ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ Т.Г. ШЕВЧЕНКА

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

М. М. Нак

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації до вивчення курсу
для студентів спеціальності «математика»

Чернігів – 2014

УДК 378.016:512.64(072)
ББК В14р30
Н 21

Рекомендовано до друку
вченою радою фізико-математичного факультету
Чернігівського національного педагогічного університету
імені Т. Г. Шевченка
(протокол № 4 від 25 листопада 2014 року)

Н 21 **Нак М. М.** Лінійна алгебра: Методичні рекомендації до вивчення курсу для студентів спеціальності «математика». – Чернігів: ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2014. – 44 с.

УДК 378.016:512.64(072)
ББК В14р30

Методичні рекомендації до вивчення курсу лінійної алгебри і контрольні завдання для студентів І курсу. Укладено на основі курсу, який автор веде на фізико-математичному факультеті Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. Може бути корисним студентам спеціальності «математика» як денної, так і заочної форми навчання.

I. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

За навчальним планом лінійна алгебра вивчається на першому курсі в І і ІІ семестрах.

Завданням курсу є вивчення основних понять та методів лінійної алгебри, необхідних для подальшого вивчення математичного аналізу, аналітичної геометрії, алгебри та теорії чисел, а також інших суміжних дисциплін.

Разом з іншими предметами вивчення лінійної алгебри повинно сприяти розвитку наукового мислення.

Програма курсу визначає об’єм знань з лінійної алгебри, необхідний для якісної підготовки вчителів математики.

При викладанні курсу лінійна алгебра значна увага приділяється розумінню конкретного змісту понять та методиці застосуванню апарату в математиці. Програмою не передбачається проведення всіх доведень, частина з них може бути замінена наочними міркуваннями.

Головною метою курсу «Лінійна алгебра» є вивчення поняття лінійного перетворення в скінченновимірних просторах, розуміння його положення і ролі в загальній системі математичних знань та вміння застосовувати у конкретних ситуаціях, а також виховання алгебраїчної і теоретико-числової культури, необхідної майбутньому вчителю для глибокого розуміння цілей і завдань як основного шкільного курсу математики, так і факультативних курсів.

В результаті вивчення курсу лінійної алгебри студенти повинні засвоїти теорію та вміти застосовувати її до конкретних задач, навчитися користуватися математичною та спеціальною літературою та довідниками, здобути навички та уміння доводити розв’язування задач до практично прийнятного результату.

II. РОБОЧИЙ ПЛАН

І СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

Системи лінійних рівнянь

ТЕМА 1. Загальні відомості про СЛР.
ТЕМА 2. Метод Гаусса.
ТЕМА 3. Перестановки та підстановки.
ТЕМА 4. Визначники.
ТЕМА 5. Алгебра матриць.

Перший модуль «*Системи лінійних рівнянь*» присвячений вивченню систем лінійних рівнянь, знаходженню різних способів їх розв'язування як з використанням визначників, матриць, так і без такого використання. В цьому модулі вводяться поняття арифметичного *n*-вимірного простору та лінійної залежності між векторами.

Студенти повинні знати: різні способи розв'язування систем лінійних рівнянь; операції над матрицями та їх властивості, способи обчислення визначників 2-го, 3-го та n-го порядків, мінорів та алгебраїчних доповнень.

Студенти повинні вміти: володіти методами, прийомами і способами розв'язування систем лінійних рівнянь; вміти виконувати основні операції над матрицями та знаходити їх основні властивості

Ключові слова: СЛР, матриця, визначник, вектор, лінійна залежність та лінійна незалежність векторів.

Література: [2] – розд. 1, 2, 3; [3] – розд. 6, 7; [8] – розд. 1, 3.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

Числові поля. Поле комплексних чисел

ТЕМА 1. Бінарні відношення.
ТЕМА 2. Алгебраїчні структури.
ТЕМА 3. Поле комплексних чисел.
ТЕМА 4. Добування кореня з комплексного числа.

У другому модулі «*Числові поля. Поле комплексних чисел»* вивчаються властивості бінарних відношень, вводяться поняття основних алгебраїчних структур (груп, кілець, полів), будується поле комплексних чисел та вивчаються властивості цих чисел.

Студенти повинні знати: володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле).

Студенти повинні вміти: вміти виконувати основні операції над множинами та з'ясовувати властивості множин.

Ключові слова: Бінарні відношення, бінарні операції, група, кільце, поле, комплексне число.

Література: [2] – розд. 4, 5, 6; [3] – розд. 2, 4, 5; [8] – розд. 10, 14, 4.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.

Дослідження систем лінійних рівнянь

ТЕМА 1. Арифметичний n-вимірний простір.
ТЕМА 2. Базис і ранг системи векторів.
ТЕМА 3. Загальна теорія СЛР.
ТЕМА 4. Системи лінійних однорідних рівнянь.

Студенти повинні знати: володіти методами, способами і прийомами досліджень систем лінійних рівнянь; володіти поняттями: векторний простір, лінійна залежність і лінійна незалежність, базис і ранг.

Студенти повинні вміти: досліджувати системи лінійних рівнянь; виконувати основні операції системи векторів та з'ясовувати їх властивості.

Ключові слова: СЛР, СЛОР, векторний простір, лінійнозалежні та лінійнонезалежні системи векторів, базис і ранг системи векторів.

Література: [2] – розд. 1. 2, 3; [2] – розд. 9.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4.

Лінійні простори

ТЕМА 1. Скінченновимірний простір.
ТЕМА 2. Лінійні підпростори.
ТЕМА 3. Спряжені підпростори.
ТЕМА 4. Лінійний багатовид.

Модуль “*Векторні простори”* присвячений вивченню понять векторного простору (над довільним полем), підпростору, базису і розмірності векторного простору, суми, прямої суми та перетину підпросторів.

Студенти повинні знати: володіти основними поняттями: векторний простір, підпростір, базис і розмірність, координати вектора.

Студенти повинні вміти: виконувати основні операції над векторами; знаходити базис і розмірність векторних просторів та їх суми та перетину.

Ключові слова: векторний простір, підпростір, базис простору, розмірність.

Література: [2] – розд. 9; [3] – розд. 8; [8] – розд. 7.

II СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

Евклідові та унітарні простори

ТЕМА 1. Дійсні та комплексні простори зі скалярним множенням.
ТЕМА 2. Модуль вектора і кут між векторами.
ТЕМА 3. Ортогональні та ортонормовані базиси.
ТЕМА 4. Ізоморфізм евклідових (унітарних) просторів.

