застосування диференціала в наближених обчисленнях.	[1] Р4 § 4.5; [8] Р1 § 1.8.
4	Поняття диференціалів вищих порядків.	[1] Р4 § 4.6; [8] Р1 § 1.8.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Означення диференціала та його геометричний зміст	
<u>Означення 1.</u> Функція f визначена в деякому околі точки a, називається ***диференційовною в точці*** a, якщо для її приросту $\Delta f(a)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x, має місце зображення: $\Delta f(a) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, (1) де A – деяке число, що не залежить від Δx (але залежить від a) і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.	**<u>Приклад 1.</u>** Користуючись означенням 1, показати, що функція $f(x) = x^3$ диференційовна в довільній точці $a \in R$. ***Розв'язання.*** Оскільки дана функція визначена на **R**, то вона визначена і в деякому околі довільної точки $a \in R$. Знайдемо приріст функції f в точці a, що відповідає приросту аргументу Δx:

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) = (a+\Delta x)^3 - a^3 =$$
$$= 3a^2\Delta x + 3a\Delta x^2 + \Delta x^3 = 3a^2\Delta x + \left(3a\Delta x + \Delta x^2\right)\Delta x.$$

Оскільки $A = 3a^2$ – число, що не залежить від Δx і $\left(\alpha(x) = 3a\Delta x + \Delta x^2\right), \alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то залишилось скористатися означенням 1.

<u>Означення 2.</u> Нехай функція f диференційовна в точці a. Лінійний відносно Δx доданок $A\Delta x$, що фігурує в (1), називають ***диференціалом функції*** f ***в точці*** a, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x, і позначають $d\ f(a)$.

Таким чином, за означенням

$$d\ f(a)=A\Delta x. \tag{2}$$

За означеннями 1 і 2

$$\Delta\ f(a)=d\ f(a)+\alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{3}$$

При фіксованому a обидва доданки правої частини цієї рівності є нескінченно малими функціями при $\Delta x \to 0$. Але ці нескінченно малі функції не однакового порядку, якщо $A \neq 0$.

Дійсно, $\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{df(a)}=\dfrac{\alpha(\Delta x)}{A}\to 0$ при $\Delta x \to 0$,

тобто $\alpha(\Delta x)\Delta x$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж нескінченно мала функція $d\ f(a)$.

Тому кажуть, що диференціал є ***головною лінійною частиною приросту функції.***

Поділивши рівність (3) на Δx, матимемо: $\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$. За означенням похідної функції в точці $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x}=f'(a)$. Тому, перейшовши в останній рівності до границі, одержуємо $f'(a)=A$.

Тому диференціал можна записати у вигляді

$$df(a)=f'(a)\Delta x.$$

Для симетрії приріст Δx незалежної змінної x позначають ще через dx, покладаючи, таким чином, $\Delta x = dx$. Символ dx називають ***диференціалом незалежної змінної*** x. Таким чином, диференціал функції f в точці a запишемо так:

$$df(a)=f'(a)\,dx. \tag{4}$$

Звідси випливає, що **похідна функції** f **в точці** a дорівнює $f'(a)=\dfrac{df(a)}{dx}$ тобто вона дорівнює відношенню диференціала функції f в точці a до відповідного диференціала незалежної змінної x.

<u>Зауваження.</u> Диференціал dx незалежної змінної x не залежить від a ($dx=\Delta x$). Що ж стосується диференціала $d\ f(a)$ функції f (відмінної від лінійної) в точці a, то він залежить від a і dx.

Геометричний зміст диференціала

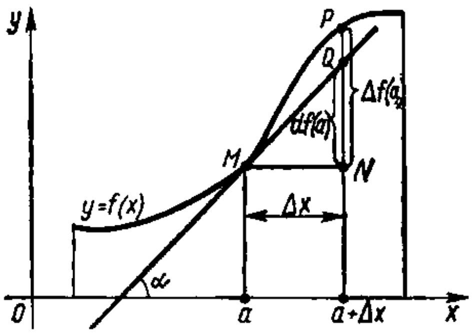


Рис. 1

Нехай функція f диференційовна в точці a**.** Тоді в точці $M(a;\, f(a))$ графік функції *f* матиме дотичну MT (рис. 1), кут нахилу якої до осі Ox дорівнює α, $tg\alpha = f'(a)$.

З рис. 1 видно (див. прямокутний трикутник MQN), що $QN = MN \cdot tg\,\alpha = f'(a)\Delta x = d\ f(a)$.

Отже, **диференціал функції** f **в точці** a **дорівнює** <u>приросту ординати дотичної</u>, проведеної до графіка цієї функції в точці з абсцисою a, коли початкове значення a незалежної змінної x набуло приросту $\Delta\, x$.

Це твердження і виражає **геометричний зміст диференціала.**

Основні правила і формули диференціювання функцій

<u>Означення 3.</u> Нехай функція f визначена на множині X, диференційовна в кожній точці множини X_1, $\varnothing \neq X_1 \subset X$. Вираз $f'(x)\,dx$, $x \in X_1$, в якому $dx = \Delta x$, називається ***диференціалом функції*** *f* і позначається $d\ f(x)$ (читається «де *f* від *x*»), або df, чи dy.

Таким чином, за означенням

$$d\ f(x) = f'(x)\,dx,\ x \in X_1. \tag{5}$$

або $df = f'(x)\,dx$, чи $dy = y'dx$.

З рівності $dy = y'\ dx$ дістаємо рівність $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ($\dfrac{dy}{dx}$ читається «де *y* по де *x*»).

Отже, маємо ще одне <u>позначення похідної</u>, яка є відношенням двох диференціалів: диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Операція відшукання диференціала даної функції *f*, як і операція відшукання похідної, називається ***диференціюванням*** цієї функції.

Оскільки диференціал і похідна пов'язані рівністю (5), то з *основних правил відшукання похідних* випливають ***основні правила відшукання диференціалів:***

1. $d\,(f \pm g) = d\ f \pm dg$;

2. $d\,(f \cdot g) = g\ df + f\ dg$;

3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2},\ g \neq 0$.

З таблиці похідних основних елементарних функцій дістаємо ***таблицю диференціалів цих функцій.***

1. $y = c$ $(c - \textit{число})$, $dy = 0$.

2. $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$, $dy = \alpha\, x^{\alpha-1} dx$.

3. $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, $dy = a^x \ln a\, dx$

....

Для кожної з цих формул множина X_1, що фігурує в означенні диференціала функції (див. (5)), та сама, що і у <u>відповідній формулі таблиці похідних</u>.

<u>Приклад 2.</u> Знайти диференціал функції $y = \ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулою (5) маємо

$$dy = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) dx = -\frac{1}{4 ctg\frac{x}{4} \sin^2\frac{x}{4}} dx = -\frac{dx}{4\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}} = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Нехай функція f диференційовна в точці a і $f'(a) \neq 0$. Тоді має місце рівність (3), в якій $\Delta f(a)$ і $d f(a)$ є еквівалентними нескінченно малими функціями при $\Delta x \to 0$.

$$\frac{\Delta f(a)}{df(a)} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(a)\Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(a)} \to 1$$

при $\Delta x \to 0$.

Таким чином, при досить малому Δx можна записати наближену рівність

$$\Delta f(a) \approx d f(a),$$

або $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$ (6)

<u>Приклад 3.</u> Знайти наближене значення $\sqrt{4{,}001}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Нехай $a = 4$, тоді $\Delta x = 0{,}001$, тоді $\sqrt{4{,}001} = \sqrt{a + \Delta x}$. Отже, можемо скористатись формулою (6).

Для цього треба знайти $f(a) = f(4)$ і $f'(a) = f'(4)$.

$f(a) = \sqrt{4} = 2$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$,

тому $f'(4) = \frac{1}{4}$.

Тоді, за формулою (6) одержимо

$$\sqrt{4{,}001} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}001 = 2{,}00025.$$

Використовуючи формулу (6), можна дістати **наближені формули для окремих елементарних функцій.**

Зокрема, якщо покласти $a = 0$ і обмежитися малими значеннями x, то $f(x) \approx f(0) + f'(0)\Delta x$.

Беручи тут за $f(x)$ різні елементарні функції, ми щоразу діставатимемо відповідну наближену формулу.

Так, $e^x \approx 1 + x$, $\sin x \approx x$, $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$, $\ln(1+x) \approx x$.

Поняття диференціалів вищих порядків
Нехай функція f, визначена на множині X, диференційовна в кожній точці множини X_1, $\varnothing \neq X_1 \subset X$. Тоді диференціал цієї функції має вигляд (див. (5)) $$d\, f(x) = f'(x)\, dx,\ x \in X_1$$ (тут $dx = \Delta x$, оскільки x – незалежна змінна). Цей диференціал за означенням *називають* ***диференціалом першого порядку*** або ***першим диференціалом*** розглядуваної функції. Диференціал першого порядку $d\, f(x)$ залежить як від x, так і від Δx. Припустимо, що значення Δx зафіксоване, стале. Тоді $d\, f(x)$ – це функція від x. Якщо диференціал першого порядку $d\, f(x)$, що розглядається як функція від x, є функцією, диференційовною в кожній точці множини X_2, $\varnothing \neq X_2 \subset X_1$, то можна говорити про диференціал цієї функції, тобто про диференціал диференціала першого порядку. **<u>Означення 4.</u>** Диференціал диференціала першого порядку функції f називають ***диференціалом другого порядку,*** або ***другим диференціалом,*** цієї функції, і позначають $d^2 f(x)$ (читають «де два f від x»), або $d^2 f$ чи $d^2 y$. Отже, за означенням $d^2 f(x) = d\,(d\, f(x)),\quad x \in X_2.$ Оскільки для довільного $x \in X_2$ $$d^2 f(x) = d\big(f'(x)\Delta x\big) = \Delta x\, d\,\big(f'(x)\big) = \Delta x\, f''(x)\Delta x = f''(x)\Delta x^2,$$ то маємо $$d^2 f(x) = f''(x)\, dx^2,\quad x \in X_2.$$ Аналогічно вводяться поняття ***диференціала третього порядку*** або ***третього диференціала***, ***диференціала четвертого порядку*** або ***четвертого диференціала*** і т.д. Взагалі, диференціал диференціала **(n–l)-го** порядку функції f називають ***диференціалом n-го порядку*** або ***n-м диференціалом*** цієї функції і позначають $d^n\, f(x)$, або коротше $d^n f$, чи $d^n y$. Таким чином, за означенням $d^n\, f(x) = d\,\big(d^{n-1} f(x)\big), x \in X_n$ (тут $\boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$ і вважається, що $d^0\, f(x) = f(x), x \in X$.

Зв'язок диференціала ***n*-го** порядку функції f з її похідною того самого порядку виражається формулою $$d^n\, f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n, \ldots x \in X_n.$$	<u>Приклад 4.</u> Знайти диференціал $d^3 f$ функції $f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 6x - 8$. *Розв'язання.* $df(x) = \left(12x^3 + 8x + 6\right)dx$, $d^2 f(x) = \left(36x^2 + 8\right)dx^2$, $d^3 f(x) = 72x\, dx^3$.

Тема 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Мета навчання: розглянути теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші, теорему Тейлора та розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора, застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях; правило Лопіталя та його застосування до розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ та інших; систематизувати знання про монотонність, сталість функції, точки екстремуму та екстремуми функції, найменше (найбільше) значення неперервної на відрізку $[a;b]$ функції, напрям опуклості графіка функції та точки перегину графіка функції, асимптоти графіка функції, розглянути їх означення та необхідні і достатні умови існування; повторити схему загального дослідження функції та згадати приклади її застосування до побудови графіків функцій.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші.	[1] Р5 § 5.1; [8] Р1 § 1.9.
2	Теорема Тейлора. Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора.	[1] Р5 § 5.2; [8] Р1 § 1.9.
3	Застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях.	[8] Р1 § 1.9.
4	Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. Розкриття невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$. Розкриття деяких інших невизначеностей.	[1] Р5 § 5.6; [8] Р1 § 1.9.
5	Умови монотонності і сталості функції. Застосування похідної до визначення інтервалів монотонності функції.	[1] Р5 § 5.3; [8] Р1 § 1.9.
6	Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.	[1] Р5 § 5.4; [8] Р1 § 1.9.
7	Достатні умови екстремуму в термінах першої та другої похідних. Найменше (найбільше) значення неперервної на відрізку $[a;b]$ функції.	[1] Р5 § 5.4; [8] Р1 § 1.9.
8	Напрям опуклості графіка функції. Теорема про напрям опуклості графіка функції.	[1] Р5 § 5.5; [8] Р1 § 1.9.
9	Точки перегину графіка функції. Необхідна умова точки перегину. Достатня умова точки перегину.	[1] Р5 § 5.5; [8] Р1 § 1.9.

10	Асимптоти графіка функції.	[1] Р5 § 5.7; [8] Р1 § 1.9.
11	Загальне дослідження і побудова графіків функцій.	[1] Р5 § 5.7; [8] Р1 § 1.9.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">

<u>Теорема 1</u> <u>(теорема Ферма).</u> Якщо функція f, визначена в деякому околі точки a, набуває в цій точці *найменшого (найбільшого)* в цьому околі значення і має в точці a похідну, то ця похідна дорівнює нулю.

Означення 1. Функція f називається ***диференційовною в інтервалі*** $(a;b)$**,** якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

<u>Теорема 2</u> <u>(теорема Ролля).</u> Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі (a,b) й $f(a)=f(b)$, то існує принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f'(c)=0$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

<u>Теорема 3</u> <u>(теорема Лагранжа).</u> Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точки $c\in(a;b)$ така, що

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{1}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в тому, що на дузі AB (рис. 1), яка є графіком функції f, що задовольняє всі умови теореми Лагранжа, знайдеться принаймні одна точка $M\ (c;\ f(c))$, дотична в якій паралельна хорді AB.

Зауваження 1. Формула (1) називається ***формулою Лагранжа*** або ***формулою скінченних приростів.*** Вона, очевидно, правильна і для випадку $a>b$.

Зауваження 2. В теоремі Ролля та в теоремі Лагранжа послаблення умов може призвести до неправильності стверджувальної частини.

</td></tr>
<tr><td>

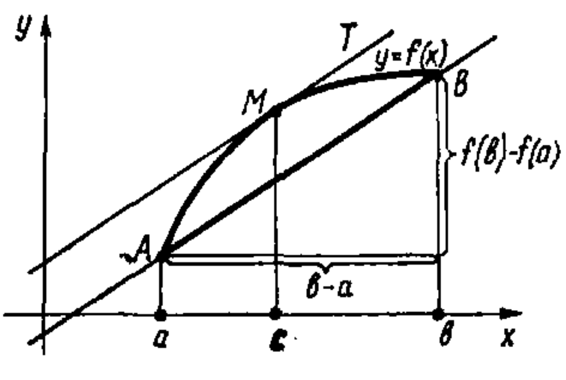


Рис. 1

</td><td>

<u>Приклад.</u> Функція $f(x)=|x|$, $x\in[-1;1]$, очевидно, неперервна на відрізку $[-1;1]$, набуває значення **1** на його кінцях і диференційовна в кожній точці інтервалу $(-1;1)$, **крім однієї точки** $x=0$, і для неї вже, очевидно, не виконується стверджувальна частина як теореми Ролля, так і теореми Лагранжа.

</td></tr>
</table>

Теорема 4 (теорема Коші). Якщо функції f і g неперервні на відрізку $[a;b]$ і диференційовні в інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x)\neq 0$ в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (2)$$

Формула (2) називається ***формулою Коші.***

Зауваження 3. Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші. Щоб дістати формулу Лагранжа з формули Коші, досить покласти $g(x)=x$.

Теорема Тейлора. Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора

Теорема 5 (теорема Тейлора). Якщо для функції f існує похідна ***(n+1)-го*** порядку, визначена в деякому околі точки a, то для будь-якого x з цього околу знайдеться принаймні одна точка c, яка міститься між a і x, така, що справедлива формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3)$$

Формула (3) називається ***формулою Тейлора***, а вираз

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (4)$$

що фігурує в ній, – її ***додатковим членом.***

Оскільки в формулі (3) точка c міститься між a і x, то можна записати

$$c=a+\Theta(x-a),\quad 0<\Theta<1.$$

Враховуючи це, формулу Тейлора можна записати у вигляді

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x\text{-}a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1. \qquad (5)$$

Розвинення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора

Формула Тейлора має найпростіший вигляд у випадку, коли $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1\,!}x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1},$$
$$0<\Theta<1. \qquad (6)$$

Цю формулу називають ***формулою Маклорена***.

Розглянемо деякі конкретні розвинення за формулою (6) для елементарних функцій.

<u>**Приклад.**</u> Нехай $f(x)=e^x$; тоді $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=1,2,\ldots$.

Оскільки у цьому разі $f(0)=1$,

$$f^{(n)}(0)=1,\ f^{(n+1)}(\Theta x)=e^{\Theta x},$$

$n=1,2,\ldots$, то згідно з формулою (6)

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\Theta<1. \quad (7)$$

Застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях

Якщо в формулі (6) відкинути додатковий член, то дістанемо наближену формулу

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (8)$$

яка замінює функцію складної природи її многочленом Тейлора (випадок $a=0$).

Абсолютна похибка наближеної рівності (8) дорівнює абсолютній величині додаткового члена формули (6). Саме цим і користуються при відшуканні числа ***n*** членів наближеної рівності (8), яке достатнє для здобуття наперед заданої точності.

<u>**Приклад.**</u> Вивести формулу для відшукання наближених значень функції $f(x)=e^x,\ x\in[-1;1]$ з точністю до **0,001**.

Розв'язання. Визначимо число ***n*** членів наближеної формули типу (8), здобутої з формули (7), вважаючи, що остання записана для функції $f(x)=e^x,\ x\in[-1;1]$, яке достатнє для точності 0,001. Його можна дістати з оцінки додаткового члена $r_{n+1}(x)=\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\Theta<1,\ x\in[-1;1]$. Дійсно, оскільки на відрізку $[-1;1]$ $|r_{n+1}(x)|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$, то заданої точності буде досягнуто, якщо шукане n буде розв'язком нерівності $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$, тобто при $n\geq 6$ (враховано, що $7!=5040$). Таким чином, шукана формула має вигляд

$$e\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!},\ x\in[-1;1].$$

Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$.

Розкриття невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Розкриття деяких інших невизначеностей

Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. Кажуть, що відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ (a – число або $\infty(+\infty;-\infty)$) є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Розкрити цю невизначеність – означає знайти границю відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ (за умови, що ця границя існує).

Невизначеність типу $\frac{0}{0}$ розкривається за допомогою такої теореми.

Теорема 6 (правило Лопіталя). Нехай функції f і g диференційовні в деякому околі a (a – число або $\infty(+\infty;-\infty)$), крім, можливо, самої точки a. Нехай також

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{10}$$

і $g'(x) \neq 0$ в кожній точці x з вище вказаного околу a, $x \neq a$. Тоді, якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ має границю (скінченну чи нескінченну) при $x \to a$, то відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю при $x \to a$, причому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{11}$$

<u>Зауваження 1.</u> Зокрема, тут може йтися про праву або ліву границю, і тоді під околом точки a розуміють правий або лівий її окіл.

<u>Зауваження 2.</u> Зазначимо, що коли похідні f' і g' задовольняють ті самі умови, що і функції f і g, то правило Лопіталя можна застосувати повторно (тобто границю відношення перших похідних функцій f і g можна замінити границею відношення других похідних цих функцій). При цьому дістанемо

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Приклад 5. Знайти границю, скориставшись правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{e^x - e^5}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{e^x}{1} = e^5$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

Розкриття невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$. Кажуть, що відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ (a – число або $\infty(+\infty;-\infty)$) є невизначеністю типу $\frac{\infty}{\infty}$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty. \tag{12}$$

Для розкриття цієї невизначеності, тобто для відшукання границі відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, використовують твердження, аналогічне теоремі 6, а саме: *якщо у формулюванні теореми 6 умову (10) замінити умовою (12), то здобуте твердження буде правильним.*

Приклад. Знайти границю.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

б)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 3x(-\sin 3x)3}{2\cos x(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = 3.$$

Розкриття деяких інших невизначеностей. Крім розглянутих вище невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, часто зустрічаються ще невизначеності типів $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$. Їх можна звести до попередніх.

1) Якщо $f \to 0$ і $g \to \infty$, то пишемо $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ і дістаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

2) Аналогічно невизначеність типу $0\cdot\infty$ можна звести до невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$.

3) Якщо ж $f \to \infty$ і $g \to \infty$, то пишемо $f - g = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{fg}$, що приводить до невизначеності типу $\frac{0}{0}$.

