НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка
ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра математики та економіки

$\boxed{\text{В. І. Коваленко}}$, М. М. Нак, О. М. Хайтова

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів
спеціальності «інформатика та фізика»

Чернігів – 2019

УДК 514.12+512.64(075.8)
ББК В151.54я73+В 143я73
К 56

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент ***Л. Г. Філон***

К56 **Коваленко В. І. , Нак М. М., Хайтова О. М. Аналітична геометрія і лінійна алгебра:** Навчально-методичний посібник для студентів спеціальності «інформатика та фізика». Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2019. 108 с.

УДК 514.12+512.64(075.8)
ББК В151.54я73+В 143я73

Методичні рекомендації до вивчення курсу аналітичної геометрії, векторної алгебри та лінійної алгебри і завдання для самостійного опрацювання для студентів І курсу. Укладено на основі курсу, який автори ведуть на природничо-математичному факультеті Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. Може бути корисним студентам спеціальності «інформатика та фізика» як денної, так і заочної форми навчання.

Рекомендовано до друку
вченою радою природничо-математичного факультету
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка
(Протокол № 9 від 25 квітня 2019 року)

ЗМІСТ

І. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

В наш час відбувається постійне скорочення годин, виділених на вивчення математики, збільшується розрив між рівнем математичних знань випускників ЗВО і об'єктивними потребами сучасної науки і техніки, існує певна невідповідність шкільного курсу математики з вимогами до знань студентів у вищій школі. Для того, щоб вирішити останню проблему треба удосконалювати методику навчання математики, використовувати у навчанні інформаційні технології.

За навчальним планом курс «Аналітична геометрія і лінійна алгебра» вивчається на першому курсі в І семестрі. Матеріал курсу розділено на три змістовних модулі: змістовний модуль 1 (ЗМ 1) – основи лінійної алгебри; змістовний модуль 2 (ЗМ 2) – елементи векторної алгебри; змістовний модуль 3 (ЗМ 3) – аналітична геометрія.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є теоретичний матеріал з лінійної алгебри, векторної алгебри і аналітичної геометрії тощо.

Знання та навички, здобуті студентами при вивченні курсу «Аналітична геометрія і лінійна алгебра», необхідні при вивченні таких дисциплін: математичного аналізу, фізики та інформатики. Дисципліна необхідна для фахової підготовки майбутнього вчителя фізики та інформатики.

Метою курсу аналітичної геометрії і лінійної алгебри є розширення і поглиблення знань та вмінь з алгебри і геометрії, оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення курсів фізичних дисциплін.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Аналітична геометрія і лінійна алгебра» є:

– дати необхідні теоретичні знання з алгебри та геометрії та навчити застосовувати їх на практиці;

– розвинути у майбутнього вчителя фізики і інформатики просторову уяву;

– виробити вміння при розв'язуванні задач самостійно розробляти і використовувати необхідні методи, а також спеціальну літературу;

– навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне і алгоритмічне мислення, інтуїцію в питаннях застосування математики.

ІІ. ЗМ 1. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Слово «алгебра» арабського походження. В математику воно ввійшло завдяки праці «Книга про відновлення і протиставлення» середньоазіатського математика Мухаммеда Бен-Муси ал-Хорезми (IX ст.), в якій алгебра вперше розглядається як самостійна галузь математики.

До початку XX ст. алгебра залишалася «наукою про розв'язування рівнянь». В середині XX ст. відбулося її розділення на вищу алгебру (операції з абстрактними об'єктами різноманітної природи) і лінійну, основа якої – матричне числення.

МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Ще з стародавніх часів виникла необхідність записувати вимірювання в наочній, більш простішій формі. Матриця вперше з'явилась в середині XIX століття в роботах ірландського математика У. Гамільтона і англійського математика А. Келі.

Матрицею розміру $n \times m$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір*. На першому місці в цьому записі зазначено кількість рядків матриці, а на другому – кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 4×7 означає, що в ній чотири рядки і сім стовпців.

Види матриць (*):

1. Матриця, яка складається лише з одного рядка $A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$, називається матрицею-рядком.

Наприклад, $A = (1 \quad 3 \quad 5 \quad -1)$.

2. Матриця, яка має лише один стовпець, називається матрицею-стовпцем.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. Матриця називається квадратною, якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -3\\12 & 1 & -4\\-9 & -1 & 0\end{pmatrix}$ – матриця, що має три рядки і три стовбці.

Діагональ квадратної матриці, що йде від елемента a_{11} до елемента a_{nm}, називається *головною діагоналлю* матриці.

А діагональ, яка йде від елемента $a_{1\mathrm{n}}$ до елемента $a_{\mathrm{n}1}$ – побічною діагоналлю.

Так, у матриці $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -3\\12 & 1 & -4\\-9 & -1 & 0\end{pmatrix}$ на головній діагоналі містяться числа 7, 1, 0.

5. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то квадратна матриця називається *симетричною*.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}8 & 10 & -5\\10 & 5 & -3\\-5 & -3 & 2\end{pmatrix}$ – симетрична матриця.

6. Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}7 & 9 & -3\\0 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ – трикутна матриця.

7. Матриця $\begin{pmatrix}a_{11} & . & . & . & a_{1n}\\0 & a_{22} & \dots & & a_{2n}\\. & . & . & . & .\\0 & 0 & a_{n-1l} & \dots & a_{n-1n}\\0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}$ називається ступеневою.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}7 & 9 & -3\\8 & 1 & -4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ – ступенева матриця.

8. Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи крім елементів, які містяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця.

9. Діагональна матриця називається одиничною, якщо елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці:

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

10. Якщо рядки матриці A замінити стовпцями з однаковими номерами, то отримана матриця називається транспонованою і позначається A^T.

Наприклад, до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ транспонованою є матриця $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Для матриці $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ транспонована матриця $C^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою.

Наприклад, матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ рівні між собою.

Дії над матрицями

Сумою (різницею) матриць $A=(a_{ij})$ *і* $B=(b_{ij})$ *однакового розміру* називається матриця $C=A+B$; елементи якої знаходяться за формулою: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B*). Наприклад, знайдемо суму матриць $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Обидві матриці мають однаковий розмір 2×2, тому за означенням $A+B=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Суми матриць $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ не існує (розмір не однаковий).

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} знаходять за формулою $c_{ij}=\alpha\, a_{ij}$ (елементи утворюються множенням відповідних елементів матриці A на α).

Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix},\ \alpha=-3;\ C=\alpha\, A=-3\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & -3 & 12\\ -9 & 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ *розмірності* $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ *розмірності* $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розмірності $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент якої можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\,.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix}\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\vdots & b_{1j} & \vdots\\ \vdots & b_{2j} & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & b_{pj} & \vdots\end{pmatrix}$$

В результаті множення отримаємо матрицю розмірності $m\times n$.

Властивості дій над матрицями

А. Властивості операції додавання матриць

1. Операція додавання матриць *комутативна,* тобто $A+B=B+A$ для довільних матриць $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ однакової розмірності.

2. Операція додавання матриць *асоціативна*, тобто для довільних матриць $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ однакової розмірності $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. У множині матриць даної розмірності є матриця О, яка має властивість, що $A+0=0+A=A$ для будь-якої матриці A. Такою матрицею є нуль-матриця О = (О), всі елементи якої дорівнюють нулю. Нуль-матриця у множині матриць n-го порядку відіграє ту саму роль, що й число 0 у числових множинах.

4. У множині матриць даної розмірності для кожної матриці існує протилежна матриця.

Протилежними матрицями називають такі матриці A і B, сума яких є нуль-матриця, тобто $A+B=$ О. Очевидно, що для будь-якої матриці $A=(a_{ij})$ протилежною є матриця $B=(-a_{ij})$.

Б. Властивості операції множення матриці на число

1. Операція множення на число *комутативна,* тобто $\lambda A = A\lambda$ для довільної матриці A і довільного числа λ.

2. Операція множення матриці на число *асоціативне* в тому розумінні, що для довільної матриці і довільних чисел λ, μ : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$.

3. Операція множення матриці на число *дистрибутивна* відносно додавання чисел та відносно додавання матриць, тобто: $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ для довільних чисел λ, μ і довільної матриці A: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ для довільного числа і довільних матриць A, B однакової розмірності.

В. Властивості операції множення матриць

1. Операція множення довільних матриць *не комутативна,* тобто існують матриці A, B такі, що $AB \neq BA$.

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Матриці A і B, для яких $AB = BA$, називають комутативними або переставними.

2. Операція множення матриць *асоціативна,* тобто $(AB)C = A(BC)$, для довільних трьох матриць A, B, C відповідної розмірності.

Має місце також асоціативність множення матриці на матрицю і на число, тобто для довільних матриць A, B та будь-якого числа λ справедливі рівності $(\lambda A)B = \lambda(AB)$, $A(\lambda B) = (A\lambda)B = (\lambda A)B$.

3. У множині квадратних матриць n-го порядку існує одинична матриця E.

При цьому одиничною матрицею називається така матриця n-го порядку E, яка задовольняє умову $AE = A$, де A – довільна матриця n-го порядку. Таким чином, матриця Е при множині матриць n-го порядку відіграє таку саму роль, як і при множені чисел $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4. Матриця, транспонована до добутку даних матриць, дорівнює добутку матриць, транспонованих до даних, взятих у зворотному порядку, тобто для довільних матриць A, B відповідних розмірностей $(AB)' = B'A'$.

Г. Зв’язок між операціями додавання і множення матриць

Зробимо перш за все такі зауваження. З двома заданими матрицями A і B обидві згадані операції можна виконати тільки тоді, коли ці *матриці квадратні і мають один і той самий порядок.*

Операції додавання і множення матриць пов’язані дистрибутивними законами. Тобто:

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$C(A+B) = CA + CB.$$

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Виконати вказані дії $3A-2B$ над матрицями A і B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Розв'язання. $3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 15 & 9 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}-$

$$-\begin{pmatrix} 12 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 10 & 11 & 7 \\ -5 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Довести, що переставний закон множення двох матриць не виконується. Тобто, що $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12+0+8 & 2+0+0 & 8+0+0 \\ 24+5+12 & 4+10+0 & 16+5+0 \\ 6+1+16 & 1+2+0 & 4+1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 2 & 8 \\ 41 & 14 & 21 \\ 23 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12+4+4 & 0+5+4 & 12+3+16 \\ 2+8+1 & 0+10+1 & 2+6+4 \\ 8+0+0 & 0+0+0 & 8+0+0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20 & 9 & 31 \\ 11 & 10 & 12 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 20 & 2 & 8 \\ 41 & 14 & 21 \\ 23 & 3 & 5 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 20 & 9 & 31 \\ 11 & 10 & 12 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставний закон для даних матриць не виконується.

Приклад 3. Обчислити добуток матриць $A\cdot C$, якщо $C=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Кількість стовпців ($n_A=3$) матриці A дорівнює числу рядків ($m_C=3$) матриці C. Отже, добуток $A\cdot C$ існує.

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10+0+4 \\ 20+5+6 \\ 5+1+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 31 \\ 14 \end{pmatrix};$$

Приклад 4. Для матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ знайти матриці $A+B$, A^T, C^2, AB, BA.

Розв'язання.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^2=CC=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2-1(-1) & 1\cdot 2+2\cdot 1-1\cdot 1 & 1(-1)+2\cdot 0-1\cdot 3 \\ 2\cdot 1+1\cdot 2+0(-1) & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 1 & 2(-1)+1\cdot 0+0\cdot 3 \\ -1\cdot 1+1\cdot 2+3(-1) & -1\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 1 & -1(-1)+1\cdot 0+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4 \\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12 \\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & 7 & 12 \\ 11 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0 \\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4 \\ 8-3+16 & 6+0-12 & -3+6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \\ 24 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Знайти добутки $A\cdot B$, $B\cdot A$, $C\cdot A$, $C\cdot B$.

Розв'язання. За означенням:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3&5\cdot2+6\cdot4\\7\cdot1+8\cdot3&7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix},$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+(-3)\cdot3&-1\cdot2+(-3)\cdot4\\2\cdot1+4\cdot3&2\cdot2+4\cdot4\\5\cdot1+6\cdot3&5\cdot2+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-14\\14&20\\23&34\end{pmatrix},$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot5+(-3)\cdot7&-1\cdot6+(-3)\cdot8\\2\cdot5+4\cdot7&2\cdot6+4\cdot8\\5\cdot5+6\cdot7&5\cdot6+6\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26&-30\\38&44\\67&78\end{pmatrix}.$$

Множення матриць $A\cdot C$ та $B\cdot C$ не можливе за означенням множення матриць (матриця A має розмір 2×2, розмір матриці C 3×2; розмір матриці B 2×2, розмір матриці C 3×2).

Завдання для самостійної роботи

1. Матрицею називається ...
   A) число,
   B) таблиця чисел,
   C) геометрична фігура.
2. Для того, щоб помножити матрицю на число, потрібно
   A) елементи довільного рядка матриці помножити на це число,
   B) елементи довільного рядка чи стовпця матриці помножити на це число,
   C) всі елементи матриці помножити на це число.
3. Дано дві матриці $A=\begin{pmatrix}8&1&1\\10&5&-3\\-5&-2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\-5&6\\-2&4\end{pmatrix}$. Які операції можна над ними виконати:
   A) додавання, віднімання, множення A на B,
   B) множення B на A,
   C) додавання, віднімання.
5. Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони
   A) мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою,
   B) відповідні елементи на головній діагоналі рівні,
   C) мають однаковий розмір.

Виконати дії над матрицями.

6. $AB-C$, де $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&0&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\5&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-4&5\end{pmatrix}$.

7. $AB-BA$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

8. A^2, де $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

9. $3A+2B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

10. $3A^2-EA^3$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – одинична матриця.

11. ABC, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

12. C^3, де $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

13. B^2-4A, де $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

14. $A(B+C)$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$.

15. AB, де $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

16. Знайти матрицю $A=(2B-3C)D$, якщо $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 4 & 5\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

17. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

18. Знайти значення $f(A) = 3A^2 - 2A + 5$ і $f(B) = B^3 - 7B^2 + 13B - 5$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Знайти матриці, що комутативні з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ВИЗНАЧНИКИ

Поняття визначника. Визначники другого і третього порядків, їх властивості. Обчислення визначників

Нехай маємо деяку матрицю, що складається з n рядків та n стовпців:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Поставимо у відповідність даній матриці певне число, яке будемо називати *визначником матриці.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Складемо добуток із n – елементів матриці взятих по одному з кожного рядка і стовпчика. Такий добуток можна записати у вигляді $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2}$, …, $a_{i_n j_n}$, де $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ \dots & \dots & \dots \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ – деяка підстановка чисел 1, 2, … , n.

Означення. Визначником (детермінантом) матриці називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків виду

$$(-1)' \alpha_{1a} \alpha_{2b} \alpha_{3c} \dots \alpha_{nw},$$

де $\alpha_{1a}, \alpha_{2b}, \alpha_{3c}, \dots, \alpha_{nw}$ – відповідно елементи першого, другого, третього, *n-го* рядків матриці *A*; *a, b, c, ... w* – перестановка чисел 1, 2, ..., *n*; *t* – число інверсій цієї перестановки. Підсумовування здійснюється за всіма можливими перестановками *a, b, c, ... w* других індексів.

Оскільки підстановки є парні, непарні і їх кількість рівна між собою, то дана сума буде містити однакову кількість доданків із знаком плюс і зі знаком мінус.

Якщо матриця *A* складається з одного числа, то визначник даної матриці ототожнюється з даним числом.

Визначники 2-го і 3-го порядку обчислюються наступним чином.

Визначник матриці 2 порядку:

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Допоміжна діагональ

Головна діагональ

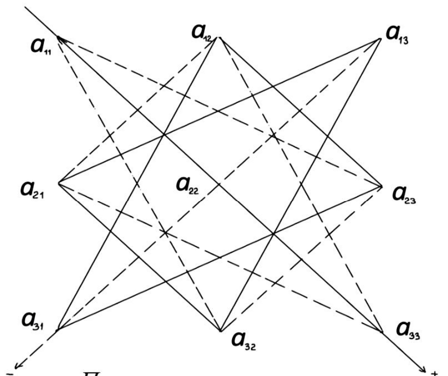
Для обчислення визначників матриці 3-го порядку застосовують правило Саррюса або трикутника.

Визначники третього порядку можна обчислити за правилом, яке називається правилом трикутників: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$

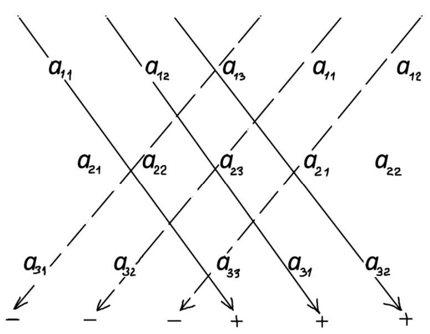
$+a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Три перші члени визначника третього порядку є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі $(a_{11}\ a_{22}\ a_{33})$ й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні основній діагоналі ($a_{21}a_{32}a_{13}$ і $a_{12}a_{23}a_{31}$).

Три інші члени є добутками елементів побічної діагоналі, взятими з протилежними знаками $(a_{13}a_{22}a_{31})$, й елементів, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі ($a_{21}a_{12}a_{33}$ і $a_{32}a_{23}a_{11}$).