У модулі «*Унітарні та евклідові простори*» вивчаються властивості просторів із скалярним добутком над різними числовими полями, розглядаються умови існування та способи побудови ортонормованих базисів в них, доводиться унітарність матриці переходу між ортонормованими базисами, розглядається ортогональне доповнення підпростору.

Студенти повинні знати: основні поняття, пов'язані із евклідовими та унітарними просторами; скалярний добуток векторів; ортогональні та ортонормовані базиси; процес ортогоналізації.

Студенти повинні вміти: обчислювати скалярний добуток векторів; знаходити норму вектора та кут між векторами; ортогоналізувати та ортонормувати системи векторів.

Ключові слова: евклідовий простір, унітарний простір, ортонормований базис, матриця переходу.

Література: [2] – розд. 11; [3] – розд. 8; [8] – розд. 8; [1] – розд. 4, [18] – розд. 7.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

Лінійні оператори

ТЕМА 1. Означення і приклади лінійних операторів. Ранг і дефект лінійного оператора.
ТЕМА 2. Задання лінійних операторів.
ТЕМА 3. Дії над лінійними операторами.
ТЕМА 4. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів.

Модуль «*Лінійні оператори*» присвячений вивченню лінійних перетворень простору, їх властивостей, способу задання.

Студенти повинні знати: основні поняття, пов'язані з лінійними операторами, їх властивості.

Студенти повинні вміти: виконувати операції над лінійними операторами та з'ясовувати їх основні характеристики.

Ключові слова: лінійні оператори, область значень, ядро лінійного оператора, ранг лінійного оператора, повна лінійна група.

Література: [2] – розд. 9; [1] – розд. 3; [18] – розд. 6.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.

Структура лінійного відображення. Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах

ТЕМА 1. Інваріантні підпростори та їх роль для вивчення будови і властивостей лінійних операторів.
ТЕМА 2. Характеристичний багаточлен лінійного оператора.
ТЕМА 3. Оператори з простим спектром і простої структури.
ТЕМА 4. Спряжені та самоспряжені лінійні оператори.
ТЕМА 5. Унітарні оператори та унітарні матриці.

У модулі «*Структура лінійного відображення*» розглядаються інваріантні відносно лінійного оператора підпростори, власні значення та характеристичні корені лінійного оператора, зв'язок між ними, досліджуються умови зведення матриці лінійного оператора до діагонального виду. Тема «*Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах*» присвячена вивченню операторів деяких спеціальних типів: спряжених, самоспряжених, унітарних (ортогональних).

Студенти повинні знати: поняття інваріантного підпростору, власних значень та власних векторів лінійного оператора; умови, при яких матрицю лінійного оператора можна звести до діагонального вигляду.

Студенти повинні вміти: знаходити власні значення та власні вектори лінійного оператора; зводити матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду.

Ключові слова: інваріантні підпростори, власні вектори, власні значення, характеристичний багаточлен, спряжені та самоспряжені лінійні оператори, ортогональні оператори, унітарні оператори.

Література: [1] – розд. 3, 5; [18] – розд. 6, 7.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4.

Білінійні і квадратичні форми

ТЕМА 1. Поняття білінійної форми.
ТЕМА 2. Квадратичні форми та полярні білінійні форми.
ТЕМА 3. Дійсні квадратичні форми.
ТЕМА 4. Зведення квадратичних форм до головних осей.
ТЕМА 5. Пари квадратичних форм. Зведення рівнянь ліній і поверхонь другого порядку до канонічного виду.

У модулі «*Білінійні і квадратичні форми*» вивчаються питання зведення квадратичної форми до канонічного і нормального виду, закон інерції дійсних квадратичних форм, критерій Сільвестра додатньої визначеності, а також зв'язок квадратичних форм з самоспряженими лінійними операторами.

Студенти повинні знати: означення білінійної та квадратичної форми та пов’язані з ними властивості і основні поняття; зв’язок між білінійними та квадратичними формами; основні способи зведення квадратичних форм до канонічного виду.

Студенти повинні вміти: зводити квадратичні форми до канонічного виду різними способами та використовувати їх при дослідженні ліній та поверхонь другого порядку.

Ключові слова: білінійні форми, квадратичні форми, симетричні, кососиметричні форми, зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Література: [1] – розд. 6; [18] – розд. 5.

III. ТЕМИ І ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

І СЕМЕСТР

1. Лінійне рівняння та його розв’язки. СЛР з двома невідомими. Геометрична інтерпретація СЛР з двома невідомими. Методи розв’язування СЛР з двома невідомими. Сумісні та несумісні СЛР – **2 год.**

2. Система m рівнянь з n невідомими. СЛОР. Поняття матриці. Метод Гаусса. Загальний розв’язок СЛР, ненульові розв’язки – **2 год**

3. Перестановки. Інверсія. Парна, непарна перестановка. Транспозиція. Підстановка. Парна, непарна підстановка. Добуток підстановок. Транспозиція. Циклічна підстановка – **2 год.**

4. Визначники 2 та 3 порядку. Визначники n – го порядку. Властивості визначників. Алгебраїчне доповнення. Мінори. Теорема Лапласа – **2 год.**

5. Поняття матриці. Операції над матрицями. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Поліном матриці – **2 год.**

6. Упорядкована пара. Прямий добуток. Бінарне відношення. Операції над бінарними відношеннями. Основні властивості бінарних відношень. Функціональні відношення. Відношення еквівалентності. Класи розбиття. Відношення порядку – **2 год.**

7. Алгебраїчні операції. Одиничний, обернений елемент. Півгрупа, моноїд, група, кільце, поле. Ізоморфізм алгебраїчних структур – **2 год.**

8. Поле комплексних чисел. Різні інтерпретації поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Тригонометрична та показникові форма комплексного числа. Операції над комплексними числами – **2 год.**

9. Спряжене комплексне число. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа. Корінь з одиниці. Первісні корені – **2 год.**

10. Поняття лінійного простору. Приклади просторів. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Лінійна оболонка векторів.

