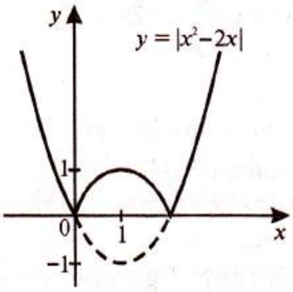
вправо і одержаний графік перенесемо на одну одиницю вниз уздовж осі Oy. І нарешті, залишаємо без змін частину графіка, де $f(x) \geq 0$, а ту частину графіка, де $f(x) < 0$, відобразимо симетрично відносно осі Ox (мал. 2).



Мал. 2

Відповіді

КР-1

Варіант 1. **1°**. 1. **2°**. $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1$. **3•**. 1хв. **5***. 1; 9; 17.

Варіант 2. **2°**. (2; 4), $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{14}{3}\right)$. **3•**. 126 км. **4•**. (2; 0), (4; 0). **5***. 610.

Варіант 3. **1°**. $\frac{x-5}{2(x-2)}$. **2°**. $x \in (2; 3)$. **3•**. 12 год. **4•**. $D(f) = [1; 2) \cup (2; +\infty)$. **5***. $\frac{1}{5}$; 1; 5; 25.

Варіант 4. **1°**. $\frac{3(b+1)}{b+3}$. **2°**. $a = -4$. **3•**. 1400 кроків. **4•**. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

СР-1

Варіант 1. **1°**. – 0,5(3). **2•**. $\frac{11}{252}$. **3•**. Площа прямокутника зменшиться на 19 %.

Варіант 2. **1°**. 0,5. **2•**. 25 %.

Варіант 3. **1°**. $-\frac{20}{9} > -2{,}221$. **2•**. ≈17,5 %.

Варіант 4. **1°**. 9,9. **2•**. 2500. **3•**. $\frac{7}{12}$.

СР-2

Варіант 1. **1°**. $D(f) = [-3; 3]$. **2•**. (1; 0), (0; 3).
Варіант 2. **1°**. $f(1) > f(-1)$. **2•**. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Варіант 3. **1°**. Непарна. **2•**. $f(\varphi(x)) = 2x(2x+1)$.
Варіант 4. **1°**. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **2•**. $[-2; 2]$.

Далі буде

Світлана МУЗИЧЕНКО

Інтегрований підхід до вивчення геометричних перетворень графіків функцій

Анотація. Розглянуто деякі аспекти проблеми формування інтегрованих знань школярів у процесі вивчення геометричних перетворень графіків функцій.

Музыченко Светлана. Интегрированный подход к изучению геометрических преобразований графиков функций. Аннотация. Рассмотрено некоторые аспекты проблемы формирования интегрированных знаний школьников в процессе изучения геометрических преобразований графиков функций.

Muzichenko Svitlana. An integrated approach to the study of geometric transformations of graphs of functions. Summary. Some aspects of the problem of forming the integrated knowledge of the pupils in the study of geometric transformations of graphs of functions.

Різні аспекти проблеми інтеграції знань були і залишаються перспективним напрямом психолого-педагогічних досліджень. У площині розв'язування даної проблеми знаходяться дослідження, присвячені узагальненню і систематизації знань, внутрішньопредметним та міжпредметним зв'язкам. В умовах надшвидких темпів розвитку й оновлення знань у сучасному суспільстві інтегрований підхід покликаний забезпечити зниження інформаційного навантаження на учнів та формування у них системного мислення.

Для математики як навчальної дисципліни є специфічними ідеї інтеграції планіметрії та стереометрії, алгебри та геометрії. Прихильниками фузіонізму у викладанні геометрії були такі великі математики як Г. Монж, М. І. Лобачевський, Ф. Клейн. Фузіоновані курси геометрії створювалися в Італії, Франції, СРСР. Вивченню елементів стереометрії в основній школі присвячені дисертаційні дослідження Я. М. Жовніра (1969), Л. Г. Філон (1998). Принцип фузіонізму реалізується у підручниках з геометрії В.О. Тадеєва.