Правило трикутника



Правило Саррюса

Є ще й інше правило обчислення визначників третього порядку, яке називають *правилом Саррюса.* За цим правилом складають таблицю, для якої дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинаються по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть з протилежним знаком. Такий самий результат маємо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

Властивості визначників

Властивість 1. Визначник не зміниться від заміни рядків стовпцями і стовпців рядками з однаковими номерами (тобто при транспонуванні визначник не зміниться).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Зауваження. З доведеної властивості випливає, що рядки та стовпці визначника рівноправні, тобто всі властивості, встановлені для рядків, справедливі і для стовпців і навпаки. У подальшому всі властивості можна формулювати й доводити тільки для рядків або тільки для стовпців.

Властивість 2. При перестановці у визначнику двох будь-яких стовпців або рядків знак визначника змінюється на протилежний, а абсолютна величина не змінюється.

Наслідок 3. Визначник з двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю.

Властивість 4. Визначник одиничної матриці дорівнює одиниці.

Властивість 5. Визначник, у якого всіма елементами деякого рядка (стовпця) є нулі, дорівнює нулю.

Доведення. Нехай усі елементи деякого стовпця (рядка) дорівнює нулю. Розглянемо визначник за елементами цього рядка (стовпця), отримаємо суму, кожний доданок якої дорівнює нулю.

Властивість 6. Множник, спільний для всіх елементів деякого стовпця (рядка), можна винести за знак визначника.

Властивість 7. Якщо кожен елемент деякого стовпця (рядка) визначника є сумою двох доданків, то визначник розкладається на суму двох визначників, у яких всі стовпці (рядки), крім сумарного, такі самі, як і у вихідного визначника, а на місці сумарного рядка (стовпця) перебувають рядки (стовпці) відповідно з перших і других доданків.

Властивість 8. Якщо деякий рядок (стовпець) визначника є лінійною комбінацією інших його рядків (стовпців), то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 9. Визначник не зміниться, якщо до будь-якого його рядка (стовпця) додати довільну лінійну комбінацію решти рядків (стовпців).

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай маємо визначник $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Викреслимо в ньому i-й рядок і j-й стовпець, на перетині яких лежить елемент a_{ij}. Внаслідок цього дістанемо визначник (n-1)-го порядку, який називається мінором, що відповідає елементу a_{ij} у визначнику D; його позначають M_{ij}. Отже,

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)n} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Означення. Мінором (*n-1*)-го порядку M_{ij} називають визначник матриці A n-го порядку викресленням i -го рядка j-го стовпця.

Мінор нульового порядку вважають рівним одиниці.

Мінор першого порядку співставляють з певним елементом матриці.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $M_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ і т.д.

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника D називають мінор M_{ij}, узятий зі знаком плюс, якщо сума номерів рядка й стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij}, парна, і зі знаком мінус, якщо ця сума непарна.

Залежність між мінором M_{ij} і алгебраїчним доповненням A_{ij} виражається співвідношенням

$$A_{ij}=(-1)^{i+1}M_{ij},$$

де i – номер рядка і j – номер стовпця, на перетині яких лежить елемент a_{ij}.

Теорема. Визначник D дорівнює сумі добутків елементів будь-якого з його стовпців (рядків) на їх алгебраїчні доповнення.

Такий розклад називають розкладом визначника за елементами деякого рядка або стовпця. $\Delta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \text{ – рядка}$$

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \text{ – стовпця}$$

Наслідок. Визначник у якого всі елементи j-го стовпця, крім a_{ij} дорівнюють 0, дорівнює добутку елемента a_{ij} на алгебраїчне доповнення цього елемента A_{ij}.

Теорема Лапласа. Виберемо в матриці n-го порядку визначник якої є Δ, p довільних рядків. Сума попарних добутків усіх можливих мінорів p-го порядку, утворених з елементів цих рядків, на їх алгебраїчні доповнення дорівнює детермінанту Δ.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10$.

Приклад 2. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, $M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, ... ,

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 3. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42} =$$

$$= 2 \cdot A_{42} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 2)) =$$

$$= 2(6 + 2 - 6 - (1 + 9 - 8)) = 2 \cdot (2 - 2) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Приклад 4. Обчислити визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п'ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п'ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п'ятого віднімемо третій, помножений на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\mathbf{\Delta} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 5$.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначником матриці називається:
   A) число;
   B) таблиця чисел;
   C) площа геометричної фігури.
2. Визначник $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:
   A) –2; B) 2; C) 10.

3. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ дорівнює:

A) 16; B) 8; C) 0.

4. Мінором M_{21} матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ є число:

A) 5; B) 10; C) –3.

5. Алгебраїчним доповненням A_{32} матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ є число:

A) 19; B) –19; C) –11.

6. Визначник $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ дорівнює:

A) 12; B) –12; C) 0.

7. Як зміниться значення визначника матриці, якщо до елементів одного її рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число λ ?

A) не зміниться;

B) значення помножиться на λ ;

C) зміниться на протилежне;

8. Обчислити визначники другого та третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-3i & 2i \\ 4i^3 & 1+3i \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

9. Використовуючи тільки означення визначника, обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 3x_1 & 2x_1 & -x_1 & -4x_1 \\ 3x_2 & 2x_2 & -x_2 & -4x_2 \\ -2x_3 & -3x_3 & -3x_3 & 2x_3 \\ -2x_4 & -3x_4 & 3x_4 & 2x_4 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити визначник методом розкладу його на суму визначників:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3a & 4a & 5a \\ 2b & 0 & 4b & 5b \\ 2c & 3c & 0 & 5c \\ 2d & 3d & 4d & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Довести тотожність: $\begin{vmatrix} \cos(\alpha-\gamma) & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos(\beta-\gamma) & \sin\beta & \cos\beta \\ -1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} = 2\sin(\alpha-\beta)$.

13. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

РАНГ МАТРИЦІ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Означення. Рядки $a_1, a_2, \ldots, a_s$ матриці A називаються *лінійно-залежними*, якщо існують числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ не всі рівні нулю і такі, що лінійна комбінація цих рядків дорівнює нулю

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_sa_s = 0. \qquad (*)$$

Рядки $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називають *лінійно-незалежними,* якщо рівність (*) справедлива тоді і тільки тоді, коли всі числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ дорівнюють нулю. Аналогічно визначається лінійна залежність чи лінійна незалежність стовпців матриці.

Означення. Рангом матриці A називається число, яке дорівнює максимальній кількості її лінійно-незалежних рядків (стовпців).

Означення. Нехай A – ненульова матриця розмірності $m \times n$ і r – натуральне число з такими властивостями:

I. Матриця A має r-мінори, відмінних від нуля.

II. Усі мінори, порядок яких перевищує r (якщо такі наявні), дорівнюють нулю.

Число r називається рангом матриці A за мінорами, а будь-який відмінний від нуля мінор порядку r називається базисним мінором.

Факт, що натуральне число r є рангом матриці A, записують так: $r(A)=r$.

Якщо всі елементи матриці є нулями (нуль-матриця), то її ранг дорівнює нулю.

Якщо матриця має принаймні один відмінний від нуля елемент, то ранг цієї матриці дорівнює одиниці (за означенням всі мінори другого та вищих порядків у такій матриці дорівнюють нулю).

Твердження. Еквівалентні матриці мають однакові ранги.

Теорема (про ранг матриці). Ранг матриці за мінорами дорівнює рангу цієї матриці за рядками.

Наслідок. *Стовпці матриці* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

складають систему векторів $c_1=(a_{11},\ a_{21},\ \dots,\ a_{m1})$,

$c_2=(a_{12},\ a_{22},\ \dots,\ a_{m2})$,

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$

$c_n=(a_{1n},\ a_{2n},\ \dots,\ a_{mn})$

простору P^n . Ранг цієї системи називається рангом матриці A за стовпцями.

Як і для рангу за рядками, доводиться, що *ранг матриці за стовпцями дорівнює її рангу за мінорами.*

Тому ранг матриці за стовпцями дорівнює рангу матриці за рядками, і навпаки.

Розглянемо квадратну матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Означення.

Матрицею, оберненою до даної квадратної матриці *A,* називають матрицю A^{-1}, яка задовольняє співвідношення $A^{-1}A=A\,A^{-1}=E$, де E – одинична матриця.

Постає запитання: чи для кожної квадратної матриці A існує обернена матриця A^{-1}?

Означення. Квадратну матрицю A називають *неособливою* або *невиродженою*, якщо визначник цієї матриці D_A не дорівнює нулю. Якщо $D_A=0$, то матрицю A називають *особливою* або *виродженою*.

Теорема. Для того щоб квадратна матриця A мала обернену матрицю A^{-1}, необхідно й достатньо, щоб матриця A була неособливою, тобто $|A| \neq 0$.

Доведення:

Необхідність: Нехай матриця A має обернену матрицю B, тоді за означенням $AB = BA = E$. Відомо, що визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць $|AB| = |A||B| = |E| = 1$, отже визначник $\neq 0$.

Достатність: Припустимо, що визначник матриці A відмінний від нуля. Розглянемо матрицю $C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A, причому рядки записані в стовпці, а стовпці рядками. Матрицю C називають приєднаною до матриці A.

Розглянемо добуток AC

$$AC = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \sum_{i,j=1}^{s} a_{is}A_{js} = G_{ij}\Delta,$$

де Δ – визначник матриці A.

Тому добуток $AC = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta \cdot E$, $A \cdot C = \Delta E$.

Обернену матрицю позначають A^{-1}. Якщо матриця A має обернену до себе матрицю, то її називають *оборотною.* Якщо матриця має обернену, то така матриця єдина.

Властивості оберненої матриці:

1. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Знаходження оберненої матриці:

1. За допомогою алгебраїчних доповнень визначника.
2. За допомогою одиничної матриці відповідного порядку.

$$(A/E) \xrightarrow{\text{ел.перет.}} (E/A^{-1})$$

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Поміняємо місцями 1 і 2 рядок. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, додамо до 2 рядка 1 помножений на –2; додамо до 3 рядка 1 помножений на –2; додамо до 4 рядка 1 помножений на –3. Отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Додамо до 3 рядка 2 помножений на 4; додамо до 4 рядка 2 помножений на –1. Отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отримали три ненульові рядки, значить ранг матриці дорівнює 3.

Приклад 2. Обчислити ранг матриці методом окантування мінорів: $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Для матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (другий рядок помножили на 2 і відняли від третього рядка, записали на місці третього рядка (виконали елементарні перетворення матриці)).

Визначники матриці A (мінори третього порядку) дорівнюють нулеві, отже ранг матриці менше трьох. Серед мінорів другого порядку є такі, що не дорівнюють нулю. Наприклад, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 9 \neq 0$. Таким чином, ранг $r(A) = 2$.

Приклад 3. Знайти матрицю, обернену до даної: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. I. Методом елементарних перетворень.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right).$$

Перевіримо, що $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ обернена матриця до даної:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 & 12-12 \\ -6+6 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Методом використання алгебраїчних доповнень.

Визначник даної матриці дорівнює –1, алгебраїчні доповнення: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 4$, тому обернена матриця до даної буде:

$$-\frac{1}{1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ дорівнює:

   A) 2, B) 1, C) 3.

2. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної невиродженої матриці A, якщо:

   A) виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$;

   B) виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A$;

   C) виконується співвідношення: $AA^{-1} = E$.

3. Як зміниться значення визначника матриці при її транспонуванні?
   A) зміниться на протилежне,
   B) не зміниться,
   C) буде дорівнювати нулю.

4. Як зміниться значення визначника матриці, якщо до елементів одного її рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число λ ?
   A) не зміниться,
   B) значення помножиться на λ ,
   C) зміниться на протилежне.

5. Обчислити ранг матриць за допомогою елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 18 & 23 & 48 \\ 17 & 15 & 31 & -47 \\ 4 & 6 & 27 & -110 \\ 26 & 21 & 30 & 67 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити обернену матрицю 2-ма способами (за допомогою одиничної матриці і за формулою): $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Обчислити обернену матрицю 2-ма способами (за допомогою одиничної матриці і за формулою): $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (СЛР) ТА СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами системи*; числа b_i – *вільними членами*; $x_1, x_2, ..., x_n$ – *невідомими*.

Якщо всі $b_i = 0$ $(i = \overline{1, m})$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Розв'язком системи рівнянь є така упорядкована множина чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих

$x_1, x_2, ..., x_n$ у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності.

Кількість рівнянь системи може не дорівнювати кількості невідомих цієї системи.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок – *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більше одного.

Розглянемо три різні способи розв'язування СЛР: формули Крамера, метод Гаусса та матричний метод.

Формули Крамера

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи, відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), яка обчислюється за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}.$$

де Δ – головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих системи;

Δ_j – визначник, який утворюється заміною *j*-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Щоб розв'язати систему за формулами Крамера, необхідно:

1. Скласти з коефіцієнтів при невідомих і обчислити головний визначник системи Δ.

а) Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна, має єдиний розв'язок.

б) Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$, то система має безліч розв'язків.

в) Якщо $\Delta = 0$ і Δ_j – числа, відмінні від нуля, то система немає розв'язків.

2. Скласти із головного визначника системи (заміною стовпця коефіцієнтів при відповідній невідомій стовпцем вільних членів) і обчислити визначники Δ_j системи (їх кількість дорівнює кількості невідомих системи).

3. За формулами Крамера обчислити значення невідомих x_j.

4. Виконати перевірку розв'язку системи (при підстановці знайдених розв'язків замість змінних в кожне рівняння системи повинні отримати правильну числову рівність).

Метод Гаусса

Історично першим, найбільш поширеним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є метод Гаусса, або метод послідовного виключення невідомих. Суть методу Гаусса полягає в тому, що задану систему лінійних рівнянь зводять (за допомогою виконання елементарних перетворень) до еквівалентної системи шляхом послідовного вилучення невідомих так, щоб одержати систему, в якій одне із рівнянь має лише одну невідому (прямий хід), потім знайти цю невідому і, застосовуючи метод підстановки, знаходити значення останніх невідомих (зворотний хід).

Нехай дана довільна система лінійних рівнянь. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. У противному разі можна переставити рівняння у вихідній системі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Перетворимо систему, виключивши невідому x_1 з усіх рівнянь, крім першого. Для цього перше рівняння домножимо на $(-a_{21}/a_{11})$ додамо до другого, потім перше рівняння домножимо на $(-a_{31}/a_{11})$ і додамо до третього і т.д.

Оскільки це елементарні перетворення, то прийдемо до еквівалентної системи рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots. + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

де a'_{ij} та b'_j – нові коефіцієнти, які легко виразити через a_{ij} та b_j.

Процес виключення невідомих можна продовжити далі. Він є скінченним.

Щоб розв'язати систему, необхідно:

1) серед всіх невідомих систем вибрати ведучу невідому (краще всього невідому, що має коефіцієнт ±1);

2) рівняння, в яке входить вибрана ведуча невідома (ведуче), в системі записати на перше місце;

3) шляхом множення рівнянь на стале число і додавання до другого рівняння, вилучити ведучу невідому із всіх рівнянь системи крім ведучого;

4) серед неведучих рівнянь одержаної системи знову вибрати ведучу невідому і ведуче рівняння, вилучити другу ведучу невідому з неведучих рівнянь і т.д. до тих пір, поки не одержимо рівняння з одним невідомим;

5) використовуючи метод підстановки і виконуючи зворотний шлях (знизу вверх), знайти значення всіх невідомих.

Матричний метод

Нехай задано систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X – матрицю-стовпець з невідомих (вектор) і через B – матрицю-стовпець з вільних членів (вектор):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Урахувавши правило множення матриць і умову рівності матриць, систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$AX = B\,. \qquad (2.2)$$

Це матричний запис системи рівнянь і позначимо його (2.2).

Припустимо, що матриця A – неособлива $(D_A \neq 0)$, тоді існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (2.2) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, то остаточно дістанемо:

$$X = A^{-1}B\,. \qquad (2.3)$$

Таким чином, матриця-стовпець з невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Розв’язати систему лінійних рівнянь над полем *R*:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 6, \\ -x + y + 2z = 4, \\ 3x + 2y - 3z = -8. \end{cases}$$

Розв’язання. Для розв’язування систем рівнянь використовують елементарні перетворення, які перетворюють систему в рівносильну. Тому друге рівняння краще поставити на перше місце і помножити на (–1). Всі перетворення будемо робити над розширеною матрицею. Отже,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} II + I(-2) \\ III + I(-3) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array}\right) III + II(-5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, вихідна система рівносильна системі: $\begin{cases} x - y - 2z = -4, \\ y + 5z = 14, \\ z = 3. \end{cases}$

Така система сумісна і визначена. Її єдиним розв’язком є (1, –1, 3).

Приклад 2. Розв’язати систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв’язання.

1. Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot(-2)\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 = 13\,.$$

Система сумісна і має єдиний розв’язок.

2. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2 + (-2)\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 7 - 7(-2)\cdot 3 - (-2)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 9 = -13;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 21 + 27 + 18 - 18 - 14 = 26;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 18 - 6 + 54 - 7 + 8 = 39.$$

3. Використовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

4. Перевірка:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1)+2+3\cdot 3 = 9, \\ -1-2\cdot 2+3 = -2, \\ 3\cdot(-1)+2\cdot 2+2\cdot 3 = 7. \end{cases}$$

Отже, система розв’язана правильно.

Приклад 3. Розв’язати систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Розв’язання. Така система завжди сумісна, бо має нуль-розв’язок. Чи має вона ще розв’язки встановимо, знайшовши ранг матриці. Оскільки потрібно знайти розв’язки, то елементарні перетворення будемо робити тільки над рядками матриці. Для цього пригадаємо розв’язування вправи 1.