Умови монотонності і сталості функції. Застосування похідної до визначення інтервалів монотонності функції

Означення 1. Нехай X – деяка числова множина. Точка $x \in X$ називається ***внутрішньою точкою множини***, якщо вона належить до цієї множини разом з деяким своїм околом.

Зауваження 1. Зрозуміло, що множина внутрішніх точок довільного проміжку збігається з цим проміжком, якщо останній є *інтервалом*, або утворюється з цього проміжку вилученням тих його кінців, які йому належать.

Теорема 1 (про монотонність функції).

Функція, що є неперервною на деякому проміжку і має в кожній внутрішній точці цього проміжку додатну (невід’ємну) похідну, – **зростаюча (неспадна)** на цьому проміжку.

Функція, що є неперервною на деякому проміжку і має в кожній внутрішній точці цього проміжку від’ємну (недодатну) похідну, – **спадна (незростаюча)** на цьому проміжку.

Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ **на монотонність.** **1.** Знайти область визначення функції. **2.** Знайти похідну $f'(x)$. **3.** Знайти критичні точки. **4.** Визначити знак похідної на кожному з інтервалів, на які робивається область визначення критичними точками. **5.** На основі **теореми 1** (про монотонність функції) зробити висновки про характер поведінки функції на кожному з проміжків.	**Приклад.** Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = x - e^x$. ***Розв’язання.*** **1.** $D(f) = R$. **2.** Знаходимо її похідну: $f'(x) = 1 - e^x$, $x \in R$. **3.** $f'(x) = 1 - e^x = 0$ при $x = 0$. $x = 0$ – *критична точка.* **4.** Розв'яжемо нерівність $f'(x) > 0$, тобто нерівність $1 - e^x > 0$. Якщо $x < 0$, то $f'(x) > 0$. Якщо $x > 0$, то $f'(x) < 0$. **5.** За теоремою 1 (про монотонність функції) приходимо до висновку, що розглядувана функція є ***зростаючою*** в інтервалі $(-\infty; 0)$ і ***спадною*** на проміжку $[0; +\infty)$.

Теорема 2 (про сталу функцію). Неперервна на проміжку функція є сталою тоді і тільки тоді, коли її похідна існує і дорівнює нулю в кожній внутрішній точці цього проміжку.

Твердження: якщо похідні $F_1'(x), F_2'(x)$ двох функцій $F_1(x), F_2(x)$ збігаються на деякому проміжку, то на цьому проміжку різниця $F_1(x)-F_2(x)$ є сталою функцією.

Зауваження 2. Тут, як і завжди в подібних випадках, на кінцях проміжку, якщо вони йому належать, маються на увазі односторонні похідні.

Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної

Означення 2. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a. Точка a називається ***точкою мінімуму*** (***максимуму***) функції f, а $f(a)$ – ***мінімумом*** (***максимумом***) цієї функції в точці a, якщо існує такий окіл $U(a)$, що $\forall x \in U(a), x \neq a$, виконується нерівність $f(a) < f(x)$ $(f(a) > f(x))$.

Точки мінімуму і максимуму функції називають її ***точками екстремуму***, а максимум і мінімум функції в точці – ***екстремумом*** цієї функції в цій точці.

Теорема 3 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка a є точкою екстремуму функції f, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Зауваження 3. Обидва випадки, що вказані в теоремі, можуть бути реалізованими. Наприклад, для кожної з функцій $f_1(x)=x^2$ і $f_2(x)=|x|$ точка $x=0$, очевидно, є точкою мінімуму, причому в f_1 похідна в цій точці існує і дорівнює нулю, а в f_2 – не існує.

Зауваження 4. Умови рівності нулю похідної або її неіснування в даній точці, будучи необхідними, не є достатніми умовами для того, щоб ця точка була точкою екстремуму для функції, яка розглядається.

Контрприклад. Похідна функції $f_3(x)=x^3$ в точці $x=0$ дорівнює нулю, а похідна функції $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ у цій самій точці не існує, однак точка $x=0$, очевидно, не є точкою екстремуму як для f_3, так і для f_4.

Зауваження 5. Теорема 3 стверджує, що *всі точки екстремуму функції утворюють підмножину множини її критичних точок.*

Нехай функція φ визначена в деякому околі точки a. Кажуть, що функція φ змінює знак при переході точки x через точку a, якщо існує окіл $U(a)$ такий, що $\varphi(x)<0$ $\forall x \in U(a), x<a$, і $\varphi(x)>0$ $\forall x \in U(a), x>a$, або навпаки.

Теорема 4 (достатні умови екстремуму в термінах першої похідної). Нехай функція f диференційовна в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, в якій функція f неперервна. Якщо при переході точки x через точку a похідна f' змінює знак, то точка a є точкою екстремуму функції f, причому ***точкою мінімуму***, якщо похідна f' змінює знак з «–» на «+», і ***точкою максимуму***, якщо похідна f' змінює знак з «+» на «–».

Алгоритм дослідження функції $y=f(x)$ на екстремуми.	**Приклад.** Дослідити на екстремум функцію $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$.
1. Знайти область визначення функції.	***Розв'язання.*** **1.** Дана функція визначена і диференційовна в **R**.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	**2.** $f'(x)=6x^2-12x-18=$ $=6\left(x^2-2x-3\right)=$ $=6(x-3)(x+1)$.
3. Знайти критичні точки.	**3.** Тому f має критичні точки $x_1=-1$ і $x_2=3$.
4. Визначити знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками.	**4.** Вилучення з R точок $x_1=-1$ і $x_2=3$ дає нам множину, яка є об'єднанням інтервалів $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$ і $(3;+\infty)$, в кожному з яких f' має сталий знак, а саме відповідно «+», «–» і «+».
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму, використовуючи **теорему 4** (достатні умови екстремуму в термінах першої похідної).	
6. Знайти максимум і мінімум функції $y=f(x)$.	

5. Таким чином, за **теоремою 4** $x_1=-1$ – *точка максимуму функції f*, $x_2=3$ – *точка мінімуму.*

6. Максимум функції f в точці $x_1=-1$ дорівнює $f(-1)=17$, а **мінімум** в точці $x_2=3$ дорівнює $f(3)=-47$.

Достатні умови екстремуму в термінах першої та другої похідних

Теорема 5 (достатні умови екстремуму в термінах першої і другої похідних). Якщо функція f задовольняє умови $f'(a)=0$ і $f''(a)>0$ $\left(f''(a)<0\right)$, то a є точкою ***мінімуму (максимуму)*** функції f.

Найменше (найбільше) значення неперервної на відрізку $[a;b]$ функції	
Мінімум і максимум функції на відрізку	
Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за другою теоремою Вейерштрасса функція на цьому відрізку має найменше і найбільше значення, тобто існують точки $c^* \in [a;b]$ і $c^{**} \in [a;b]$ такі, що $\forall x \in [a;b]$ виконуються нерівності $f(c^*) \le f(x) \le f(c^{**})$ ($f(c^*)$ – найменше, а $f(c^{**})$ – найбільше значення функції f на відрізку $[a;b]$).	
Найменше (найбільше) значення неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають також ***мінімумом (максимумом) цієї функції на цьому відрізку*** і позначають $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ ($\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$). Точки c^* і c^{**}, у яких функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, набуває відповідно найменшого і найбільшого значень, можуть бути як внутрішніми точками відрізка $[a;b]$, так і його межовими точками (тобто кінцями відрізка $[a;b]$). Припустимо, що функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$, крім, можливо, скінченного числа точок, причому похідна f', де вона існує, набуває нульового значення не більше, ніж у скінченному числі точок інтервалу $(a;b)$. Така функція може мати не більше як <u>скінченне число критичних точок</u>.	
<u>Правило.</u> Для відшукання мінімуму (максимуму) на відрізку $[a;b]$ такої функції слід знайти значення цієї функції в усіх критичних точках (якщо такі є), обчислити її значення на кінцях відрізка $[a;b]$ і з усіх цих значень взяти найменше (найбільше). Це **найменше (найбільше) значення** й буде **мінімумом (максимумом) функції** f **на відрізку** $[a;b]$.	**<u>Приклад.</u>** Знайти мінімум і максимум функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$ на відрізку $[-1;2]$. ***Розв'язання.*** Дана функція неперервна на відрізку $[-1;2]$, тому на цьому відрізку вона має мінімум і максимум. Оскільки $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-1)(x-3),$ $x \in \mathbf{R}$, то $f'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1, x = 3$. $x = 0, x = 1$ – критичні точки, $x = 3 \notin [-1;2]$. Знаходимо $f(0) = 1, f(1) = 2,$ $f(-1) = -10,$ $f(2) = -7$ На основі **правила** приходимо до висновку, що $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x) = f(-1) = -10,$ $\max\limits_{x\in[-1;2]} f(x) = f(1) = 2$.

Напрям опуклості графіка функції. Теорема про напрям опуклості графіка функції

<u>**Означення 4.**</u> Нехай функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$ (a – число або $-\infty$, b – число або $+\infty$). Тоді існує дотична до графіка функції $y=f(x), x\in(a;b)$, в будь-якій точці $M(x;f(x))$ цього графіка $(x\in(a;b))$, причому ця дотична не паралельна осі Oy, оскільки вона має кутовий коефіцієнт, що дорівнює $f'(x)$.

Кажуть, що графік функції f має в інтервалі $(a;b)$ (a – число або $-\infty$, b – число або $+\infty$) ***опуклість, напрямлену вниз* (*вгору*)**, якщо для довільної точки $c\in(a;b)$ всі точки графіка функції $y=f(x), x\in(a;b)$, лежать вище (нижче) дотичної, проведеної до нього в точці $(c;f(c))$, крім, звичайно, самої точки $(c;f(c))$, яка лежить і на дотичній.

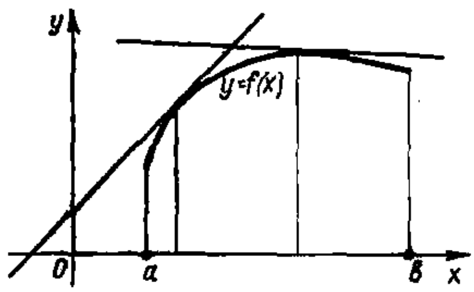


Рис. 1.

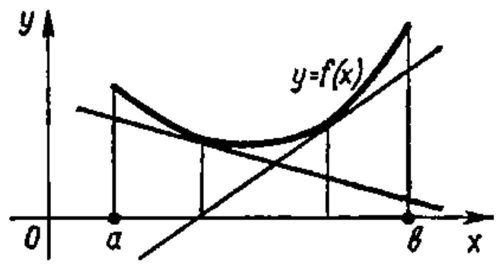


Рис. 2

На рис. 1 зображено графік функції f, яка має в інтервалі $(a;b)$ опуклість, напрямлену вниз, а на рис. 2 зображений графік функції f, яка має в інтервалі $(a;b)$ опуклість, напрямлену вгору.

Теорема 6 (про напрями опуклості графіка функції). Нехай функція f має другу похідну, визначену в інтервалі $(a;b)$ (a – число або $-\infty$, b – число або $+\infty$). Якщо $f''(x)>0\ (f''(x)<0)$ для всіх $x\in(a;b)$, то графік функції f має в інтервалі $(a;b)$ **опуклість, напрямлену вниз (вгору).**

Теорема 7. Нехай функція f має другу похідну f'', визначену в деякому околі точки a і неперервну в точці a. Якщо $f''(a)>0\ (f''(a)<0)$, то існує окіл $U(a)$, в якому графік функції f має **опуклість, напрямлену вниз (вгору).**

<u>**Алгоритм**</u> **дослідження функції** $y=f(x)$ **на напрям опуклості.** **1.** Знайти область визначення функції $D(f)$.	**Приклад.** Дослідити напрям опуклості $f(x)=2x^4-3x^2+2x+2$. ***Розв'язання.*** **1.** $D(f)=R$. **2.** Перша похідна $f'(x)=8x^3-6x+2$.

2. Знайти першу похідну $f'(x)$. **3.** Знайти другу похідну $f''(x)$. **4.** Знайти точки в яких $f''(x)=0$ та вилучити їх з $D(f)$. **5.** Визначити знак похідної на кожному з отриманих інтервалів. **6.** За **теоремою 6** (про напрями опуклості графіка функції) визначити напрям опуклості на кожному з отриманих інтервалів.	**3.** Друга похідна $f''(x)=24x^2-6=24\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=$ $=24\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. **4.** $f''(x)=0$ при $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$. **5.** При $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ друга похідна набуває лише **від'ємних значень**, а при $x<-\frac{1}{2}$ та $x>\frac{1}{2}$ друга похідна набуває лише **додатних значень**.

6. Отже, за *теоремою 6* графік функції y має в інтервалі $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ опуклість, напрямлену **вгору**, а в інтервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ опуклість, напрямлену **вниз**.

Точки перегину графіка функції. Необхідна умова точки перегину. Достатня умова точки перегину

<u>Означення 1.</u> Точка $P(c;f(c))$ називається ***точкою перегину графіка функції*** *f*, якщо в точці P цей графік має дотичну і існує такий окіл $U(a)$, що графік функції f має в інтервалі $L=\{x|\ x\in U(a), x<a\}$ опуклість, напрямлену **вниз (вгору),** а в інтервалі $R=\{x|\ x\in U(a), x>a\}$ опуклість, напрямлену **вгору (вниз).**

Теорема 8 (необхідна умова точки перегину). Нехай функція *f* має другу похідну f'', визначену в деякому околі точки c і неперервну в точці *c*. Якщо точка $P(c;f(c))$ є точкою перегину графіка функції *f*, то справджується рівність $f''(c)=0$.

Теорема 9 (достатня умова точки перегину). Нехай функція *f* має другу похідну f'', визначену в деякому околі точки c, і нехай $f''(c)=0$. Якщо друга похідна f'' при переході точки *x* через точку *c* змінює знак, то точка $P(c;f(c))$ є **точкою перегину графіка функції** *f*.

<u>Алгоритм</u> дослідження функції $y = f(x)$ на існування точок перегину.

1. Провести дослідження функції $y = f(x)$ на напрям опуклості.

2. Перевірити, чи виконується в точках, в яких $f''(c) = 0$, достатня умова точки перегину.

<u>Приклад.</u> Знайти точки перегину графіка функції.

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$.

Розв'язання.

1. У попередньому прикладі ми досліджували напрям опуклості цієї функції. З'ясували, що функція $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ має в інтервалі $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ опуклість, напрямлену вгору, а в інтервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ та $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ опуклість, напрямлену вниз.

2. З попереднього викладу випливає за *теоремою 9*, що точки $c = -\frac{1}{2}$ та $c = \frac{1}{2}$ є **точками перегину**.

Асимптоти графіка функції

<u>Означення 2.</u> Нехай функції f визначена в деякому інтервалі $(a; +\infty)$ $((-\infty; a))$, де a – число.

Пряма

$$y = kx + b \qquad (1)$$

називається ***асимптотою графіка функції*** f ***при*** $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо відстань від точки $M(x; f(x))$ графіка функції f до цієї прямої прямує до нуля при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

На рис. 2 зображено графік функції *f*, асимптотою якого при $x \to +\infty$ є пряма $y = kx + b$.

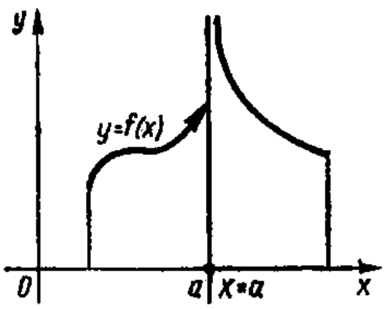


Рис. 1

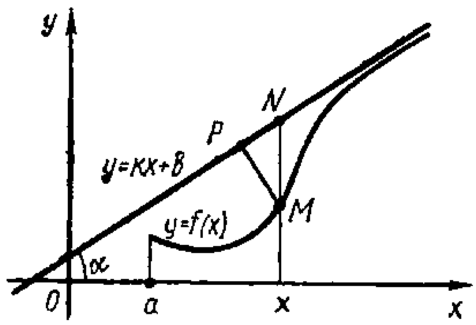


Рис. 2

Теорема 10. Нехай функція f визначена в деякому інтервалі $(a;+\infty)$ $((-\infty;a))$, де a – число. Для того, щоб пряма (1) була асимптотою графіка функції f при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ необхідно й достатньо, щоб

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx),\tag{2}$$

$$\left(k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)\right)\tag{3}$$

Як відомо, рівняннями виду (1) описуються прямі, що не перпендикулярні до осі абсцис; ці прямі можна назвати похилими. Саме тому розглянуті вище асимптоти графіків функцій називаються ***похилими асимптотами.***

Означення 3. Нехай функція f визначена в деякому околі (правому, лівому околі) точки a, крім, можливо, самої точки a, і

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$,

або виконується перше і друге. Тоді пряма $x=a$ називається ***вертикальною асимптотою графіка функції f.***

На **рис. 1** зображено графік функції f, вертикальною асимптотою якого є пряма $x=a$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції

$$f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x-2}.$$

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$, то пряма $x=2$ є **вертикальною асимптотою** графіка функції f.

Для знаходження **похилих асимптот** графіка даної функції з'ясуємо питання про границі виду (2), (3) для неї.

Маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{(x-2)x}=2$,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x-2}=5.$$

Отже, згідно з **теоремою 10** пряма $y=2x+5$ є асимптотою графіка функції f як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$.

Загальне дослідження заданої функції і побудову її графіка доцільно проводити за такою **схемою.**

1. Знайти область визначення функції. Знайти точки розриву і проміжки неперервності функції. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.

2. Знайти проміжки монотонності функції. Дослідити функцію на екстремум.

3. Дослідити напрям опуклості і знайти точки перегину графіка функції з обчисленням значень функції в цих точках.

4. Знайти асимптоти графіка функції. Закінчити відшукання односторонніх границь функції в точках, що є межовими для її області визначення.

5. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведене в п. 1–4.

Приклад. Провести повне дослідження і побудувати графік функції $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$.

Розв'язання.

1. $D(f) = R$; функція неперервна на своїй області визначення; $f(-x) = f(x)$, отже, функція парна; при $x = 0,\ f(x) = 1$, отже графік функції перетинає вісь Oy у точці з координатами $(0;1)$; при $f(x) = 0$ маємо рівняння $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. Зробивши заміну $x^2 = z$, отримаємо рівняння $2z^2 - z + 1 = 0$, яке не має розв'язків, оскільки його дискримінант від'ємний, а вітки параболи $f(x) = 2z^2 - z + 1$ напрямлені вгору.

2. Знайдемо похідну функції та розкладемо її на множники $f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 8x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 8x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Знайдемо проміжки монотонності функції та дослідимо функцію на екстремум.

	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	спадає	min	зростає	max	спадає	min	зростає
		$\frac{7}{8}$		1		$\frac{7}{8}$	

3. Дослідимо напрям опуклості і знайдемо точки перегину графіка функції та обчислимо значення функції в цих точках.

$f''(x) = 24x^2 - 2 = 24\left(x^2 - \frac{1}{12}\right) = 24\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. Отже, $f''(x) = 0$ при $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

	$\left(-\infty;-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};+\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
опуклість	вниз	0,94	вгору	0,94	вниз

$f(-1)=f(1)=2$.

4. З'ясуємо, чи має графік функції асимптоти.

Обчислимо

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)=\infty.$$

Отже, графік функції асимптот не має.