11. Елементарні перетворення системи векторів. Базис та ранг системи векторів. Ранг матриці за мінором – **2 год.**
12. Аналіз методу Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій визначеності СЛР. Базисні розв’язки – **2 год.**
13. Система лінійних однорідних рівнянь. Властивості розв’язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв’язків системи лінійних однорідних рівнянь – **2 год.**
14. Лінійне перетворення. Скінченновимірний простір. Приклади просторів. Зв’язок між базисами, координати вектора в різних базисах – **2 год.**
15. Лінійний підпростір. Сума підпросторів. Перетин і сума лінійних підпросторів. Пряма сума підпросторів – **2 год.**
16. Лінійно еквівалентні системи векторів. Спряжені підпростори та базиси. Теорема двоїстості. Способи задання лінійних підпросторів – **2 год.**
17. Поняття лінійного багатовиду. Основні властивості. Зв’язок між розв’язками сумісної СЛР та лінійним багато видом – **2 год.**

II СЕМЕСТР

1. Дійсні та комплексні простори зі скалярним множенням – **2 год.**
2. Лінійні перетворення і матриці. Координати вектора в різних базисах. Модуль вектора і кут між векторами – **2 год.**
3. Ортогональні та ортонормовані базиси. Процес ортогоналізації системи векторів. Ортогональне доповнення до підпростору – **2 год**.
4. Геометрична інтерпретація системи лінійних однорідних рівнянь. Ортогональні та унітарні оператори – **2 год.**
5. Лінійні оператори. Найпростіші властивості. Область значень і ядро лінійного оператора – **2 год.**
6. Ранг і дефекти лінійного оператора, вироджені і не вироджені оператори – **2 год.**
7. Матричне зображення лінійних операторів. Зв’язок між матрицями лінійних операторів в різних базисах – **2 год.**
8. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів. Оборотні лінійні оператори. Повна лінійна група – **2 год.**

9. Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійних операторів. Геометрична кратність власного значення – **2 год.**
10. Характеристичний багаточлен лінійного оператора. – **2 год.**
11. Оператори з простим спектром і простої структури. Ортогональні лінійні оператори та їх матриці. Побудова ортогональних операторів – **2 год.**
12. Спряжені та самоспряжені лінійні оператори евклідових та унітарних просторів, їх матриці, властивості, власні значення та власні вектори – **2 год.**
13. Унітарні оператори та унітарні матриці. Нормальні оператори. Про канонічний вигляд матриць лінійних операторів – **2 год.**
14. Білінійні форми, їх матричне зображення. Ядро і ранг форми. Симетрична і кососиметрична форми. Вироджені і невироджені форми. Критерій симетричності білінійних форм – **2 год.**
15. Квадратичні форми та полярні білінійні форми. Види квадратичних форм. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа – **2 год.**
16. Дійсні квадратичні форми. Закон інерції квадратичних форм. Зведення до канонічної форми методом Якобі – **2 год.**
17. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми. Розпадні квадратичні форми. Зведення квадратичних форм до головних осей – **2 год.**
18. Пари квадратичних форм. Зведення рівнянь ліній і поверхонь другого порядку до канонічного виду – **2 год.**

IV. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Питання до теоретичної контрольної роботи (I семестр)

1. Сумісні та несумісні СЛР .
2. Система m рівнянь з n невідомими.
3. Метод Гаусса.
4. Загальний розв'язок СЛР, ненульові розв'язки.
5. Перестановки. Інверсія.
6. Підстановка. Добуток підстановок.
7. Циклічна підстановка.
8. Визначники 2 та 3 порядку.
9. Визначники n-го порядку. Властивості визначників.
10. Алгебраїчне доповнення. Мінори. Теорема Лапласа.
11. Поняття матриці. Операції над матрицями.
12. Обернена матриця. Поліном матриці.
13. Бінарне відношення. Операції над бінарними відношеннями. Основні властивості бінарних відношень.
14. Функціональні відношення. Відношення еквівалентності. Відношення порядку.
15. Алгебраїчні операції. Одиничний, обернений елемент.
16. Півгрупа, моноїд, група, кільце, поле.
17. Ізоморфізм алгебраїчних структур.
18. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа.
19. Тригонометрична та показникова форма комплексного числа.
20. Операції над комплексними числами.
21. Спряжене комплексне число. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа.
22. Поняття лінійного простору. Приклади просторів.
23. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.
24. Лінійна оболонка векторів.

25. Елементарні перетворення системи векторів. Базис та ранг системи векторів.
26. Ранг матриці за мінором.
27. Аналіз методу Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі.
28. Критерій визначеності СЛР. Базисні розв’язки.
29. Система лінійних однорідних рівнянь. Властивості розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.
30. Фундаментальна система розв’язків системи лінійних однорідних рівнянь.
31. Скінченновимірний простір. Зв’язок між базисами, координати вектора в різних базисах.
32. Лінійний підпростір. Сума підпросторів. Перетин і сума лінійних підпросторів.
33. Лінійно еквівалентні системи векторів. Способи задання лінійних підпросторів.

Питання до теоретичної контрольної роботи (II семестр)

1. Дійсні та комплексні простори зі скалярним множенням.
2. Модуль вектора і кут між векторами.
3. Ортогональні та ортонормовані базиси.
4. Процес ортогоналізації системи векторів.
5. Ортогональне доповнення до підпростору.
6. Геометрична інтерпретація системи лінійних однорідних рівнянь.
7. Лінійні оператори. Найпростіші властивості.
8. Область значень і ядро лінійного оператора.
9. Ранг і дефект лінійного оператора, вироджені і невироджені оператори.
10. Матричне зображення лінійних операторів. Зв’язок між матрицями лінійних операторів в різних базисах.
11. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів.
12. Оборотні лінійні оператори. Повна лінійна група.
13. Інваріантні підпростори.
14. Власні вектори і власні значення лінійних операторів.
15. Характеристичний багаточлен лінійного оператора.
16. Оператори з простим спектром і простої структури.

17. Ортогональні лінійні оператори та їх матриці. Властивості.
18. Спряжені та самоспряжені лінійні оператори їх матриці, властивості.
19. Унітарні оператори.
20. Білінійні форми, їх матричне зображення. Ядро і ранг форми.
21. Симетрична і кососиметрична форми. Вироджені і невироджені форми. Критерій симетричності білінійних форм.
22. Квадратичні форми та полярні білінійні форми.
23. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.
24. Закон інерції квадратичних форм. Зведення до канонічного виду методом Якобі.
25. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми.
26. Зведення квадратичних форм до головних осей.