Після виконання елементарних перетворень дістанемо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, якій відповідає система: $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$

Як бачимо, за основні невідомі можна взяти x_1 і x_2, або x_1 і x_3, або x_2 і x_3. Решту змінних можна брати за вільні змінні. Отже, нехай x_1 і x_2 – основні змінні, x_3 – вільна змінна, їй можна надавати будь-які числові значення. Щоб побудувати базисний розв’язок покладемо $x_3 = 1$, тоді $x_2 = -5$, $x_1 = -3$. Вектор $(-3; -5; 1)$ є розв’язком системи, який породжує всі інші розв’язки однорідної системи. Отже, сукупність всіх розв’язків можна записати: $x_2 = -5x_3$; $x_1 = x_2 + 2x_3 = -5x_3 + 2x_3 = -3x_3$ або як вектор $(-3x_3; -5x_3; x_3) = x_3(-3; -5; 1)$, де $x_3 \in R$.

Приклад 4. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

І. Метод Гаусса

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8. \end{aligned}$$

Розв’язання. Для розв’язування систем рівнянь використовують елементарні перетворення, які перетворюють систему в рівносильну. Тому друге рівняння краще поставити на перше місце і помножити на (–1). Всі перетворення будемо робити над розширеною матрицею. Отже,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} II + I(-2) \\ III + I(-3) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array}\right) III + II(-5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, вихідна система рівносильна системі: $x_1 - x_2 - 2x_3 = -4,$

$x_2 + 5x_3 = 14,$

$x_3 = 3.$

Така система сумісна і визначена. Її єдиним розв'язком є $(1; -1;\ 3)$.

II. Метод Крамера

Оскільки ранг основної матриці дорівнює розміру матриці, тому визначник відмінний від нуля. Він дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 6 - 3 - 8 + 3 = -22.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 8 + 16 + 8 - 24 - 12 = -22,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 8 + 36 - 12 + 32 - 18 = 22,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -16 - 12 - 12 - 18 - 16 + 8 = -66.$$

Отже, $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-22}{-22} = 1,$ $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{22}{-22} = -1;$ $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-66}{-22} = 3.$

Вектор $(1; -1;\ 3)$ є розв'язком системи.

III. Матричний метод

Дану систему можна записати у вигляді матричного рівняння наступним чином:

$AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. В такому випадку розв'язок системи матиме вигляд $X = A^{-1} \cdot B$ $(A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B)$. Знайдемо матрицю, обернену до A за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів:

$A_{11} = -7;\ A_{21} = -1;\ A_{31} = -3$;

$A_{12} = 3;\ A_{22} = -9;\ A_{32} = -5$;

$A_{13} = -5;\ A_{23} = -7;\ A_{33} = 1$. Отже обернена матриця

$A^{-1} = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Помножимо A^{-1} та B:

$X = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ -66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тобто єдиним розв'язком є $(1; -1; 3)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо…
   А) принаймні один з вільних членів системи дорівнює нулю,
   В) всі вільні члени системи дорівнюють нулю,
   С) принаймні один з коефіцієнтів при змінних системи дорівнює нулю.
2. Розв'язком системи рівнянь є:
   А) множина таких чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ у кожне з рівнянь системи останні перетворюються на правильні числові рівності,
   В) множина таких чисел $k_1, k_2, ..., k_n$, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ у кожне з рівнянь системи принаймні одне з них перетворюється на правильну числову рівність,
   С) множина таких $k_1, k_2, ..., k_n$, у результаті підстановки яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ у перше рівняння системи воно перетворюється на правильну числову рівність.
3. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона…
   А) не має жодного розв'язку, В) має хоча б один розв'язок,
   С) має лише один розв'язок.

4. Система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона …
   А) має єдиний розв’язок, В) має принаймні один розв’язок,
   С) немає розв’язків.
5. Система $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x+9y=6 \end{cases}$ має:
   А) один розв’язок, В) не має розв’язку, С) безліч розв’язків.
6. Система $\begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x+9y=3 \end{cases}$ має:
   А) один розв’язок, В) не має розв’язку, С) безліч розв’язків.
7. Система $\begin{cases} 5x-y=3, \\ 15x+9y=6 \end{cases}$ має:
   А) один розв’язок, В) не має розв’язку, С) безліч розв’язків.
8. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь $\Delta \neq 0$, то система
   А) сумісна, має єдиний розв’язок, В) має безліч розв’язків;
   С) не має розв’язків (якщо Δ_j – числа, відмінні від нуля).
9. Якщо при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса розширена матриця зведена до трикутного виду, то
   А) існує єдиний розв'язок системи,
   В) існує безліч розв’язків системи,
   С) система немає розв’язків.
10. Якщо в результаті елементарних перетворень матриці отримали рядок чи стовпець, у якому всі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система
    А) розв’язків не має, В) має безліч розв’язків, С) немає розв’язків.
11. Якщо в результаті елементарних перетворень розширена матриця зведена до трапецевидного виду, то система
    А) розв’язків не має, В) має безліч розв’язків, С) немає розв’язків.
12. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих системи, то система має
    А) єдиний розв’язок, В) безліч розв’язків, С) немає розв’язків.
13. Розв’язати системи лінійних рівнянь у полі R методом послідовного виключення невідомих.

    а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 8, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -7, \\ -x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$
14. При яких дійсних значеннях a система має єдиний розв’язок?

    $$\begin{cases} x_1 - ax_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3? \end{cases}$$

15. Систему лінійних рівнянь розв'язати: а) користуючись правилом Крамера; б) методом Гаусса, в) матричним методом.

1) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6&=0\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4&=16\\ x_1+7x_2+x_3+x_4&=23\\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4&=10\\ 4x_1-3x_2+4x_3+6x_4&=1 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2&=0\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6&=0\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3&=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Поняття комплексного числа. Зображення комплексних чисел

Поняття комплексного числа виникло з потреб практики та внаслідок внутрішнього розвитку математики – в процесі пошуку формул вираження коренів кубічних рівнянь. При знаходженні висоти зрізаної правильної чотирикутної піраміди з довжинами основ 28 і 4 і ребром 15 також виникла потреба обчислити квадратний корінь з від'ємного числа. Ця задача міститься в праці Герона Олександрійського «Стереометрія» (бл. 50). В ній $\sqrt{81-144}=\sqrt{-63}$ замінюється на $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$.

В праці Діофанта «Арифметика» (бл. 275 року) (6 книга, задача 22) є ще одна задача: знайти сторони прямокутного трикутника з периметром 12 і площею 7. В результаті її розв'язання Діофант отримав рівняння $172x=336x^2+24$. Він робить висновок, що дискримінант цього рівняння від'ємний і тому розв'язку не існує. Про неможливість операції добування квадратного кореня з від'ємного числа зазначали індійські математики Магавіра (бл. 800-бл.870) і Бгаскара (1114-бл.1185).

Італійський математик Лука Пачолі у 1494 р. зауважував, що квадратне рівняння має розв'язок лише тоді, коли його дискримінант невід'ємний.

При розв'язуванні рівнянь четвертого степеня італійський інженер-гідравлік Рафаель Бомбеллі в праці «Алгебра» (1572 р.) описав правила дії над числами, які виникають в результаті добування кореня з від'ємного числа.

Сформулюємо означення комплексного числа.

Комплексним числом називається число виду $a+bi$, де a, $b\in R$ (R – множина дійсних чисел).

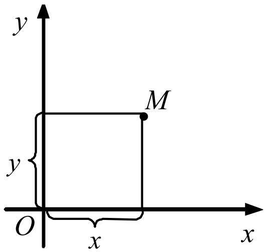
Число a називається дійсною частиною комплексного числа $a+ib$, число bi – його уявною частиною, Число i – уявною одиницею ($i^2=-1$).

Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *рівними,* якщо $a = c$ і $b = d$.

Два комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називаються спряженими.

Р. Бомбеллі у 1572 р. на прикладі $x^3 = 15x + 4$ показав, що дійсний корінь можна отримати як суму двох комплексних чисел $a + bi$ та $a - bi$.

Комплексні числа зображають на числовій площині в прямокутній системі координат. Комплексне число $a+ib$ зображується точкою $M(a, b)$ (абсциса дорівнює дійсній частині комплексного числа $x = a$, ордината – його уявній частині $y = b$i).



Арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$.

Різницею двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число $(a - c) + (b - d)i$.

Добутком двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Дійсно,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bidi + bci = ac + adi - bd + bci = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Отже, можна не користуватися формулою множення комплексних чисел, а комплексні числа множити, як двочлени.

Часткою двох комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ називається комплексне число

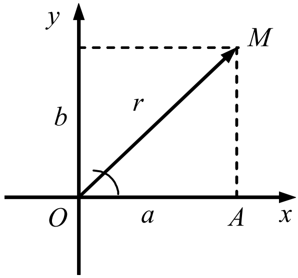
$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i\ .$$

Дійсно,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ .$$

Модуль і аргумент комплексного числа

Модулем комплексного числа $a + bi$ називається вираз $\sqrt{a^2+b^2}$, який позначається $|a + bi|$ або r.



Кут φ, який утворює радіус-вектор точки *M* з додатнім напрямом осі *Ox*, називається *аргументом* комплексного числа *a* + *bi* (малюнок).

Аргумент φ комплексного числа a + bi визначається формулами:

$$\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, x>0, \\ arctg\dfrac{b}{a}+\pi, x<0, y\ge 0, \\ arctg\dfrac{b}{a}-\pi, x<0, y<0. \end{cases}$$

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\ne 0.}$$

$$\text{або } \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a};\quad a\ne 0.$$

Кожне комплексне число (крім нуля) має нескінченну кількість аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$. Для числа нуль аргумент не визначений.

Значення аргументу, яке належить проміжку (– π; π), називається *головним*.

Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі

Розглянемо трикутник *OAM* на малюнку

$\dfrac{a}{r}=\cos\varphi$; $\dfrac{b}{r}=\sin\varphi$.

Звідси $a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi$.

Підставимо в алгебраїчний запис комплексного числа

$\boxed{z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ – *тригонометрична форма комплексного числа*.

Модуль комплексного числа $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=r$.

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для множення і ділення зручніша тригонометрична форма.

Добуток двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)$ можна записати так:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2))\right].$$

Ділення двох чисел $z_1 = r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)$ і $z_2 = r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)$ можна записати так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2))\right]$$

Степенем p комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ є число $z^p = r^p(\cos p\ \varphi + i\sin p\ \varphi)$, де p – будь-яке ціле число. Ця формула виводиться за означенням добутку комплексних чисел.

Якщо $p = n$ (n — ціле число), дістаємо *формулу Муавра:*

$$\boxed{(r\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}.$$

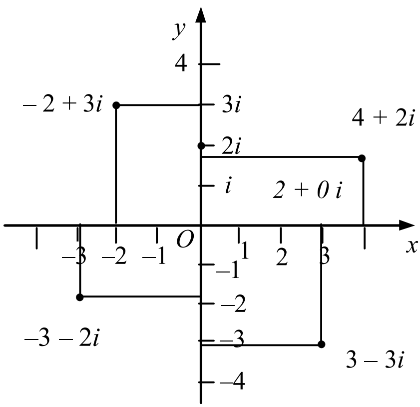
Якщо $p = 1/n$, маємо:

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.}$$

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Зобразити на площині комплексні числа:
$3 - 3i;\ -2 + 3i;\ -3 - 2i;\ 4 + 2i;\ 0 + 2i;\ 2 + 0i = 2$.

Розв'язання.



Приклад 2. Виконати дії над комплексними числами.

1) $(-4 + 6i) + (2 - 7i) = (-4 + 2) + (6 - 7)i = -2 - i$;

2) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4 + 0i = -4$.

3) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$.

4) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) + (-4 - 4)i = 0 + (-8)i = -8i$.

5) $(1 - 4i)(5 + 6i) = 5 - 20i + 6i - 24i^2 = 29 - 14i$;

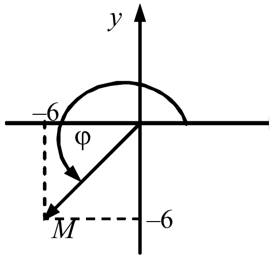
6) $(1 + 3i)(1 - 3i) = 1^2 + 3^2 = 10$.

7) $\dfrac{5-3i}{4+2i} = \dfrac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{20-12i-10i+6i^2}{16+4} = \dfrac{14-22i}{20} = \dfrac{7}{10} - \dfrac{11}{10}i.$

Приклад 3. Знайти аргумент комплексного числа $-6 - 6i$.

Розв'язання. За формулою маємо

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-6}{-6} = 1$, $\varphi = 45°$, $\varphi = 225°$ і т. д.

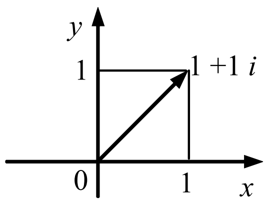


Але кут 45° не є аргументом числа за означенням аргументу $-6 - 6i$ (кут φ між додатнім напрямом осі Ox і радіус-вектором точки M, яка зображає комплексне число).

Аргументами будуть 45°+180°=225°; – 135°=225°–360°; 225°+360°=585° і т. д.

Приклад 4. Записати комплексне число $1 + i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання.



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Підставимо у тригонометричну форму аргумент комплексного числа, отримаємо:

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Приклад 5. Знайти z^6, якщо $z = 3(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)$.

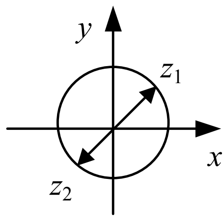
Розв'язання. $z^6 = 3^6(\cos 6\cdot 5^\circ + i\sin 6\cdot 5^\circ) = 729\left(\sqrt{3}/2 + 1/2\, i\right)$.

Приклад 7. Знайти $z=\sqrt{i}$.

Розв'язання. Треба знайти корінь квадратний з комплексного числа, тобто $n = 2$, $k = 0, 1$. Матимемо два розв'язки (при $k = 0$ і $k = 1$). За формулою $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Далі:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\ (\text{при } k=0),$$

$$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\text{при } k=1).$$



Завдання для самостійної роботи

1. Комплексним числом називається…
   A) число виду $a + b$, де $a, b \in Q$ (множина раціональних чисел).
   B) число виду $a + ib$, де $a, b \in R$ (множина дійсних чисел).
   C) число виду $a – b$, де $a, b \in Z$ (множина цілих чисел).
2. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *рівними,* якщо:
   A) $a = c$ і $b = d$. B) $a = d$ і $b = c$. C) $a = c$ і $b = –d$.
3. Два комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ називаються *спряженими,* якщо:
   A) $a = c$ і $b = d$. B) $a = d$ і $b = c$. C) $a = c$ і $b = –d$.
4. Можна встановити взаємно однозначне відображення між множиною всіх комплексних чисел та множиною
   A) всіх точок площини;
   B) всіх точок простору.
5. *Сумою* двох комплексних чисел $3 + i$ і $1 – 6i$ є комплексне число
   A) $4–5i$. B) $3–6i$. C) $5+7i$.
6. *Різницею* двох комплексних чисел $(2 – 8i) – (4 + 3i)$ є комплексне число
   A) $6–5i$. B) $–2–11i$. C) $2–5i$.
7. *Добутком* двох комплексних чисел $1+ 2i$ і $3–i$ є комплексне число
   A) $5+5i$. B) $1+5i$. C) $5–5i$.
8. *Часткою* двох комплексних чисел $–1+2i$ та $4+3i$ є комплексне число
   A) $-\dfrac{2}{25}+\dfrac{11}{25}i$. B) $\dfrac{2}{25}+\dfrac{11}{25}i$. C) $\dfrac{2}{25}+\dfrac{5}{25}i$.
9. *Модулем* комплексного числа $3–4i$ є
   A) число 5. B) число 25. C) число 3+4=7.
10. Головним аргументом комплексного числа $7 +7i$ є
   A) 45°. B) 30°. C) 90°+45°=135°.

11. Тригонометричною формою комплексного числа $2+2i$ є

A) $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; B) $\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; C) $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

12. Розв'язками рівняння $x^2+1=0$ є

A) $-i$.

B) $z_1=i$, $z_2=-i$.

C) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$z_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. Записати в тригонометричній формі комплексні числа:

1) $z=-1-i\sqrt{3}$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$;

3) $z=-\sqrt{3}-i$; 4) $z=-2+2i$;

5) $z=\sqrt{3}-i$.

14. Знайти дійсну і уявну частини комплексного числа: $\frac{3-2i}{4+5i}$.

15. Обчислити: $\frac{(3-i)(5+2i)}{(-2+2i)(1-i)}$.

16. Обчислити степені, застосовуючи формулу Муавра:

1) $(1+i\sqrt{3})^5$; 2) $(-2+2i)^6$;

3) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$; 4) $(-\sqrt{3}-i)^5$.

17. Знайти всі значення:

а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[5]{-2+2i}$.

18. Знайти всі корені рівнянь:

1) $z^5-1+i\sqrt{3}=0$; 2) $z^5+\sqrt{3}+i=0$;

3) $z^5-1-i=0$; 4) $z^5+i\sqrt{3}-i=0$.

19. Розв'язати квадратне рівняння $z^2+(5-2i)z+(1-i)=0$.

ІІІ. ЗМ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Після великих географічних відкриттів (Америки – в 1492 р, морського шляху в Індію – в 1498 р.) активізувався розвиток виробництва, торгівлі. Мореплавство вимагало розробки і вдосконалення складання географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць. Дослідження Галілея та Кеплера стимулювало створення аналітичної геометрії в середині XVII ст.