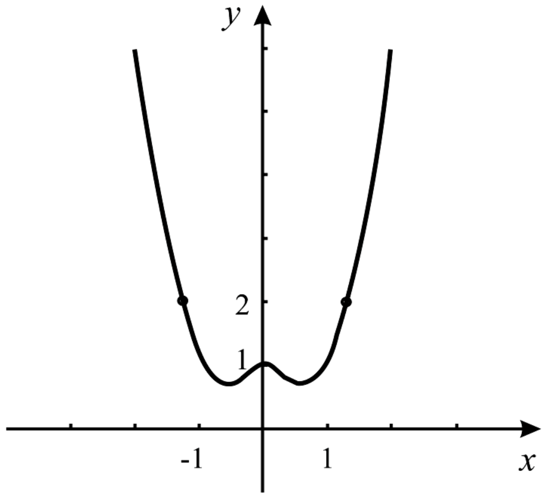


Рис. 3

Змістовий модуль 3.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 8. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Мета навчання: розглянути прикладну задачу, яка приводять до поняття первісної; означити поняття первісна, невизначений інтеграл та розглянути їх основні властивості і таблицю основних інтегралів; з'ясувати суть основних методів інтегрування (безпосереднього інтегрування, методу підстановки (заміни змінної), методу інтегрування частинами) та розглянути приклади їх застосувань; розглянути поняття раціональна функція, раціональний дріб, елементарні раціональні дроби, інтегрування елементарних раціональних дробів; інтегрування правильних раціональних дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів; розглянути інтегрування деяких ірраціональних та деяких трансцендентних функцій.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Література***
1	Задачі, що приводять до поняття первісної.	[1] Р6 § 6.1; [8] Р1 § 1.12.
2	Поняття первісної функції. Основна властивість первісної.	[1] Р6 § 6.1; [8] Р1 § 1.12.
3	Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла.	[1] Р6 § 6.1; [8] Р1 § 1.12.
4	Таблиця основних інтегралів.	[1] Р6 § 6.1; [8] Р1 § 1.12.
5	Основні методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами).	[1] Р6 § 6.2; [8] Р1 § 1.12.
6	Раціональна функція. Раціональний дріб.	[1] Р6 § 6.3; [8] Р1 § 1.12.
7	Елементарні раціональні дроби. Інтегрування елементарних раціональних дробів.	[1] Р6 § 6.3; [8] Р1 § 1.12.
8	Інтегрування правильних раціональних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів.	[1] Р6 § 6.3; [8] Р1 § 1.12.
9	Інтегрування деяких ірраціональних функцій.	[1] Р6 § 6.4; [8] Р1 § 1.12.
10	Інтегрування деяких трансцендентних функцій.	[1] Р6 § 6.5; [8] Р1 § 1.12.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Задача, що приводять до поняття первісної</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вивчаючи тему 5 «Похідна», ми розглядали численні прикладні задачі про визначення: миттєвої швидкості нерівномірного руху, прискорення, сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції , швидкості зростання популяції. Ці задачі та результати їх розв'язування представлені у таблиці 1. Всі вони приводили до поняття похідної.
Зупинимось на одній з задач, яка приводить до поняття первісної і розкриває смисл довільної сталої C у загальному вигляді первісної.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задача. Знайдіть закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 10 мг препарату його маса зменшилась вдвічі. Вважати, що швидкість розчинення відбувається за законом $\upsilon(t) = -10\,t$.
Розв'язання. Шуканий закон є функцією часу від t. Позначимо цю функцію через $m(t)$ і пригадаємо, що $\upsilon(t) = m'(t)$. Одержуємо рівність $m'(t) = -10\,t$.
Задача зводиться до відшукання функції $m = m(t)$ такої, що $m'(t) = -10\,t$, а $m(1) = 5$.
Очевидно, що $m(t) = -5t^2 + C$, де C – довільна стала. (*)
Враховуючи умову $m(1) = 5$ і рівність (*), обчислимо значення C: $5 = -5 + C$, звідки $C = 10$.
Підставивши знайдене значення у формулу (1), дістанемо закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини: $m(t) = -5t^2 + 10$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Поняття первісної функції. Основна властивість первісної</td></tr>
<tr><td><u>Означення 1.</u> Функція F називається первісною функції f на деякому проміжку X, якщо F диференційовна на X і в кожній точці цього проміжку похідна F' функції F дорівнює значенню функції f:
$F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in X$. (1)</td><td><u>Приклад</u>. Функція $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ є первісною функції $f(x) = x^4$ на R.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Як звичайно, на кінці проміжку, якщо він входить у розглядуваний проміжок, йдеться про відповідну односторонню похідну.)</td></tr>
</table>

Теорема 1 (*основна властивість первісної*). Якщо F – яка-небудь первісна функції f на проміжку X, то множиною первісних функцій f на X є множина

$$\{F+C \mid C \in R\}. \qquad (2)$$

Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла

Означення 2. Нехай функція f має первісну на проміжку X. Тоді множина первісних функції f на проміжку X називається ***невизначеним інтегралом*** цієї функції і позначається так:

$$\int f(x)dx \qquad (3)$$

(читається: «невизначений інтеграл $f(x)dx$», або коротше «інтеграл $f(x)dx$»).

Таким чином, за означенням,

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (4)$$

де F – яка-небудь первісна функції f на розглядуваному проміжку; C – довільна стала.

У виразах (3) і (4) функція f називається *підінтегральною функцією*, $f(x)\,dx$ – *підінтегральним виразом*.

Операція знаходження невизначеного інтеграла даної функції називається ***інтегруванням*** *цієї функції*. Змінна x, що входить до виразів (3) і (4), називається *змінною інтегрування*.

З попереднього випливає, що *інтегрування є операцією, оберненою диференціюванню*. Для того щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, достатньо переконатись, що кожна з функцій, які утворюють невизначений інтеграл, має на проміжку, який розглядається, похідну, що дорівнює підінтегральній функції.

Приклад. $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$, тому що для довільного фіксованого C $\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right)' = x^4$.

Зауваження. Якщо F – яка-небудь первісна функції f на проміжку X, то згідно з формулою (4) під знаком інтеграла стоїть диференціал функції F: $d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. Вважатимемо за означенням, що цей диференціал під знаком інтеграла можна записувати в будь-якому із вказаних видів, тобто згідно з цією домовленістю

$$\int f(x)dx = \int F'(x)\,dx = \int d\,F(x). \qquad (5)$$

Основні властивості невизначеного інтеграла
Властивість 1. Якщо функція F диференційовна на проміжку X, то $$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$ або, що те саме, $$\int dF(x) = F(x) + C.$$ Це твердження випливає з означення невизначеного інтеграла як множини диференційовних функцій, диференціал яких стоїть під знаком інтеграла.
Властивість 2. Якщо функція f має первісну на проміжку X, то справджується рівність $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad (6)$$ або $$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,dx, \qquad (7)$$ у тому розумінні, що всі функції, які утворюють $\int f(x)dx$, мають одну й ту саму похідну (диференціал) $f(x)\,(f(x)\,dx)$.
Властивість 3. Якщо функції f і g мають первісні на проміжку X, то функція $f+g$ також має первісну на цьому проміжку, причому $$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (8)$$ Тут права частина означає множину сум двох функцій, де перша взята з множини $\int f(x)dx$, а друга – з множини $\int g(x)dx$.
Властивість 4. Якщо функція f має первісну на проміжку X і k – число, то функція kf також має первісну на цьому проміжку, причому при $k \neq 0$ справедлива рівність $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$ де права частина означає множину добутків сталої k на функцію з множини $\int f(x)dx$. **Зауваження.** Умова $k \neq 0$ тут суттєва: $\int 0 \cdot f(x)dx = C$, а $0 \cdot \int f(x)dx = 0$.
Властивість 5 (*лінійність* невизначеного інтеграла). Якщо функції f і g мають первісні на проміжку X, а k і l – два числа, з яких принаймні одне відмінне від нуля, то функція $kf + lg$ також має первісну на цьому проміжку, причому $$\int (kf(x) + lg(x))dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx.$$

Таблиця основних інтегралів		
1. $\int 0dx = C$.	**4.** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$.	**7.** $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$.	**4 а.** $\int e^x dx = e^x + C$.	**8.** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
2а. $\int 1dx = x + C$.	**5.** $\int \sin x dx = -\cos x + C$.	**9.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = $ $= \ln \lvert x \rvert + C$.	**6.** $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.	**10.** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

До наведених формул додають ще такі:

11. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + C$.

12. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$.

13. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

14. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

16. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$.

17. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

20. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right) + C$.

Основні методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами)	
Безпосереднє інтегрування. Знаходження невизначених інтегралів за допомогою табличних інтегралів і основних властивостей невизначених інтегралів називається ***безпосереднім інтегруванням.***	**Приклад 1.** Використовуючи формулу $\int (kf(x)+lg(x))dx = = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx,$ обчисліть інтеграл $\int \left(3x^2+2x-1\right)dx$. ***Розв'язання.*** Використовуючи формулу, запишемо:

$$\int \left(3x^2+2x-1\right)dx = 3\int x^2dx + 2\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - x + C =$$

$$= x^3 + x^2 - x + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$.

Розв'язання. Оскільки такої формули немає серед табличних інтегралів, то запишемо підінтегральну функцію у іншому вигляді, скориставшись тригонометричною формулою $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

Отримаємо

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Метод підстановки. Цей метод базується на такій теоремі.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ має на проміжку X первісну $F(x)$, і, отже,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{9}$$

а функція $\varphi(x)$ диференційовна на проміжку T, причому на цьому проміжку визначена складна функція $f(\varphi(t))$, то функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має на проміжку T первісну $F(\varphi(t))$ і

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}. \tag{10}$$

Зауваження. Запис виду $g(x)\big|_{x=a}$ означає значення функції g при $x = a$.

Формула (10) називається ***формулою інтегрування підстановкою***, а саме підстановкою $\varphi(t) = x$. Цю формулу можна записати також у вигляді

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} \tag{10$'$}$$

(порівняйте з означенням, що визначається рівностями (5)). Її застосування до знаходження інтегралів полягає в тому, що замість інтеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ знаходять інтеграл $f(x)dx$ і потім покладають $x = \varphi(t)$.

<u>Приклад 3.</u> Знайти інтеграл $\int \sin 3x\, dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $y = 3x$, тоді $y' = 3$. Отже, за формулою ($10'$)

$$\int \sin 3x dx = \int \sin 3x \frac{d(3x)}{3} = \frac{1}{3}\int \sin y dy\Big|_{y=3x} = -\frac{1}{3}\cos y + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

Метод інтегрування частинами. В основі цього методу лежить така теорема.

Теорема 3. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на проміжку X і на цьому проміжку існує первісна функції $v(x)u'(x)$, то на проміжку X існує також первісна функції $u(x)v'(x)$ і має місце рівність

$$\int u(x)\, v'(x)dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)dx. \tag{11}$$

Формула (11) називається ***формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.***

Оскільки $v'(x)\, dx = dv$ і $u'(x)\, dx = du$, то її можна записати також у вигляді

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{12}$$

Ця формула дає змогу звести знаходження інтеграла $\int udv$ до знаходження інтеграла $\int vdu$, який може виявитися в якомусь розумінні «простішим», ніж вихідний.

<u>Приклад 4.</u> Знайти інтеграл $\int \ln x\, dx$.

Розв'язання. Для знаходження інтеграла покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$, і, отже, згідно з формулою (12) маємо

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Раціональна функція. Раціональний дріб

Означення 1. ***Раціональні функції*** – це функції виду

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени ($Q(x)$ – ненульовий многочлен). Якщо $Q(x)$ – ненульовий многочлен нульового степеня, то раціональна функція $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ – це ***ціла раціональна функція***. Якщо раціональна функція не є цілою, то вона називається ***дробово-раціональною функцією***.

Вважатимемо, що многочлен $Q(x)$ має при старшому члені коефіцієнт, що дорівнює одиниці, – цього очевидно завжди можна досягти, поділивши чисельник і знаменник дробу на вказаний коефіцієнт.

Означення 2. Раціональна функція (1) називається ***правильним раціональним дробом***, якщо $P(x)$ – нульовий многочлен (у цьому разі дріб називається нульовим), або його степінь менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$, і ***неправильним раціональним дробом***, якщо степінь многочлена $P(x)$ не менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$.

<u>Приклад 1.</u>

$\dfrac{x^2+1}{x^4+x-2}$ – правильний дріб,

$\dfrac{2x^5}{x^2+3x+2}$ – неправильний дріб.

Якщо (1) – неправильний раціональний дріб, то, виконавши ділення його чисельника на знаменник, дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=P_0(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

де $P_0(x)$ і $P_1(x)$ – многочлени, причому або $P_1(x)$ – нульовий многочлен, або його степінь менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$, тобто $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.

<u>Приклад 2.</u> Виділити цілу частину в неправильному дробі $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}$.

Розв'язання. Виконаємо ділення чисельника на знаменник:

$x^4-x^3+1 \,\big|\, \underline{x^2+x+2}$

x^2-2x – ціла частина

$\underline{x^4+x^3+2x^2}$

$-2x^3-2x^2+1$

$\underline{-2x^3-2x^2-4x}$

$4x+1$. – остача

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}=x^2-2x+\frac{4x+1}{x^2+x+2}.$$

Відповідь. x^2-2x – ціла частина, $4x+1$ – остача.

Розклад (2) показує, що інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування многочленів, які інтегруються безпосередньо, і інтегрування правильних раціональних дробів.

Останнє, як виявляється, зводиться до інтегрування так званих *елементарних раціональних дробів.*

Елементарні раціональні дроби. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Означення 3. ***Елементарними раціональними дробами*** називаються раціональні дроби виду

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ n=1,2,\ldots, \qquad (3)$$

і

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},\ n=1,2,\ldots, \qquad (4)$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, причому $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Для інтегрування елементарних раціональних дробів типу (3) використовуються формули (5), (6):

$$\int\frac{A\,dx}{x\pm a}=A\int\frac{d(x\pm a)}{x\pm a}=A\ln|x\pm a|+C \qquad (5)$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x\pm a)^n}=A\int(x\pm a)^{-n}d(x\pm a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C,\ n>1. \qquad (6)$$

Невизначений інтеграл дробу виду (4) зводиться до знаходження інтегралів, які стоять у правій частині останньої рівності.

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n}dx=$$

$$=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt\Bigg|_{t=x+\frac{p}{2}}=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(N-\frac{pM}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\Bigg|_{t=x+\frac{p}{2}},\ n=1,2\ldots,$$

$a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$.

Якщо $n=1$, то $\int\frac{tdt}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C$, а інтеграл $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$ є табличним (**формула 16** $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$).

Якщо ж $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-n} d\left(t^2+a^2\right) = -\frac{1}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + C,$$

а інтеграл $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, $n = 2,3,\ldots$, може бути знайдений за ***рекурентною формулою*** $I_{n+1} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2n(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n\right)$, $n = 2,3,\ldots$.

Інтегрування правильних раціональних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів

Теорема 1. Будь-який правильний раціональний дріб може бути зображеним у вигляді суми скінченної кількості елементарних раціональних дробів.

Теорема 2. Невизначений інтеграл кожної раціональної функції, (на будь-якому проміжку, що міститься в її області визначення) існує і є елементарною функцією.

Твердження 1. Будь-який многочлен $Q(x)$ степеня $n, n \geq 1$, коефіцієнт при старшому члені якого дорівнює одиниці, може бути зображеним у вигляді

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \quad (7)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_r$ – дійсні корені $Q(x)$; $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, \ldots, q_s$ – дійсні числа, що задовольняють умови $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$, $j = 1,2, \ldots, s$; $k_1, k_2, \ldots, k_r, l_1, l_2, \ldots, l_s$ – натуральні числа, причому

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + 2l_s = n. \quad (8)$$

Можливо, що $r = 0$ або $s = 0$.

Твердження 2. Нехай маємо правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $Q(x)$ – многочлен вигляду (7).

Тоді кожному множнику виду $(x-a_i)^{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, зображення (7) знаменника $Q(x)$ дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в зображенні, про яке йдеться в теоремі 1, відповідає група із k_i елементарних раціональних дробів:

$$\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}, \quad (9)$$

а кожному множнику виду $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ $j = 1, 2, \ldots, s$, – група із l_j елементарних раціональних дробів:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{M_{l_j}x+N_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}, \qquad (10)$$

причому $A_1, A_2, \ldots, A_{k_i}, M_1, M_2, \ldots, M_{l_j}, N_1, N_2, \ldots, N_{l_j}$ тут ***числові коефіцієнти.***

Для визначення вказаних коефіцієнтів на практиці найчастіше користуються ***методом невизначених коефіцієнтів.***

Приклад. Проілюструємо формули 9 та 10 конкретними прикладами, не знаходячи коефіцієнтів розкладу.

1) $\dfrac{x^2}{(x^3-8)(x^2+1)}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$.

2) $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-1)^3}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

3) $\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2x^3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}+\dfrac{E}{x}+\dfrac{M}{x^2}+\dfrac{N}{x^3}$.

Суть *методом невизначених коефіцієнтів.*

1. Знаючи форму розкладу дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, записують цей розклад з буквеними коефіцієнтами в чисельниках його правої частини.

2. Спільним знаменником всіх елементарних раціональних дробів, очевидно, буде $Q(x)$; додаючи їх, дістанемо правильний раціональний дріб.

3. Якщо зрівняємо тепер многочлени, які стоять у чисельниках знайдених дробів, то дістанемо рівність двох многочленів $(n-1)$-го степеня, тотожну відносно x.

4. Зрівнявши у цих многочленах коефіцієнти, що стоять перед відповідними степенями x, дістанемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

Ця система за **теоремою 1** матиме розв'язок. Останнє одночасно доводить і єдиність розкладу правильного раціонального дробу на елементарні раціональні дроби.

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було показано вище, завжди виражається в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ***ірраціональної***. Інтеграл від ***ірраціональної*** функції може не виражатись у скінченному вигляді. Однак можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються у скінченному вигляді. У цьому пункті розглянемо інтегрування ірраціональних функцій саме цих підкласів.

Загальний спосіб, за допомогою якого вдається обчислити інтеграл від ірраціональної функції, полягає в тому, щоб в наслідок тієї чи іншої підстановки інтеграл від ірраціональної функції зводився до інтеграла від функції раціональної. Тому цей спосіб називають *раціоналізацією* заданого інтеграла.

У цьому і наступному пунктах через $R(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ позначатимемо ***раціональну функцію*** змінних $x, u_1, u_2, \dots, u_n$, тобто $R(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вираз, в якому над сталими числами і змінними $x, u_1, u_2, \dots, u_n$ можна здійснювати тільки чотири арифметичні операції, взяті скінченне число разів.

Приклад. Такою є функція $R(x, u_1, u_2) = \dfrac{5x}{u_1 u_2} - \dfrac{u_1^2 + u_2}{\sqrt{3u_1^3} - \sqrt{5x^2 u_2}}$.

Ірраціональна функція змінної x $f(x) = \dfrac{7x\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[5]{x}}{5x^5 + 12x^2\sqrt[3]{x}}$ є раціональною функцією змінних $x, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}$.

Підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді детально представлені у [1], Р6 § 6.4 (с.182-188).

Розглянемо *один вид невизначених інтегралів ірраціональних функцій*, які за допомогою відповідної підстановки можна звести до інтеграла раціональної функції і виразити через елементарні функції.

Це інтеграли виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx, \qquad (11)$$

де m_i та $n_i > 1$ – натуральні числа, $i = 1, 2, \dots, r$ і a, b, c, d – дійсні числа, причому $ad - bc \neq 0$.

До розглянутих інтегралів належать інтеграли виду

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx, \ a \neq 0,$$

зокрема інтеграли $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx$, де m_i і $n_i, i = 1, 2, \dots, r$ – такі самі, що і в (11).

Цей інтеграл заміною змінної

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \qquad (12)$$

де k – спільний знаменник дробів $\dfrac{m_i}{n_i}, i = 1, 2, \dots, r,$ зводиться до раціональної функції.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Виконавши заміну $x + 1 = t^6, \ dx = 6t^5 dt$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}} = \int \frac{6t^5dt}{t^4-t^3} = 6\int \frac{t^2}{t-1}dt = 6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = 3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ \ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C.$$

Інтегрування деяких трансцендентних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій, як і від функцій ірраціональних, не завжди обчислюються. Однак можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді. В цей підклас тригонометричних функцій входять тригонометричні функції, що є раціональними функціями від $\sin x, \cos x, tg\ x, ctg\ x, \sec x, \operatorname{cosec} x$. Оскільки $tg\ x, ctg\ x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ самі виражаються раціонально через $\sin x$ і $\cos x$, то цей підклас можна охарактеризувати як *підклас тригонометричних функцій,* які є раціональними від $\sin x$ і $\cos x$.

Розглянемо інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{13}$$

Всі вони зводяться до інтеграла раціональної функції підстановкою

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x\in(-\pi;\pi). \tag{14}$$

Дійсно, $$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\ arctg\ t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

тому $$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}\Bigg|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

тобто дістали інтеграл раціональної функції.

При знаходженні інтегралів виду (13) часто використовують підстановки $t=\sin x, t=\cos x,$ $t = tg\ x$, які іноді швидше приводять до мети, ніж підстановка (14).