Вправи для практичної контрольної роботи (І семестр)

Систему лінійних рівнянь розв'язати: а) користуючись правилом Крамера; б) методом виключення Гаусса.

1) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6&=0\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4&=16\\ x_1+7x_2+x_3+x_4&=23\\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4&=10\\ 4x_1-3x_2+4x_3+6x_4&=1 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2&=0\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6&=0\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3&=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4&=30\\ 3x_1+3x_2+4x_3+5x_4&=34\\ 4x_1+4x_2+4x_3+5x_4&=41\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=10 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1\\ 2x_1-x_2-3x_4&=2\\ 3x_1-x_3+x_4&=-3\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6 \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4+1&=0\\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4+32&=0\\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4-5&=0\\ x_1-x_2+2x_3-6x_4+8&=0 \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+4x_3+8x_4&=-1\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4&=3\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4&=8\\ 2x_1-x_2+2x_3&=4 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=5\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=3\\ 3x_1+2x_2+8x_3+4x_4&=5\\ 3x_1+4x_2+14x_3+9x_4&=4 \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4&=5\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4&=-1\\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4&=7\\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4&=8 \end{aligned}$$

Обчислити визначник

1) $$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8\\ -3 & 2 & 4 & -6\\ 2 & -5 & -7 & 5\\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Обчислити визначники (всюди, де незрозуміло, який порядок визначника, припускати, що він дорівнює n)

1) а) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2) а) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

3) а) $\begin{vmatrix} a_1{}^n & a_1{}^{n-1}b_1 & a_1{}^{n-2}b_1{}^2 & \dots & b_1{}^n \\ a_2{}^n & a_2{}^{n-1}b_2 & a_2{}^{n-2}b_2{}^2 & \dots & b_2{}^n \\ a_3{}^n & a_3{}^{n-1}b_3 & a_3{}^{n-2}b_3{}^2 & \dots & b_3{}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}{}^n & a_{n+1}{}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}{}^{n-2}b_{n+1}{}^2 & \dots & b_{n+1}{}^n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

4) а) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

5) а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$

6) а) $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix}$

Обчислити добуток матриць.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Для даної матриці знайти обернену матрицю

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Розв’язати матричне рівняння.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$

4) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & -1 & 4\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 3 & 5 & 5\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$

6) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 1\\ 2 & 4 & -8\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

Знайти деякий базис системи векторів і всі вектори, які не належать цьому базису, виразити через вектори базису.

1) $a_1 = (4;3; -1; -1; -1)$
$a_2 = (2;1; -3; 2; -5)$
$a_3 = (1; -3; 0; 1; -2)$
$a_4 = (1; 5; 2; -2; 6)$
$a_5 = (3; -4; 1; 2)$

2) $a_1 = (1;2; 3; -4)$
$a_2 = (2;3; -4; 1)$
$a_3 = (2; -5; 8; -3)$
$a_4 = (5; 26; -9; -12)$

3) $a_1 = (1; 2; 1; -2; 1)$
$a_2 = (2; -1; 1; 3; 2)$
$a_3 = (1; -1; 2; -1; 3)$
$a_4 = (2; 1; -3; 1; -2)$
$a_5 = (1; -1; 3; -1; 7)$

4) $a_1 = (2; -1; 3; 4; -1)$
$a_2 = (1;2; -3; 1;2)$
$a_3 = (5; -5; 12; 11;-5)$
$a_4 = (1; -3; 6; 3;-3)$

5) $a_1 = (2; 0; 3; 3; -1)$
$a_2 = (1; 1; 0; -1; 1)$
$a_3 = (0; -2; 1; 5; -3)$
$a_4 = (1; -3;2; 9; -5)$

6) $a_1 = (2; 1; 3; -1)$
$a_2 = (-1; 1; -3; 1)$
$a_3 = (4; 5; 3; -1)$
$a_4 = (1; 5;-3; 1)$

7) $a_1 = (1; 2; 3; 4)$
$a_2 = (2; 3; 4; 5;)$
$a_3 = (3; 4; 5; 6)$
$a_4 = (4; 5; 6; 7)$

8) $a_1 = (1; 2; 5; 7)$
$a_2 = (3; -1; 1; 7)$
$a_3 = (5; -3; -1; 9)$
$a_4 = (-1; 4; 7; 1)$

9) $a_1 = (1; 1; 1; 1; 1)$
$a_2 = (4; 4; -1; -2; 6)$
$a_3 = (-1; 2; 1; 0; 3)$
$a_4 = (2; 1; 4; 2; 1)$
$a_5 = (0; 2; -1; 5; 3)$
$a_6 = (7; 0; 0; -1; 0;)$

10) $a_1 = (1; 2; 1; 3)$
$a_2 = (1; 1; 2; 2)$
$a_3 = (-l; 8; -6; 5)$
$a_4 = (1; 1; 1; 3)$
$a_5 = (3; -5; 7; 2)$

Дослідити сумісність і знайти загальний розв’язок системи лінійних рівнянь.

1) $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= 18 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 &= 5 \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Знайти загальний розв`язок і фундаментальну систему розв`язків системи лінійних однорідних рівнянь

1) $\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5&=0\\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5&=0\\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5&=0\\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5&=0 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=0\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=0\\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5&=0\\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5&=0 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5&=0\\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5&=0\\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5&=0 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} 3x_1+2x_2+5x_3+2x_4+7x_5&=0\\ 6x_1+4x_2+7x_3+4x_4+5x_5&=0\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4-11x_5&=0\\ 6x_1+4x_2+x_3+4x_4-13x_5&=0 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4+9x_5&=0\\ 3x_1-x_2+2x_3+6x_4+3x_5&=0\\ 6x_1-2x_2+5x_3+20x_4+3x_5&=0\\ 9x_1-3x_2+4x_3+2x_4+15x_5&=0 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x_1+4x_2+2x_3-3x_5&=0\\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5&=0\\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5&=0 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5&=0\\ -x_1+2x_2-x_3-x_4-x_5&=0\\ 4x_1+x_2-5x_3-5x_4-5x_5&=0\\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5&=0 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} 3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5&=0\\ 6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5&=0\\ 9x_1+3x_2+2x_4+3x_5&=0\\ 12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5&=0 \end{aligned}$

Знайти ранг матриці

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2\\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1\\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5\\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Перевірити, чи утворює система векторів лінійний підпростір в просторі всіх n-вимірних векторів. Якщо система векторів є підпростором, знайти його базис та розмірність.