У XVIII ст. завершено формування аналітичної геометрії як науки і як навчального предмету. З кінця XIX ст. до неї увійшли також поняття і операції векторної алгебри.

СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Основи координатного методу були вже у Стародавньому Вавілоні.

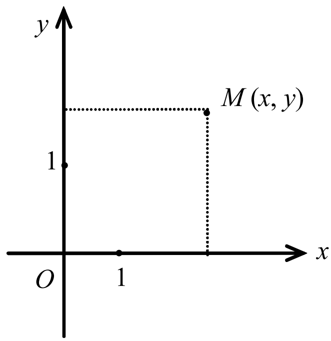
У ІІ ст. до н.е. грецький дослідник Гіппарх запропонував визначити положення точки на земній поверхні географічними координатами (довгота і широта). Аполлоній Пергський (262 до н.е. – 190 до н.е.) у трактаті «Конічні перерізи» використав прямокутні координати і визначив відомі на той час лінії другого порядку: еліпс, гіперболу, параболу.

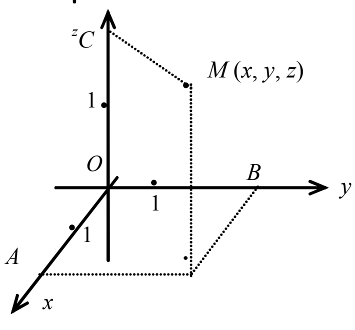
Розгляд складніших рухів за допомогою простіших призвів до створення системи координат, яку пізніше назвали декартовою. В праці французького математика Р. Декарта «Геометрія» застосовується ортогональна система координат (але без від'ємних абсцис), введено поняття змінної величини у двох розуміннях: 1) як відрізок змінної довжини, координати точки, яка своїм рухом описує плоску криву або 2) як числову змінну, яка виражає довжину.

Основоположником координатного методу і аналітичної геометрії вважають французького математика Р. Декарта. Він у праці «Геометрія» (1637) виклав основи цього методу. Ця праця є в основному алгебраїчною, але в ній міститься ідея аналітичної геометрії – алгебраїчний спосіб дослідження геометричних об'єктів за допомогою методу координат. Великий внесок у розвиток аналітичної геометрії зробив французький математик П.Ферма. Він раніше і точніше за Р. Декарта ввів прямолінійні координати. Однак праці Р. Декарта мали пріоритет, бо були опубліковані раніше. П.Ферма вивів рівняння прямої і кривих другого порядку, розглянув задачу про перенесення системи координат. Він вважав, що якщо два рівняння з двома невідомими відрізняються лише сталими коефіцієнтами, то вони виражають криві одного характеру.

Ідеї Р. Декарта і П. Ферма розвивалися іншими дослідниками, зокрема англійським вченим І. Ньютоном. Він в праці «Перелік кривих третього порядку» (1704) удосконалив метод координат, ввівши рівноправні осі координат. Швейцарський математик Г. Крамер у праці «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) ввів вісь ординат, вважаючи її рівноправною віссю і використав поняття двох координат точки на площині. В 1731 р. французький математик А. Клеро в книзі «Дослідження про криві подвійної кривини» розпочав систематичне використання просторових координат.

Прямокутна система координат. Система координат на прямій, на площині, у просторі





Декартова система координат. Дві взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy, які мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють *прямокутну декартову систему координат на площині.*

Якщо таких осей три: Ox і Oy, Oz, то маємо прямокутну декартову систему координат у просторі.

Осі Ox, Oy, Oz називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка O – *початок системи координат.* Декартовими координатами x, y, z довільної точки M у просторі є відповідно довжини OA, OB, OC.

Кожній точці площини можна поставити у відповідність впорядковану двійку чисел (x, y), а в просторі – впорядковану трійку чисел (x, y, z).

Французький математик Лагранж у творі «Аналітична механіка» (1788) показав застосування методу координат в фізиці. У першій главі цього тому вводиться система декартових координат у просторі, знаходиться відстань точки простору до початку координат, у другій главі виводяться рівняння циліндричних і конічних поверхонь, у третій досліджуються плоскі перерізи кругового циліндра і конуса, у п’ятій главі виведено рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, параболоїдів.

Метод координат сприяв використанню в математиці змінних величин. На основі двовимірної та тривимірної геометрії була створена багатовимірна аналітична геометрія.

Система координат на прямій

Нехай задано довільну пряму a. Виберемо на ній дві різні точки A і B. Напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ задає один із можливих напрямів на прямій – орієнтує пряму і визначає вектор $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Вважатимемо заданий напрям додатним і позначимо його стрілкою.

Пряму a на якій задано додатний напрям за допомогою вектора $\vec{r}$ називають віссю і позначають $a(\vec{r})$, при цьому вектор r називають *напрямним вектором осі.*

Зафіксуємо на прямій a точку O – початок координат і виберемо за базис ненульовий одиничний вектор $\vec{i} = \overrightarrow{OE}$ $\vec{i} = \overrightarrow{OE}$. Кажуть, що на прямій задано *систему координат Ox.* Разом з тим пряма a, з орієнтованим вектором $\vec{i}$, *є віссю.*

Розглянемо довільну точку C на прямій і розкладемо вектор $\overrightarrow{OC}$ за базисом $<\vec{i}>$: $\overrightarrow{OC} = x\vec{i}$. *Координатою точки C* у системі називають координату x вектора $\overrightarrow{OC}$ у базисі $<\vec{i}>$ і записують $C = C(x)$.

Ставлячи у відповідність кожній точці її координату, отримаємо взаємно однозначну відповідність між всіма точками прямої і множиною дійсних чисел. Пряму, на якій задано деяку систему координат, називають *числовою віссю Ox.* Початкова точка O має нульову координату, на одній з двох півосей, на які точка O розбиває числову вісь, координати всіх точок додатні, на другій – від’ємні: маємо *додатну* та *від’ємну півосі.*

Щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

Прямокутна декартова система координат на площині

Виберемо за базис векторів площини пару перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$. У цьому разі кажуть, що на площині задано *прямокутну декартову систему координат* Oij. Точку O називають *початком координат.* Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$, називають *осями координат:* віссю *абсцис Ox* та віссю *ординат Oy.* Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною Oxy.*

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають *координатними чвертями (квадрантами).* Кожній чверті відповідає певна комбінація знаків координат.

Розглянемо довільну точку C на площині і розкладемо її радіус вектор за базисом $<\vec{i}, \vec{j}>$: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_x} + \overrightarrow{OC_y} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Координатами точки C у прямокутній системі координат називають координати її радіус-вектора $\vec{r_c}$ у базисі $<\vec{i}, \vec{j}>$ і записують $C = C(x, y)$.

Нехай на площині дано дві точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Знайдемо відстань між точками A_1 і A_2 через координати цих точок. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, що паралельні осям координат. Відстань між точками A і A_1 дорівнює $|y_1 - y_2|$, а відстань між точками A і A_2 – $|x_1 - x_2|$. Так як трикутник A_1AA_2 прямокутний, то за теоремою Піфагора отримаємо: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$, d – відстань між точками A_1, A_2

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Нехай на площині Oxy дано дві довільні точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Знайдемо координати x і y точки A, що поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Відрізок A_1A_2 не паралельний до осі Ox. Спроектуємо точки A, A_1, A_2 на вісь Oy: $\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{A_1^*A^*}{A^*A_2^*} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Так як точки A^*, A_1^*, A_2^* мають ті ж ординати, що і точки A, A_1, A_2, то $A_1^*A^* = |y_1 - y|$, $A^*A_2^* = |y - y_2|$. Так як точка A^* лежить між точками A_1^*, A_2^*, то $y_1 - y$ і $y - y_2$ одного знаку. Тому $\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Звідси знаходимо $y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Аналогічно знаходиться абсциса точки A, для неї отримаємо формулу: $x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Якщо точка A поділяє даний відрізок A_1A_2 у відношенні λ, то формули набувають вигляду: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Якщо точка A є серединою відрізка A_1A_2, то її координати обчислюються за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Прямокутна декартова система координат у просторі

Зафіксуємо у просторі точку O і виберемо за базис трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. У цьому разі кажуть, що у просторі задано прямокутну декартову систему координат *Oijk (Oxyz).* Осі, що проходять через початок координат з відповідними напрямними векторами, називають віссю абсцис Ox, віссю ординат Oy *і віссю аплікат* Oz. Площини, що проходять через осі координат, називають координатними площинами *Oxy, Oxz, Oyz.* Координатні площини розбивають простір на вісім частин – октантів.

Розгляньмо довільну точку M у просторі і розкладемо її радіус-вектор $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ за базисом $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} >$: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Координатами точки M називають координати її радіус-вектора $\overrightarrow{r_M}$ у базисі $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} >$ і записують $M = M(x, y, z)$.

Знайдемо відстань між двома точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ через координати цих точок. Розглянемо випадок, коли пряма A_1A_2 не паралельна осі Oz. Проведемо через дані точки прямі, паралельні осі Oz. Вони перетнуть площину xOy в точках A_1^*, A_2^*. Ці точки мають ті ж координати x, y, що і точки A_1, A_2, а координата z у них дорівнює 0. Проведемо через точку A_1 площину паралельну площині xOy. Вона перетне пряму $A_1A_1^*$ в деякій точці C. Згідно теореми Піфагора $A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2$, $CA_2 = A_1^*A_2^*$, а $A_1C = |x_1 - x_2|$. Тому $A_1^*A_2^* = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Відстань між двома точками в просторі обчислюється за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

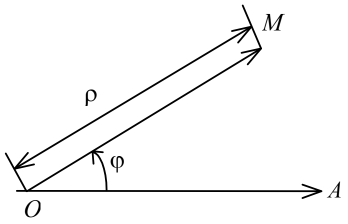
Нехай точка C поділяє відрізок AB у відношенні λ, тоді $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

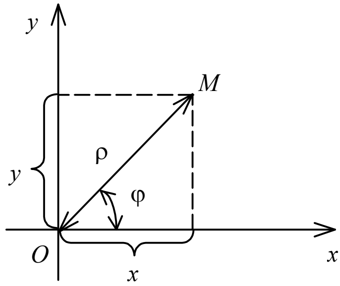
Отже, $\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases}$; після перетворень будемо мати формули: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Зробимо зауваження, щодо розташування точки C: 1) якщо точки A і C збігаються, то $\lambda = 0$; 2) якщо $\lambda > 0$, то точка C лежить усередині відрізка AB; 3) якщо $\lambda < 0$, то точка C лежить зовні відрізка AB і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином; 4) якщо $\lambda = 1$, точка C є серединою даного відрізка.

В геометрії набула широкого застосування полярна система координат.

Полярна система координат складається з деякої точки площини O (*полюса 0*), і *полярної осі* (променя OA, що виходить з цієї точки) і одиниці масштабу.





Полярними координатами точки M є число ρ – відстань від полюса O до точки M *(полярний радіус)* і φ – кут між полярною віссю OA і радіусом OM (проти годинникової стрілки). $M(\rho, \varphi)$.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi \, , \; y = \rho\sin\varphi \, , \; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Точки A (–4, 2) і В (x, y) лежать на прямій, паралельній осі Ox, так, що відстань між ними дорівнює 2 од. Знайти координати точки B.

Розв'язання. Ми можемо мати два розв'язка: точка B може знаходитися як зліва, так і справа від точки A. Так як в кожному з цих випадків точка B лежить на прямій, паралельній осі Ox, то ордината її в обох випадках дорівнює ординаті точки A, $y = 2$. Якщо точка B знаходиться зліва від точки A, то абсциса буде дорівнювати –6, а якщо точка B справа від точки A, то –2. Тобто маємо дві точки: B (–6, 2), B (–2, 2).

Приклад 2. Довести, що трикутник з вершинами A (–2, –1), B (6, 1) і C (3, 4) – прямокутний.

Розв'язання. Знаючи сторони трикутника, за допомогою теореми Піфагора можна встановити, чи є трикутник прямокутним: $a^2 + b^2 = c^2$; гострокутним: $c^2 < a^2 + b^2$; тупокутним: $c^2 > a^2 + b^2$.

Знайдемо довжини сторін даного трикутника, використовуючи формулу відстані між двома точками: $AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{68}$, (аналогічно знайдемо довжини інших двох сторін) $AC = \sqrt{50}$, $BC = \sqrt{18}$. Квадрати довжин відповідно будуть дорівнювати $AB^2 = 68$, $AC^2 = 50$, $BC^2 = 18$. За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$. $68 = 50 + 18$, трикутник ABC – прямокутний.

Приклад 3. Знайти координати кінця *B* відрізка, якщо другий його кінець – точка *A* (–5, –7), а середина відрізка точка *C* (–9, –12).

Розв'язання. Позначимо координати точки $B(x_2, y_2)$ і за відомими формулами будемо мати: $-9 = \frac{-5+x_2}{2}$; $-12 = \frac{-7+y_2}{2}$; $-18 = -5 + x_2$, $-24 = -7 + y_2$. Отже $x_2 = -13$, $y_2 = -17$.

Приклад 4. Дано вершини трикутника *A* (2, –1, 4); *B* (3, 2, –6); *C* (–5, 0, 2). Обчислити довжину його медіани, проведеної з точки *A*.

Розв'язання. За означенням медіани, вона буде поділяти протилежну сторону навпіл, тому, використовуючи формули ділення відрізка в певному відношенні будемо мати: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$; $z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-6+2}{2} = -2$. Точка *M* має координати (1, –1, –2). Знайдемо довжину медіани *AM*, як відстань від точки *A* до точки *M*: $AM = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{5}$.

Приклад 5. Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

Розвязання. З формул маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\arccos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Отже, полярні координати точки $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати точку *M* (2; 3). Знайти точки, симетричні точці *M* відносно координатних осей, бісектрис координатних кутів і початку координат.
2. Довести, що трикутник з вершинами *A* (–2; –1), *B* (6; 1), *C* (3; 4) – прямокутний.
3. Обчислити довжини медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин *M* (–3; 2), *P* (5; 4), *K* (7; –2).

4. В трикутнику з вершинами A (2; 3), B (6; 3), C (6; –5) знайти довжину бісектриси, проведеної з вершини B.
5. Відрізок AB розділений на чотири рівні частини, знайти координати точок поділу, якщо A (–6; 7), B (–2; 3).
6. Дано дві точки M (3; 5), P (6; –2). На осі $OУ$ знайти таку точку B, щоб площа трикутника MPB дорівнювала 15 кв. од.
7. Знайти точку рівновіддалену від осей координат і від точки M (1; 8).
8. Знайти центр і радіус кола, що проходить через точки L (0; 0), M (3; –1) і N (8; 4).
9. Довести, що точки лежать на одній прямій: A (–3; –4), B (–2; –2), C (0; 2).
10. Знайти центр тяжіння трикутника з вершинами A (1; –2), B (4; 1), C (7; –2).
11. Обчислити периметр трикутника з вершинами A (3; 4), B (3; 8), C (6; 4).
12. Дано середини сторін трикутника A (–1; 5), M (1; 1), B (4; 3). Знайти координати його вершин.
13. Відрізок MP розділений на п'ять рівних частин. Знайти точки поділу, якщо M (–8; –9), P (–3;–4).
14. Обчислити площу трикутника з вершинами P (0; –2), B (4; 5), C (6; –4).
15. Дано дві точки A (4; 2) і B (6; –2). На осі OX знайти таку точку C, щоб площа трикутника ABC дорівнювала 8 кв. од.
16. Обчислити площу чотирикутника з вершинами A (–3; 2), B (3; 4), C (6; 1), P (5; –2).
17. Дано три вершини паралелограма A (3; –7), B (5; –7), C (–2; 5). Визначити довжину його діагоналей.
18. Через точку M (1; –2) проведене коло радіуса 5, що дотикається осі OX. Знайти центр кола.
19. Дано три точки A (1; –1), B (3; 3), C (4; 5), що лежать на одній прямій. Визначити відношення λ, в якому кожна з них поділяє відрізок, що обмежений іншими двома.
20. Дано вершини чотирикутника A (–2; 14), B (4; –3), C (6; –2) і P (6; 10). Визначити точку перетину його діагоналей.
21. Точка M рухається так, що в будь який момент часу її відстань від точки A (6; 0) втроє більша відстані до точки B (3; 0). Знайти рівняння траєкторії руху точки M.
22. Знайти траєкторію руху точки M в кожному з випадків: 1) відстань до осі Oy дорівнює a одиницям; 2) відстань до осі Ox дорівнює c одиницям; 3) відстані до координатних осей рівні між собою.
23. Точка M рухається так,що її відстань від точки A (4; 0) вдвічі менше відстані від точки B (16; 0). Знайти рівняння траєкторії руху точки M.
24. Точки M і K рухаються рівномірно і прямолінійно: точка M з початкового положення A (20; –18; –32) зі швидкістю 14 в напрямку вектора a (3; –6; 2), а друга точка K – з початкового положення B (–5; 16; –6) зі швидкістю 13 в напрямку, протилежному вектору c (–4; 12; –3). Знайти рівняння руху кожної точки і, впевнившись, що їх траєкторії перетинаються, знайти:

1) точку C перетину їх траєкторій; 2) час, використаний на рух точки M від точки A до точки C; 3) час, використаний на рух точки K від точки B до точки C; 4) довжини відрізків AC та BC.

ВЕКТОР. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

В архіві болонського математика XVI ст. Р. Бомбеллі було знайдено його праці з геометрії. Зокрема, він виконував арифметичні операції над геометричними величинами, вводячи одиничний відрізок, досліджував нульові і від'ємні площі.

Термін «вектор» (vector – тягти) введено Гамільтоном у 1846 році. Вперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо.