Не менше уваги приділяють науковці реалізації внутрішньопредметних зв'язків алгебри та геометрії. Одним із напрямів роботи є розробка і впровадження у навчання інтегрованих курсів математики. Перші спроби створення інтегрованих підручників алгебри та геометрії здійснювалися ще у XIX ст. Сьогодні в Україні провідні автори розробляють інтегровані курси математики у зв'язку із запровадженням профільного навчання у старшій школі.

Проблема інтеграції змісту навчального матеріалу, алгебраїчних і геометричних методів розв'язування задач всебічно досліджується у дисертаціях російських науковців В. О. Далінгера (1981, 1992), А. О. Аксьонова (2000).

У методиці математики відомим є метод укрупнення дидактичних одиниць, розроблений П. М. Ерднієвим, в основу якого покладено ідею формування цілісних знань.

Учителі-практики також активно шукають точки дотику алгебри і геометрії. Наприклад, Н. Д. Сімонова обгрунтовує можливість і доцільність систематизації навчального матеріалу через призму тригонометрії, яка не лише є «ключем, який відчиняє браму між алгеброю і геометрією», а й допомагає інтегрувати математику з фізикою [6].

Ефективне використання геометричних знань під час навчання алгебри розглянуто у роботі [1]. Модельно-геометрична основа може бути підведена під вивчення багатьох алгебраїчних формул і співвідношень, насамперед завдяки тлумаченню чисел та їх добутків як довжин, площ або об'ємів.

На нашу думку, заслуговують на увагу міжпредметні зв'язки алгебри і геометрії, які виявляються з усією очевидністю у процесі навчання учнів побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень. Інтеграція двох змістових ліній — лінії геометричних перетворень та лінії функцій — добра нагода для формування цілісних математичних знань, усвідомлення єдності математичних ідей, логічних зв'язків між окремими елементами змісту. Така інтеграція тим більше є доцільною, що геометричні перетворення як відображення площини на себе є одним із видів функціональних відповідностей.

Можливими є дві методичні схеми ознайомлення учнів із застосуванням геометричних перетворень до побудови графіків функцій. Умовно їх можна подати так:

1) $f_1 \to f_2 \to$ геометричне перетворення;
2) $f_1 \to$ геометричне перетворення $\to f_2$.

Дотримуючись першої схеми, шукають відповідь на запитання: *яке перетворення слід застосувати до графіка деякої функції, щоб одержати графік іншої*. Згідно з другою схемою, навпаки, з'ясовують: *графік якої функції одержать, якщо до деякого відомого графіка застосують певне геометричне перетворення.*

Перший підхід — сучасніший і поширеніший. Його реалізовано у підручниках [2], [4], [5], посібниках [7], [9] та інших. Другий можна зустріти у класичній праці на тему функцій та їх графіків [8], у деяких старіших підручниках. Його прихильниками є автори статті [3]. Взагалі ж, учителі його використовують мало.

Проте, на нашу думку, саме друга схема має деякі переваги. По-перше, вона дає змогу більш вичерпно проілюструвати взаємозв'язки геометричного матеріалу з алгебраїчним. По-друге, ідея застосування геометричних перетворень до графіків функцій як геометричних фігур природно і невимушено стає джерелом проблемної ситуації. При цьому заглиблюватись у розв'язування проблеми можна по-різному. Це створює додаткові умови для рівневої диференціації навчання, індивідуальної роботи зі здібними учнями. Зупинимося на другій схемі докладніше.

Як відомо, на уроках геометрії учні ознайомлюються з такими перетвореннями площини: *центральна та осьова симетрії*, *паралельне перенесення*, *поворот*, *гомотетія*. Оскільки графік функції можна розглядати як геометричну фігуру, то до нього може бути застосоване будь-яке з цих перетворень. Виникають запитання: яку лінію одержать у результаті? чи буде ця лінія знову графіком деякої функції? чи можна знайти аналітичне задання нової лінії? Що стосується повороту, то його застосування до графіка функції не завжди приводить знову до графіка однозначної функції. У цьому учні можуть легко переконатися. Крім того, координатні формули повороту досить складні. Цього достатньо, щоб пояснити учням, чому застосування повороту не розглядається.