1) Усі вектори, у яких координати з парними номерами рівні між собою.
2) Усі вектори, сума координат яких дорівнює 0.
3) Усі вектори, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.

4) Усі вектори, у яких усі ненульові координати одного знаку.
5) Усі вектори, у яких перша та остання координати рівні між собою.
6) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює 0.
7) Усі вектори вигляду $(\alpha,\beta, \alpha,\beta,\alpha,\beta,\dots)$, де α,β – будь-які числа.
8) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі усіх інших координат.
9) Усі вектори, у яких усі координати рівні.
10) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі третьої та четвертої при $n\geq 4$.

Довести, що кожна з двох систем векторів $e_1,e_2,\dots,e_n$ та $e_1',e_2',\dots,e_n'$ утворює базис простору і знайти матрицю переходу від базису $e_1,e_2,\dots,e_n$ до базису $e_1',e_2',\dots,e_n'$.

1) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$;
$e_1'=(1,0,3,3)$, $e_2'=(-2,-3,-5,-4)$, $e_3'=(2,2,5,4)$, $e_4'=(-2,-3,-4,-4)$;

2) $e_1=(4,2,1)$, $e_2=(5,3,2)$, $e_3=(3,2,1)$;
$e_1'=(-1,4,0)$, $e_2'=(4,3,1)$, $e_3'=(1,2,3)$;

3) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,3)$, $e_3=(1,1,2,2)$, $e_4=(1,1,1,3)$;
$e_1'=(3,-5,7,2)$, $e_2'=(-1, 8,-6, 5)$, $e_3'=(1,0,1,3)$, $e_4'=(2,2,2,2)$;

4) $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(2,1,0)$, $e_3=(1,0, 0)$;
$e_1'=(1,1,1)$, $e_2'=(0,1,2)$, $e_3'=(3,2,0)$;

5) $e_1=(2,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(0,1, -1)$;
$e_1'=(2,1,2)$, $e_2'=(3,3,1)$, $e_3'=(1,2,0)$;

6) $e_1=(-3,-2,-3)$, $e_2=(4,2,4)$, $e_3=(3,3,4)$;
$e_1'=(1,1,2)$, $e_2'=(1,2,3)$, $e_3'=(3,2,4)$;

7) $e_1=(-3,-4,0)$, $e_2=(2,2,-1)$, $e_3=(1,3,2)$;
$e_1'=(0,7,8)$, $e_2'=(-3,2,7)$, $e_3'=(1,10,10)$;

8) $e_1=(1,2,-1,0)$, $e_2=(1, -1,1,1)$, $e_3=(-1,2,1,1)$, $e_4=(-1, -1,0,1)$;
$e_1'=(2,1,0,1)$, $e_2'=(0,1,2,2)$, $e_3'=(-2,1,1,2)$, $e_4'=(1,3,1,2)$;

9) $e_1=(8,-6,7)$, $e_2=(-16,7,-13)$, $e_3=(9,-3,7)$;
$e_1'=(1,-2,1)$, $e_2'=(3,-1,2)$, $e_3'=(2,1,2)$;

10) $e_1=(1,1,2)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(1,2,4)$;
$e_1'=(2,-3,1)$, $e_2'=(3, -1,5)$, $e_3'=(1,-4,3)$;

Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, породженого системою векторів

1) $a_1=(4,1,-1)$, $a_2=(6,3,3)$, $a_3=(1,1,2)$, $a_4=(3,1,0)$;
2) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(1,3,2,-1)$, $a_3=(0,2,2,-3)$, $a_4=(1,4,3,2)$;
3) $a_1=(1,1,-1,-1)$, $a_2=(5,-4,7,1)$, $a_3=(3,-3,5,1)$, $a_4=(9,-6,11,1)$;
4) $a_1=(0,1,1,0)$, $a_2=(1,0,0,1)$, $a_3=(-1,0,1,1)$, $a_4=(0,0,1,2)$; $a_5=(2,-1,-1,2)$
5) $a_1=(1,1,1,1,0)$, $a_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $a_3=(2,2,0,0,-1)$, $a_4=(1,1,5,5,2)$; $a_5=(1,-1,-1,0,0)$
6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(3,-5,7,2)$, $a_4=(1,-7,5,-2)$;
7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$, $a_4=(2,-1,1,6)$; $a_5=(-2,-1,-2,-6)$
8) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$, $a_4=(1,1,1,3)$; $a_5=(2,3,3,3)$
9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(5,-7,3,-9)$, $a_3=(1,2,2,2)$, $a_4=(3,-10,0,-12)$;
10) $a_1=(3,1,3,1)$, $a_2=(1,2,1,2)$, $a_3=(1,2,0,2)$, $a_4=(1,-1,1,-1)$; $a_5=(-3,-3,-3,-3)$

Знайти систему лінійних рівнянь, яка задає підпростір, породжений системою векторів

1) $a_1=(1,3,2,-5)$, $a_2=(-1,2,1,-2)$, $a_3=(3,-5,-2,3)$, $a_4=(2,-3,-1,1)$
2) $a_1=(2,-3,5,1)$, $a_2=(1,2,3,1)$, $a_3=(3,13,10,4)$, $a_4=(1,-19,0,-2)$
3) $a_1=(1,-1,1,-1,1)$, $a_2=(1,1,0,0,3)$, $a_3=(3,1,1,-1,7)$, $a_4=(0,2,-1,1,2)$
4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(0,3,2,1)$, $a_3=(-2,1,0,-1)$, $a_4=(-4,5,2,1)$
5) $a_1=(2,-1,4,2)$, $a_2=(3,0,6,1)$, $a_3=(-1,2,-2,-3)$, $a_4=(1,1,2,-1)$
6) $a_1=(1,-3,4,-2)$, $a_2=(3,-1,-1,1)$, $a_3=(3,7,-14,8)$, $a_4=(2,2,-5,3)$
7) $a_1=(2,3,1,2)$, $a_2=(3,1,2,1)$, $a_3=(1,-9,2,-5)$, $a_4=(6,-5,5,-2)$
8) $a_1=(2,-1,1,3)$, $a_2=(1,2,3,4)$, $a_3=(1,12,13,14)$, $a_4=(-1,8,7,6)$
9) $a_1=(1,-1,1,-1)$, $a_2=(3,2,1,0)$, $a_3=(1,-6,3,-4)$, $a_4=(1,14,-5,8)$
10) $a_1=(1,2,3,5)$, $a_2=(3,2,1,3)$, $a_3=(1,4,7,11)$, $a_4=(3,4,5,9)$

Знайти базиси суми і перетину лінійних підпросторів, породжених системами векторів $a_1,\ldots,a_k$ і $b_1,\ldots,b_m$ відповідно.

1) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(1,1,-1,-1)$;

2) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(4,3,1)$, $a_3=(2,-1,-5)$;
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(-3,2,0)$, $b_3=(-2,3,1)$;

3) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(0,1,1)$, $a_3=(1,1,2)$;
$b_1=(4,3,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(5,3,2)$;

4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,2,1,3)$, $a_4=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,2)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(3,3,4,5)$, $b_4=(0,0,1,1)$;

5) $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(4,2,1)$, $a_3=(2,0,-1)$;
$b_1=(-2,3,1)$, $b_2=(1,4,1)$, $b_3=(5,-2,-1)$;

6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$;
$b_1=(0,0,1,1)$, $b_2=(2,2,3,3)$, $b_3=(1,1,2,2)$;

7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(-1,8,-6,5)$, $a_3=(0,10,-5,8)$;
$b_1=(1,4,-1,5)$, $b_2=(3,-2,6,3)$, $b_3=(4,2,5,8)$;

8) $a_1=(1,1,0,0)$, $a_2=(0,1,1,0)$, $a_3=(0,0,1,1)$;
$b_1=(1,0,1,0)$, $b_2=(0,2,1,1)$, $b_3=(1,2,1,2)$;

9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,-1,-1)$, $a_3=(1,-1,1,-1)$;
$b_1=(1,-1,-1,1)$, $b_2=(1,-1,0,0)$, $b_3=(3,-1,1,1)$;

10) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(3,1,1,-2)$;
$b_1=(0,4,1,3)$, $b_2=(1,0,-2,-6)$, $b_3=(1,0,3,5)$;

Вправи для практичної контрольної роботи (II семестр)

Нехай x_1,x_2, та y_1,y_2 – координати векторів x,y в деякому базисі двохвимірного лінійного простору над полем R. З'ясувати чи може дана функція $F(x,y)$ бути скалярним добутком.

1) $F(x,y)= x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$
2) $F(x,y)= 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$
3) $F(x,y)= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$
4) $F(x,y)= 7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$
5) $F(x,y)= 3x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + x_2y_2$
6) $F(x,y)= 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 4x_2y_2$
7) $F(x,y)= 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$
8) $F(x,y)= x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$
9) $F(x,y)= 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$
10) $F(x,y)= 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$

Система векторів задається координатами в деякому ортонормованому базисі евклідового простору. За допомогою процесу ортогоналізації знайти ортогональний базис підпростору, породженого даною системою векторів.

1) (2,1,3,–1), (7,4,3,–3), (1,1,–6,0), (5,7,7,8)
2) (3,–1,–2), (4,0,–1), (7, –1,–3),(5,1,0), (9,1,–1)
3) (1,2, –1,1), (–5,–5,4,–2), (–3,6,2,0)
4) (1,–3,2,1), (–1,7,–3,–2), (2,–2,3,1)
5) (1,0,1,–1), (6,0,4,–5), (3,2,–5,4)
6) (1,–1,1,–1), (4,–2,4,–2), (–2,7,–4,7), (2,7,–2,5)
7) (1,1,1,1), (3,3,–1,–1), (–2,0,6,8)
8) (2,3,–4,–6), (1,8,–2,–16), (12,5,–14,5), (3,11,4,–7)
9) (1,1,–1,–2), (–2,1,5,11), (0,3,3,7), (3,–3,–3,–9)
10) (1,1,–1,0), (1,2,0,–1), (0,0,1,0)

У варіантах 1-4 перевірити ортогональність системи векторів і доповнити вектори до ортогонального базису простору.

1) (1,1,1,2), (1,0,1,–1)
2) (1,–2,1,3), (2,1,–3,1)
3) (1,–1,1,–3), (–4,1,5,0)
4) (1,2,1,2), (1,1,–1,–1)

У варіантах 5-7 доповнити систему векторів до ортонормованого базису простору

5) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$

6) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

7) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

У варіантах 8-10 знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ підпростору L

8) L породжується системою векторів (1,2,–1,–3), (2,1,1,–9), (1,4,–3,–1)
9) L задається системою лінійних рівнянь
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$
$10x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$
10) L породжується системою векторів (–1,3,0,1), (4,2,1,1), (3,5,1,2)

У варіантах 1-6 знайти ортогональну проекцію y та ортогональну складову z вектора x на лінійний підпростір L

1) x = (–3,5,9,3). L породжується системою векторів a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (2,–1,1,1), a_3 = (2,–7,–1,–1).
2) x= (14,–3,–6,–7). L породжується системою векторів a_1 = (–3,0,7,6), a_2 = (1,4,3,2), a_3 = (2,2,–2,–2).
3) x = (–3,0,–5,9). L задається системою лінійних рівнянь
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0$
4) x= (2,–5,3,4). L породжується системою векторів a_1 = (1,3,3,5), a_2 = (1,3,–5,–3), a_3 = (1,–5,3,–3).
5) x= (1,4,0,2). L породжується системою векторів a_1 = (1,0,–1,1), a_2 = (3,3,–2,1), a_3 = (–1,6,3,–5).
6) x = (8,–2,8,3). L задається системою лінійних рівнянь
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$

У варіантах 7-8 знайти відстань від точки, що відповідає вектору x, до лінійного підпростору L, породженого системою векторів $a_1,\ldots,a_k$

7) $x=(1,-1,1,-1)$; $a_1=(1,-1,0,2)$, $a_2=(1,0,1,1)$
8) $x=(1,1,-1,0)$: $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,-1,-1,1)$, $a_3=(1,1,-1,-1)$

У варіантах 9-10 знайти кут між вектором x і підпростором L.

9) $x=(3,-1,-1,-1)$. L задається системою лінійних рівнянь
$2x_1+x_2-2x_3=0$
$x_1+x_2+x_4=0$
10) $x=(1,2,3,-1)$. L породжується системою векторів
$a_1=(1,1,-1,-1)$, $a_2=(1,-1,5,-3)$, $a_3=(0,1,2,-4)$.