Більш глибоке застосування вектора було пов'язане з його детальним вивченням. Праці К. Весселя (1745-1818), Аргана (1768-1822), К. Гауса (1777-1855) з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами у площині.

Відомі математики В. Гамільтон (1805-1865), Мебіус (1790-1868), Г. Грассамана (1809-1877) займалися застосуванням векторів у тривимірному і багатовимірному просторах. На початку XX ст. відбувався подальший розвиток векторного числення. Створені векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля, тензорний аналіз. На векторній основі викладено лінійну алгебру, аналітичну та диференціальну геометрії.

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначають малими латинськими літерами $\vec{a}$, $\vec{b}$, …, або $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок вектора, а точка B – його кінець.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ вважається заданим, коли відома його довжина $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (модуль) і напрям.

Два вектори вважаються рівними, якщо їх модулі рівні, і напрямки збігаються.

Два паралельних, однакових за довжиною, але протилежно направлених вектори $\vec{a}$ та $-\vec{a}$ називаються протилежними векторами.

Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, вектор називають одиничним.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Щоб знайти координати вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, треба від координат кінця цього вектора відняти координати початку. Якщо $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то координати вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)$.

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів координат цього вектора:

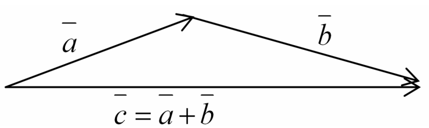
Якщо $\overline{a} = (x;\, y;\, z)$, то $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

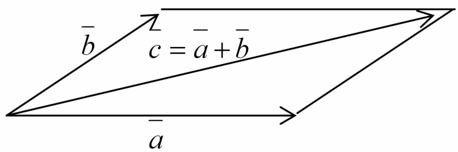
Дії з векторами, що задані своїми координатами

Над векторами $\overline{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$, $\overline{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$ означені такі операції:

1. *Додавання*:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$.





Правило трикутника Правило паралелограма

Віднімання векторів.

Щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$ необхідно до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний $\overline{b}$ $(-\overline{b})$.

2. *Множення вектора* $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *на дійсне число* α:

$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число, α треба кожну координату вектора помножити на це число.

Властивості лінійних операцій над векторами:

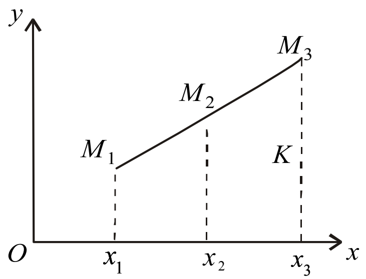
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$.
4. $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$.

Розклад вектора на складові в просторі

Візьмемо вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і по модулю дорівнюють одиниці: $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$. Такі вектори називаються *одиничними* векторами осей системи координат (ортами). Тоді вектор $\overline{a} = (x;\ y;\ z)$ можна подати у вигляді:

$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$ – розклад вектора за одиничними векторами.

Поділ відрізка в заданому відношенні



Нехай задано координати точок $M_1(x_1,\ y_1)$ і $M_3(x_3, y_3)$.

Число μ – називається відношенням, в якому точка $M_2(x_2, y_2)$ ділить відрізок M_1M_3, якщо

$$\mu = \frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|}. \qquad (*)$$

Нехай μ – відоме число і треба знайти координати точки $M\ (x,\ y)$.

З теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, маємо:

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_2|} = \mu\ .$$

Оскільки числа $x_2 - x_1$ і $x_3 - x_2$ при $x_1 < x_3$ додатні, а при $x_1 > x_3$ – від'ємні, то знак модуля в останній рівності можна опустити:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_2|} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \mu\ .$$

Звідси: $x_2 = \dfrac{x_1 + \mu \cdot x_3}{1 + \mu}$.

Аналогічно, формула для знаходження ординати: $y_2 = \dfrac{y_1 + \mu \cdot y_3}{1 + \mu}$.

Наслідок. Якщо точка $M_2(x,\ y)$ – середина відрізка M_1M_3, то $\mu = 1$ (див.*) і $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$, $y_2 = \dfrac{y_1 + y_3}{2}$.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Знайти координати вектора $\overline{AB}$. A (2, –1, 3), B (3, 4, 5).

Розв'язання. $\overline{AB} = (3-2;\ 4-(-1);\ 5-3) = (1;\ 5;\ 2)$.

Приклад 2. Знайти довжину вектора $\overline{a} = (-3;\ 0;\ 4)$.

Розв'язання. За формулою знаходимо довжину вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5$.

Приклад 3. Знайти координати середини відрізка. Дано координати точок $M_1(3,-1)$ і $M_3(1,\ 7)$.

Розв'язання. Середина відрізка M_1M_3 є точка $M_2\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = M_2(2,\ 3)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Вектором називається:
   А) напрямлений відрізок, В) пара точок, С) пряма
2. Сумою векторів $\overline{a}$ (–1, 2, 0) і $\overline{b}$ (3, 4, 1) є вектор:
   А) (2, 6, 1), В) (4, 2, –1), С) (2, 8, 0).
3. Різницею ($\overline{a} - \overline{b}$) векторів $\overline{a}$ (–1, 2, 0) і $\overline{b}$ (3, 4, 1) є вектор:
   А) (–4, –2, –1), В) (2, 6, 1), С) (–3, 8, 1).
4. Довжина вектора $\overline{a}$ (–1, 2, 0) дорівнює
   А) $\sqrt{5}$, В) $\sqrt{3}$, С) 2.
5. Два вектори називаються колінеарними, якщо вони:
   А) лежать в одній площині, В) лежать на одній прямій,
   С) лежать на одній прямій або паралельних прямих.

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

Скалярний добуток

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називається число $\overline{a} \cdot \overline{b}$, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між цими векторами: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ або хоча один з векторів нульовий ($\vec{a}=0, \vec{b}=0$).

Якщо відомі координати векторів $\overline{a}=(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\overline{b}=(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ (сума добутків відповідних координат векторів).

З цієї формули і властивості (4) *умова перпендикулярності векторів*: $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

З означення скалярного добутку можна визначити кут φ між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,.$$

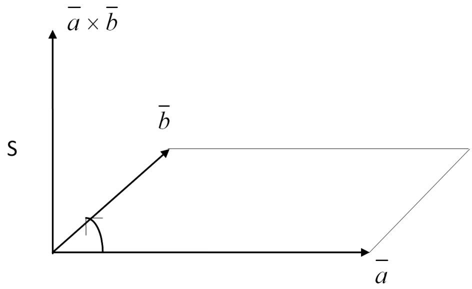
Векторний добуток

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ *на вектор* $\overline{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\,\overline{a},\,\overline{b}\,]$, який задовольняє таким умовам:

1) *довжина вектора* знаходиться за формулою $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами;

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$: $\overline{c}\perp\overline{a}$ і $\overline{c}\perp\overline{b}$; .

3) вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ утворюють праву трійку векторів. Це означає, що $\overline{c}$ направлений так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$, то поворот вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$, відбувається проти годинникової стрілки:



Геометричний зміст векторного добутку

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах (див. означення векторного добутку):

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|.$$

***Властивості векторного добутку*:**

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні або хоча б один з них нульовий.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ – не комутативна властивість множення (переставна властивість не виконується).

3. $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

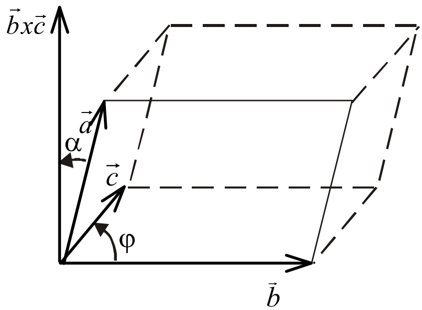
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами $\bar{a}=(x_1;\, y_1;\, z_1)$ та $\bar{b}=(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то векторний добуток обчислюється за допомогою визначника третього порядку:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, позначають $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.



Геометричний зміст мішаного добутку

Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $V=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

З цього можна записати умову компланарності трьох векторів $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ (лежать в одній площині, отже об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, $V=0$):

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0.$$

Якщо відомі координати векторів

$\overline{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overline{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\overline{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$, то мішаний добуток цих векторів знаходять за формулою:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

***Властивості мішаного добутку*:**

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}\,(\vec{a}\times\vec{c})$ – не комутативна властивість (переставна властивість не виконується).

2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$, то вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ компланарні або хоча б один з них нульовий.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}=(-3;-2;\ 1)$, $\overline{b}=(2;-3;1)$ та кут між ними.

Розв'язання. Довжини цих векторів

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14},$

$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=(-3)*2+(-2)*(-3)+1*1=-6+6+1=1$.

Кут між векторами знайдемо за означенням скалярного добутку:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{14}.$$

Приклад 2. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a}=(-1;-2;\ 1)$, $\overline{b}=(2;-1;1)$.

Розв'язання.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\overline{i}(2+0)-\overline{j}(-3-0)+\overline{k}(6+2)=2\overline{i}+3\overline{j}+8\overline{k}=(2;3;8).$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4+9+64}=\frac{\sqrt{77}}{2}.$$

Приклад 3. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a} = (-1; -1;\ 1)$, $\overline{b} = (2; 5; 1)$, $\overline{c} = (4; 3; -2)$. $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ та об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Розв'язання. Мішаний добуток

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1(-10-3) + 1(-4-4) + 1(6-20) = -9 .$$

Об'єм піраміди дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах

$$V_{пір.} = \frac{1}{6}\left| (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \right| = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скалярним добутком векторів є
   a) вектор, b) число, c) косинус кута між векторами.
2. Скалярний добуток векторів $\overline{a} = (–1, 2, 3)$, $\overline{b} = (4, 0, –5)$ дорівнює
   a) –19, b) 11, c) (–4, 0, –15).
3. Векторним добутком векторів є
   a) вектор, b) число, c) синус кута між векторами.
4. Векторний добуток векторів $\overline{a} = (–1, 2, 3)$, $\overline{b} = (4, 0, –5)$ є
   a) –19, b) (–10, 7, –8), c) (–10, –7, –8).
5. Мішаний добуток векторів $\overline{a} = (–1, 2, 3)$, $\overline{b} = (4, 0, –5)$, $\overline{c} = (1, –2, 0)$ є
   a) 24, b) (–24, 0, 0), c) –24.
6. Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює
   a) об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,
   b) площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$,
   c) площі трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
7. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{2; 5; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$.
8. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$.
9. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{6}$.
10. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(1; 2)$ і $\vec{b}\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

11. Дано вершини трикутника *ABC*: $A(0;\sqrt{3})$, $B(2;\sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Знайдіть його кути.
12. Доведіть, що вектори $\vec{a}\,(m;\ n)$ і $\vec{b}\,(-n;\ m)$ перпендикулярні або дорівнюють нулю.
13. Дано вектори $\vec{a}\,(3;\ 4)$ і $\vec{b}\,(m;\ 2)$. При якому значенні m вони перпендикулярні?
14. Дано вектори $\vec{a}\,(1;\ 0)$ і $\vec{b}\,(1;\ 1)$. Знайдіть таке число x, щоб вектор $\vec{a}+x\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
15. Доведіть, що коли $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – одиничні неколінеарні вектори, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ відмінні від нуля й перпендикулярні.
16. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдіть абсолютну величину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°.
17. Обчислити, яку роботу виконує сила $f\,(3;\ -2;\ -5)$, якщо її точка прикладу, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A\,(2;\ -3;\ 5)$ в положення $B\,(3;\ -2;\ -1)$.
18. Дано три сили $M\,(3;\ -4;\ 2)$, $H\,(2;\ 3;\ 5)$ і $P\,(-3;\ -2;\ 4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, якщо її точка прикладу, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A\,(5;\ 3;\ -7)$ в положення $B\,(4;\ -1;\ -4)$.
19. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили P і H, які діють під кутом 120°, причому $|P|=7$; $|H|=4$. Знайти величину рівнодіючої сили R.
20. Знайти рівнодіючу п’яти компланарних сил, рівних по величині та прикладених до однієї і тієї ж точки, знаючи, що кути між кожними двома послідовними силами дорівнюють 72°.

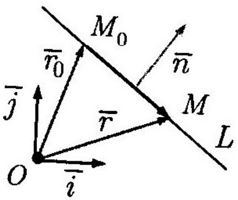
IV. ЗМ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ. РІЗНІ СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПРЯМОЇ

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Загальне рівняння прямої на площині

Доведемо, що будь яка пряма на площині має рівняння виду $ax + by + c = 0$, де a, b, c – постійні.



Доведення: Нехай L – довільна пряма і $M_0(x_0, y_0) \in L$, $n(a_1, a_2) \perp L$ і довільна точка A (x, y) належить прямій L. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, $(\overrightarrow{M_0M}\ \vec{n}) = 0$. Таким чином кожна точка M з координатами (x, y) прямої L задовольняє рівняння $(x - x_0)a_1 + (y - y_0)a_2 = 0$. Вірно і навпаки, якщо точка M (x, y) задовольняє дане рівняння, то скалярний добуток векторів дорівнює нулю і точка M належить прямій L. Запишемо рівняння у вигляді $a_1x + a_2y + (-a_1x_0 - a_2y_0) = 0$, що нагадує попередньо записане рівняння, $c = -a_1x_0 - a_2y_0$.

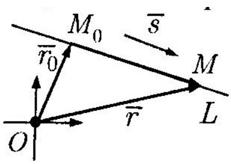
Покажемо, що рівняння $ax + by + c = 0$ є рівнянням деякої прямої. Нехай x_0, y_0 є розв'язком цього рівняння, тоді $ax_0 + by_0 + c = 0$, $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Як ми бачимо це є рівняння прямої, що проходить через точку з координатами (x_0, y_0) перпендикулярно вектору n (a, b). В *векторній формі* воно буде мати вигляд: $\overrightarrow{A_0A} = \vec{r} - \vec{r_0} \perp \vec{n}$, $(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0$, $(\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r_0}, \vec{n}) = 0$. Що і треба було довести. Рівняння виду $ax + by + c = 0$ називається *загальним рівняння прямої на площині.*

Отже, будь-яку пряму на площині можна задати лінійним рівнянням. Вірне і зворотне твердження – будь-яке лінійне рівняння (в якому або $a \neq 0$ або $b \neq 0$) у прямокутній декартовій системі координат на площині задає пряму.

Окремі випадки загального рівняння прямої на площині:

1. $c = 0$, $ax + by = 0$ – пряма проходить через початок координат;
2. $b = 0$, $ax + c = 0$ – пряма паралельна осі ординат;
3. $a = 0$, $by + c = 0$ – пряма паралельна осі абсцис;
4. $ax = 0$, $b = 0$, $c = 0$ – вісь ординат;
5. $by = 0$, $a = 0$, $c = 0$ – вісь абсцис.

Параметричне рівняння прямої на площині



Нехай задано прямокутну декартову систему координат. Пряму L задають точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}(l, m)$. Точка $M(x, y) \in L$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{n}$, $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{n}$, $t \in R$ – це рівняння називають *векторним параметричним* рівнянням прямої. Кожній точці прямої відповідає певне значення параметра *t*. Навпаки, кожному значенню параметра відповідає певний радіус-вектор точки на прямій. Запишемо дане рівняння в координатній формі $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, $t \in R$; $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ – *параметричне рівняння прямої* на площині.

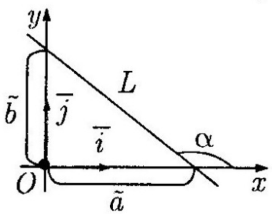
Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом

Якщо в рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт при y не дорівнює нулю, то рівняння можна розв'язати відносно y і тоді отримаємо $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.

Якщо позначити $k = -\dfrac{a}{b}$, $B = -\dfrac{c}{b}$, то будемо мати $y = kx + B$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.*

Кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис. Візьмемо дві точки на прямій $A(x_1, y_1) \in L$, $B(x_2, y_2) \in L$, $x_1 < x_2$. Тоді їх координати будуть задовольняти рівняння прямих $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha$.

Рівняння прямої у відрізках



Нехай усі коефіцієнти в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ відмінні від нуля. Виконаємо деякі перетворення даного рівняння (перенесемо вільний член в праву частину рівняння і поділимо кожний коефіцієнт на $-C$), $Ax + By = -C$, $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$, тоді $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ *– рівняння прямої у відрізках на осях.*

Взаємне розташування прямих

Прямі a і b називають паралельними, якщо їхні напрямні вектори колінеарні. *Умова паралельності прямих:* $k_1 = k_2$ *або* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Прямі a і b називаються перпендикулярними, якщо скалярний добуток напрямних векторів дорівнює нулю.

Умова перпендикулярності прямих: $k_1 k_2 = -1$, $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Умова перетину прямих: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Нормальне рівняння прямої на площині

Рівняння прямої $ax + by + c = 0$ називається рівнянням в нормальній формі, якщо $a^2 + b^2 = 1$. Очевидно, щоб загальне рівняння прямої привести до нормального виду, достатньо розділити його на $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

Геометричний зміст нормального рівняння: якщо в ліву частину рівняння підставити координати будь-якої точки, то отримаємо число, яке дорівнює відстані від даної точки до прямої, з точністю до знака. Відстань від точки до прямої називається довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на дану пряму.