1. Симетрія. Центральну симетрію відносно початку координат можна розглядати як композицію двох осьових симетрій відносно координатних осей.

Координатні формули симетрії відносно осі Ox: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$ Отже, у симетрії відносно осі Ox точці $A(x; f(x))$ відповідає точка $A'(x; -f(x))$. Це означає, що, симетризувавши відносно осі абсцис графік функції $y = f(x)$, одержимо графік функції $y = -f(x)$.

Симетрія відносно осі Oy задається формулами: $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$ Отже, точка $A(x; f(x))$ перейде у точку $A'(-x; f(x))$. Якщо $-x = x'$, то $x = -x'$. Це означає, що, симетризувавши графік функції відносно осі ординат, одержимо графік функції $y = f(-x)$.

Очевидно, що симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно початку координат дає змогу одержати графік функції $y = -f(-x)$.

Можна розглянути й загальнішу ситуацію, а саме симетрію відносно прямих $x = a$ та $y = b$. Відповідні координатні формули знайти неважко, скориставшись формулами для координат середини відрізка.

Нехай при симетрії відносно прямої $x = a$ точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(x'; y')$. Тоді середина відрізка AA' належатиме прямій $x = a$ і абсцису точки A' можна знайти із співвідношення $\frac{x+x'}{2} = a$. Отже, дане перетворення задається формулами $\begin{cases} x' = 2a - x, \\ y' = y. \end{cases}$

Аналогічно, симетрія відносно прямої $y = b$ задається формулами $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2b - y. \end{cases}$

У першому випадку точка $A(x; f(x))$ перейде у точку $A'(2a - x; f(x))$. Оскільки $2a - x = x'$, то $x = 2a - x'$. Отже, симетрія відносно прямої $x = a$ переводить графік функції $y = f(x)$ у графік функції $y = f(2a - x)$.

Аналогічно, симетрія відносно прямої $y = b$ дає змогу одержати з графіка функції $y = f(x)$ графік функції $y = 2b - f(x)$.

Центральна симетрія відносно точки $Z(a; b)$ — це композиція осьових симетрій відносно прямих $x = a$ та $y = b$. Об'єднавши розглянуті випадки, маємо, що симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно точки $Z(a; b)$ дає змогу одержати графік функції $y = 2b - f(2a - x)$.

Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = (4 - x)^2$, достатньо симетризувати графік функції $y = x^2$ відносно прямої $x = 2$. А для побудови графіка функції $y = 4 - x^2$ симетрію потрібно виконати відносно прямої $y = 2$. Графік функції $y = 5 - \sqrt{2 - x}$ можна одержати в результаті симетрії графіка функції $y = \sqrt{x}$ відносно точки $Z(1; 2{,}5)$.

Цікавим випадком є симетрія відносно прямої $y = x$. При цьому вимагає уваги той факт, що результатом симетрії не завжди буде графік однозначної функції.

2. Паралельне перенесення. Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(a; b)}$ — це композиція двох паралельних перенесень уздовж координатних осей.

Використовуючи координатні формули $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y, \end{cases}$ паралельного перенесення вздовж осі абсцис, тобто на вектор $\overrightarrow{(a; 0)}$, неважко встановити, що дане перетворення переводить графік функції $y = f(x)$ у графік функції $y = f(x - a)$.

Аналогічно паралельне перенесення вздовж осі ординат на вектор $\overrightarrow{(0; b)}$ дає можливість одержати з графіка функції $y = f(x)$ графік функції $y = f(x) + b$.

Якщо об'єднати обидва випадки, отримаємо, що паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{(a; b)}$ переводить графік функції $y = f(x)$ у графік функції $y = f(x - a) + b$.

3. Гомотетія. Найпростішим випадком є гомотетія відносно початку координат з коефіцієнтом $k > 0$. Її координатні формули $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$ Очевидно це композиція двох стисків (розтягів) з однаковими коефіцієнтами відносно координатних осей.