Оператор φ задається координатами вектора $\varphi(x)$ як фукнціями координат вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$. З'ясувати, чи є φ лінійним оператором. У випадку лінійності знайти його матрицю в базисі, в якому задаються координати векторів x та $\varphi(x)$.

1) $\varphi(x)=(3x_1-x_2,\ x_1+5x_2-x_3,\ x_1+2x_2+3x_3)$
2) $\varphi(x)=(x_1^2-x_2,\ 2x_1+2x_3,\ x_1+2x_2+x_3)$
3) $\varphi(x)=(3x_1-x_2+4x_3,\ x_2-2x_3,\ x_1+2x_2+4x_3)$
4) $\varphi(x)=(4x_1-5x_2+x_3,\ x_1+2x_2-x_3,\ 2x_1-x_2+x_3)$
5) $\varphi(x)=(5x_1+3x_2+4x_3,\ x_1+2x_2+x_3,\ x_2-4x_3)$
6) $\varphi(x)=(-2x_1+4x_2+2x_3,\ 2x_1-x_2-x_3,\ 4x_1+7x_2+x_3)$
7) $\varphi(x)=(-2x_1+|x_2|+x_3,\ 4x_1+x_2-x_3,\ x_2+x_3)$
8) $\varphi(x)=(-x_1-x_2-x_3,\ 3x_1+5x_2+8x_3,\ 5x_3)$
9) $\varphi(x)=(2x_1-2x_2-x_3,\ 4x_1+x_2+8x_3,\ 2x_2-5x_3)$
10) $\varphi(x)=(5x_1+x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2+x_3,\ |x_1-x_2+x_3|)$

В варіантах 1-5 довести, що існує єдине лінійне перетворення, що переводить вектори a_1,a_2,a_3 відповідно в b_1,b_2,b_3, та знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задаються координати усіх векторів.

1) $a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(1,2,4)$, $a_3=(1,1,2)$;
$b_1=(5,1,7)$, $b_2=(1,4,2)$, $b_3=(2,4,-1)$;

2) $a_1=(2,3,4)$, $a_2=(1,2,2)$, $a_3=(-1,-1,-1)$;
$b_1=(-11,3,9)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(18,-6,-14)$;

3) $a_1=(6,2,1)$, $a_2=(-7,-1,-1)$, $a_3=(9,1,1)$;
$b_1=(-2,9,11)$, $b_2=(0,4,5)$, $b_3=(-4,-36,-46)$;

4) a_1=(2,1,1), a_2=(3,1,–1), a_3=(3,1,0);
b_1=(1,2,3), b_2=(0,1,1), b_3=(1,1,3);

5) a_1=(–1,3,5), a_2=(0,1,2), a_3=(1,2,4);
b_1=(–5,–2,–5), b_2=(1,1,–1), b_3=(4,3,0);

В варіантах 6-10 лінійне перетворення в базисі e_1,e_2,e_3 задається матрицею A, знайти матрицю цього перетворення в базисі f_1,f_2,f_3.

6) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{array}$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3 \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{array}$

8) $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f_3 = e_1 + e_3 \end{array}$

9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 \\ f_2 = -e_1 + e_2 \\ f_3 = -e_1 + 2e_3 \end{array}$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - 3e_3 \\ f_3 = e_2 + 3e_3 \end{array}$

Лінійне перетворення в деякому базисі задається матрицею. З'ясувати, чи існує для даного перетворення базис простору, складений з власних векторів перетворення. Знайти цей базис і матрицю перетворення в цьому базисі.

1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Лінійне перетворення φ простору в деякому базисі задається матрицею. Знайти базис, в якому матриця цього перетворення зводиться до діагонального вигляду

1) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -12 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

У варіантах 1-8 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис евклідового простору. Лінійне перетворення φ задається в базисі $f_1, f_2, \ldots, f_n$ матрицею A. Знайти матрицю спряженого перетворення φ^* в базисі $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2 - e_3, f_2 = e_1 + e_2 + e_3, f_3 = e_3$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2 + e_3, f_3 = e_1 - e_2 - e_3$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_2 - e_3$

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_1 + e_3$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_1 + e_2 + e_3$

6) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 - e_2 - e_3, f_3 = e_1 + e_3$

7) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $f_1 = -e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 - e_2 + e_3, f_3 = e_1 + e_2 - e_3$

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2 - e_3, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = e_1$

У варіантах 9-10 лінійне перетворення φ двохвимірного евклідового простору переводить вектори a_1, a_2 в b_1, b_2 відповідно. Координати векторів задаються в ортонормованому базисі e_1, e_2. Знайти матрицю лінійного перетворення φ^*, спряженого для перетворення φ, в базисі e_1, e_2.

9) $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (1,3)$, $b_1, = (3,1)$, $b_2 = (2,3)$

10) $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (1,4)$, $b_1, = (0,-2)$, $b_2 = (-3,7)$.

Самоспряжене лінійне перетворення φ в деякому ортонормованому базисі задається матрицею A. Знайти ортонормований базис простору, який складається з власних векторів перетворення φ, і матрицю B перетворення в цьому базисі.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 10) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Знайти канонічний вигляд B ортогональної матриці A і ортогональну матрицю Q таку, що $B = Q^{-1}AQ$.

1) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 10) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Розкласти дану матрицю в добуток симетричної матриці з додатними характеристичними числами і ортогональної матриці.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 10) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Для квадратичної форми знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить квадратичну форму до цього вигляду (метод Лагранжа)

1) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
2) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
3) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$
4) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
5) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$
6) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
7) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 27x_2x_3$
8) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
9) $-12x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$
10) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, і записати цей канонічний вигляд.

1) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
2) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
3) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$
4) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$
5) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$
6) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
7) $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$
8) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
9) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$
10) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду і визначити тип поверхні.