Загальне рівняння прямої множимо на нормуючий множник і отримуємо $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ *– нормальне рівняння прямої.*

А відстань від точки до прямої визначається формулою: $d = \left| \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма a проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Вектор $\overrightarrow{n_1} \in a$, $\overrightarrow{n_1}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Вектор $\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}(y_1 - y_2,\ x_2 - x_1)$, так як скалярний добуток дорівнює нулю $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0$. Отже, вектор $\overrightarrow{n_2} \perp a$. Тому рівняння прямої можна записати у вигляді $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$, коефіцієнти a, b представляють координати вектора, перпендикулярного даній прямій, тобто вектора $\overrightarrow{n_2}$, $(x - x_1)(y_1 - y_2) + (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$. Або це рівняння можна записати в більш зручній формі $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Тоді кутовий коефіцієнт цієї прямої визначається формулою $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $(x_1 \neq x_2)$.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Побудувати пряму* $2x - 4y = 0$.

Розв'язання. Дана пряма проходить через початок координат. Другу точку прямої знайдемо, якщо візьмемо , наприклад $x = 2$, то $y = 1$. Наша пряма проходить через дві точки O (0, 0) і A (2, 1).

Приклад 2. *Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A* (3, –2) *і паралельна вектору c* (2, –3).

Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння прямої і підставимо в нього координати точки A і координати напрямного вектора c. Будемо мати $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ або це рівняння можна записати інакше $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 2}{-3}$.

Рівняння вигляду $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$, $M_0(x_0, y_0) \in a$, $\vec{n}(l,\ m)$ – напрямний вектор прямої a, називається *канонічним рівнянням прямої.*

Приклад 3. *Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A* (2; –1) *і утворює з віссю OX кут, вдвічі більший від кута, який утворює з тією ж віссю пряма* $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку A і має кутовий коефіцієнт k, $y + 1 = k(x - 2)$. Виходячи з геометричного змісту кутового коефіцієнта, можемо записати $k = tg2\alpha$, де α є кут утворений заданою прямою з віссю ОX. $tg\alpha = k_1 = \frac{1}{3}$, $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, $k = \frac{2\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$.

Тепер можемо записати рівняння шуканої прямої: $y+1 = \frac{3}{4}(x-2)$ або в загальному вигляді рівняння має вид $3x-4y-12=0$.

Приклад 4. *Маємо точки A* (–6, 0), *B* (0, 8). *Через середу відрізка AB провести пряму, яка на осі Ox відтинає відрізок в тричі більший, ніж на осі Oy.*

Розв'язання. Знайдемо координати середини відрізка $x = \frac{-6+0}{2} = -3$, $y = \frac{0+8}{2} = 4$, отримали точку $M(-3,4)$. За умовою $a = 3b$, тоді рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{3b}+\frac{y}{b}=1$, $-\frac{3}{3b}+\frac{4}{b}=1$, $b=3$, $a=3\cdot 3=9$. Таким чином рівняння шуканої прямої запишеться так: $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$, $x+3y-9=0$.

Приклад 5. *Дано рівняння двох сторін прямокутника* $3x+2y-7=0$ *і* $5x+2y-36=0$ *та рівняння діагоналі* $3x+7y-10=0$. *Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника і його другої діагоналі.*

Розв'язання. Звертаємо увагу на те, що задані сторони прямокутника лежать на паралельних прямих, бо виконується умова паралельності прямих $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Тоді дві інші сторони прямокутника будуть перпендикулярними до даних прямих, отже, їх кутові коефіцієнти можна визначити з умови перпендикулярності прямих $k = -\frac{1}{k_1}$, k_1 – кутовий коефіцієнт заданої прямої, запишемо дане рівняння у вигляді $2y = -5x+7$, $y = -\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$, тоді $k_1 = -\frac{5}{2}$, $k = \frac{2}{5}$. Щоб скласти рівняння прямої, крім кутового коефіцієнта, потрібно знати ще точку, через яку проходить дана пряма. Точки, через які проходять шукані сторони прямокутника можна визначити як точки перетину відомих сторін прямокутника з його відомою діагоналлю. Знайдемо ці точки, розв'язуючи відповідні системи рівнянь $\begin{cases}5x+2y-7=0\\3x+7y-10=0\end{cases}$; $\begin{cases}5x+2y-36=0\\3x+7y-10=0\end{cases}$. Отже, знайшли дві точки $A(1,\,1)$, $C(8,-2)$. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку A і перпендикулярна до заданих сторін $y-1=\frac{2}{5}(x-1)$, $2x-5y+3=0$. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку C, перпендикулярно до заданих сторін прямокутника $y+2=\frac{2}{5}(x-8)$, $2x-5y-26=0$. Щоб знайти рівняння другої діагоналі, знайдемо дві інші вершини прямокутника B і D, як точки перетину відповідних сторін. Для цього складемо і розв'яжемо такі системи рівнянь $\begin{cases}5x+2y-36=0\\2x-5y+3=0\end{cases}$; $\begin{cases}5x+2y-7=0\\2x-5y-26=0\end{cases}$, розв'язуючи систему, знайдемо: $B(6,3)$ і $D(3,-4)$. Рівняння діагоналі запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і D: $\frac{x-3}{6-3}=\frac{y+4}{3+4}$, $\frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{7}$, $7x-3y-33=0$. Таким чином, знайшли рівняння всіх сторін і діагоналей даного прямокутника.

Приклад 6. *На осі ординат прямокутної системи координат знайти точку, яка рівновіддалена від початку координат і від прямої* $3x-4y+12=0$.

Розв'язання. Нехай шукана точка $M(0;y)$, дана пряма c, тоді $MO=d(M,c)$. Оскільки $O(0;0)$, то $MO=y$, а $d(M,c)=\frac{|3\cdot 0-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=$ $=\frac{|-4y+12|}{5}$; отримали рівняння $\frac{|-4y+12|}{5}=y$, що рівносильно сукупності рівнянь $\left[\begin{matrix}-4x+12=5y\\4y-12=5y\end{matrix}\right.$. Розв'язуючи сукупність, одержимо два значення $y_1=\frac{4}{3}$, $y_2=12$, тобто маємо дві точки з координатами $M_1\left(0;\frac{4}{3}\right)$, $M_2(0;12)$.

Приклад 7. *Знайти віддаль між прямими:* $3x+4y+2=0$ *і* $6x+8y-5=0$.

Розв'язання. Дані прямі паралельні, так як виконується умова паралельності $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}\neq\frac{2}{5}$. Ці прямі розміщені по різні боки від початку координат, бо їх нормувальні множники різних знаків, а це вказує на те, що вектори-нормалі мають протилежний напрям. Отже, віддаль між даними прямими дорівнює сумі віддалей цих прямих від початку координат: $d=p_1+p_2$. Знайдемо нормувальні множники прямих і величину нормалей:

$M_1 = -\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{1}{5}$, $p_1 = \frac{2}{5}$; $p_2 = \frac{1}{2}$, $M_2 = \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{1}{10}$. Відстань між даними прямими дорівнює $d = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$.

Приклад 8. *Скласти рівняння сторін трикутника,знаючи координати однієї його вершини* $A(3,-1)$ *і рівняння бісектриси* $x-4y+10=0$ *та медіани* $6x+10y-59=0$*, проведених з різних вершин.*

Розв'язання. Координати точки A не задовольняють ні рівняння бісектриси, ні рівняння медіани. Нехай бісектриса проведена з вершини B, а з вершини C – медіана. Координати точки В позначимо через x_0 та y_0, а точка D тоді є основою медіани (вона середина відрізка AB), $D\left(\frac{x_0+3}{2}; \frac{y_0-1}{2}\right)$. Запишемо умову належності точки B до бісектриси: $x_0 - 4y_0 + 10 = 0$. Умова належності точки D до медіани $6\frac{x_0+3}{2} + 10\frac{y_0-1}{2} - 59 = 0$. Ці дві умови складають систему рівнянь, розв'язками якої є координати точки B: $\begin{cases} x_0 - 4y_0 + 10 = 0 \\ 3x_0 + 5y_0 - 35 = 0 \end{cases}$, $x_0 = 10$, $y_0 = 5$. Рівняння сторони AB можна розглядати як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B, а саме: $\frac{x-3}{10-3} = \frac{y+1}{5+1}$, $6x-7y-2=0$. Для визначення рівняння сторони BC, точка B якої відома, потрібно знайти ще одну точку, яка лежала б на BC. Такою точкою є точка, симетрична точці A відносно бісектриси кута B. Знайдемо її. Для цього складемо рівняння прямої, що проходить через точку A і перпендикулярна до бісектриси кута B: $y-1 = k(x-3)$. Кутовий коефіцієнт бісектриси $k_1 = \frac{1}{4}$, $k=-4$, $k\,k_1 = -1$ – умова перпендикулярності прямих. Отже маємо рівняння $y+1 = -4(x-3)$ або $4x+y-11=0$. Знайдемо точку P перетину цього перпендикуляра з бісектрисою: $\begin{cases} x-4y+10=0 \\ 4x+y-11=0 \end{cases}$, $P(2;\,3)$. Точка A і її симетрична точка K знаходяться на однаковій відстані від точки P, причому точка P лежить на AK, отже, P – середина відрізка AK. Використаємо це для знаходження координат точки K: $2 = \frac{3+x}{2}$, $3 = \frac{-1+y}{2}$, $x=1$, $y=7$, тобто $K(1;\,7)$. Тепер можна вже знайти рівняння прямої BC, як прямої, що проходить через дві точки B і K: $\frac{x-10}{1-10} = \frac{y-5}{7-5}$, $2x+9y-65=0$. Для знаходження рівняння прямої AC, необхідно знайти координати точки C, як спільної точки прямої BC та відомої медіани, запишемо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x+9y-65=0 \\ 6x+10y-59=0 \end{cases}$, звідки маємо $C\left(-\frac{7}{2}; 8\right)$. Знайдемо рівняння прямої AC: $\frac{x-3}{3{,}5-3}=\frac{y+1}{8+1}$, $18x+13y-41=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки A (2; 3) і B (4; 1). Знайти кутовий коефіцієнт шуканої прямої.
2. На осі ординат прямокутної системи координат знайти точку, яка рівновіддалена від початку координат і від прямої $3x-4y+12=0$.
3. Скласти рівняння висоти і медіани трикутника ABC проведених з вершини A, якщо дано вершини трикутника A (3; 2), B (5; –2), C (1; 0).
4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A (8;6) і відтинає від координатного кута трикутник площа якого становить 12 кв.од.
5. Знайти віддаль між прямими $3x+4y+2=0$, $6x+8y-5=0$.
6. Знайти точку, симетричну точці M (5; 5) відносно прямої $x+y-3=0$.
7. Знайти проекцію точки A (–5; 4) на пряму $x-y-5=0$.
8. Скласти рівняння сторін і висот трикутника, якщо відомі координати його вершин A (–4; 3), B (2; 5), C (6; –2).
9. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $5x-y+10=0$, $8x+4y+9=0$ паралельно до прямої $x+3y=0$.
10. Довести, що в різних випадках дві прямі або перетинаються, або паралельні, або співпадають: 1) $x+5y-35=0$, $3x+2y-27=0$; 2) $3x+5y-4=0$, $6x+10y+7=0$; 3) $3x+5y-2=0$, $6x+10y-8=0$.
11. Побудувати прямі, що задані рівняннями: $4x+5y-20=0$, $3x-7y=0$. Знайти кутові коефіцієнти даних прямих. Привести рівняння до нормального вигляду. Записати рівняння в відрізках на осях.
12. Скласти рівняння прямих, що проходять через початок координат, якщо відомо: 1) пряма паралельна прямій $2x-5y+5=0$; 2) пряма перпендикулярна прямій $y=3x+5$; 3) утворює кут з $y=2x-3$.
13. Дано дві сторони паралелограма: $x-y+1=0$, $3x+2y-12=0$ і точка перетину його діагоналей O (6; 4). Знайти рівняння двох інших сторін даного паралелограма.
14. Сторони трикутника задані рівняннями: $7x-6y+9=0$, $5x+2y-25=0$, $3x+10y+29=0$. 1) Знайти координати вершин трикутника; 2) Знайти рівняння висот трикутника; 3) Записати рівняння його медіан.

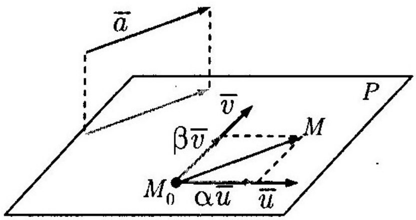
15. Знайти точку рівновіддалену від трьох даних точок: A (4; –1), B (8; 1) і C (9; 4).
16. Знайти відстань між даними паралельними прямими: $5x-12y-26=0$, $5x-12y=0$.
17. Знайти точку рівновіддалену від точок A (–3; 1), В (5; 7) і віддаль якої від прямої $3x-4y+12=0$ дорівнює 5.
18. Маємо рівняння двох сторін прямокутника $ABCD$: $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ і одна з його вершин A (–2; 1). Обчислити площу цього прямокутника.
19. Довести, що через точку P (2; 5) можна провести дві прямі так, щоб їх відстань від точки M (5; 1) дорівнювала 3. Скласти рівняння цих прямих.
20. Сторони трикутника задано відповідними рівняннями: $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$. Обчислити відстань від центра тяжіння цього трикутника до сторони BC.
21. Промінь світла проходить через точки C (2; 3), відбивається від прямої $x+y+1=0$ і проходить після цього через точку B (1; 1). Знайти рівняння падаючого і відбитого променів.
22. Стержень переміщується в просторі так, що три його постійні точки A, B, C ковзають по трьох координатних площинах. Чим обмежений рух четвертої точки M довільно вибраної на стержні?

ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ. РІЗНІ СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПЛОЩИНИ І ВІДПОВІДНІ ЇМ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Загальне рівняння площини

Нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B,C)$ і точка $M(x,y,z)\in\alpha$. Тоді рівняння площини в *векторній формі* записується так: $\vec{n}(\vec{r}-\vec{r_0})=0$, так як $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}$, де $\vec{r_0}$ – радіус вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x,y,z)$. Це рівняння можна записати у координатній формі: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ або $Ax+By+Cz+D=0$, $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. *У просторі будь-яке лінійне рівняння вигляду* $Ax+By+Cz+D=0$ *задає площину і називається загальним рівнянням площини.*

Окремі випадки загального рівняння площини:



1. Якщо вільний член дорівнює нулю, то площина проходить через початок координат;

2. Один з коефіцієнтів при біжучих координатах дорівнює нулю, $D \neq 0$:

площина паралельна осі $Ox - By + Cz + D = 0$

площина паралельна осі $Oy - Ax + Cz + D = 0$

площина паралельна осі $Oz - Ax + By + D = 0$.

3. Один з коефіцієнтів при біжучих координатах дорівнює нулю, $D = 0$:

площина проходить через вісь $Ox - By + Cz = 0$

площина проходить через вісь $Oy - Ax + Cz = 0$

площина проходить через вісь $Oz - Ax + By = 0$.

4. Два коефіцієнти при біжучих координатах дорівнюють нулю, $D \neq 0$:

площина паралельна площині $Oyz - Ax + D = 0$

площина паралельна площині $Oxz - By + D = 0$

площина паралельна площині $Oxy - Cz + D = 0$.

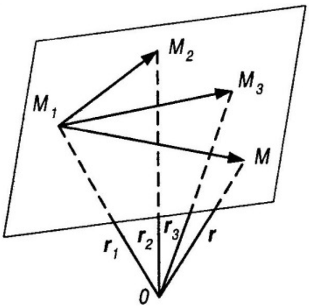
5. Два коефіцієнти при біжучих координатах дорівнюють нулю, $D = 0$:

рівняння площини $Oyz - Ax = 0,\ x = 0$

рівняння площини $Oxz - By = 0,\ y = 0$

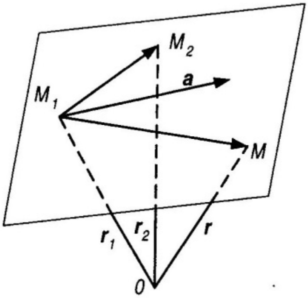
рівняння площини $Oxy - Cz = 0,\ z = 0$.