Стиск (розтяг) відносно осі абсцис (уздовж осі ординат) задається формулами $\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases}$ і переводить точку $A(x; f(x))$ у точку $A'(x; kf(x))$. Отже, щоб одержати графік функції $y = kf(x)$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягти від осі абсцис (або вздовж осі ординат) у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути у $\frac{1}{k}$ раза, якщо $0 < k < 1$.

Стиск (розтяг) відносно осі ординат (уздовж осі абсцис) задається формулами $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y \end{cases}$ і переводить точку $A(x; f(x))$ у точку $A'(kx; f(x))$. Оскільки $kx = x'$, то $x = \frac{x'}{k}$. Отже, щоб одержати графік функції $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягти від осі ординат (або вздовж осі абсцис) у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути у $\frac{1}{k}$ раза, якщо $0 < k < 1$.

Об'єднавши обидва випадки, матимемо, що гомотетія відносно початку координат з коефіцієнтом k переводить графік функції $y = f(x)$ у графік функції $y = kf\left(\frac{x}{k}\right)$.

Так, графік функції $y = 2\sin\frac{1}{2}x$ гомотетичний графіку функції $y = \sin x$. Проте частіше доводиться розглядати функції з різними коефіцієнтами для аргументу і для самої функції.

Заслуговує на увагу також стиск (розтяг) відносно прямих, паралельних координатним осям.

Розглянемо стиск (розтяг) з коефіцієнтом $k > 0$ відносно прямої $x = l$. Нехай при цьому точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(x'; y')$. Очевидно, що ордината залишиться без зміни. Нову абсцису x' визначимо із співвідношення $\frac{|l - x'|}{|l - x|} = k$. Оскільки $k > 0$, то $(l - x')(l - x) > 0$ і $l - x' = k(l - x)$, звідки $x' = kx - l(k - 1)$. Отже, координатні формули даного перетворення $\begin{cases} x' = kx - l(k-1), \\ y' = y. \end{cases}$ Це означає, що його застосування переводить графік функції $y = f(x)$ у графік функції $y = f\left(\frac{x}{k} + \frac{l(k-1)}{k}\right)$ або $y = f\left(\frac{1}{k}(x + l(k-1))\right)$.

Проте зазвичай у таких випадках застосовують послідовно два перетворення: паралельне перенесення на вектор $\overline{\left(-\frac{l(k-1)}{k}; 0\right)}$ або на вектор $\overline{(-l(k-1); 0)}$ і стиск (розтяг) з коефіцієнтом k. При цьому у другому варіанті важливим є порядок перетворень. Якщо стиск (розтяг) виконувати в першу чергу, то відносно осі ординат. А якщо спочатку виконується паралельне перенесення, то стиск (розтяг) слід робити відносно прямої $x = -l(k-1)$.

Наприклад, графік функції $y = \left(\frac{1}{2}(x+3)\right)^2$ можна одержати в результаті розтягу графіка функції $y = x^2$ у 2 рази від прямої $x = 3$ ($k = 2$, отже, $l(2-1) = 3$, звідки $l = 3$). А можна виконати спочатку розтяг графіка функції $y = x^2$ у 2 рази від осі ординат, а потім паралельне перенесення графіка функції $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ на 3 одиниці вліво. Або спочатку перенести графік функції $y = x^2$ на 3 одиниці вліво, а потім графік функції $y = (x+3)^2$ розтягти у 2 рази від прямої $x = -3$. Крім того, якщо функцію записати у вигляді $y = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2$, то можна спочатку перенести графік функції $y = x^2$ на 1,5 одиниці вліво, а потім розтягти графік функції $y = (x + 1{,}5)^2$ у 2 рази від осі ординат.

Зрозуміло, що не обов'язково розглядати з учнями всі ці випадки і, тим більше, прагнути їх запам'ятати. Такий матеріал може бути корисним для здібних до математики учнів, оскільки сприяє формуванню пошуково-дослідницьких здібностей, глибшому розумінню навчального матеріалу, інтеграції алгебраїчних та геометричних знань.