Приклад.

$$\int \cos^3 x dx = \int\left(1-\sin^2 x\right)d\ \sin x =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Тема 9. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Мета навчання: розглянути геометричну задачу, яка приводять до поняття визначеного інтеграла, розкрити його геометричний та фізичний зміст; розглянути умови інтегрованості функції та властивості визначеного інтеграла; визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування; теорему про існування первісної функції; формулу Ньютона-Лейбніца; формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	Поняття визначеного інтеграла й умови його існування. Означення визначеного інтеграла.	[1] Р7 § 7.1; [8] Р1 § 1.13.
2	Геометричний зміст визначеного інтеграла.	[1] Р9 § 9.1; [8] Р1 § 1.13.
3	Фізичний зміст визначеного інтеграла (самостійно).	[8] Р1 § 1.13.
4	Умови інтегровності функцій: необхідна умова інтегровності функції, суми Дарбу, достатня умова інтегровності функції.	[1] Р7 § 7.2; [8] Р1 § 1.13.
5	Властивості визначеного інтеграла: найпростіші властивості визначеного інтеграла, адитивна властивість визначеного інтеграла, теорема про середнє для визначеного інтеграла.	[1] Р7 § 7.4; [8] Р1 § 1.13.
6	Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування.	[1] Р7 § 7.5; [8] Р1 § 1.13.
7	Теорема про існування первісної функції.	[1] Р7 § 7.5; [8] Р1 § 1.13.
8	Формула Ньютона-Лейбніца.	[1] Р7 § 7.5; [8] Р1 § 1.13.
9	Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.	[1] Р7 § 7.6; [8] Р1 § 1.13.

Математичні поняття та їх властивості:

<table>
<tr><th>Означення математичного поняття</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Поняття визначеного інтеграла й умови його існування.
Означення визначеного інтеграла</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Означення 1. Нехай дано відрізок $[a;b]$; ***T-розбиттям відрізка*** $[a;b]$ називається будь-яка скінченна множина точок

$$T = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad (1)$$

для якої $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. При цьому точки x_k називаються ***точками T-розбиття***, відрізки $[x_k; x_{k+1}]$ – ***частинними відрізками T-розбиття***; їхні довжини позначають Δx_k, тобто $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ а число $\lambda(T) = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}\}$ називається ***діаметром T-розбиття***.

</td></tr>
<tr><td>

Означення 2. Нехай тепер на відрізку $[a;b]$ визначена функція f і нехай (1) – деяке T-розбиття цього відрізка. На кожному частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ даного T-розбиття візьмемо по одній точці c_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, і утворимо суму

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k . \qquad (2)$$

</td><td>

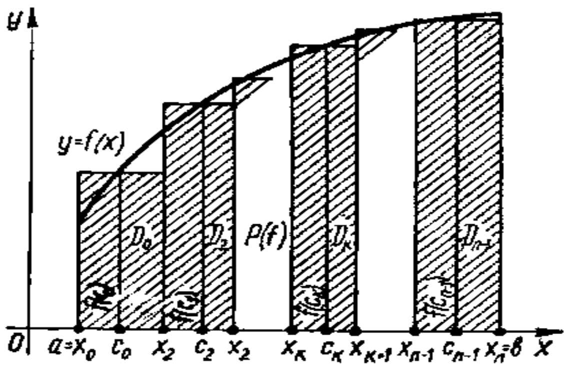


Рис. 1

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Ця сума називається ***інтегральною сумою функції*** f ***на відрізку*** $[a;b]$, складеною для даного T-розбиття відрізка $[a;b]$ при даному виборі точок c_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Означення 3. Число I називається ***границею інтегральної суми*** $\sigma(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$, що для будь-якого T-розбиття (1) відрізка $[a;b]$, для якого $\lambda(T) < \delta$, виконується нерівність

$$|\sigma(T) - I| < \varepsilon . \qquad (3)$$

Границя інтегральної суми не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ні від вибору точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Вона визначається функцією f і відрізком $[a;b]$, на якому ця функція визначена.

</td></tr>
</table>

Якщо число I є границею інтегральної суми $\sigma(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, то це записують так:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I \text{ або } \sigma(T) \to I \text{ при } \lambda(T) \to 0.$$

Зауваження. На границю інтегральної суми поширюються теореми про границю функції в точці.

Означення 4. Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$ і нехай (2) – інтегральна сума функції f на $[a; b]$. Якщо інтегральна сума (2) має границю I при $\lambda(T) \to 0$, то ця границя I називається ***визначеним інтегралом функції*** f ***на відрізку*** $[a; b]$ і позначається

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

(читається: «інтеграл від a до b $f(x)\,dx$»), а функція f при цьому називається ***інтегровною на відрізку*** $[a; b]$**.** Таким чином, за означенням

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k . \tag{5}$$

У виразах (4) і (5) функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***; число a називається ***нижньою межею інтегрування***, b – ***верхньою межею інтегрування***, x – ***змінною інтегрування***.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Означення 5. Функція f, визначена на відрізку $[a; b]$, називається ***невід'ємною***, якщо $f(x) \ge 0$ для всіх $x \in [a; b]$.

Нехай функція f визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$.

Означення 6. Фігура, обмежена графіком функції f, відрізком осі OX з кінцями в точках, абсциси яких дорівнюють відповідно a і b і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, ординати точок яких змінюються відповідно від нуля до $f(a)$ і до $f(b)$, називається ***криволінійною трапецією***, породженою графіком функції f; цю трапецію позначатимемо через $P(f)$ (рис. 1).

Для розглядуваної функції f інтегральна сума (2) і її доданки мають простий **геометричний зміст**: добуток $f(c_k)\Delta x_k$ дорівнює площі прямокутника D_k з основою $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і висотою $f(c_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, а сума $\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \cdot \Delta x_k$ дорівнює площі східчастої фігури, зображеної на рис. 1.

Оскільки функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то за **теоремою (достатньою умовою інтегрованості функції)** вона інтегровна на цьому відрізку. Тому при $\lambda(T)\to 0$ сума $\sigma(T)$ прямуватиме до деякої границі S, що дорівнює інтегралу $\int_a^b f(x)dx$.

Саме цю границю S й називають ***площею криволінійної трапеції*** $P(f)$.

Отже, $$S=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx. \qquad (6)$$

<u>**Геометричний зміст визначеного інтеграла:**</u> визначений інтеграл функції f на відрізку $[a;b]$, яка невід'ємна і неперервна на цьому відрізку, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $P(f)$, породженої графіком цієї функції.

Фізичний зміст визначеного інтеграла

Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої лінії з лінійною швидкістю $v=v(t), t\ge t_0$, де v – функція, неперервна на своїй області визначення. Шлях, пройдений матеріальною точкою за малий проміжок часу $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$ $\left(k=0,1,2,\ldots,n-1;t_n=T^*\right)$, можна вважати таким, що дорівнює $v(c_k)\Delta t_k$, де $c_k\in[t_k;t_{k+1}], k=0,1,2,\ldots,n-1$. Тоді інтегральна сума $\sigma(T)=\sum_{k=0}^{n-1} v(c_k)\Delta t_k$ є наближеним значенням шляху, пройденого матеріальною точкою від моменту часу t_0 до T^*. Перейшовши до границі при $\lambda(T)\to 0$, дістанемо точне *значення цього шляху*:

$$s=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} v(c_k)\Delta t_k=\int_{t_0}^{T^*} v(t)\,dt. \qquad (7)$$

Рівність (7) і виражає ***фізичний зміст визначеного інтеграла***.

Умови інтегровності функцій: необхідна умова інтегровності функції, суми Дарбу, достатня умова інтегровності функції

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності функції). Якщо функція інтегровна на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.

<u>**Зауваження.**</u> Дану теорему доповнює таке **твердження**: умова обмеженості функції, будучи необхідною умовою інтегровності функції, не є достатньою умовою для цього.

Надалі, в цьому змістовому модулі, розглядаються *функції, визначені і обмежені на відрізку*.

<u>Означення</u> (сум Дарбу). Нехай функція f визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$.

Тоді для довільно взятого T-розбиття (1) відрізка $[a; b]$ ця функція є обмеженою і на будь-якому частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, а отже, згідно з <u>теоремою 1</u> з теми 1 існують скінченні $m_k = \inf Y_k$ і $M_k = \sup Y_k$, де Y_k – множина значень функції $y = f(x)$, $x \in [x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Суми $\underline{S}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ і $\overline{S}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ (8)

називаються відповідно ***нижньою*** **і** ***верхньою сумами Дарбу***, складеними для функції f і даного T-розбиття (1) відрізка $[a; b]$.

Теорема 2 (критерій інтегровності функції). Для того щоб функція f, визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб справджувалося співвідношення

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0, \qquad (9)$$

де $\underline{S}(T)$ і $\overline{S}(T)$ – відповідно ***нижня і верхня суми Дарбу***, складені для функції f і T-розбиття (1) відрізка $[a; b]$.

З теореми 2 випливає ***достатня умова інтегрованості функції.***

Теорема 3 (достатня умова інтегровності функції). Функція, неперервна на відрізку, інтегровна на ньому.

Властивості визначеного інтеграла: найпростіші властивості визначеного інтеграла, адитивна властивість визначеного інтеграла, теорема про середнє для визначеного інтеграла

<u>Властивість 1.</u> Якщо f – нульова стала (тобто f – функція, всі значення якої дорівнюють нулю), визначена на відрізку $[a; b]$, то

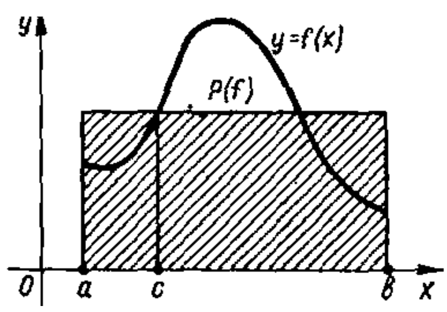
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0 \cdot dx = 0.$$

<u>Властивість 2.</u> $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$.

<u>Властивість 3.</u> Якщо функції f і g інтегровні на відрізку $[a; b]$, то функції $f \pm g$ також є інтегровними на цьому відрізку, причому

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

<u>Властивість 4.</u> Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і k – число, то функція kf також інтегровна на цьому відрізку, причому $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$
<u>Властивість 5</u> **(<u>*лінійність* визначеного інтеграла</u>).** Якщо функції f і g інтегровні на відрізку $[a;b]$ і k і l – два числа, то функція $kf+lg$ також інтегровна на цьому відрізку, причому $$\int_a^b (kf(x)+lg(x))dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx.$$
<u>Властивість 6.</u> Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $f(x)\geq 0$ для всіх $x\in[a;b]$, то $$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
<u>Властивість 7.</u> Якщо функції f і g інтегровні на відрізку $[a;b]$ і $f(x)\leq g(x)$ для всіх $x\in[a;b]$, то $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
<u>Властивість 8.</u> Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$, то функція $\lvert f\rvert$ також інтегровна на цьому відрізку, причому $$\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx.$$
<u>Адитивна властивість визначеного інтеграла.</u> **Теорема 4.** Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (10)$$ Якщо функція f інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то вона інтегровна також на відрізку $[a;b]$, причому виконується рівність (10).

Теорема 5 (про середнє для визначеного інтеграла). Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $m\leq f(x)\leq M$ для всіх $x\in[a;b]$ (m і M – два числа), то існує таке число μ, $m\leq\mu\leq M$, що $$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \qquad (11)$$	 Рис. 2.

Рівність (11) набуває особливо простого вигляду у випадку, коли функція f неперервна на відрізку $[a;b]$.

Дійсно, якщо вважати, що m і M – найменше і найбільше значення функції f на відрізку $[a;b]$, що існують за *другою теоремою Вейєрштрасса*, то і проміжне значення μ згідно з *другою теоремою Больцано-Коші* має бути у деякій точці $c \in (a;b)$.

Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \tag{12}$$

Величина $f(c)$ у формулі (12) називається ***середнім значенням функції f на відрізку $[a;b]$.***

Геометричний зміст формули (12). Нехай функція f визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$.

Розглянемо криволінійну трапецію $P(f)$, утворену графіком цієї функції (рис. 2). Тоді площа криволінійної трапеції $P(f)$ (вона чисельно дорівнює інтегралу $\int_a^b f(x)dx$) дорівнює площі заштрихованого прямокутника з основою $b-a$.

Наслідок. За властивістю 7 та 2 для функції $f(x)$, $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a;b]$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, маємо

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M(b-a), \tag{13}$$

де m – найменше, а M – найбільше значення функції на відрізку $[a;b]$.

Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування

Про визначені інтеграли, в яких верхня межа інтегрування менша або дорівнює нижній

У п.1-5 розглядались інтеграли $\int_a^b f(x)dx$, в яких верхня межа інтегрування b більша, ніж нижня межа інтегрування a $(b > a)$. Проте визначений інтеграл можна означити і для випадку, коли верхня межа інтегрування менша або дорівнює нижній.

Саме за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \tag{1}$$

якщо $b < a$ і функція f інтегровна на відрізку $[b;a]$;

за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = 0, \qquad (2)$$

якщо $b = a$.

<u>Зауваження 1.</u> Визначений інтеграл має **властивості 1-7**, розглянуті в **п.5**, і тоді, коли $b \le a$.

Нерівність у **властивості 8** замінюється більш загальною нерівністю

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|, \qquad (3)$$

яка вже виконується при будь-яких a і b.

<u>Зауваження 2.</u> Теорема ***про середнє для визначеного інтеграла*** (**п. 5**) поширюється і на випадок, коли $b < a$.

Отже, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\mu(a-b) = \mu(b-a)$.

Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування

Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$ і x – довільна фіксована точка цього відрізка. Тоді, за *адитивною властивістю* визначеного інтеграла, існує визначений інтеграл $\int_a^x f(t)dt$ (для зручності змінну інтегрування тут позначено буквою *t*, оскільки буквою x позначено верхню межу інтегрування). Цей інтеграл є деякою функцією від змінної x:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a;b], \qquad (4)$$

яку називають ***інтегралом із змінною верхньою межею інтегрування.***

Зрозуміло, що властивості функції F визначаються властивостями функції *f*.

Теорема 6. Якщо функція *f* неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція *F*, що визначається формулою (4), диференційовна на цьому відрізку, причому

$$F'(x) = f(x) \text{ для всіх } x \in [a;b] \qquad (5)$$

(звичайно, в точках a і b йдеться про відповідні односторонні похідні).

<u>Наслідком теореми 6</u> є така теорема.

Теорема 7. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a; b], \qquad (6)$$

диференційовна на цьому відрізку, причому

$$G'(x) = -f(x) \text{ для всіх } x \in [a; b]. \qquad (7)$$

(*функцію* $G(x)$ ***називають інтегралом із змінною нижньою межею інтегрування*).**

Теорема 8 (про існування первісної функції). Якщо функція f неперервна на проміжку X, то на цьому проміжку для неї існує первісна; при цьому, якщо x_0 – яка-небудь точка розглядуваного проміжку X, то функція

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt,\quad x\in X, \tag{8}$$

є однією з первісних функції f на проміжку X.

З **теореми 8** випливає, що для кожної неперервної на деякому проміжку функції існує на цьому проміжку невизначений інтеграл.

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 9. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і Φ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{9}$$

яка називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***.

Зауваження 1. Для скорочення запису часто вживають позначення $\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)$, тоді формулу (9) записують у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b. \tag{9'}$$

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $\int_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_1^{27}x^{-\frac{2}{3}}dx=3\sqrt[3]{x}\Big|_1^{27}=9-3=6.$$

Формула заміни змінної

Теорема 10. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ для всіх $t\in[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{10}$$

Формула (10) називається ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***, або ***формулою інтегрування підстановкою***.

Зауваження 3. При застосуванні формули (10) її, аналогічно випадку невизначеного інтеграла, можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво. Однак на відміну від невизначеного інтеграла, де в

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Перейдемо до нової змінної інтегрування, нехай

останній момент треба було повертатися до початкової змінної, тут цього робити не треба, оскільки кінцева мета – знайти число, яке на основі доведеної формули дорівнює значенню кожного із інтегралів, що розглядаються.	$t=1-x^2$. Звідси $dt=-2xdx$, $xdx=-\frac{1}{2}dt$. Маємо нові межі інтегрування: при $a=0$ $\alpha=1$, при $b=1$ $\beta=0$.

За формулою (10) маємо:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 1.$$

Зауваження. На другому кроці при $(b<a)$ використали формулу

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{1}$$

Формула інтегрування частинами

Теорема 11. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними $u'(x)$ і $v'(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)dx. \tag{11}$$

Формула (11) називається ***формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.***

Як і у випадку невизначеного інтеграла, її можна записати інакше:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{11'}$$

У формулі (11') використовуємо позначення $uv\Big\|_a^b = u(x)v(x)\Big\|_a^b$.	**<u>Приклад 3.</u>** Обчислити інтеграл $\int_1^2 x\ln xdx$. ***Розв'язання.*** $u=\ln x, dv=xdx$. Тоді $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^2}{2}$. За формулою (11) запишемо:

$$\int_1^2 x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - \left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

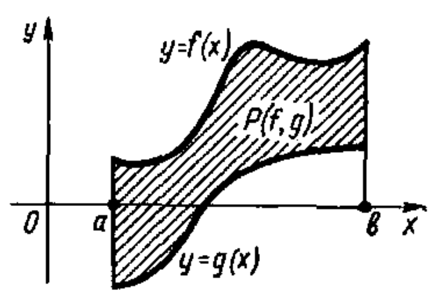
Тема 10. ГЕОМЕТРИЧНІ ТА ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Мета навчання: розглянути геометричні застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об’ємів тіл обертання, довжин дуг; розглянути фізичні застосування визначеного інтеграла; розглянути невласні інтеграли.

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Література*
1	**Геометричні застосування визначеного інтеграла**	[1] Р9; [8] Р1 § 1.13.
1.1.	Обчислення площ.	[1] Р9 § 9.1; [8] Р1 § 1.13.
1.2.	Обчислення об’ємів тіл обертання.	[1] Р9 § 9.2; [8] Р1 § 1.13.
1.3.	Обчислення довжин дуг.	[8] Р1 § 1.13.
2	Фізичні застосування визначеного інтеграла.	[1] Р9 § 9.3, 9.5
3	Невласні інтеграли.	[1] Р8; [8] Р1 § 1.13.

Математичні поняття та їх властивості:

Означення математичного поняття	**Приклад**
Геометричні застосування визначеного інтеграла	
Обчислення площ	
Раніше (див. **тему 9.1**) було встановлено, що визначений інтеграл функції f на відрізку $[a;b]$, яка невід'ємна і неперервна на цьому відрізку, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $P(f)$, породженої графіком цієї функції.	 Рис. 1
Площа цієї трапеції $$S=\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$	

Нехай дві функції f і g визначені і неперервні на відрізку $[a;b]$ і такі, що $f(x) \ge g(x)$ для всіх $x \in [a;b]$.

Фігура, обмежена графіками функцій f і g і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, ординати точок яких змінюються відповідно від $g(a)$ до $f(a)$ і від $g(b)$ до $f(b)$, називається ***криволінійною трапецією***, породженою графіками функцій f і g; цю трапецію позначатимемо через $P(f;g)$ (рис.1).

Площа S такої криволінійної трапеції $P(f;g)$ обчислюється за формулою
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \tag{2}$$

Обґрунтування. Якщо обидві функції f і g невід'ємні, то вказана площа дорівнює різниці площ криволінійних трапецій $P(f)$ і $P(g)$ породжених графіками відповідно функцій f і g:
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx. \tag{3}$$

Якщо ж серед значень принаймні однієї з функцій f і g є і від'ємні (див., наприклад, рис. 1), то на основі обмеженості цих функцій на відрізку $[a;b]$ існує таке число c, що функції $f_1 = f + c$ і $g_1 = g + c$ вже не набувають від'ємних значень.

Площа фігури, обмеженої графіками двох функцій f_1 і g_1 і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, ординати точок яких змінюються відповідно від $g_1(a)$ до $f_1(a)$ і від $g_1(b)$ до $f_1(b)$, очевидно, збігається з попередньою площею і дорівнює
$$\int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{4}$$

Для обчислення площі складнішої фігури треба розбити всю фігуру на частини відомого типу, знайти площі цих частин і результати додати.

<u>**Приклад 1.**</u> Обчислити площу S фігури, обмеженої лініями $xy = 1$, $y = x^2$ і $x = 2$ (рис. 2).

Розв'язання. Точка перетину ліній $y = \dfrac{1}{x}$ (гіперболи) і $y = x^2$ (параболи) має абсцису $x = 1$.