Рівняння площини, що проходить через три точки



Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка площини α, яка проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ і $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$, $\vec{r_3} = \overrightarrow{OM_3}$ – радіус-вектори даних точок. Введемо ще такі вектори: $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$. Так як ці вектори лежать в одній площині, то їх мішаний добуток дорівнює нулю $(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r_2} - \vec{r_1})(\vec{r_3} - \vec{r_1}) = 0$ або в координатній формі рівняння має вид: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Рівняння площини, що проходить через дві дані точки, паралельно даному вектору



Нехай $M(x, y, z)$ довільна точка площини α, яка проходить через дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, паралельно даному вектору $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Вектори $\vec{a}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ – не колінеарні. Відкладемо вектор $\vec{a}$ від точки M_1, тоді $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ – радіус-вектори даних точок. Введемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$. Вектори $\vec{a}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежать в одній площині, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r_2} - \vec{r_1}) = 0$. В координатній формі рівняння має вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

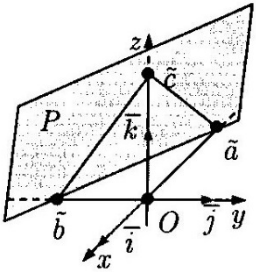
Аналогічним чином, до двох попередніх доведень, виводиться рівняння площини, що проходить через *дану точку* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, *паралельно двом* даним не колінеарним векторам $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$, $\vec{r_1}$ – радіус-вектор даної точки M_1, тоді вектори компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю: $(\vec{r} - \vec{r_1})\vec{a}\,\vec{b} = 0$,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальне рівняння площини

Нехай точка $M(x, y, z)$ не належить площині $Ax + By + Cz + D = 0$. Опустимо перпендикуляр з точки M на площину і нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ основа перпендикуляра. Так як точка M_0 належить площині, то її координати задовольняють рівняння $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, $\vec{n}\,\overrightarrow{M_0M} = 0$, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = \pm|n|\delta$, $\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$, δ – відстань від точки до площини. Коефіцієнт пропорційності $\pm|n| = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Якщо в рівнянні площини $A^2+B^2+C^2=1$, то $Ax+By+Cz+D$ буде дорівнювати з точністю до знаку відстані точки від площини. В цьому випадку кажуть, що площина задана рівнянням в нормальній формі. Для того, щоб отримати рівняння площини в нормальній формі, достатньо розділити його на вираз $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. *Відстань від даної точки до площини* обчислюється за формулою: $d=\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

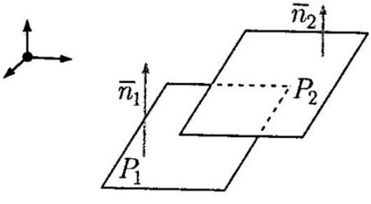
Рівняння площини в відрізках на осях



Нехай усі коефіцієнти в загальному рівнянні площини відмінні від нуля. Зробивши перетворення, отримаємо $Ax+By+Cz=-D$, $\dfrac{A}{-D}x+\dfrac{B}{-D}y+\dfrac{C}{-D}z=1$, де $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$. Рівняння виду $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – *рівняння в відрізках на осях.*

Взаємне розташування площин

Нехай маємо дві площини P_1 і P_2: $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$. $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)\perp\alpha$, $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)\perp\beta$, то $\alpha\parallel\beta$,



якщо $\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$, та їх координати пропорційні: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ – *умова паралельності площин.*

Якщо вектори $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$, $(n_1, n_2)=0$, то $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ – *умова перпендикулярності площин.*

Якщо $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ – *умова співпадання площин.*

Кут між площинами дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, які перпендикулярні даним площинам: $|n_1, n_2|=|n_1||n_2|\cos\alpha$. Отже, маємо:

$$\cos\alpha=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ – *кут між площинами.*

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Скласти рівняння площини,що проходить через точку M з координатами* (5; 2; –3), *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (2; -1; 4)$. *Чи належить цій площині точка P* (1; 2; –1)*?*

Розв'язання. Підставимо координати вектора і точки в рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно вектору: $2(x-5)-(y-2)+4(z+3)=0$. Виконавши перетворення, отримаємо шукане рівняння $2x-y+4z+4=0$. Підставивши координати точки P в отримане рівняння площини, приходимо до висновку, що точка P належить площині.

Приклад 2. *Скласти рівняння площини, якщо площина проходить через вісь Oy і точку A* (4; 2; –5).

Розв'язання. Так як площина проходить через вісь Oy, то її рівняння запишемо у вигляді $Ax+Cz=0$. Підставимо в це рівняння координати точки A і отримаємо $4A-5C=0$, $A=1{,}25C$, $1{,}25Cx+Cz=0$, $C(1{,}25x+z)=0$, $C\neq 0$, то маємо рівняння $5x+4z=0$.

Приклад 3. *Скласти рівняння площини, що проходить через три точки A* (1; 3; –2), *B* (4; –5; 6), *C* (–3; 1; 2).

Розв'язання. Підставимо координати даних точок у відоме рівняння площини, що проходить через три точки. Отримаємо,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 4-1 & -5-3 & 6+2 \\ -3-1 & 1-3 & 2+2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}-30(z+2)=0.$$

Рівняння шуканої площини має вид $8x+22y+19z-36=0$.

Приклад 4. *Скласти рівняння площини, що проходить через дві дані точки A* (2; –1; 3), *B* (3; 1; 2), *паралельно вектору a* = (3; –1; 4).

Розв'язання. Підставимо координати точок і даного вектора у рівняння площини, що проходить через дві точки, паралельно вектору. Будемо мати:
$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3-2 & 1+1 & 2-3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$. Зведемо визначник до виду $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix}=0$ і розкладемо за елементами першого стовпчика, після перетворень дістанемо шукане рівняння: $x-y-z=0$.

Приклад 5. *Скласти рівняння площини, що проходить через точку К з координатами* (2; –1; 3), *паралельно векторам a* (1; 2; –1) *і b* (3; –1; 4).

Розв'язання. Запишемо рівняння площини: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$. Підставивши координати точки K і координати даних векторів, одержимо рівняння шуканої площини: $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$, $x-y-z=0$.

Приклад 6. *Обчислити висоту КО піраміди АВСК з вершинами А* (3; 5; 3), *В* (–2; 11; –5), *С* (1; –1; 4), *К* (0; 6; 4).

Розв'язання. Складемо рівняння площини *АВС*:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -2-3 & 11-5 & -5-3 \\ 1-3 & -1-5 & 4-3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$6(x-3)+16(y-5)+30(z-3)+12(z-3)+5(y-5)-48(x-3)=0,$$

$$2x-y-2z+5=0.$$

Оскільки $AK\perp(ABC)$, то $AK=d(K,(ABC))$. Використовуючи формулу відстані від точки до площини, маємо: $AK=\dfrac{|2\cdot 0-1\cdot 6-2\cdot 4+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=3$.

Приклад 7. *Знайти відрізки, що відтинає площина* $2x-3y+8z-4=0$ *на осях.*

Розв'язання. *Перепишемо рівняння у вигляді* $2x-3y+8z=4$ *і розділимо обидві частини на* 4*, отримаємо* $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}y+2z=1$, $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4/3}+\dfrac{z}{0{,}5}=1$, $a=2$, $b=-\dfrac{4}{3}$, $c=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 8. *Скласти рівняння площини, що проходить через дві дані точки А* (1; –1; 3), *В* (1; 2; 4) *перпендикулярно до площини* $2x-3y+z+1=0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина перпендикулярна до даної площини, то нормальний вектор даної площини $\vec{n}=(A;\ B;\ C)=(2;-3;\ 1)$ паралельний до вектора $AB=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)=(0;\ 3;\ 1)$, тоді рівняння площини запишемо у вигляді $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ або $-3(x-1)+6(z-3)-2(y+1)-3(x-1)=0$, $3x+y-3z+7=0$ – рівняння шуканої площини.

Приклад 9. *Знайти рівняння площини, що дотикається до сфери* $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$ *та паралельна до площини* $6x+3y+2z=0$.

Розв'язання: Шукана площина паралельна до даної площини, тому її рівняння запишемо у вигляді $6x+3y+2z+D=0$ (α). Центр сфери C (0; –1; –2), радіус сфери $r=3$, тому $r=\rho(C, \Pi)$. Скористаємося формулою відстані від точки до площини, одержимо $\rho(C,\alpha)=\dfrac{|6\cdot 0-1\cdot 3-2\cdot 2+D|}{\sqrt{36+3+4}}=\dfrac{|-7+D|}{7}$,

$3=\dfrac{|-7+D|}{7}$, $|-7+D|=21$, $D=28$ або $D=-14$. Отже, отримали два рівняння площини: $6x+3y+2z+28=0$, $6x+3y+2z-14=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано дві точки A (3; –1; 2) і В (4; –2; –1). Скласти рівняння площини, що проходить через точку A, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.
2. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки A (3; 1; 4), B (4; 1; 2), C (–1; –1; 2).
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (3; –2; –7), паралельно площині $2x-y+3z-1=0$.
4. Довести, що три площини проходять через одну пряму $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z+2=0$.
5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку P (2; –3; 3), паралельно площині *OXУ*; що проходить через дві точки M (7; 2; –3), P (1; 3; 4), паралельно осі *OУ*.
6. Площина проходить через точку A (6; 10; 1) і відтинає на осі ординат відрізок $b=3$. Скласти рівняння цієї площини в відрізках.
7. Знайти відстань від точки P (2; –1; –3) до даної площини $16x-12y+15z-4=0$.
8. Довести,що площина $3x-4y-2z+5=0$ перетинає відрізок AB, якщо відомі координати його кінців (3; –2; 1), (–2; 5; 2).
9. З'ясувати, які з даних пар прямих паралельні: 1) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$; перпендикулярні: 2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$.

10. Скласти рівняння площин, паралельних площині $2x-2y-z-3=0$ і які знаходяться на відстані від неї $d=5$.
11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (2; –1; –4), перпендикулярно вектору $\vec{n}=(3;-6;1)$, в векторній і координатних формах.
12. Побудувати площини і визначити відрізки, які ці площини відтинають на осях: а) $2x+3y-4z-12=0$; б) $4x+5y=0$.
13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку K (2; –1; 3), паралельно двом не колінеарним векторам $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(2;1;-3)$.
14. На осі OY знайти точку C (x, y, z), рівновіддалену від площин $x-y+z+1=0$, $2x-y+2z-5=0$.
15. Знайти відстань від точки P (4; 4; –2) до площини $2x+10y-11z-15=0$.
16. Знайти кут між двома площинами $11x-8y-7z+5=0$, $7x+2y-8z-3=0$.
17. Через початок координат провести площину, перпендикулярно до площини $5x-2y+5z-10=0$, яка утворює з площиною $x-4y-8z+12=0$ кут $\alpha=45^\circ$.
18. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (1; 5; 2), паралельно площині, яка проходить через три дані точки A(4; –3; 1), B(3; 4; 0), C(–1; –1; 5).
19. Знайти площину, паралельну до площини $x-2y+2z-7=0$ і віддаленої від точки P (2; 1; –3) на відстань $d=2$.
20. Встановити, що три площини мають одну спільну точку, знайти її координати: $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$.
21. Точка M рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення A (15; –24; –16) зі швидкістю 12 в напрямку вектора c (–2; 2; 1). Переконавшись, що траєкторія руху точки M перетинає площину $3x+4y+7z-17=0$, знайти: 1) точку C їх перетину; 2) час, використаний на рух точки M від точки A до C; 3) довжину відрізка AC.
22. Точка M рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення A (28; –30; –27) зі швидкістю 12,5 по перпендикуляру, який проведено з точки M на площину $15x-16y-12z+26=0$. Знайти рівняння руху точки M і визначити: 1) точку C перетину її траєкторії з цією площиною; 2) час, використаний на рух точки M від точки A до C; 3) довжину відрізка AC.
23. Точка M рухається прямолінійно і рівномірнол з початкового положення A (11; –21; 23) в напрямку вектора c (–1; 2; –2) зі швидкістю 12. Визначити, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, замкнениий між паралельними площинами: $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

КРИВІ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЗАДАНІ КАНОНІЧНИМ РІВНЯННЯМ. ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

В аналітичній геометрії вивчають лінії, які у прямокутній декартовій системі координат мають алгебраїчні рівняння. Алгебраїчні рівняння можуть визначати: реальні криві, сукупності кривих, точки або порожню множину («уявні» криві).

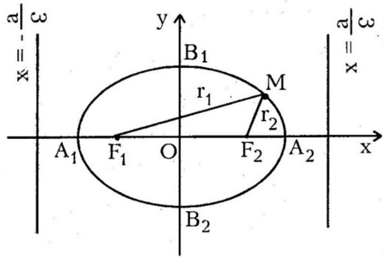
Лінія, що має алгебраїчне рівняння *n-го* степеня у прямокутній декартовій системі координат, у будь-якій іншій прямокутній декартовій системі координат має також алгебраїчне рівняння *n-го* степеня.

Із цього твердження випливає, алгебраїчний характер рівняння і його порядок є властивостями, притаманними самій лінії, тобто вони не зв'язані з вибором системи координат (інваріантні щодо системи).

Лінією другого порядку на площині називають множину точок площини, прямокутні координати (x,y) яких справджують алгебраїчне рівняння 2-го порядку: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, де a_{11}, a_{12}, a_{22} – коефіцієнти не рівні разом нулю.

До кривих другого порядку належать: еліпс, гіпербола, парабола. Окремим випадком еліпса є коло.

Еліпс.



Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок (фокусів), що лежать в цій площині, є величиною сталою, більшою за відстань між фокусами, такою,що дорівнює даному числу $2a$.

Відстань між фокусами, що позначається через $2c$, називається фокальною. Дане число $2a$ називається великою віссю, а число $2b$ – малою віссю.

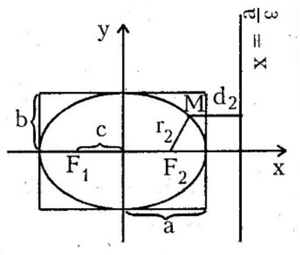
Нехай дано еліпс і його фокуси розташовані на осі OX симетрично початку координат, то в цій системі координат рівняння даного еліпса має вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $a\ge b>0$. Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса.*

При вказаному виборі системи координат осі координат є осями симетрії еліпса (*a – велика піввісь, b – мала піввісь*), а початок координат – його центром симетрії. Точки, в яких еліпс перетинає свої осі називаються вершинами $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$. (Якщо фокуси еліпса розташовані на осі ординат, то рівняння еліпса має той же вигляд, але при цьому $b>a$).

З рівняння еліпса випливає, що: 1) еліпс міститься у прямокутнику $\{(x,\ y): |\,x\,| \le a,\ |\,y\,| \le b\}$; 2) якщо точка $M(x_0,\ y_0)$ належить еліпсу, то і точки $(-x_0,\ y_0)$, $(-x_0,\ -y_0)$, $(x_0,\ -y_0)$ також йому належать; 3) $|\,F_1F_2\,| = 2c$ – фокусна відстань і $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ називається *ексцентриситетом* еліпса. Для еліпса завжди $\varepsilon < 1$.

Якщо $M(x, y)$ – довільна точка еліпса, то відрізки $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ називаються *фокальними радіусами* точки $M(x, y)$ і обчислюються за формулами: $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = a - \varepsilon x$.



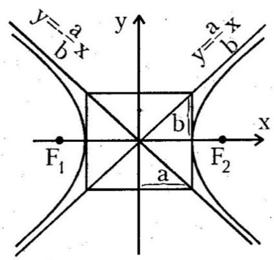
Якщо еліпс задано канонічним рівнянням і $a > b$, то прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса; якщо $b > a$, то директриси – $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$.

Кожна директриса має слідуючи властивості: якщо r – відстань довільної точки еліпса до фокуса, d – відстань від цієї ж точки до одностороннього з цим фокусом директриси, то відношення $\dfrac{r}{d}$ є величина постійна, $\varepsilon = \dfrac{r}{d}$.

Еліпс з множиною точок, сума відстаней яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами, називається *фокальною* властивістю: $r_1 + r_2 = 2a$, $2a > 2c$.

Еліпс можна накреслити так. Візьмемо нерозтяжну нитку завдовжки $2a$, що розтягується, закріпимо її кінці в фокусах. Натягнувши цю нитку вістрям олівця, ведемо олівцем по паперу. Траєкторія руху вістря олівця опише замкнену криву – еліпс, для якої $MF_1 + MF_2 = 2a$.

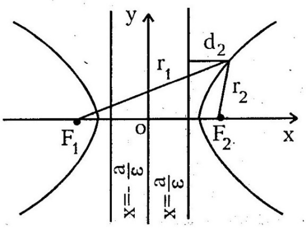
Гіпербола



Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких (за абсолютним значенням) до двох заданих точок (фокусів) стала. Або можна дати інше означення гіперболи: це крива, яка є лінією перетину кругового конуса і площини, паралельної двом твірним конуса.

Нехай дано гіперболу. Якщо осі декартової системи координат вибрані так, що фокуси гіперболи розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, то рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Це рівняння називають *канонічним* рівнянням гіперболи. З рівняння гіперболи випливає: 1) для всіх точок гіперболи $|x|\geq a$, тобто гіпербола розташована за межами смуги $\{(x,\ y):|x|<a\}$; 2) осі Ox і Oy є осями симетрії гіперболи, а точка O – її центром симетрії; 3) гіпербола перетинає лише вісь абсцис у точках $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$; 4) прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, розташований симетрично відносно осей гіперболи, що дотикається її в вершинах, називається *основним прямокутником* гіперболи. Діагоналі основного прямокутника (необмежено продовжені) є *асимптотами* гіперболи і мають рівняння: $y=\pm\frac{b}{a}x$; 5) гіпербола з рівними півосями називається рівносторонньою і її канонічне рівняння має вид: $\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$.

Число $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ називається ексцентриситетом гіперболи і для будь якої гіперболи $\varepsilon>1$.



Нехай $M(x,y)$ – довільна точка гіперболи, то відрізки $F_1M=r_1$, $F_2M=r_2$ називаються *фокальними радіусами* і обчислюються: $r_{1,2}=\varepsilon\,x\pm a$ – для точок правої вітки гіперболи; $r_{1,2}=-\varepsilon\,x\pm a$ – для точок лівої вітки.

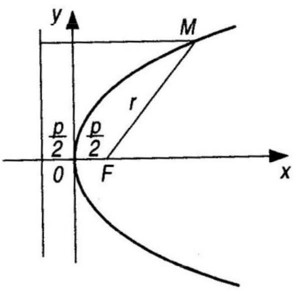
Якщо гіпербола задана канонічним рівнянням, то прямі, які визначаються рівняннями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами.* Якщо фокуси гіперболи розташовані на осі ординат, то рівняння директрис буде мати вид: $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Кожна директриса має властивість: якщо r – відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d – відстань від тієї ж точки до одностороннього з цим фокусом директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величина постійна і $\varepsilon=\frac{r}{d}$.

Гіпербола є множиною точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами $|r_1-r_2|=2a$, $2a<2c$ – *фокальна властивість.*

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (фокуса) дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої (директриси).