Після ознайомлення учнів із сутністю методу побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень постає завдання формування вмінь та навичок застосування методу. Це супроводжується певними труднощами. Слабші учні, які покладаються лише на пам'ять, плутають перетворення або їх варіанти (вліво/вправо, вгору/вниз, стиск/розтяг). Але найбільше труднощів виникає тоді, коли для побудови графіка потрібно застосувати кілька геометричних перетворень. Особливо «помилконебезпечними» є перетворення вздовж осі абсцис.

Наприклад, для побудови графіка функції $y = \sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ учень здійснює кроки: 1) $f(x) = \sin x$; 2) $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ — паралельне перенесення графіка функції $f(x)$ вліво на $\frac{\pi}{3}$; 3) $h(x) = \sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка функції $g(x)$ у 3 рази до осі ординат.

Помилка у тому, що прийнято $h(x) = g(3x)$, тоді як насправді $h(x) = g\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right)$. У цьому неважко переконатися. Отже, стиск графіка функції $g(x)$ потрібно було робити не до осі ординат, а до прямої $x = -\frac{\pi}{3}$.

Причини подібних помилок криються у поганому розумінні учнями змісту функціональної символіки. Щоб правильно визначити і виконати перетворення, необхідно вміти кожну наступну функцію виразити через попередню. Але багато учнів погано усвідомлюють зміст записів виду $h(x) = g(3x)$. Як наслідок — будують ланцюжок функцій формально. З тих самих причин виникають труднощі при засвоєнні поняття складеної функції. Тому потрібно від самого початку формування поняття функції пропонувати учням вправи типу:

1) для функції $y = f(x)$, де $f(x) = x(x-2) + 3$, знайти $f(2), f(n), f(n+1), f(3x), 3f(x), f(\sqrt{x})$ тощо;

2) знайдіть $f(x)$, якщо $f(x-1) = x^2 + 3x - 2$.

Під час побудови графіків функцій слід приділяти окрему увагу навчанню учнів встановлювати на кожному кроці зв'язки між функціями і вимагати фіксувати їх у записах (зазначимо, що на реалізацію такої методики орієнтований підручник [5]). Так, для функції $y = \sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, крім розглянутого вище, можливі й такі розв'язання.

1-й спосіб.

1) $f(x) = \sin x$;

2) $g(x) = \sin 3x = f(3x)$ — стиск графіка функції $f(x)$ у 3 рази до осі ординат;

3) $h(x) = \sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = g\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ — паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ вліво на $\frac{\pi}{3}$.

2-й спосіб.

Запишемо функцію у вигляді $y = \sin(3x + \pi)$.

1) $f(x) = \sin x$;

2) $g(x) = \sin(x + \pi) = f(x + \pi)$ — паралельне перенесення графіка функції $f(x)$ вліво на π;

3) $h(x) = \sin(3x + \pi) = g(3x)$ — стиск графіка функції $g(x)$ у 3 рази до осі ординат.

Крім того, можна порадити учням перевіряти результат за допомогою контрольних точок: обчислити за вихідною формулою значення функції для деякого значення аргументу і подивитись, чи належить точка з такими координатами одержаному графіку.

Що стосується різних способів розв'язання, то такий підхід серед учителів не популярний. Одні вчителі вважають, що це заплутує учнів, і тому намагаються максимально регламентувати їх діяльність вказівками. Інші не знаходять для такої роботи достатньо часу. Тому нерідко серед учнів поширеним є хибний стереотип, що існує лише один правильний варіант вибору послідовності перетворень. На нашу думку, штучне обмеження можливості вибору для учнів однозначно є небажаним. Більше того, це єдиний шлях формування повних, цілісних знань з теми, міцних та надійних умінь і навичок.

Перші вправи для побудови графіка функції різними способами мають бути простими і максимально безпечними щодо можливих помилок. Найкраще обирати функції, що передбачають виконання двох перетворень, пов'язаних з діями одного ступеню. Наприклад: $y=\sqrt{x+5}-2$; $y = 3\cos 2x$ тощо. Далі можна розглянути функції типу $y = \cos 2x + 1$, $y=\frac{1}{2}x^3-3$, $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

У всіх цих випадках для побудови необхідно виконати два перетворення. Порядок перетворень може бути довільним, отже, побудову можна здійснити двома способами.