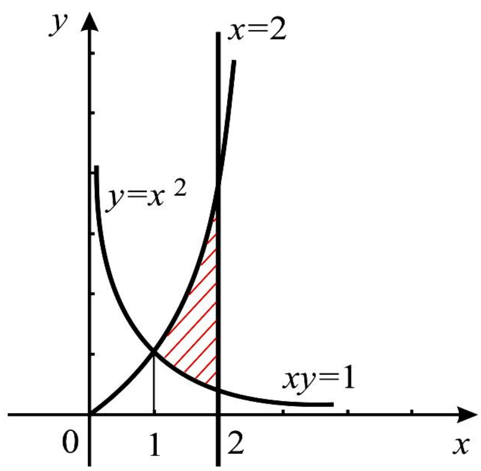


Рис. 2

Тому шукана площа S обчислюється за формулою (2):

$$S=\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\ln x\right)\Bigg|_1^2=\frac{7}{3}-\ln 2.$$

Обчислення об’ємів тіл обертання

Нехай маємо криволінійну трапецію $P(f)$, утворену графіком функції f, визначеної, невід'ємної і неперервної на відрізку $[a;b]$ (рис. 3). Цю криволінійну трапецію як тверде тіло обертатимемо навколо осі Ox. Просторове тіло, яке опише при цьому криволінійна трапеція, називається ***тілом обертання.***

Означимо поняття ***об'єму тіла обертання*** і знайдемо формулу, за допомогою якої можна обчислити цей об'єм.

1. Візьмемо довільне ***Т-розбиття*** (1) відрізка $[a;b]$, виберемо точки $c_k\in[x_k;\, x_{k+1}]$ і побудуємо прямокутники D_k з основами $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ і висотами $f(c_k)$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$ (рис. 3).

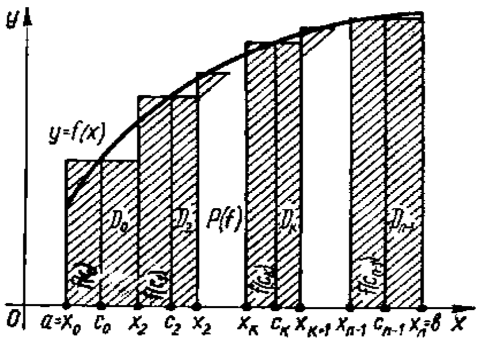


Рис. 3

При обертанні криволінійної трапеції $P(f)$ навколо осі Ox обертатимуться навколо цієї осі і прямокутники D_k, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, кожний з яких опише циліндр.

2. Нехай $W(T)$ – об'єм тіла, яке складається з n циліндрів, описаних прямокутниками D_k, $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Зрозуміло, що

$$W(T)=\sum_{k=0}^{n-1}\pi f^2(c_k)\Delta x_k \qquad (5)$$

Остання сума (5) є ***інтегральною сумою*** функції πf^2 на відрізку $[a;b]$, складеною для даного ***Т*-розбиття відрізка** $[a;b]$ при заданому виборі точок c_k, $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Оскільки функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку буде неперервною, а отже, й інтегровною і функція πf^2. Тому при $\lambda(T)\to 0$ сума $W(T)$ прямуватиме до деякої границі V, що дорівнює інтегралу $\int_a^b \pi f^2(x)dx$. Саме цю границю V й називають ***об'ємом тіла обертання***.

Т в е р д ж е н н я : об'єм тіла V, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $P(f)$, породженої графіком функції f, визначеної, невід'ємної і неперервної на відрізку $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (6)$$

<u>Зауваження.</u> Остання формула узагальнюється на випадок тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $P(f, g)$, породженої графіками функцій f і g, кожна з яких визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, і ці функції такі, що $f(x) \geq g(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$. ***Об'єм*** V такого тіла обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx. \qquad (7)$$

<u>Приклад 2.</u> На **рис. 4** зображена башта конденсатора, висота якої $H = 48$ *м*. Обчисліть об'єм башти як об'єм тіла обертання, утвореного поворотом навколо осі Ox заштрихованої області S площини (рис. 5), яка обмежена графіками функцій $f(x) = 12\sqrt{1 + \frac{x^2}{12^2}}$, $x = -36$, $x = 12$ і віссю Ox.

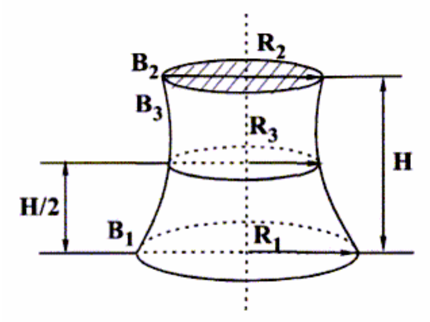


Рис. 4

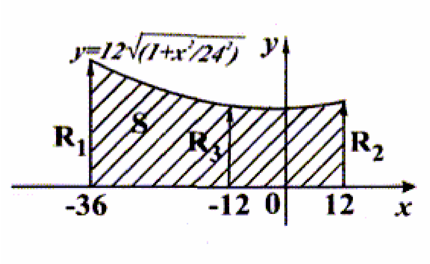


Рис. 5

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = 12\sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}$ диференційовна та додатна на відрізку $[-36; 12]$ і S – множина точок $M(x; y)$ площини, для яких $-36 \leq x \leq 12$ і $0 \leq y \leq f(x)$, то об'єм V тіла обертання, утвореного поворотом S навколо осі Ox, визначається за формулою

$$V = \pi \int_{-36}^{12} f^2(x)dx = \pi \int_{-36}^{12} 144\left(1 + \frac{x^2}{24^2}\right)dx =$$

$$= 144\pi\left(x + \frac{1}{24^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-36}^{12} = 144\pi\left(x + \frac{x^3}{1728}\right)\Bigg|_{-36}^{12} = 144\pi \cdot 76 =$$

$$= 10944\pi \approx 34382\,(м^3).$$

Обчислення довжин дуг

Нехай маємо дугу AB, що є графіком функції f, визначеної і неперервної на відрізку $[a; b]$ (**рис. 6**).

Означимо поняття ***випрямлюваності і довжини дуги***, виділимо клас випрямлюваних дуг і знайдемо формулу, за допомогою якої можна обчислити довжину кожної з таких дуг.

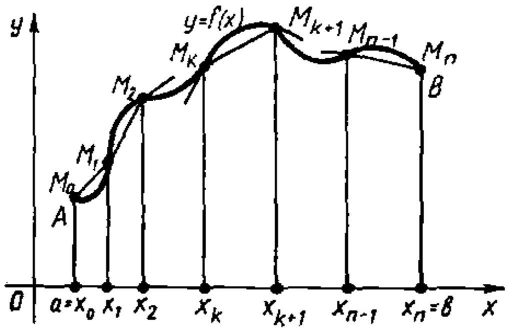


Рис. 6

1. Візьмемо довільне ***Т-розбиття*** (1) відрізка $[a; b]$ і впишемо в дугу AB ламану, що відповідає цьому Т-розбиттю, тобто ламану з вершинами $M_k(x_k; y_k)$, де $y = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ (рис. 6).

2. Позначимо через $P(T)$ периметр цієї ламаної:

<u>Означення.</u> Число L називають ***границею периметра*** $P(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$, що для будь-якого ***Т-розбиття*** (1) відрізка $[a; b]$, для якого $\lambda(T) < \delta$ виконується нерівність $|P(T) - L| < \varepsilon$, і позначають $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} P(T) = L$.

Якщо $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} P(T) = L$, то дугу AB називають ***випрямлюваною***, а число L – її ***довжиною.***

Теорема. Якщо функція f, визначена на відрізку $[a;b]$, неперервна на відрізку разом зі своєю похідною f', то дуга AB, що є графіком функції f, випрямлювана і її довжина L обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{8}$$

Невласні інтеграли

Під час вивчення визначеного інтеграла ми виходили з умов скінченності відрізка інтегрування і обмеженості на ньому підінтегральної функції. Якщо не виконується принаймні одна з цих умов, визначений інтеграл побудувати не можна. Проте на практиці застосовуються інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування і інтеграли необмежених функцій, але не в розумінні визначеного інтеграла.

Невласні інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування

Нехай функція f визначена і неперервна на проміжку $[a;+\infty)$ Тоді функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b, b > a$, і, отже, функція $I(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$.

<u>Означення.</u> Якщо функція $I(b)$ має границю A при $b \to +\infty$, то цю границю називають ***невласним інтегралом функції*** f на проміжку $[a;+\infty)$ і позначають так: $A = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким чином, за означенням,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

При цьому вважають також, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до A).

<u>Приклад 1</u>.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1,$$

і, отже, невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і дорівнює 1 (збігається до 1).

Якщо ж функція $I(b)$ не має границі при $b \to +\infty$, то символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ також називають ***невласним інтегралом***, однак у цьому разі вважають, що невласний інтеграл розбігається.

На невласні інтеграли вигляду (1) поширюється більшість **властивостей визначеного інтеграла.**

Нехай Φ – яка-небудь первісна функції f на проміжку $[a;+\infty)$. На основі (1) і формули Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (\Phi(b) - \Phi(a)).$$

(Нагадуємо, що за умовою функція f неперервна на проміжку $[a;+\infty)$.)

Якщо ввести умовне позначення $\Phi(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} \Phi(x)$, то для збіжного невласного інтеграла (1) дістанемо узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \Phi(+\infty) - \Phi(a). \quad (2)$$

Аналогічно означається невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Нарешті, якщо функція f визначена і неперервна на проміжку $(-\infty;+\infty)$, то за означенням покладають

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad (3)$$

де c – будь-яке число, причому невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***збіжним,*** якщо збігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності (3); якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають ***розбіжним***.

Приклад 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} (\text{arctg}0 - \text{arctg}a) +$$
$$+ \lim_{b\to+\infty} (\text{arctg}b - \text{arctg}0) =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

і, отже, невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ збігається і дорівнює π (збігається до π).

Невласні інтеграли необмежених функцій

Нехай функція f визначена і неперервна на скінченному проміжку $[a;b)$ і необмежена на ньому. Тоді функція f інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при будь-якому $\varepsilon \in (0;b-a)$, і, отже, функція $I(\varepsilon) = \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ визначена в інтервалі $(0;b-a)$.

Якщо функція $I(\varepsilon)$ має границю A при $\varepsilon \to 0+0$, то цю границю називають ***невласним інтегралом функції*** f на відрізку $[a;b]$ і позначають $A = \int_{a}^{b} f(x)dx$. Таким чином, за означенням,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (4)$$

При цьому вважають також, що невласний інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ збігається до A.

Приклад 3.

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0+0} \left(-\left.\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}}\right|_{0}^{1-\varepsilon} \right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0+0} (-2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 2) = 2$$

і, отже, невласний інтеграл $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ збігається і дорівнює 2 (збігається до 2).

Якщо ж функція $I(\varepsilon)$ не має границі при $\varepsilon \to 0+0$, то символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ також називають невласним інтегралом, проте у цьому разі вважають, що ***невласний інтеграл розбігається***.

Аналогічно означається невласний інтеграл функції f, визначеної і неперервної на скінченному проміжку $(a;b]$ і необмеженої на ньому.

Нарешті, нехай функція визначена і неперервна на проміжках $[a;c)$ і $(c;b]$ і необмежена на кожному з них. Тоді за означенням покладають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \tag{5}$$

причому невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають ***збіжним***, якщо збігаються обидва невласні інтеграли, які стоять у правій частині рівності (5);
якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають ***розбіжним***.

IV. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
(типові задачі та КЗСР)

Змістовий модуль 1.
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

Практичне заняття 1.

Тема. ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Питання. 1) Поняття про множину. Способи задання множин. 2) Відношення між множинами. Універсальна множина. 3) Операції над множинами. Основні властивості операцій. 4) Множина R дійсних чисел. 5) Потужність множин. Рівнопотужні множини. 6) Зліченні множини. Зліченність множини раціональних чисел. 7) Множини потужності континуум. 8) Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
1	№1 (а-в), №2 (а-в), №3 (а-в).	№1 (г-е), №2 (г), №3 (г).
2	№№4-6.	
3	№7 (а, б), №8, №9 (а, б), №10 (а), №11 (а), №12 (а, б), №13 (а, б).	№7 (в, г), №9 (в, г), №10 (б), №11 (б), №12 (в), №13 (в, г).
4	№14, №16 (а, б, в), №17 (а, б, в).	№15, №16 (г, д, е), №17 (г, д, е).
5	№18.	№19.
6	Тема 1 (повторити теорію).	
7	Тема 1 (повторити теорію).	
8	№20 (а, б)	№20 (в)

1) Поняття про множину. Способи задання множин.

№1. Задати переліком елементів множини.

а) $\{x \mid x = 5k,\, k \in N,\, x < 6\}$; б) $\{x \mid x \in Z,\, |x| < 5\}$;

в) $\{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$; г) $\{x \mid 3(5x + 10) = 15x + 30\}$;

д) $\{x \mid x \in N, x^2 \leq 9\}$; е) $\{x \mid x \in N_0,\, x \leq 0\}$.

№2. Задати множину за допомогою опису характеристичної властивості: а) множину дійсних чисел, квадрати яких більші за 2; б) множину цілих чисел, менших за –5; в) множину парних чисел більших за 100; г) множину цілих степенів числа 10.

№3. Записати рівняння: а) множина розв'язків якого порожня; одноелементна; б) множина натуральних розв'язків якого порожня; одноелементна; в) множина дійсних розв'язків якого порожня; одноелементна; г) множина розв'язків якого складається з одного елемента 0; 1.

2) <u>Відношення між множинами. Універсальна множина.</u>

№4. Серед множин M, K, L, F знайти рівні:

$M = \{x | \, x \in N \; i \; 2 < x < 5\}$, $\quad K = \{x | \, x \in N \; i \; 3 \le x \le 4\}$,

$L = \{x | \, (x-3)(x-4) = 0\}$, $\quad F = \{x | \, x^2 + 7|x| + 12 = 0\}$.

№5. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x| = 3$, б) $|7-a| = 4$; в) $|x-4| = 3$,

г) $|p| = -2$, д) $|x| + 1 = 4$.

№6. Покажіть на координатній прямій множину розв'язків нерівності:

а) $|x| \le 3$, б) $|x| > 4$, в) $|x+3| \le 1$, г) $|x-4| \ge 2$.

3) <u>Операції над множинами. Основні властивості операцій.</u>

№7. Знайдіть переріз і об'єднання множин:

а) $[8; 15]$ і $[9; 20]$; б) $(-1; 1]$ і $[-1; 0)$;

в) $(2; +\infty)$ і $[-4; 3]$; г) $(-\infty; 3]$ і $(-2; +\infty)$.

№8. Множина A складається з натуральних чисел від 2 до 10. Множина B з натуральних чисел від 5 до 20. Перелічіть елементи множин $A \backslash B$ і $B \backslash A$.

№9. Множини A, B, C такі, що $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Зобразити за допомогою кругів Ейлера і відмітити штриховкою області, зображаючи наступні множини:

а) $(A \setminus B) \cap C$; б) $A \setminus \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$; в) $A \cup (B \setminus C)$; г) $A \cup B \setminus C$.

№10. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

а) $A = \{x | \, (x^2-1)(x^2+2x-3) = 0\}$, $B = \left\{x | \, (x^2-1)^2 + (x^2+2x-3)^2 = 0\right\}$;

б) $A = \{x | \, (x^2-8x+12)(x^2-6x+8) = 0\}$, $B = \left\{x | \, (x^2-8x+12)^2 (x^2-6x+8)^2 = 0\right\}$;

№11. Довести тотожності і зобразити їх кругами Ейлера:

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$, б) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

№12. Як пов'язані між собою множини:

а) $A\bigcup(B\setminus C)$ і $(A\bigcup B)\setminus C$; б) $A\setminus(B\bigcup C)$ і $(A\setminus B)\setminus C$;

в) $A\bigcup(B\setminus C)$ і $(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$.

№13. Нехай $A=\{x|\ f(x)=0\}$, $B=\{x|\ \varphi(x)=0\}$. Як виразити через ці множини множину розв'язків:

а) рівняння $f(x)/\varphi(x)=0$; б) системи $\begin{cases} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0; \end{cases}$

в) рівняння $f(x)\varphi(x)=0$ г) рівняння $f(x)/(f^2(x)+\varphi^2(x))=0$?

№.14. Довести, що дане число – раціональне: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$.

№15. Довести, що числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ірраціональні.

№16. Розв'язати рівняння:

а) $\big|\,|x|-1\big|=2$; б) $|\ 7-x\ |=|\ 5+2x\ |$;

в) $\dfrac{x^2+5x-6}{|\ x-2\ |}=2$; г) $\big|\,|2x-3|-7\big|=1$;

д) $|\ x+3\ |=-|x+2|$; е) $|\ x+1\ |+|\ x-5\ |=20$.

№17. Розв'язати нерівності:

а) $|\ 3x-2|>|\ 2x+1\ |$; б) $\left|x^2-3x+2\right|\le 2x-x^2$;

в) $\dfrac{2x-|3-x|}{|3-x|+2}<1$; г) $\left|\dfrac{3}{2x-7}\right|<\left|\dfrac{-6}{x+4}\right|$;

д) $|\ 7x+5\ |-2x\ge 11$; е) $\dfrac{|\ x-3\ |}{(x-2)(x-3)}\ge 2$.

5) <u>Потужність множин. Рівнопотужні множини.</u>

№18. Із 100 студентів першого курсу 6 відмінників, 20 спортсменів, 25 учасників художньої самодіяльності; 3 є відмінниками і спортсменами, 6 – спортсменами і учасниками художньої самодіяльності, 2 – відмінниками і учасниками художньої самодіяльності; 1 – відмінник, спортсмен, учасник художньої самодіяльності. Скільки студентів не є ні відмінниками, ні спортсменами, ні учасниками художньої самодіяльності? Скільки студентів є тільки відмінниками? Скільки студентів є відмінниками чи спортсменами?

<u>Вказівка.</u> Скористайтесь формулою потужності множини $A\bigcup B\bigcup C$, за умови, що $A\bigcap B\bigcap C\neq\varnothing$.

№19. Анкети 200 студентів дали наступні результати: 56 студентів знають англійську мову, 60 – німецьку, 84 – французьку; 16 студентів знають англійську й німецьку мови, 20 студентів знають англійську й французьку мови, 10 студентів знають німецьку й французьку мови; 6 студентів знають всі ці три мови. Скільки студентів, які пройшли анкетування не знає жодної з цих мов? Скільки студентів знає принаймні одну з них?

Вказівка. Скористайтесь формулою потужності множини $A \bigcup B \bigcup C$, за умови, що $A \bigcap B \bigcap C \neq \varnothing$.

8) Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин.

№20. Довести, що множина X обмежена, і знайти її верхню та нижню грані, якщо:

а) $X = \left\{ x \middle| \, x = \dfrac{n^2}{n^2+2}, n \in N \right\}$;

б) $X = \left\{ x \middle| \, x = \dfrac{n}{2^n}, n \in N \right\}$;

в) $X = \left\{ x \middle| \, x = (-1)^n \dfrac{1}{n}, n \in N \right\}$.

Практичне заняття 2.

Тема. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Питання. 1) Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції. Способи задання. 2) *Класифікація функцій за їхніми властивостями* (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції). 3) *Класифікація функцій за їхньою будовою*. Арифметичні операції над функціями (сума, різниця, добуток, частка функцій). Композиція (суперпозиція) функцій. 4) Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції. 5) Класифікація елементарних функцій. 6) Побудова графіків функцій елементарними прийомами.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
1	№1 (а-д, з, і), №2(б, г, д, є, ж)	№1(е-ж), №2 (а, в, е)
2	№3 (а, б), №4 (б, г), №5 (а, в), №6 (а-в).	№3 (в, г), №4 (а, в), 5 (б, г), №6 (г-е).
3	Тема 2 (повторити теорію).	
4	Тема 2 (повторити теорію). №7(а, в); №8 (а); №9 (а, б).	Тема 2 (повторити теорію). №7(б, г); №8 (б); №9 (в, г).
5	Тема 2 (повторити теорію).	
6	№ 10 (а, б).	№10 (в, г).

1) Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції.

№1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$;   б) $y = \sqrt{2x^2 + x + 8}$;

в) $y = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$;   г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$;

д) $y = \lg\left(2 - x - x^2\right)$;   е) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 6x + 9\right) + \sqrt{x^2 - 2x - 8}$;

є) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sin x + \cos x}$;   ж) $y = \dfrac{tg 2x}{\sqrt{x - 2}}$;

з) $y = \arcsin\left(2x - 5\right)$;   і) $y = \arcsin\left(2 + 3^x\right)$.