1) $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}\,xz + 2\sqrt{2}\,yz + 26x + 34y + 10\sqrt{2}\,z + 10 = 0$
2) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 2y - 4z - 1 = 0$
3) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 2z - 1 = 0$
4) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 8 = 0$
5) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0$ φ
6) $-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0$
7) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$
8) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$
9) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 18z + 1 = 0$
10) $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x + 6y + 8z - 5 = 0$

V. ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

I СЕМЕСТР

1. Лінійне рівняння. Розв’язок лінійного рівняння. СЛР та її розв’язок. Основна та розширена матриці.
2. Еквівалентні системи. Метод Гаусса. Загальний розв’язок СЛР.
3. Перестановки. Парність і непарність. Інверсія. Транспозиція. Теорема.
4. Підстановка. Парність і непарність. Інверсія. Цикл. Циклічна підстановка. Декремент. Властивості підстановки.
5. Поняття визначника. Визначники 2 та 3 порядку. Властивості визначників. Наслідки.
6. Алгебраїчне доповнення. Мінори. Теорема Лапласа.
7. Методи обчислення визначників n-го порядку.
8. Матриці. Типи матриць. Операції над матрицями. Властивості операцій.
9. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Теорема. Властивості оберненої матриці.
10. Поліном матриці. Корінь полінома. Теорема Келі-Гамільтона. Розв’язання СЛР за допомогою оберненої матриці.
11. Упорядкована пара. Прямий добуток. Бінарне відношення. Операції над відношеннями.
12. Основні властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Твердження.
13. Відношення порядку. Функціональні відношення.
14. Алгебраїчна операція. Нейтральний елемент. Симетричний елемент. Властивості операцій.
15. Група. Властивості. Підгрупа. Критерій бути підгрупою
16. Кільце, поле. Властивості. Критерій підкільця, критерій підполя.
17. Поле комплексних чисел. Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа.
18. Геометрична інтерпретація поля комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

19. Операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжене комплексне число, властивості спряжених чисел.
20. Формула Муавра. Корінь з комплексного числа. Корінь з одиниці.
21. n-вимірний векторний простір. Приклади просторів. Арифметичний векторний простір.
22. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Властивості.
23. Еквівалентність системи векторів. Теорема про еквівалентність систем. Властивості. Елементарні перетворення систем векторів.
24. Базис і ранг системи векторів.
25. Ранг матриці. Теорема про ранг матриці.
26. Лінійні перетворення простору. Ізоморфізм просторів. Скінченновимірні простори. Базис і розмірність простору.
27. Лінійні підпросторі. Сума підпросторів. Пряма сума підпросторів.
28. Перетин і сума лінійних підпросторів. Теорема про перетин і суму лінійних підпросторів.
29. Задання лінійних підпросторів.
30. Лінійний багатовид.
31. СЛР. Основна та розширена матриця СЛР. Розв’язок системи. Сумісна, несумісна, означена, неозначена СЛР. Система наслідок. Елементарні перетворення СЛР.
32. Аналіз методу Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі.
33. Теорема про визначеність СЛР. Відокремлення базисних розв’язків.
34. СЛОР. Властивості розв’язків СЛОР. Фундаментальна система розв’язків СЛОР.
35. Координати вектора. Зв’язок між базисами. Перетворення координат вектора.

II СЕМЕСТР

1. Евклідові простори.
2. Унітарні простори.
3. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського.
4. Кут між векторами. Нормовані простори.
5. Ортогональні системи векторів. Процес ортогоналізації.
6. Ортогональний базис. Ортогональне доповнення до підпростору.

7. Простір розв’язків СЛОР (геометрична інтерпретація).
8. Фундаментальна система розв’язків СЛОР (геометрично). Ізоморфізм евклідових просторів.
9. Поняття лінійного оператора. Властивості. Приклади.
10. Область значень, ядро, ранг і дефект лінійного оператора.
11. Операції над лінійними операторами та їх властивості. Поняття лінійної алгебри.
12. Задання лінійного оператора за допомогою відображення. Матриця лінійного оператора.
13. Зв’язок між матрицями лінійного оператора, заданого в різних базисах. Подібні матриці.
14. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів. Їх ізоморфізми.
15. Оборотні лінійні оператори. Повна лінійна група.
16. Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійного оператора.
17. Характеристичний багаточлен лінійного оператора.
18. Оператори з простим спектром і простої структури. Зведення матриць лінійного оператора до діагонального вигляду.
19. Ортогональні лінійні оператори.
20. Спряжені лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторі, його матриця, властивості.
21. Самоспряжені лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторах, його матриця, властивості.
22. Унітарний оператор.
23. Поняття білінійної форми. Зображення білінійних форм. Ранг і дефект форми.
24. Симетричні і кососиметричні білінійні форми. Канонічний вид і канонічний базис.
25. Квадратичні форми та полярні білінійні форми.
26. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. Канонічний вигляд квадратичної форми.
27. Дійсні квадратичні форми. Закон інерції квадратичної форми Метод Якобі.
28. Додатньо визначені та від’ємно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра.
29. Розпадні квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до головних осей.
30. Пари квадратичних форм.

VI. ЛІТЕРАТУРА

1. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1985. – 392 с.
2. Завало С. Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. Н. Алгебра и теория чисел, ч. 1. – К.: ВШ, 1977. – 400 с.
4. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. Н. Алгебра и теория чисел, ч. 2. – К.: ВШ, 1970. – 408 с.
5. Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел: Практикум. – Ч. 2. – К.: ВШ, 1985. – 260 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
7. Калужнін А. А. Вишенський В. А. Шуб Ч. А. Лінійні простори. – К.: Вища школа, 1971. – 344с.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
9. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М.: ВШ, 1979. – 559 с.
10. Лісняк В. С. Лекції з лінійної алгебри. – К.: КУ, 2001. – 172 с.
11. Мурач М. М. Методические указания к программе по курсу «Алгебра и теория чисел». – Чернигов: ЧГПИ, 1988. – 54 с.
12. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Гостехиздат, 1956. – 340 с.
13. Мурач М. М. Основи курсу лекцій: бінарні і квадратичні форми. – Чернігів: ЧДПУ, 2004. – 50 с.
14. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964. – 185 с.
15. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974. – 384 с.

16. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1983.
17. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
18. Чарін В. С. Лінійна алгебра: підручник / В. С. Чарін. – 2-ге вид., стер. – К. : Техніка, 2005. – 413 с.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969. – 432 с.
20. Шнеперман Л. Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях, ч. 2. – Мн.: ВШ, 1987. – 256 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Нак Марина Миколаївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації до вивчення курсу
для студентів спеціальності «математика»

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *М. М. Нак*

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 17500-6250 ПР від 16.11.2010 р.

Підписано до друку 25.11.2014 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 2,56. Обл.-вид. 1,11. Наклад 100 прим.
Редакційно-видавничий відділ ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
тел. 65-17-99. Chnpu.tipograf@gmail.com