Більшої уваги потребують функції типу $y=\sqrt{4x-12}$. Знову маємо справу з двома перетвореннями: паралельне перенесення вздовж осі абсцис і стиск до осі ординат. Але спроба змінити їх порядок може викликати утруднення, оскільки для цього потрібно функцію записати у вигляді $y=\sqrt{4(x-3)}$. А новий запис знову дає можливість розглянути два способи. Отже, маємо:

1-й спосіб: $f(x)=\sqrt{x}$;

$g(x)=\sqrt{x-12}=f(x-12)$;

$h(x)=\sqrt{4x-12}=g(4x)$;

2-й спосіб: $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\sqrt{4x}=f(4x)$;

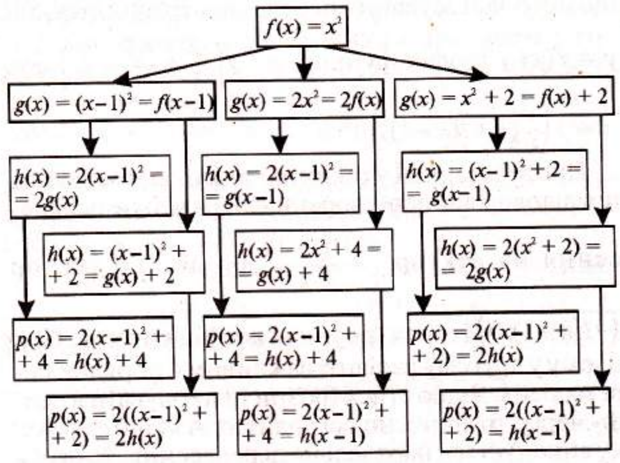
$h(x)=\sqrt{4(x-3)}=g(x-3)$;

3-й спосіб: $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\sqrt{x-3}=f(x-3)$;

$h(x)=\sqrt{4(x-3)}=g(4x-9)$.

Ще раз зазначимо, що останнє перетворення — стиск графіка функції $g(x)$ у 4 рази вздовж осі абсцис, але не до осі ординат, а до прямої $x = 3$.

Очевидно, що збільшення кількості перетворень, закладених у аналітичний вираз функції, веде до збільшення кількості можливих способів розв'язання. Розглянемо дерево можливостей, наприклад, для функції $y = 2(x-1)^2 + 4$.



Надалі важливо систематично використовувати вміння будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень для розв'язування інших задач шкільного курсу алгебри, насамперед розв'язування рівнянь та нерівностей. Наведемо кілька прикладів.

Графічне розв'язування, наприклад, рівняння $\sqrt{2x-1}=x-2$ зводиться до побудови двох нескладних графіків, які мають єдину спільну точку, а отже, рівняння має єдиний корінь. При аналітичному розв'язуванні подібних рівнянь учні, підносячи обидві частини рівняння до квадрату, нерідко забувають врахувати умову $x - 2 \geq 0$. Це порушення рівносильності переходу може привести до появи стороннього кореня (особливо, якщо він належить ОДЗ рівняння, як у нашому випадку). Звісно, виявити сторонній корінь можна безпосередньою перевіркою. Проте вже для рівняння $\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=1$ така перевірка досить проблематична, оскільки корені — ірраціональні числа. З цієї ж причини малоефективним буде і графічне розв'язання. У даній ситуації воно може бути використане як засіб перевірки, оскільки чітко вказує на кількість коренів.

Ще частіше учні припускаються помилок під час розв'язування нерівностей. Наприклад, розв'язування нерівності $\sqrt{x+1}>5-x$ учні часто за аналогією з рівняннями зводять лише до піднесення до квадрата і досить погано усвідомлюють, чому дана нерівність рівносильна сукупності систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-x\geq 0,\\ x+1>(5-x)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}5-x<0,\\ x+1\geq 0.\end{cases}\end{array}\right.$ Очевидно, аналітичне розв'язування нерівностей об'єктивно є складнішим порівняно з рівняннями, тоді як рівень складності графічного розв'язування залишається таким самим.