№2. Знайти множину значень функції:

а) $y(x) = x^2 + 2$;   б) $y(x) = 3x - x^2$;

в) $y(x) = x^2 - 10x + 9$;   г) $y(x) = 5x^2 + 3x + 2$;

д) $y(x) = \sin x \cdot \cos x\left(1 - 2\sin^2 x\right)$;   е) $y(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x} + 1$;

є) $y(x) = 2^{3\cos x + 4\sin x}$;   ж) $y(x) = \lg\left(1 - 2\cos x\right)$.

Вказівка. Для знаходження $E(y)$ скористайтесь наступними методами: 1) найпростіших оцінок і обмежень (а, б); 2) виділення повного квадрату (в, г); 3) перетворення тригонометричних виразів (д); 4) оцінки (е, є); 5) оберненої функції (ж).

2) *Класифікація функцій за їхніми властивостями* (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції).

№3. З’ясувати, які з наступних функцій **обмежені,** а які необмежені на вказаних проміжках. Для обмежених **зверху (знизу)** функцій знайти точну **верхню (нижню) грань**.

а) $f(x) = x^2 + 2$ на $[-1; 3]$;   б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ на $(-\infty; +\infty)$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ на $(0;1)$;   г) $f(x) = -2^x$ на $(-\infty; +\infty)$.

№4. Знайти проміжки, де функції **строго монотонні**:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = x^4 + 6x^2 + 1$;

в) $y = ctg^2 x$; г) $y = \sqrt{\cos^2 x} - \cos x$.

№5. Дослідити наступні функції на **парність, непарність**:

а) $y = x^6 - 2x^4 + 4$; б) $y = x^5 - x$;

в) $y = 2^x$; г) $y = \sin(x - 1)$.

№6. Які з наступних функцій будуть **періодичними**? Для періодичних функцій вказати період.

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = x \cdot \cos x$;

в) $y = 1 + \cos\frac{\pi}{2}x$; г) $y = |\sin 4x|$;

д) $y = \cos 2x \cos x + \sin x \sin 2x$; е) $y = \sin^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

4) <u>Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції.</u>

№7. Знайти область визначення функції:

а) $y = \arccos(3x - 1)$; б) $y = \arcsin\left(\frac{x}{5} - 5\right)$;

в) $y = \arcsin\frac{x}{x+1}$; г) $y = \arcsin\frac{1}{x^2} + \arccos\frac{x}{3}$.

№ 8. Знайти множину значень функції:

а) $y = \frac{1}{2}\arcsin x^2$; б) $y = 4\arccos\frac{x}{4}$.

№9. Дослідити наступні функції на **парність, непарність**:

а) $y = \cos^3 x + \arcsin x^2$; б) $y = (\arccos x)^2$;

в) $y = x^5 - \arcsin x$; г) $y = x^2 + \arccos x$.

6) <u>Побудова графіків функцій елементарними прийомами.</u>

№10. Побудувати графіки функцій.

а) $y = (x-1)^3 + 7$; б) $y = \sqrt{x-2} + 1$;

в) $y = \frac{2x-1}{x-1}$; г) $y = 2^{x+1} + 1$.

Практичне заняття 3.

Тема. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ГРАНИЦІ

Питання. 1) Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Розв'язування задач на доведення. 2) Теореми про границі послідовностей та їх застосування до розв'язування задач на обчислення. 3) Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. 4) Монотонні послідовності. Число *e*. Використання однієї з основних границь $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ до знаходження границь послідовностей.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
1	Тема 3 (повторити теорію). №1 (а, б).	Тема 3 (повторити теорію). №1 (в, г).
2	Тема 3 (повторити теорію). №2, №3, №4 (а-в), №5 (а, б, ж).	Тема 3 (повторити теорію). №4 (г-є), №5 (в-є).
3	Тема 3 (повторити теорію).	Тема 3 (повторити теорію).
4	Тема 3 (повторити теорію). №6 (а-в).	Тема 3 (повторити теорію). №6 (г).

1) Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Розв'язування задач на доведення.

№1. Доведіть рівність:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}$. Починаючи з якого номера n величина $\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|$ не перевищує 0,0001?

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0$.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}=-\frac{2}{3}$. Починаючи з якого номера n величина $\left|\frac{2n-1}{2-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|$ не перевищує 0,0001?

2) Теореми про границі послідовностей та їх застосування до розв'язування задач на обчислення.

№ 2. Знайдіть границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+3}{2n^2+4n+7}$.

№3. Знайдіть границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+3n^2+2}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n^2+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6}{n^2}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})$.

№4. Знайдіть границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-1}{n+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+1})$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+1}-2n)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n}-n)$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

№5. Використовуючи теореми про границі суми, добутку, частки послідовностей, довести збіжність послідовностей і знайти їх границі:

а) $u_n=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{2n}{3n+1}$; б) $u_n=\dfrac{1}{3n}\cdot\sin n^2$;

в) $u_n=\dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$; г) $u_n=\dfrac{3n^3-4}{n^3+6}$;

д) $u_n=\dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$; е) $u_n=\dfrac{2n^2+3}{n^2+n-1}$;

є) $u_n=\dfrac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^4+2n+3}$; ж) $u_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

4) Монотонні послідовності. Число e. Використання однієї з основних границь $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ до знаходження границь послідовностей.

№6. Знайдіть границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№4 а) Вказівка.** Чисельник і знаменник дробу розділіть на $\sqrt{n}$; **б) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз $(2n+\sqrt{4n^2+n})$; **в) Вказівка.** Поділіть почленно чисельник дробу на знаменник та внесіть у знаменнику дробу $\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$ вираз $(n+1)$ під знак кубічного кореня; **г) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз $(n+\sqrt{n^2+1})$; **д) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз; **е) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз, а потім поділіть чисельник та знаменник дробу, який одержали, на n; **є) Вказівка.** Розкладіть на множники чисельник дробу, згрупуйте доданки у чисельнику та поділіть чисельник на знаменник почленно. **№5. б) Вказівка.** З'ясуйте, яка з функцій є нескінченно малою, а яка обмеженою; **є) Вказівка.** Розкрийте дужки у чисельнику та поділіть чисельник і знаменник дробу на n^4; **ж) Вказівка.** Скористайтесь у чисельнику формулою суми n перших членів арифметичної прогресії. Після цього виконайте тотожні перетворення. **№6. а) Вказівка.** Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{n}{n+1}$ на n.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1};$$

б) Вказівка. Згадайте коли показники степенів додаються; **в) Вказівка.** Згадайте властивості логарифмів та застосуйте їх до тотожних перетворень.

Практичне заняття 4.

Тема. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Питання. 1) Границя функції в точці. Задачі на доведення. 2) Техніка знаходження границь функцій. 3) Знаходження границь функцій, використовуючи першу та другу визначні границі.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 1)**
1	Тема 4 (повторити теорію). №1, №3.	Тема 4 (повторити теорію). №2.
2	Тема 4 (повторити теорію). №4 (а, б, е, ж, і, ї).	Тема 4 (повторити теорію). №4 (в-д, є, з, к).
3	Тема 4 (повторити теорію). №5 (а, б), №6, №7 (а, в).	Тема 4 (повторити теорію). №5 (в), №7 (б, г).

1) Границя функції в точці. Задачі на доведення.

№1. $f(x)=2x-1$. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$. Яким повинно бути δ, щоб для $0<|x-2|<\delta$ мала місце нерівність $|f(x)-3|<0{,}01$?

Доведення.
Треба довести, що
$(\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta>0)(\forall x, 0<|x-2|<\delta)|\ f(x)-3\,|<0{,}01$.
Задамо $\varepsilon>0$ і складемо вираз $|\ f(x)-3\,|=|2x-1-3|=|\ 2x-4\ |=2\,|\ x-2\ |$.

Якщо взяти $\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\frac{0{,}01}{2}=0{,}005\right)$, в даному випадку $\delta\le 0{,}005$, то $(\forall x, 0<|\ x-2\ |<0{,}005)$ буде $|\ f(x)-3\,|=2\,|\ x-2\ |<2\cdot\delta\le 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$.

Відповідь. $\delta=0{,}005$.

№2. $\varphi(x)=3x-5$. Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=4$. Яким повинно бути $\delta>0$, щоб для $0<|x-3|<\delta$ мала місце нерівність $|\varphi(x)-4|<0{,}001$?

№3. $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$**.** Доведіть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}$ $(*)$.

Алгоритм розв'язання.

1. Виразіть x через ε.
2. Оскільки $|\,3x+2\,|>|\,3x\,|-2$, то розв'яжіть нерівність $|3x|-2>\dfrac{5}{3\varepsilon}$ відносно $|x|$.
3. Скористайтесь означенням границі.

2) <u>Техніка знаходження границь функцій.</u>

№4. Знайдіть границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2\,(x+3)-\dfrac{x}{x-2}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^2-x}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t\,(t-1)}{2\,(t^2-1)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

є) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;

з) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

і) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

ї) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

3) <u>Знаходження границь функцій, використовуючи першу та другу визначні границі.</u>

№5. Знайдіть границі функцій, використовуючи першу визначну границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

№6. Знайдіть границі функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$, використовуючи другу визначну границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Розв'язання. Поділивши чисельник дробу на знаменник, скористаємось формулою:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Відповідь. ***e.***

№7. Знайдіть границі функції, використовуючи формулу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№4 а)** 12; **б)** **<u>Вказівка.</u>** Винесіть у чисельнику x за дужки; **е)** Розкладіть чисельник і знаменник дробу на множники; **ж)** **<u>Вказівка.</u>** Розкладіть чисельник і знаменник дробу на множники; **з)** $\frac{5}{2}$**;** **і)** **<u>Вказівка.</u>** Згадайте формулу різниці кубів та розкладіть чисельник дробу на множники; **к)** $\frac{1}{32}$. **<u>Вказівка.</u>** Домножте чисельник і знаменник дробу на вираз спряжений до чисельника. **№7. а)** e^5**; в)** **<u>Вказівка.</u>** Пригадайте властивості степенів.

Практичне заняття 5.

Тема. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Питання. 1) Неперервність функцій в точці. Задачі на доведення. 2) Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація. 3) Властивості функцій, неперервних на відрізку. Розв'язування задач.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 1)**
1	Тема 4 (повторити теорію). №1 (а, б), №2 (а), №3 (а, б).	Тема 4 (повторити теорію). №1 (в), №2 (б), №3 (в).
2	Тема 4 (повторити теорію). №4 (а-в).	Тема 4 (повторити теорію). №4 (г, д).
3	Тема 4 (повторити теорію). №5, №6 (а).	Тема 4 (повторити теорію). №6 (б, в).

1) Неперервність функцій в точці. Задачі на доведення.

№1. Доведіть неперервність функції, використовуючи означення 1.

а) $y = 3x^2 + 2x + 1$ для всіх $x \in R$.

Доведення. Візьмемо довільне точку $a \in (-\infty; +\infty)$.

$$\lim_{x \to a}\left(3x^2 + 2x + 1\right) = 3a^2 + 2a + 1 = f(a).$$

Означення 1 виконується, отже функція неперервна для всіх $x \in R$.

б) $y = \dfrac{x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ на проміжку: $2 < x < 3$.

в) $y = x^2 + x - 2$ для всіх $x \in R$.

№2. Доведіть неперервність функції, використовуючи означення 2 в термінах $\varepsilon - \delta$.

а) $y = \dfrac{x+3}{2-3x}$ в точці $x = \dfrac{1}{2}$.

Доведення. Треба довести, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\left(\forall x, \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta\right) \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon.$$

Розглянемо останню нерівність: $\left|\dfrac{x+3}{2-3x}-7\right|<\varepsilon$.

Виконаємо перетворення.

$$\left|\frac{x+3}{2-3x}-7\right|=\left|\frac{x+3-14+21x}{2-3x}\right|=\left|\frac{22x-11}{2-3x}\right|=\frac{22\left|x-\dfrac{1}{2}\right|}{|2-3x|}<\varepsilon .$$

Звідси $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{22}\cdot|2-3x|$.

Шукатимемо δ таке, що $0<\delta\le 1$.

Оскільки має бути $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<1$, то

$$-1<x-\frac{1}{2}<1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<3x<\frac{9}{2}\Leftrightarrow -\frac{9}{2}<-3x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2{,}5<2-3x<3{,}5.$$
$$0<|2-3x|<3{,}5.$$

Отже, за δ можна взяти число $\dfrac{\varepsilon}{22}\cdot|2-3x|=\dfrac{\varepsilon}{22}$ (при $x=1$).

б) $y=\sqrt{x}$, для всіх $x>0$.

№3. Доведіть неперервність функції, використовуючи означення 3 через приріст аргументу та приріст функції.

а) $y=x^2-3x+1$ для всіх $x\in R$;

Доведення. Має виконуватись рівність $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(a)=0$.

Розглянемо приріст функції $\Delta f(a)=(a+\Delta x)^2-3(a+\Delta x)+1-(a^2-3a+1)=2a\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x$.

Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2a\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x)=0$.

Оскільки означення 3 виконується, то функція неперервна для всіх $x\in R$.

б) $y=2^x$ для всіх $x\in R$;

в) $y=\sqrt[3]{x}$ для всіх $x\in R$.

2) Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація.

№4. Дослідіть функції на неперервність, **неперервність справа та зліва, установіть рід точок розриву.**

а) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ -1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$. Отже, $x = 0$ – ***точка розриву 1-го роду.***

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ при } -\infty < x < 1, \\ 2x - 1, \text{ при } 1 \le x < \infty. \end{cases}$

д) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3) Властивості функцій, неперервних на відрізку. Розв'язування задач.

№5. Чи буде функція $f(x) = x^5 - 3x + 1$ в деякій точці відрізка $[1; 2]$ мати значення, яке дорівнює нулю?

№6. Доведіть, що дані рівняння мають розв'язки на вказаних відрізках.

а) $x^3 - 3x + 1 = 0$, $-1 \le x \le 1$;

б) $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;

в) $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$, $0 \le x \le 2$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№5.** **Вказівка.** Скористайтесь *першою теоремою Больцано-Коші.* **№6.** **Вказівка.** Скористайтесь *першою теоремою Больцано-Коші.*

Змістовий модуль 2.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практичне заняття 6.

Тема. ПОХІДНА

Питання. 1) Похідна. Техніка диференціювання функцій. 2) Похідні вищих порядків.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 5 (повторити теорію). №1.	Тема 5 (повторити теорію). №2.
2	Тема 5 (повторити теорію). №3 (а, б).	Тема 5 (повторити теорію). №3 (в).

1) Похідна. Техніка диференціювання функцій.

№1. Продиференціювати наступні функції.

а) $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$. Знайти $y'(0)$, $y'(1)$;

б) $y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{m}{x} - \dfrac{x^2}{m^2} - \dfrac{m^2}{x^2}$;

в) $y = 3\sqrt[4]{t} + t\sqrt{t} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{t}}$;

г) $z = (2t^2 + 1)(4t^3 - 5)$;

д) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;

е) $y = 2\sin x + 3\cos x$;

є) $y = x\sin x - x^2\cos x$;

ж) $y = \dfrac{x\sin x}{1 + tgx}$;

з) $y = 2e^x + \ln x$;

і) $y = e^x \sin x - \ln x \cdot tgx$;

ї) $y = (1 - 2x)^{10}$;

к) $y = tg\left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right) + tg3$;

л) $y = \cos^2 x^3$;

м) $y = x^2 e^{-2x}$;

н) $y = x^2 \sin(\sin x)$.

№2. Продиференціювати наступні функції.

а) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x$. Знайти $y'(0)$, $y'(c)$;

б) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+0{,}1x^{10}$;

в) $y=(1-4s^2)\,(2s^3+1)$;

г) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$;

д) $y=xtgx+ctgx$;

е) $y=e^x(\cos x+\sin x)$;

є) $y=x\sin(x^2+1)$.

2) Похідні вищих порядків.

№3. Знайдіть похідні вищого порядку.

а) $y=x^4+2x^3-x^2+4$. y'' – ?

б) $y=x^2\ln x$. y''' – ?

в) $y=\ln\sin\varphi$. y''' – ?

Практичне заняття 7.

Тема. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Питання. 1) Диференціал. Розв'язування задач на доведення. 2) Техніка знаходження диференціалів.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 6 (повторити теорію). №1, №2.	Тема 6 (повторити теорію). №3, №4.
2	Тема 6 (повторити теорію). №5 (а-в).	Тема 6 (повторити теорію). №5 (г-е).

1) Диференціал. Розв'язування задач на доведення.

№1. Довести, що функція $f(x)=3x^2-x+2$ диференційовна на всій дійсній осі.

Доведення. Нехай $a\in R$ – довільна точка, що належить $D(f)$.

Знайдемо приріст функції f у точці a, що відповідає приросту аргументу Δx.

$\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$.

$\Delta f(a)=3(a+\Delta x)^2-(a+\Delta x)+2-3a^2+a-2=$

$=3a^2+6a\Delta x+3\Delta x^2-a-\Delta x-3a^2+a=(6a-1)\Delta x+3\Delta x\cdot\Delta x.$

Оскільки $A=6a-1$ – число, що не залежить від Δx, $\alpha(\Delta x)=3\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то залишилось скористатись означенням 1 (теми 6).

№2. Довести, що функція $\varphi(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}+x$ не диференційовна в точці $x=2$.

Доведення. Знайдемо приріст функції φ у точці $x=2$.

$\Delta\varphi(2)=\varphi(2+\Delta x)-\varphi(2).$

$\Delta\varphi(2)=\sqrt[3]{(2+\Delta x-2)^2}+(2+\Delta x)-2=\sqrt[3]{\Delta x^2}+\Delta x=$

$=\sqrt[3]{\dfrac{\Delta x^3}{\Delta x}}+\Delta x=1\cdot\Delta x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}\cdot\Delta x.$

Маємо $A=1$ – число, що не залежить від Δx, $\alpha(\Delta x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ – не є нескінченно малою $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=\infty\right)$.

Отже, означення 1 не виконується і функція $\varphi(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}+x$ не диференційовна в точці $x=2$.

№3. Довести, що функція $\varphi(x)=x^3+2x-1$ диференційовна на всій дійсній осі.

№4. Довести, що функція $f(x)=\sqrt{3\,(x-1)}$ не диференційовна в точці $x=1$.

2) <u>Техніка знаходження диференціалів.</u>

№5. Знайдіть диференціали наступних функцій:

а) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y=\sin x+\sqrt[3]{x}$;

в) $y=(x^2-x+1)\,tg^2x$; г) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-1}$;

д) $y=\dfrac{arctg\,x}{\arcsin x}$; е) $y=3^{-\frac{\sin x}{\ln x}}$.

Практичне заняття 8.

Тема. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Питання. 1) Правило Лопіталя. 2) Застосування правила Лопіталя до обчислення границь.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 7 п.4 (повторити теорію).	Тема 7 п.4 (повторити теорію).
2	№1-8.	№9-13.

1) Правило Лопіталя.

Завдання 1. Повторіть правило Лопіталя з теми 7 п.4 та його застосування до обчислення границь.

2) Застосування правила Лопіталя до обчислення границь.

Завдання 2. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя.

№1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скористаємось правилом Лопіталя. Знайдемо похідні чисельника і знаменника та границю їх частки.

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}e^x=e^a.$$

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скористаємось правилом Лопіталя двічі, оскільки перше використання не позбавляє невизначеності $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\sin x\cdot x-\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)}{-\cos x}=-2.$$

№3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$;

№5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x}$;

№6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$;

№7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$;

№8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tg3x$;

№9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

№10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

№11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

№12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

№13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$.

Практичне заняття 9-10.

Тема. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

Питання. 1) Застосування похідної до визначення інтервалів монотонності функції. 2) Застосування похідної до знаходження екстремумів функцій. 3) Знаходження екстремумів даних функцій, використовуючи першу та другу похідну. 4) Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 2)**
1	Тема 7 п.5 (повторити теорію). № 1, №2(а, в), №3.	№ 2 (б).
2	Тема 7 п.6 (повторити теорію). №4, №5 (а).	№5 (б, в).
3	Тема 7 п.6 (повторити теорію). №6, №7.	
4	Тема 7 п.7 (повторити теорію). № 8, №9 (а)	№9 (б).

1) Застосування похідної до визначення інтервалів монотонності функції.

№1. Повторіть теорему про монотонність функції, алгоритм дослідження функції на монотонність та розгляньте приклад його застосування.

№2. Знайти інтервали монотонності даних функцій:

а) $y=(x-2)^5(2x+1)^4$; б) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$; в) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

№3. Покажіть, що функція $y=2x^3+3x^2-12x+1$ спадає на інтервалі $(-2;1)$.

2) Застосування похідної до знаходження екстремумів функцій.

№4. Повторіть означення точок екстремуму та екстремумів функцій, необхідні умови екстремуму, достатні умови екстремуму в термінах першої похідної, алгоритм дослідження функції на екстремум та розгляньте приклад його застосування.

№5. Знайдіть екстремуми функцій:

а) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; б) $y=x-\ln(1+x)$; в) $y=x-\ln(1+x^2)$.

3) Знаходження екстремумів даних функцій, використовуючи першу та другу похідну.

№6. Повторіть достатні умови екстремуму в термінах першої та другої похідних.

№7. Знайдіть екстремуми даних функцій, використовуючи другу похідну.

а) $y=x^3-2ax^2+a^2x\ (a>0)$; б) $y=x+\dfrac{a^2}{x}\ (a>0)$.

Розв'язання №7 (а).

1. Областю визначення даної функції є множина ***R***.

2. $y'(x)=3x^2-4ax+a^2$.

3. $y'(x)=3x^2-4ax+a^2=0$. Розв'язавши квадратне рівняння відносно x, знаходимо $x=a,\ x=\dfrac{a}{3}$.

4. $y''(x)=6x-4a$.

5. $y''(a) = 2a > 0$, $y''\left(\frac{a}{3}\right) = -2a < 0$, отже, за **достатньою умовою екстремуму в термінах першої і другої похідних,** робимо висновок, що $x_{\min} = a, x_{\max} = \frac{a}{3}$.

6. $y_{\min} = y\,(a) = 2a$, $y_{\max} = y\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$ – **екстремуми функції.**

4) Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

№8. Повторіть означення та правило знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку. Розгляньте приклад його застосування в темі 7 п.7.

№9. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку:

а) $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6; 8]$.

Практичне заняття 11.

Тема. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

Питання. 1) Застосування похідної до знаходження інтервалів на яких графік функції має опуклість напрямлену вгору (вниз) та точок перегину. 2) Застосування похідної до знаходження асимптот. 3) Загальне дослідження функції та побудова її графіка.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 7 п.8-9 (повторити теорію). №1, №2 (а)	№2 (б, в).
2	Тема 7 п.10 (повторити теорію). №3, №4 (а)	№4 (б).
3	Тема 7 п.11 (повторити теорію). №5, №6 (а).	№6 (б, в).

1) <u>Застосування похідної до знаходження інтервалів на яких графік функції має опуклість напрямлену вгору (вниз) та точок перегину.</u>

№1. Повторіть теорему про напрям опуклості графіка функції, означення та необхідну, достатню умови точки перегину, алгоритми дослідження функції на опуклість та існування точок перегину, розгляньте приклади їх застосування.

№2. Знайдіть точки перегину та інтервали на яких графік має опуклість напрямлену вгору (вниз).

а) $f(x)=2x^2+\ln x$;

б) $f(x)=x^4+x^2+e^x$;

в) $f(x)=\ln(1+x^3)$.

2) <u>Застосування похідної до знаходження асимптот.</u>

№3. Повторіть теорему 10 та означення вертикальної асимптоти. Розгляньте приклад знаходження асимптот графіка функції.

№4. Знайдіть асимптоти.

а) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}+x$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$.

3) <u>Загальне дослідження функції та побудова її графіка.</u>

№5. Повторіть схему загального дослідження функції та побудови її графіка. Розгляньте її застосування.

№6. Проведіть загальне дослідження функції та побудуйте її графік:

а) $f(x)=x+\dfrac{x}{3x-1}$;

б) $f(x)=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

в) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Змістовий модуль 3.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практичне заняття 12-13.

Тема. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Питання. 1) Поняття первісної функції. Основна властивість первісної. 2) Поняття невизначеного інтеграла. Основна властивість невизначеного інтеграла. 3) Безпосереднє інтегрування та його застосування до обчислення невизначених інтегралів. 4) Метод підстановки та його застосування до обчислення невизначених інтегралів. 5) Метод інтегрування частинами та його застосування до обчислення невизначених інтегралів. 6) Інтегрування раціональних функцій. 7) Інтегрування деяких ірраціональних функцій. 8) Інтегрування деяких трансцендентних функцій.

Питання	**Аудиторна робота**	**Домашня робота (КЗСР 2)**
1	Тема 8 п. 1-2 (повторити теорію).	
2	Тема 8 п. 3-4 (повторити теорію).	
3	Тема 8 п. 5 (повторити теорію). №1, №4 (г, д), №5 (а).	№2, №3, №4 (а-в), №5 (б).
4	Тема 8 п. 5 (повторити теорію). №6, №7 (г, д, е).	№7 (а, б, в).
5	Тема 8 п. 5 (повторити теорію). №8 (а, б, в).	№8 (г, д, е).
6	Тема 8 п. 6-8 (повторити теорію). №9 (а, б).	№9 (в, г).
7	Тема 8 п. 9 (повторити теорію). №10 (а, в).	№10 (б, г).
8	Тема 8 п. 10 (повторити теорію). №11 (а, в).	№11 (б, г).

3) Безпосереднє інтегрування та його застосування до обчислення невизначених інтегралів.

№1. Використовуючи формулу $\int (kf(x)+lg(x))dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx$, обчисліть інтеграл

а) $\int\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\left(x^3+1\right)^2 dx$;

в) $\int\left(2e^x-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; г) $\int\dfrac{x^2}{3\left(1+x^2\right)}dx$.

№2°. Використовуючи формулу $\int (kf(x)+lg(x))dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx$, обчисліть інтеграл

а) $\int(2\mathrm{x}+1)\,dx$; б) $\int\left(x^4-3x^2+x-5\right)dx$;

в) $\int\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$; г) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}+2\right)dx$.

№3°. Обчисліть наступні інтеграли, перетворивши підінтегральну функцію.

а) $\int x^2\left(x^2+1\right)dx$; б) $\int\dfrac{x^3+3x-1}{x}dx$; в) $\int\dfrac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}dx$.

№4. Обчисліть наступні інтеграли, використовуючи таблицю інтегралів.

а°) $\int\left(a^x-2\sin x\right)dx$; б°) $\int\left(\cos x+2\sqrt[5]{x^3}\right)dx$;

в°) $\int\left(-\sin x+\dfrac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)dx$; г) $\int\dfrac{3}{2+2x^2}dx$;

д) $\int\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

№5. Обчисліть наступні інтеграли, перетворивши підінтегральну функцію.

а) $\int\sin^2\dfrac{x}{2}dx$; б°) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$.

4) Метод підстановки та його застосування до обчислення невизначених інтегралів.

№6. Обчисліть інтеграли, використовуючи *метод підстановки*.

а) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 mx}$; б) $\int\dfrac{dx}{5-3x}$.

№7. Обчисліть наступні інтеграли, використовуючи *метод підстановки.*

а°) $\int \cos 5x dx$; б°) $\int \frac{dx}{\sin^2 nx}$;

в°) $\int \frac{dx}{2-x}$; г) $\int \frac{dx}{2x-5}$;

д) $\int e^{5x} dx$; е) $\int e^{-2x+3} dx$.

5) Метод інтегрування частинами та його застосування до обчислення невизначених інтегралів.

№8. Використовуючи формулу $\int udv = uv - \int vdu$ обчисліть наступні інтеграли:

а) $\int \ln x \, dx$; б) $\int x \ln x dx$;

в) $\int x^2 \ln x dx$; г°) $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}$;

д°) $\int x \cos x \, dx$; е°) $\int x^2 \sin x dx$.

6) Інтегрування раціональних функцій.

№9. Знайти інтеграли раціональних функцій.

а) $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+1)}$; б) $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$;

в°) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$; г°) $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx$.

7) Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

№10. Знайти інтеграли ірраціональних функцій.

а) $\int \frac{dx}{3x + \sqrt[3]{x}}$; б°) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$;

в) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$; г°) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.

8) Інтегрування деяких трансцендентних функцій.

№11. Знайти інтеграли тригонометричних функцій.

а) $\int \cos^5 2x \sin 2x \, dx$; б°) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

в) $\int \sin^3 x \, dx$; г°) $\int \cos^5 x \, dx$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 а)** Використовуючи формулу, запишемо: $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+C$; **б)** **<u>Вказівка.</u>** Перетворіть підінтегральну функцію, а потім використаємо вказану формулу; **г)** **<u>Вказівка.</u>** Перетворіть підінтегральну функцію: додайте до чисельника 1 і відніміть 1 та поділіть чисельник на знаменник. **№6 а)** Виконаємо підстановку $y=mx$, тоді $y'=m$. Отже, за формулою (10')

$$\int\frac{dx}{\cos^2 mx}=\int\frac{d(mx)}{\mathrm{m}\cdot\cos^2 mx}=\frac{1}{m}\int\frac{dy}{\cos^2 y}\bigg|_{y=mx}=\frac{1}{m}tgy+C=\frac{1}{m}tgmx+C;$$

б) **<u>Вказівка.</u>** Виконайте підстановку $y=5-3x$, тоді $y'=-3$. Отже, за формулою (10') $\int\frac{dx}{5-3x}=\int\frac{d(5-3x)}{-3\cdot(5-3x)}=-\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y}\Big|_{y=5-3x}=-\frac{1}{3}\ln|5-3x|+C$.

№8 а) Для знаходження інтеграла покладемо $u=\ln x,\ dv=dx$. Тоді $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Застосовуючи формулу, отримаємо $\int\ln\mathrm{x}\,\mathrm{dx}=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$; **б)** Для знаходження інтеграла покладемо $u=\ln x$, $dv=xdx$. Тоді $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$. Застосовуючи формулу, отримаємо

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{xdx}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

№9 а) Оскільки знаменник розкладено на множники, то підінтегральну функцію згідно з **теоремою 1** зобразимо у вигляді скінченної кількості елементарних раціональних дробів

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} \tag{1}$$

Додамо раціональні дроби в правій частині (1).

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A+2B)}{(x+2)(x+1)}.$$

Знаменники дробів рівні, прирівняємо їх чисельники: $x=(A+B)x+(A+2B)$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності. Одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A та B: $\begin{cases}A+B=1,\\ A+2B=0.\end{cases}$ Розв'язавши систему, отримаємо $A=2,B=-1$.

Таким чином, одержали розклад раціонального дробу на елементарні дроби $\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}$.

Отже, $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+1)}=\int\frac{2}{x+2}dx-\int\frac{dx}{x+1}=2\int\frac{d(x+2)}{x+2}-\int\frac{d\ (x+1)}{x+1}=$

$=2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|+C$. ***Відповідь.*** $\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|+C$;

б) Оскільки підінтегральна функція неправильний дріб, то виконаємо ділення його чисельника на знаменник. В результаті одержимо $\frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}=2x+\frac{x^2+1}{x^3-x}=2x+\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$. Матимемо $\int\frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx=\int 2xdx+\int\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}dx=x^2+\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x(x-1)(x+1)}$. **<u>Вказівка.</u>** Представте підінтегральну функцію у вигляді суми елементарних раціональних дробів $\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$.

Відповідь. $x^2+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$. **в) Вказівка.** Представте підінтегральну функцію у вигляді суми елементарних раціональних дробів $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$. **г) Вказівка.** Оскільки підінтегральна функція є неправильним дробом, то поділіть чисельник на знаменник. Інтегруючи функцію $\frac{5x+2}{(x+1)^2}$, представте її у вигляді суми елементарних дробів $\frac{5x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$.

№10 а) Вказівка. Використайте заміну $x=t^3$. **б) Вказівка.** Використайте заміну $x=t^6$. **в) Вказівка.** Використайте заміну $3x+1=t^3$. **г) Вказівка.** Використайте заміну $x+1=t^2$.

№11 а) Вказівка. Використайте заміну $\cos 2x=t$. **б) Вказівка.** Використайте заміну $\cos x=t$. **в) Вказівка.** Використайте заміну $\cos x=t$. **г) Вказівка.** Використайте заміну $\sin x=t$.

Практичне заняття 14-16.

Тема. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Питання. 1) Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла. 2) Теорема про середнє значення для визначеного інтеграла та її наслідок. Застосування наслідку з теореми до доведення нерівностей. 3) Формула Ньютона-Лейбніца та її застосування до обчислення визначених інтегралів. 4) Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Їх застосування до обчислення визначених інтегралів.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 9 п. 5 (повторити теорію). №1, №2 (а-в).	№2 (г, д).
2	Тема 9 п. 5 (повторити теорію). №3, №4 (а, б).	№4 (в, г).
3	Тема 9 п. 8 (повторити теорію). №5, №6.	№7.
4	Тема 9 п. 9 (повторити теорію). № 8, №9 (а, б), №10, №11.	№ 9 (в-д).

1) Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла.

№1. Повторіть означення визначеного інтеграла. Розгляньте властивості визначеного інтеграла.

№2. Розгляньте застосування **властивості 7** до порівняння наступних інтегралів, не обчислюючи інтеграли:

Властивість 7. Якщо функції f і g інтегровні на відрізку $[a;b]$ і $f(x)\le g(x)$ для всіх $x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

а) $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 xdx$ і $\int\limits_0^1 x\sin^2 xdx$;

б) $\int\limits_1^2 x^2dx$ і $\int\limits_1^2 xdx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ і $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$;

г°) $\int\limits_1^2 \ln xdx$ і $\int\limits_1^2 \ln^2 xdx$;

д°) $\int\limits_0^1 e^x dx$ і $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$.

2) Теорема про середнє значення для визначеного інтеграла та її наслідок. Застосування наслідку з теореми до доведення нерівностей.

№3. Повторіть **теорему про середнє значення для визначеного інтеграла** та розгляньте **наслідок** з неї.

Теорема 5 (про середнє для визначеного інтеграла). Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a;b]$ (m і M – два числа), то існує таке число μ, $m \le \mu \le M$, що $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

Наслідок. За властивістю 7 та 2 для функції $f(x)$, $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a;b]$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, маємо

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M(b-a),$$

де m – найменше, а M – найбільше значення функції на відрізку $[a;b]$.

№4. Використовуючи **наслідок** з теореми *про середнє значення для визначеного інтеграла,* доведіть нерівності:

а) $3 \le \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx \le 5$;

б) $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3} dx \le 2\sqrt{30}$;

в°) $\frac{2\pi}{3} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \le \frac{2\pi}{7}$;

г°) $\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \le \frac{\pi\sqrt{6}}{8}$.

3) Формула Ньютона-Лейбніца та її застосування до обчислення визначених інтегралів.

№5. Згадайте формулу Ньютона-Лейбніца (тема 9, п.8). Повторіть таблицю основних інтегралів (тема 8.1, п. 4) (формули 1-10) та формули 11-20.

№6. Обчисліть інтеграли за допомогою формули Ньютона-Лейбніца:

а) $\int_0^2 3x^2 dx$;

б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$;

г) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx$.

№7°. Обчисліть інтеграли за допомогою формули Ньютона-Лейбніца:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

в) $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$;

г) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

д) $\int\limits_{2}^{3}\frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$.

4) Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Їх застосування до обчислення визначених інтегралів.

№8. Повторіть **з теми 9 п. 9.** Згадайте **формулу заміни змінної у визначеному інтегралі,** або **формулу інтегрування підстановкою** (теорема 10).

№9. Використовуючи формулу заміни змінної (10) обчисліть інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{4}\frac{\mathrm{dx}}{1+\sqrt{\mathrm{x}}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$;

в°) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{\mathrm{x}}+1}dx$; г°) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

д°) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^2 xdx$.

№10. Повторіть **з теми 9 п. 9. формулу інтегрування частинами** у визначеному інтегралі (теорема 11).

№11. Використовуючи **формулу (11) інтегрування частинами** у визначеному інтегралі обчисліть інтеграл.

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin xdx$; б) $\int\limits_{0}^{1}xe^{-x}dx$;

в°) $\int\limits_{0}^{1}x^3 arctgxdx$; г°) $\int\limits_{0}^{3}\ln(x+3)dx$.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№2 а)** ***Розв'язання.*** Функції $f(x)=x^2\sin^2 x$ і $g(x)=x\sin^2 x$ інтегровні на відрізку $[0;1]$, причому $f(x)=x^2\sin^2 x\le g(x)=x\sin^2 x$ для всіх $x\in[0;1]$, тому за властивістю 7 $\int\limits_{0}^{1}x^2\sin^2 xdx\le\int\limits_{0}^{1}x\sin^2 xdx$. **№4 а)** ***Розв'язання.*** Знайдемо похідну підінтегральної функції $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+2}$.

$f'(x)=\frac{2x\,(x^2+2)-(\mathrm{x}^2+5)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{2x(x^2+2-x^2-5)}{(x^2+2)^2}=\frac{-6x}{(x^2+2)^2}<0$. За *ознакою монотонності функції* $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+2}$ **спадає** на відрізку $[0;2]$.

Тому $m = f(2) = \dfrac{3}{2}$ – найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[0;\,2]$, а $M = f(0) = \dfrac{5}{2}$ – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[0;\,2]$.

За **наслідком** з **теореми** *про середнє значення для визначеного інтеграла* (*) маємо: $\dfrac{3}{2}\cdot 2 \le \int\limits_0^2 \dfrac{x^2+5}{x^2+2}dx \le \dfrac{5}{2}\cdot 2$. Отже, $3 \le \int\limits_0^2 \dfrac{x^2+5}{x^2+2}dx \le 5$**.**

№6 а) 8; **б)** $-\dfrac{1}{12}\ln 5$. **Вказівка.** Використайте формулу $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ та формулу Ньютона-Лейбніца. **в)** $\dfrac{\pi}{4} - arctg\,\dfrac{\pi}{4}$. **Вказівка.** У чисельнику дробу додайте та відніміть одиницю і почленно поділіть. **г)** $\dfrac{\pi^3}{64} + arctg\,\dfrac{\pi}{4}$. **Вказівка.** Поділивши чисельник на знаменник підінтегральної функції, отримаєте: $\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} = \dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1} = = 3x^2 + \dfrac{1}{x^2+1}$. Скористайтесь **формулами 2** та **10** з таблиці основних інтегралів та формулою Ньютона-Лейбніца. **№7 г)** π; **д)** $9\dfrac{2}{3}$.

№9 а) ***Розв'язання.*** Перейдемо до нової змінної інтегрування, нехай $x = t^2$ $\left(t = \sqrt{x}\right)$. Тоді $dx = 2tdt$. Маємо нові межі інтегрування: при $a = 0$ $\alpha = \sqrt{a} = 0$, при $b = 4$ $\beta = \sqrt{4} = 2$. За формулою (10) маємо:
$$\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{dx}}{1+\sqrt{\mathrm{x}}} = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^2 = 2\left(2 - \ln 3\right) = 4 - 2\ln 3;$$
б) $\dfrac{1}{3}$. **Вказівка.** Перейдіть до нової змінної інтегрування, нехай $t = \cos x$. Звідси $dt = -\sin x dx$. Отримаєте нові межі інтегрування: $\alpha = \cos 0 = 1$, $\beta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$; **в)** $2\ln 2 - 1$; **г)** $\dfrac{7}{3}$; **д)** $\dfrac{1}{3}$. **№11 а)** 2π; **б)** $1 - \dfrac{2}{e}$; **в)** $\dfrac{1}{6}$; **г)** $3(\ln 12 - 1)$.

Практичне заняття 17.

Тема. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Питання. 1) Знаходження площі криволінійної трапеції. 2) Знаходження об'ємів тіл обертання.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 10 п. 1.1 (повторити теорію). №1 (а, б), №2, №3 (а).	№1 (в, г), №3 (б).
2	Тема 10 п. 1.2 (повторити теорію). №4.	№5.

1) Знаходження площі криволінійної трапеції.

№1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 5 - x$; б) $y = x^2,\ y = 4x - x^2$;

в) $y = x^2 - 6x + 9,\ y = 5 - x$; г) $y = -x^2 + 2x + 1,\ y = x^2 - 4x + 5$.

№2. Серповидна опора виготовлена з плоского стального листа, товщина якого *10 мм*. Використовуючи формулу $m = \rho\, S\, d$, де $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ *кг*/м^3 – густина сталі, S – площа перерізу опори, $d = 0{,}01$ *м* – її товщина, обчисліть масу m цієї опори, якщо її верхній і нижній контури мають форму параболи (рис. 1). Одиниця довжини – *1 м*.

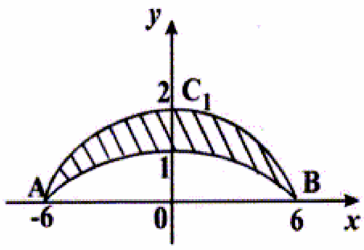


Рис. 1

№3. Обчислити площу фігури обмеженої лініями:

а) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$; б) $y = \dfrac{5}{x},\ y = 4x + 1,\ x = 2$.