Звісно, що в даному випадку йдеться не про протиставлення аналітичного і графічного методів, а про доцільне їх поєднання і взаємодоповнення, яке є ще одним фрагментом формування цілісних математичних знань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бродський Я. С., Сліпенко А. К. Геометричні образи в алгебраїчних задачах // Математика в школі. — 2003. — № 7. — С. 25—32.
2. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра: Підручник для 9 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2009.
3. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. Методичні особливості формування умінь побудови графіків функцій методом перетворень // Математика в школі. — 2007. — № 3. — С. 41—44.
4. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2010.
5. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Світ дитинства, 2006.
6. Сімонова Н. Секрети репетитора // Математика. — 2010. — № 3. — С. 16—24.
7. Тадеєв В. Побудова графіків функцій. Навчальний посібник для учнів (Бібліотечка заочної математичної школи). — Тернопіль: Підручники і посібники, 2003.
8. Танатар И. Я. Геометрические преобразования графиков функций. — М.: Учпедгиз, 1960.
9. Шунда Н. М. Функції та їх графіки. Задачі і вправи. — К.: Рад. шк., 1976.

Віра ОСИНСЬКА

Графічний метод під час розв'язування рівнянь

Суть методу знайома учням ще з сьомого класу. Частіше всього в рівняннях підвищеної складності графічна «прикидка» лівої та правої частин рівняння (позначаємо їх як функції) допомагає одержати важливу інформацію: чи перетинаються графіки позначених функцій, корені додатні чи від'ємні, в яких проміжках на осі OX знаходяться корені, а часто і орієнтовно підібрати їх та зробити перевірку. Звичайно, графічний метод частіше всього виконує допоміжну роль. На заключному етапі розв'язання важливо навести всі обгрунтування аналітично.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^2-x+2=2\sqrt[4]{2x-1}.$$

Розв'язання.

$\begin{cases}2x-1\ge 0,\\ x^2-x+2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge \frac{1}{2},\\ x\in R;\end{cases}$ $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$ — область визначення рівняння.

Нехай $f(x)=x^2-x+2;\ g(x)=2\sqrt[4]{2x-1}$.

Будуємо ескізи графіків $f(x)$ та $g(x)$ (мал. 1).

$f(x)=x^2-x+2;$

$x_в=\frac{1}{2};$

$y_в=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=1\frac{3}{4}.$

$1 - f(x)=x^2-x+2;\ 2 - \ y=2\sqrt[4]{2x-1}$

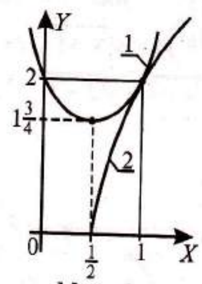
Графіки дотикаються при $x=1$.

Інших спільних точок у графіків немає, хоч це слід обгрунтувати аналітично.

Перевірка.

$x=1;\qquad 1-1+2=2\sqrt[4]{2-1};\qquad 2=2.$

Відповідь. $x=1$.



Мал. 1

Приклад 2. Розв'язати рівняння

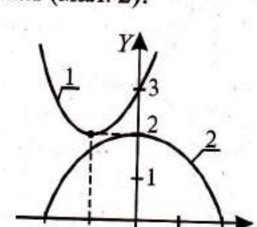
$$x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}.$$

Розв'язання.

$\begin{cases}4-x^2\ge 0,\\ x^2+2x+3\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|\le 2,\\ x\in R;\end{cases}$ x O $[-2;\ 2]$ — область визначення рівняння.

$f(x)=x^2+2x+3;\ g(x)=\sqrt{4-x^2}.$

Будуємо ескізи графіків $f(x)$ та $g(x)$ в одній системі координат (мал. 2).



Мал. 2

$1 - f(x)=x^2+2x+3;\ 2 - \ g(x)=\sqrt{4-x^2}$