2) Знаходження об'ємів тіл обертання.

№4. Знайти об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої синусоїдою і прямими $x = 0$ і $x = \dfrac{\pi}{2}$.

№5. Обчисліть об'єм випускної труби паровоза, переріз якої зображений на рисунку 2. Ця труба утворена обертанням навколо вісі Ox заштрихованої області $ABDC$. Дуги AB і CD є графіками відповідно функцій $f(x) = 2\cos\dfrac{\pi x}{20} + 6$ і $f(x) = \cos\dfrac{\pi x}{20} + 4$, кожна з яких визначена на відрізку [0; 20].

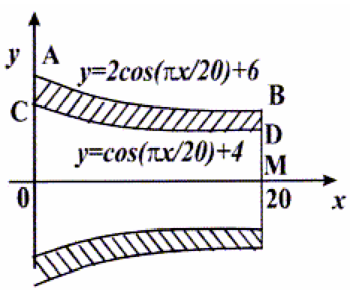


Рис.2

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1 а)** $4{,}5\ кв.од$; **б)** $2\frac{2}{3}\ кв.од$; **в)** $4{,}5\ кв.од$; **г)** $\frac{1}{3}\ кв.од.$ **№2.** $624\ кг$. ***<u>Вказівка.</u>*** Використовуючи належність точок $A(-6;0), C_1(0;2), B(6;0)$ верхній параболі, та точок $A(-6;0), C_2(0;1), B(6;0)$ – нижній параболі складіть рівняння цих парабол. Моделлю серпоподібної опори є криволінійна трапеція, обмежена згаданими параболами. **№3. а)** $\sqrt{2}-1$; **б)** $7-5\ln 2$ (*кв.од.*). **№4.** $\frac{\pi^2}{4}\ куб.од.$

№5. $430\,\pi \approx 1351\ од.об'єму$. *<u>Вказівка.</u>* Об'єм V випускної труби паровоза, утвореної обертанням навколо осі Ox заштрихованої області $ABDC$, дорівнює різниці об'ємів двох тіл, утворених обертанням навколо осі Ox криволінійних трапецій $OABM$ і $OCDM$. Отже, $V = \pi\int_0^{20}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx$.

Практичне заняття 18.

<u>Тема</u>. ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Питання. 1) Задачі фізичного змісту, що приводять до понять первісна та інтеграл. 2) Застосування первісної та інтеграла у фізиці (шлях при нерівномірному русі, робота змінної сили та ін.). Застосування первісної та інтеграла до розв'язування прикладних задач.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 2)
1	Тема 10 п. 2 (повторити теорію). №1, №2.	№3, №4.
2	Тема 10 п. 2 (повторити теорію). №5, №6.	№7, №8.

1) <u>Задачі фізичного змісту, що приводять до понять первісна та інтеграл.</u>

№1. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v = gt$, де $g \approx 10\ \frac{м}{с^2}$. Знайти закон руху, якщо за перші $4\ с$ тіло пройшло $80\ м$.

№2. Виведіть формулу для обчислення маси m неоднорідного стержня, тобто такого, в якому густина $\rho(x)$ змінюється від точки до точки на ділянці $[0;l]$.

№3. Виведіть формулу для обчислення роботи A змінної сили $F(x)$ при переміщенні тіла по прямій з положення a в положення b, коли напрям сили співпадає з напрямом руху.

№4. Визначте силу тиску F рідини, густина якої дорівнює ρ, на вертикально розміщену пластину, верхній край якої занурено на глибину a, а нижній на глибину b (рис. 1).

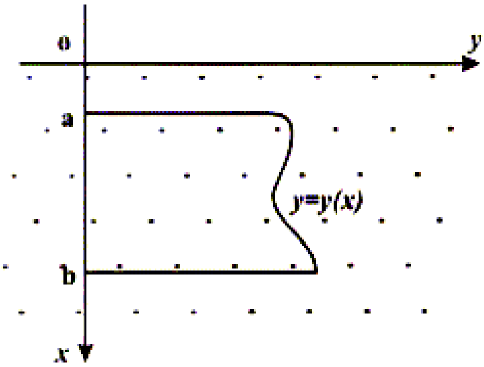


Рис. 1

2) <u>Застосування первісної та інтеграла у фізиці (шлях при нерівномірному русі, робота змінної сили та ін.). Застосування первісної та інтеграла до розв'язування прикладних задач.</u>

№5. Знайдіть закон, за яким визначається необхідна кількість ***Q(T)*** теплоти (у *Дж*) для нагрівання ***1 кг*** рідини від ***0°С*** до ***T°С,*** питома теплоємність якої $C(T)=1{,}7-2\cdot 10^{-5}T+12\cdot 10^{-7}T^2$, якщо для нагрівання цієї рідини від ***0°С*** до ***50°С*** необхідно ***85,025 Дж*** теплоти.

№6. Точка рухається вздовж прямої із прискоренням $a=2t$ (***а*** вимірюється в ***м/с²***). Знайдіть рівняння руху ***S=S(t),*** якщо відомо, що в момент часу ***t=1с*** точка знаходилась на відстані ***10 м*** від початкового положення і мала швидкість ***4 м/с.***

№7. Два тіла починають рухатись одночасно з однієї точки: одне зі швидкістю $v_1=(6t^2+4t)$ *м*/с, друге зі швидкістю $v_2=4t$ *м*/с. Через скільки секунд відстань між ними буде дорівнювати ***250 м***, якщо рух відбувається вздовж прямої лінії в одному напрямку?

№8. Пружина розтягується на *6 см* під дією сили *19,62 Н*. Яку роботу виконує ця сила, розтягуючи пружину на *10 см*?

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. **№1.** Закон руху вільно падаючого тіла $S(t)=\dfrac{gt^2}{2}$. **№2.** $m=\int_0^l \rho(x)dx$ – *маса неоднорідного стержня.* **№3.** $A=\int_a^b F(x)dx$ – *робота змінної сили* F *при переміщенні тіла по прямій з положення* a *в положення* b*, коли напрям сили співпадає з напрямом руху.* ***<u>Вказівка.</u>*** Здійсніть розбиття відрізка $[a;b]$, на якому визначена неперервна і невід'ємна функція $F=F(x)$ сили, під дією якої тіло переміщується вздовж прямої з положення a в положення b (напрям сили співпадає з напрямом руху). За означенням інтеграла одержують результат. **№4.** $F = \int_a^b \rho gxy(x)dx$ *– сила тиску рідини,* густина якої дорівнює ρ, на вертикально розміщену пластинку, верхній край якої занурено на глибину a, а нижній – на глибину b; $x, y(x)$ – розміри пластинки (у даному випадку x – вертикальна сторона, $y(x)$ горизонтальна). **Вказівка.** З курсу фізики відомо, що сила тиску рідини на горизонтально розміщену площадку, що має площу S, глибина занурення якої дорівнює h, визначається за формулою $F = \rho ghS$, де $g = 9{,}8 м/c^2$, ρ – густина рідини. Оскільки у даній задачі пластинка розташована вертикально, то різні її частини знаходяться на різній глибині і сила тиску рідини на них не однакова. Для виводу формули потрібно розділити пластинку на n горизонтальних смуг однакової висоти точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Довжина кожного з відрізків $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{0,n}$, дорівнює $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x \to 0$. Кожну смугу наближено вважайте прямокутником. Сила тиску рідини на таку смугу за законом Паскаля дорівнює силі тиску рідини на горизонтально розташовану смугу, тієї ж площі, зануреної на ту ж саму глибину. Тоді згідно з наведеною вище формулою сила тиску на смугу, яка знаходиться на відстані x_{k-1} від поверхні рідини дорівнює $\rho gx_{k-1} \cdot y(x_{k-1})\Delta x$, а сума $F_n = (\rho gx_0 y(x_0) + \rho gx_1 y(x_1) + ... + \rho gx_{n-1} y(x_{n-1}))\Delta x$ дасть наближене значення сили тиску F рідини на вертикально занурену пластинку. Природно вважати, що $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$. За означенням інтеграла одержують результат. **№7.** ***<u>Вказівка.</u>*** Для визначення часу t, через який відстань між тілами дорівнюватиме 250 *м,* слід скласти рівняння однією з частин якого буде різниця двох інтегралів з межами інтегрування нуль і t. **№8.** ***<u>Вказівка.</u>*** Для розв'язання задачі використайте закон Гука – сила F пропорційна розтягу або стисканню пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу або стискання, k – коефіцієнт пружності. Знайшовши функцію $F(x) = 327x$ проінтегруйте її, скориставшись формулою роботи $A = \int_a^b F(x)dx,$ яка була виведена у №3, межі інтегрування виразіть у метрах.

V. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВИХ МОДУЛЯХ 1-3

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 1
«Вступ до аналізу»

1. Поняття про множину. Способи задання множин. Відношення між множинами. Універсальна множина. Операції над множинами. Основні властивості операцій.

2. Множина R дійсних чисел. Потужність множин. Рівнопотужні множини. Зліченні множини. Зліченність множини раціональних чисел. Множини потужності континуум. Обмежені й необмежені числові множини. Грані числових множин.

3. Функції однієї змінної. Поняття функції. Область визначення функції. Множина значень функції. Способи задання. *Класифікація функцій за їхніми властивостями* (обмежені та необмежені функції, монотонні функції, парні та непарні функції, періодичні функції).

4. *Класифікація функцій за їхньою будовою*. Арифметичні операції над функціями (сума, різниця, добуток, частка функцій). Композиція (суперпозиція) функцій. Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції. Класифікація елементарних функцій. Побудова графіків функцій елементарними прийомами.

5. Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Теореми про границі послідовностей (теорема про єдиність границі; теорема про обмеженість збіжної послідовності; арифметичні властивості границь; теореми про границі, пов’язані з нерівностями (про граничний перехід у нерівності, про границю проміжної послідовності)).

6. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Монотонні послідовності. Число e. Лема про вкладені відрізки. Лема Больцано-Вейєрштрасса. Критерій Коші збіжності послідовності.

7. Границя функції однієї змінної. Поняття границі функції. Теореми про границі функції (теорема про єдиність границі; теореми про арифметичні властивості границь; теорема про граничний перехід у нерівності, теорема про границю проміжної функції).

8. Однобічні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

9. Поняття неперервності функції в точці. Теореми про функції, неперервні в точці. Однобічна неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація.

10. Властивості функцій, неперервних на відрізку. Обмеженість функцій (перша теорема Вейєрштрасса). Існування найбільшого і найменшого означень функції (друга теорема Вейєрштрасса). Теорема про перетворення функції на нуль (перша теорема Больцано-Коші). Теорема про проміжне значення (друга теорема Больцано-Коші).

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 2
«Диференціальне числення функції однієї змінної»

11. Похідна. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної.

12. Теореми про функції, диференційовні в точці (про неперервність диференційовної функції; про похідну суми, різниці, добутку і частки). Диференційовність складної та оберненої функцій.

13. Диференціювання елементарних функцій. Однобічні похідні. Похідні вищих порядків.

14. Диференціал. Означення диференціала функції та його геометричний зміст. Основні правила і формули диференціювання функцій.

15. Застосування диференціала в наближених обчисленнях. Поняття диференціалів вищих порядків.

16. Застосування похідної. Теореми Ферма, Ролля.

17. Застосування похідної. Теореми Лагранжа і Коші.

18. Правило Лопіталя.

19. Дослідження функцій за допомогою похідних. Умови монотонності та сталості функції. Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.

20. Достатні умови екстремуму в термінах першої та другої похідних. Напрям опуклості та точки перегину графіка функції. Теорема про напрям опуклості графіка функції. Необхідна умова точки перегину. Достатня умова точки перегину. Асимптоти графіка функції. Загальне дослідження і побудова графіків функцій.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ПО ЗМІСТОВОМУ МОДУЛЮ 3
«Інтегральне числення функції однієї змінної»

21. Невизначений інтеграл. Задачі, що приводять до поняття первісної. Поняття первісної функції. Основна властивість первісної. Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.

22. Основні методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами). Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування деяких трансцендентних функцій.

23. Визначений інтеграл. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування. Означення визначеного інтеграла. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Фізичний зміст визначеного інтеграла.

24. Умови інтегрованості функцій (Необхідна умова інтегрованості функції. Суми Дарбу. Достатня умова інтегрованості функції). Властивості визначеного інтеграла (найпростіші властивості визначеного інтеграла, адитивна властивість визначеного інтеграла, теорема про середнє для визначеного інтеграла).

25. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Теорема про існування первісної функції. Формула Ньютона-Лейбніца.

26. Формули заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

27. Геометричні застосування визначеного інтеграла: обчислення площ, обчислення об’ємів тіл обертання.

28. Геометричні застосування визначеного інтеграла для обчислення довжин дуг.

29. Застосування визначеного інтеграла у фізиці.

30. Невласні інтеграли.

VI. ПРИКЛАДИ ВАРІАНТІВ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Змістовий модуль 1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

<u>**Варіант 1**</u>

1. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **парною,** якщо її область визначення симетрична відносно нуля, тобто якщо $x \in X$, то й $-x \in X$, і для будь-якого $x \in X$ справджується рівність:

А	Б	В	Г
$f(-x) = -f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = \left(f(x)\right)^2$	$f(-x) = 2f(x)$

2. Число a називається **границею послідовності** (x_n)**,** якщо:

А	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n > n_0)\, \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$
Б	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\exists\, n > n_0)\, \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$
В	$(\exists \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall\, n > n_0)\, \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$
Г	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n > n_0)\, \lvert x_n - a\rvert > \varepsilon$

3. Нехай функція f визначена в деякому правому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. Число A називається **правою границею функції** f у точці a, якщо:

А	$(\forall \varepsilon > 0)(\forall\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\exists\, x, a < x < a + \delta)\, \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
Б	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x, a < x < a + \delta)\, \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
В	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x, a - \delta < x < a)\, \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
Г	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\exists\, x, a < x < a + \delta)\, \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

4. Який з виразів є першою важливою границею?

А	Б	В	Г
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

5. Дайте відповідь на **теоретичне питання**: Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції.

6. Знайти область визначення функції $y=\dfrac{x+2}{x^4-13x^2+36}$.

7. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{8n}\cos\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{6n}{4-3n}\right)$.

8. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}$.

Змістовий модуль 2.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Варіант 1

1. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. Похідна функції $y=f(x)$ в точці a визначається так:

А	Б
$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)+f(a)}{\Delta x}$	$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}$
В	**Г**
$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)}{a+\Delta x}$	$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

2. Диференціал функції f в точці a має вигляд:

А	Б	В	Г
$df(a)=f\ (a)\,dx$	$df(a)=\dfrac{1}{f'\ (a)}dx$	$df(a)=f'(a)dx$	$df(a)=\dfrac{1}{f(a)}dx$

3. Які з наступних рівностей є правильними ($C = const$, $f = f(x)$, $g = g(x)$):

1) $C' = 0$, **2)** $(fg)' = f'g'$, **3)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, **4)** $(f - g)' = f' - g'$.

А	**Б**	**В**	**Г**
1 і 3	1 і 2	тільки 1	3 і 4

4. Які з наведених умов є умовами **теореми Ролля?**

А	функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, диференційована в $(a;b)$, $f(a) \neq f(b)$
Б	функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, $f(a) = f(b)$
В	функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, диференційована в $(a;b)$.
Г	функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, диференційована в $(a;b)$, $f(a) = f(b)$

5. Графік функції $y = f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ має опуклість напрямлену ***вгору***, якщо у всіх точках цього інтервалу:

А	**Б**	**В**	**Г**
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$

6. $\left(x^6 + 3x^2 - x + 3\right)' =$**…**

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\dfrac{x^7}{7} + x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x$	$6x^5 + 6x$	$6x^5 + 6x - 1$	$6x^5 + 6x - 3$	$\dfrac{x^7}{7} + x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

7. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається за законом $s(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + 4t + 1$ (s – шлях у метрах, t – час у секундах) через $3\,c$ після початку руху.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$12\ м/с$	$13\ м/с$	$14\ м/с$	$15\ м/с$	$16\ м/с$

8. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2 e^x$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;-2]$ і $[0;+\infty)$	$[-2;0]$	$(-\infty;0]$ і $[2;+\infty)$	$[0;2]$

9. **У завданнях 2 до кожного з чотирьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.** У відповідь запишіть логічні пари (цифра, буква).

Установіть відповідність між **функціями (1-4)** та **мінімуми функцій (А-Д).**

1 $f(x)=x^2-6x$	**А** $\min f(x)=f(0)=0$
2 $f(x)=e^x+e^{-x}$	**Б** $\min f(x)=f(3)=-9$
3 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$	**В** $\min f(x)=f(2)=4$
4 $f(x)=\lvert x\rvert$	**Г** $\min f(x)=f(0)=2$
	Д $\min f(x)=f(1)=1$

10. Сформулюйте означення *«точки максимуму функції».*

11. Сформулюйте достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.

12. Сформулюйте теорему Коші.

13. Проведіть загальне дослідження функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ та побудуйте її графік.

Змістовий модуль 3.
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

<u>Варіант 1</u>

1. Завдання за вибором однієї правильної відповіді.

Виберіть варіант правильної відповіді, та напишіть відповідну до номера завдання букву.

1. Функція $F(x)$ називається **первісною функції** $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо $F(x)$ диференційована на X і в кожній точці цього проміжку виконується рівність:

А	Б	В	Г
$F'(x)=f(x)$	$f'(x)=F(x)$	$f'(x)=F'(x)$	$f(x)-F(x)=const$

2. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі відбувається за формулою:

А	Б	В	Г
$\int udv = uv - \int udu$	$\int udv = uv - \int vdv$	$\int udv = uv - \int vdu$	$\int udv = \int vdu - uv$

3. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і Φ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді справедлива формула:

А	Б
$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) + C$	$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$
В	**Г**
$\int_a^b f(x)dx = \Phi(a) - \Phi(b)$	$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) + \Phi(b)$

4. Обчисліть інтеграл, використовуючи **безпосереднє інтегрування**.

$$\int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

5. Обчисліть інтеграл, використовуючи **метод підстановки.**

$$\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x}.$$

6. Обчисліть інтеграл, використовуючи **метод інтегрування частинами.**

$$\int \ln^2 x dx.$$

7. Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи **формулу Ньютона-Лейбніца.**

$$\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx.$$

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1990. 383 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1991. 366 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 3. Елементи теорії функцій і математичного аналізу. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1992. 359 с.
4. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Изд. 4-е доп. Москва : Просвещение, 1973. 256 с.
5. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: Навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. Київ : Вища шк., 1994. 455 с.
6. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Ляшенко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. Київ : Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
7. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
8. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 432 с.
9. Соколенко О. І., Новик Г. А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. Київ : Либідь, 2001. 248 с.
10. Шиманський І. Є. Математичний анализ. Київ : Вища школа, 1972. 632 с.
11. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: У 2-х ч.: 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища школа, 1994. Ч. 1. 432 с.
12. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: У 2-х ч.: 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.

Допоміжна література

13. Глушков П. М., Шунда Н. М. Диференціальне числення функції однієї змінної: Навч. посібник. Київ : Вища шк., 1991. 270 с.
14. Дмитрієнко О. О. Прикладні задачі з математичного аналізу: навчальний посібник. Полтава : ТОВ «АСМІ», 2011. 117 с.
15. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2-х ч.: Ч. 1 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Сорокін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 383 с.
16. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2-х ч.: Ч. 2 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Сорокін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 360 с.
17. Навчальна програма дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня БА) / Упоряд. Людвиченко В. О. Київ : МАУП, 2018. 23 с.
18. Призва Г. Й. Диференціальні рівняння та їх застосування. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : Вища шк., 1992. 96 с.
19. Програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика), 122 «Комп'ютерні науки») / Упоряд. Соколенко Л. О. Чернігів, 2020. 6 с.
20. Робоча програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, спеціальності 122 «Комп'ютерні науки») / Упоряд. Давидчук С. П. Житомир : «Житомирська політехніка», 2019. 14 с.
21. Свердан П. Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. Київ : Знання, 2008. 450 с.
22. Шунда Н. М. Функції та їх графіки. Київ : Рад. школа, 1983. 190 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Методичні рекомендації
до навчання курсу для студентів спеціальності
014 Середня освіта (Інформатика)
та спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Частина 1
«Вступ до аналізу. Диференціальне та інтегральне
числення функції однієї змінної».
[електронне видання]

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Л. О. Соколенко*

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 30.10.2023 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 9,07. Обл.-вид. 9,98. Зам. № 058.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
nuchk.tipograf@gmail.com