Нехай дано параболу. Введемо декартову систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус параболи перпендикулярно до директриси і була направлена від директриси до фокусу, початок координат розташовано між фокусом і директрисою, тоді дана парабола буде визначатися рівнянням: $y^2 = 2px$ – *канонічне* рівняння параболи, де p – фокальний параметр.

З рівняння параболи випливає, що: 1) парабола розташована у правій півплощині $x \geq 0$; 2) вісь абсцис – вісь симетрії; 3) парабола перетинає вісь Ox у точці O (0, 0); 4) пряма $x = -\frac{p}{2}$ – директриса; 5) фокальний радіус довільної точки M (x, y) параболи можна обчислити за формулою $r = \frac{p}{2} + x$.

Парабола є множиною точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси $r = d$.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Скласти рівняння еліпса, якщо: 1) відстань між фокусами дорівнює* 10*, а велика вісь –* 16*; 2) мала піввісь дорівнює* 8*, а ексцентриситет* 0,6*; 3) сума півосей* 12*, а відстань між фокусами* $6\sqrt{2}$ *.*

Розв'язання. 1) $2c = 10$, $c = 5$, $2a = 16$, $a = 8$. Щоб скласти рівняння еліпса, необхідно знайти малу піввісь $b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 = 64 - 25 = 39$, тоді рівняння еліпса прийме вигляд $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39}$; 2) З того, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = 0{,}6a$, а використовуючи співвідношення $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (0{,}6a)^2 = 0{,}64a^2$, будемо мати $64 = 0{,}64a^2$, $a^2 = 100$. Отже, рівняння еліпса буде мати вид: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; 3) Для складання рівняння еліпса треба знати *a, b*. Нам відомо $a + b = 12{,}2c = 6\sqrt{2}$; $c = 3\sqrt{2}$, $c^2 = 18$, $c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $18 = 12(a-b)$, $a - b = 1{,}5$; $\begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 1{,}5 \end{cases}$, $a = 6{,}75$; $b = 5{,}25$. Тоді рівняння еліпса запишеться у вигляді $\frac{x^2}{6{,}75^2} + \frac{y^2}{5{,}25^2} = 1$.

Приклад 2. *Більша вісь еліпса рівна* 12, *а директрисами цього еліпса є прямі* $x = \pm 12$. *Знайти рівняння еліпса та його ексцентриситет.*

Розв'язання. Для складання рівняння еліпса необхідно знати його півосі *a, b.* За умовою задачі $12 = 2a$, $a = 6$. Піввісь b знаходимо із відношення $b^2 = a^2 - c^2$, а піввісь c можна знайти, використовуючи рівняння директрис еліпса $x = \pm \frac{a^2}{c}$. Взявши праву директрису, одержимо $12 = \frac{a^2}{c}$, $c = \frac{a^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$, $b^2 = 36 - 9 = 27$, $b^2 = 27$. Маємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$, а ексцентриситет еліпса $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Приклад 3. *Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо відстань між її вершинами* 8 *і фокуси знаходяться в точках* (–3; 3) *і* (7; 3).

Розв'язання. Фокуси гіперболи лежать на прямій $y = 3$ (ординати фокусів рівні 3). Отже, центр гіперболи лежить не в початку координат, але осі її паралельні координатним осям. В цьому випадку рівняння гіперболи має вигляд $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ ($(x_0; y_0)$ – координати центра гіперболи). Центр гіперболи буде лежати на прямій $y = 3$ і ділить відстань між фокусами навпіл.

Отже, $x_0 = \frac{-3 + 7}{2}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $A(2; 3)$ – центр гіперболи. Далі згідно умови $2a = 8$, $a = 4$ і відстань між фокусами $2c = \sqrt{(7+3)^2 + (3-3)^2} = 10$, $c = 5$. Використовуючи залежність $b^2 = c^2 - a^2$, знайдемо $b = 3$. Тепер запишемо рівняння гіперболи $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

Приклад 4. *Знайти рівняння асимптот гіперболи* $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Розв'язання. Гіпербола має дві асимптоти, які визначаються рівняннями $y = \pm \frac{b}{a} x$, тому потрібно знайти *a, b.* Приведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 6$, $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$, $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$. Отже, маємо рівняння асимптот: $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$.

Приклад 5. *Скласти рівняння параболи, що проходить через точки перетину прямої* $x + y = 0$ *і кола* $x^2 + y^2 + 8y = 0$ *та симетрична відносно осі Oy.*

Розв'язання. Для знаходження точки перетину прямої і кола розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2+8y=0 \end{cases}$. Знайдемо x з першого рівняння і підставимо в друге: $(-y)^2+y^2+8y=0$, $2y(y+4)=0$, $y_1=0$, $y_2=-4$, відповідно $x_1=0$, $x_2=4$. Маємо дві точки перетину $O(0; 0)$ і $M(4; -4)$. Рівняння параболи, що проходить через початок координат, симетрично відносно осі Oy, має вигляд: $x^2=2py$. З умови, що парабола проходить через точку M, визначимо параметр p: $4^2=2p(-4)$, $2p=-4$. Отже, шукане рівняння параболи має вид: $x^2=-4y$.

Приклад 6. *Парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку* A (4, –1), *а вершина знаходиться в початку координат. Скласти рівняння даної параболи.*

Розв'язання. Так як парабола проходить через точку, яка має додатну абсцису, то її віссю є вісь Ox і рівняння параболи будемо шукати у вигляді $y^2=2px$. Підставимо координати точки A в це рівняння $1=8p$, $p=\frac{1}{8}$, $2p=\frac{1}{4}$. Шукане рівняння параболи має вигляд $y^2=\frac{1}{4}x$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо: а) півосі еліпса відповідно дорівнюють 7 і 6; б) відстань між фокусами дорівнює 24 і більша вісь 26; в) більша піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет – 0,8; г) сума півосей дорівнює 18 і відстань між фокусами 12.
2. Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет, директриси еліпса $4x^2+9y^2=16$.
3. Скласти рівняння еліпса, симетричного відносно координатних осей і який проходить через точки $A(3\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $B(6; 0)$.
4. Дано еліпс $x^2+2y^2=8$. Через точку $M(1; 1)$ провести хорду, яка в цій точці ділиться навпіл.
5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо: а) відстань між фокусами дорівнює 10, а відстань між вершинами 8; б) дійсна піввісь дорівнює 5 і ексцентриситет 2,6; в) відстань між фокусами дорівнює 10, а ексцентриситет $\frac{5}{3}$; г) дійсна піввісь – $\sqrt{20}$ і гіпербола проходить через точку P (–10; 4).
6. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її директрисами дорівнює 4, а відстань між фокусами 16.

7. Скласти рівняння параболи, якщо: а) фокус знаходиться в точці (5; 0), директриса є віссю ординат і вісь симетрії – вісь абсцис; б) парабола симетрична відносно осі *ОУ*, проходить через точку *M* (6; 3) і початок координат; в) парабола проходить через точки перетину прямої $x - y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8y = 0$, симетрично відносно осі *ОХ*.
8. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.
9. Дано параболу $x^2 = 16y$. Через точку *P* (2; 2,5) провести хорду, яка б в цій точці ділилася навпіл.
10. Знайти точки перетину прямої $x + y - 3 = 0$ і параболи $x^2 = 4y$.
11. Скласти рівняння гіперболи, якщо: а) відстань між фокусами дорівнює 10 і мала вісь дорівнює 8; б) відстань між директрисами дорівнює 22 і відстань між фокусами 26; в) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами дорівнює 12,8; г) відстань між директрисами дорівнює 7 і ексцентриситет 1,4.
12. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот, рівняння директрис.
13. Обчислити *S* трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 36$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.
14. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі *ОУ*, симетрично відносно початку координат, якщо: а) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8; б) його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет 0,6; в) відстань між директрисами дорівнює 10,4 і ексцентриситет – 0,75.
15. Дано еліпс $9x^2 + 5y^2 = 225$. Знайти: півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.
16. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать в фокусах еліпса $9x^2 + 5y^2 = 1$, дві інші співпадають з кінцями його малої осі.
17. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ знайти точки, абсциса яких дорівнює –3.
18. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо: а) парабола проходить через точку *A* (9; 6) і розташована симетрично відносно осі *ОХ*; б) парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно осі *ОУ*, і її параметр дорівнює 3; в) дано фокус (–7; 0) і рівняння директриси $x - 7 = 0$.
19. Знайти точки перетину прямої $3x + 4y - 12 = 0$ і параболи $y^2 = -9x$.
20. Знайти координати вершини параболи, величину параметра *p*, рівняння директрис, якщо маємо рівняння – $y^2 = 4x - 8$.

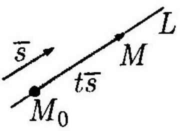
21. Мостова арка має форму параболи. Визначити параметр параболи, знаючи,що прогін арки дорівнює 24 *м*, а висота 6 *м*.
22. Площина α ковзає по нерухомій площині β так, що дві її точки A і B переміщуються по двом перпендикулярним прямим нерухомої площини. Знайти траєкторію точки C рухомої площини.
23. Коло котиться без ковзання по внутрішній стороні другого нерухомого кола, радіус якого вдвічі більший радіуса кола, що котиться. Знайти траєкторію будь якої точки, яка незмінно зв'язана з колом, що котиться.
24. Шарнірний механізм складається з двох рухомих стержнів AB і CD та нерухомої лінійки AL. Стержень AB приєднан шарніром до стержня CD і обертається навколо нерухомої точки A ($AB = CB$). Кінець C стержня CD ковзає по нерухомій лінійці AL. Знайти траєкторію будь якої точки M стержня CD.
25. Відрізок постійної довжини ковзає своїми кінцями по сторонам прямого кута. Взяти на відрізку будь яку точку M і знайти шлях, який вона описує при ковзанні.
26. Камінь кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи і впав на відстані 16 *м* від початкового положення. Знайти параметр параболічної траєкторії, знаючи, що найбільша висота, яку досягнув камінь, дорівнює 12 *м*.
27. Струмінь води, який викидає фонтан, приймає форму параболи, параметр якої 0,1. Знайти висоту струменю, якщо відомо, що він падає в басейн на відстань 2 *м* від місця виходу.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. РІЗНІ СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПРЯМОЇ В ПРОСТОРІ

Канонічне рівняння прямої у просторі

Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на двох поверхнях.

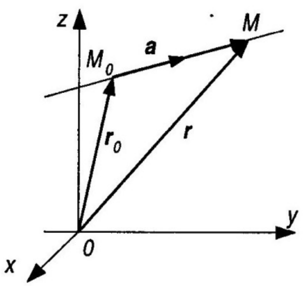
Будь-яку пряму можна задати як перетин двох площин і навпаки, будь яка система двох незалежних рівнянь представляє собою рівняння деякої прямої. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – рівняння прямої подається як *перетин двох площин* (припускається, що площини непаралельні).



Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фіксована точка даної прямої, $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої і вектор $\vec{s}(k, l, m)$ – вектор паралельний прямій. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, вектори колінеарні і їх координати пропорційні, тобто маємо співвідношення $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$. *Ця форма рівняння прямої називається канонічною.* Їх сприймають як умову колінеарності векторів, і якщо, наприклад, $m=0$, то це означає, що $z-z_0=0$, $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}$ або, наприклад, $k=l=0$, $x-x_0=0$, $y-y_0=0$, $z\in R$.

З рівняння прямої в канонічній формі можна отримати її рівняння в параметричній. Припускаючи, що загальне значення трьох співвідношень канонічного рівняння дорівнює *t*. Тобто кожній точці прямої відповідає певне значення параметра і навпаки, кожному значенню параметра *t* відповідає певний радіус-вектор точки на прямій.

Параметричне рівняння прямої у просторі



Нехай задано прямокутну систему координат *Oxyz*. Пряму *L* задають точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a}(k, l, m)$ і нехай точка $M(x, y, z)$ належить прямій *L*. Тоді $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{a}$, де t – будь-яке дійсне число, $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}$ – *векторне параметричне* рівняння прямої. Тоді в матричній формі – $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix}$, $t\in R$. $\begin{cases}x=x_0+kt\\y=y_0+lt\\z=z_0+mt\end{cases}$ – рівняння прямої *в параметричній формі.*

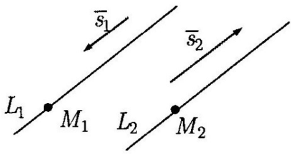
Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай напрямний вектор прямої проходить через дві різні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M(x, y, z)$ належить даній прямій, тоді $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$. З колінеарності векторів отримаємо: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – *рівняння прямої, що проходить через дві точки.*

Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, точка через яку проходить пряма, а вектор $\vec{s}(k, l, m)$ – напрямний вектор, напрямні коефіцієнти якого є проекціями на координатні осі *Ox, Oy, Oz.* Якщо α, β, γ – кути між прямою і відповідними координатними осями, то: $\cos\alpha = \pm\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$; $\cos\beta = \pm\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$;

$\cos\gamma = \pm\frac{m}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$, які називаються напрямними косинусами прямої. Напрямні коефіцієнти *k, l, m* можна розглядати як проекції на координатні осі вектора, паралельного прямій (причому одночасно дорівнювати нулю вони не можуть). *Канонічне рівняння прямої з направляючими коефіцієнтами можна записати у такому вигляді:* $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$, $\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}$.

Взаємне розташування прямих у просторі



Прямі L_1, L_2 *називають паралельними,* якщо їх напрямні вектори колінеарні $\vec{s_1} \parallel \vec{s_2}$. Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, тоді $\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$.

Якщо паралельні прямі мають хоча б одну спільну точку, то вони збігаються $(\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2})$, оскільки пряма однозначно задається точкою і напрямним вектором. Отже, різні паралельні прямі спільних точок не мають (не перетинаються). *Через кожну точку простору проходить одна й лише одна пряма, паралельна заданій прямій.*

Умова паралельності двох прямих в просторі $L_1(M_1, \vec{s_1})$, $L_2(M_2, \vec{s_2})$, якщо вони задані в канонічній формі: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Дві непаралельні прямі не можуть мати більше ніж одну спільну точку. Прямі *перетинаються*: $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) = 0$, $\vec{s_1} \nparallel \vec{s_2}$.

Непаралельні прямі без спільних точок називаються *мимобіжними*: $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) \neq 0$.

Якщо рівняння прямих задані в канонічній формі і їх напрямні вектори перпендикулярні $\vec{s_1} \perp \vec{s_2}$, то *умова перпендикулярності двох прямих має вид:* $k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Нехай рівняння прямих задані в параметричній формі,складемо визначник з коефіцієнтів, що входять в ці формули: $\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}$. *Рівність даного визначника нулю є необхідною і* *достатньою умовою належності двох прямих одній площині*. Якщо: 1) в визначнику всі рядки пропорційні, то прямі співпадають; 2) в визначнику тільки перші два рядки пропорційні, то прямі паралельні; 3) визначник дорівнює нулю, то прямі перетинаються.

Кут між двома прямими

Кутом між прямими $L_1(M_1, \vec{s_1})$, $L_2(M_2, \vec{s_2})$ називають кут між їхніми напрямними векторами. Отже, $\cos(L_1, L_2) = \cos(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \dfrac{(\vec{s_1}, \vec{s_2})}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$. *Косинус кута між прямими*, що задані рівняннями в параметричній формі визначається формулою: $\cos\alpha = \dfrac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2}\sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}$.

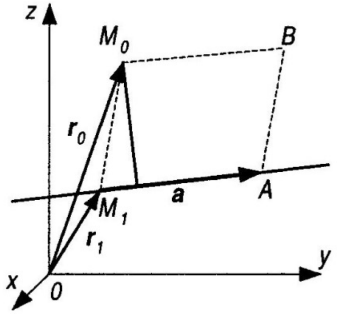
Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими

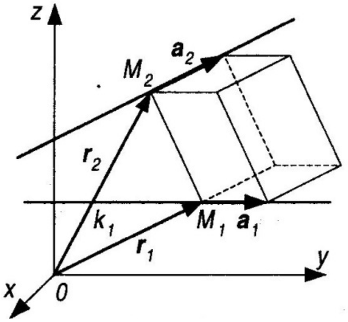
Нехай точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, $\vec{a} = (k_1, l_1, m_1)$ – напрямний вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin L$, $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ – радіус-вектори відповідних точок. Тоді відстань від точки M_0 до прямої L обчислюється за формулою:

1) у векторній формі: $d = \dfrac{\sqrt{[(\vec{r_1} - \vec{r_2})\vec{a}]^2}}{\sqrt{\vec{a}^2}}$;

2) у координатній формі:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ k_1 & m_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2}}.$$





Нехай точка $M_1(x_1,\,y_1,\,z_1)\in L_1$, $\overrightarrow{a_1}=(k_1,\,l_1,\,m_1)$ – напрямний вектор прямої L_1, точка $M_2(x_2,\,y_2,\,z_2)\in L_2$, $\overrightarrow{a_2}=(k_2,\,l_2,\,m_2)$ – напрямний вектор прямої L_2. Тоді найкоротша відстань між прямими: 1) у векторній формі маємо рівняння: $\vec{r}=\vec{r_1}+\overrightarrow{a_1}\,t$, $\vec{r}=\vec{r_2}+\overrightarrow{a_2}\,t$, $d=\dfrac{\left|(\vec{r_2}-\vec{r_1})\overrightarrow{a_1}\,\overrightarrow{a_2}\right|}{\left|[\overrightarrow{a_1}\;\overrightarrow{a_2}]\right|}$; 2) у координатній формі маємо рівняння: $d=\pm\dfrac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ k_1 & l_1 & m_1\\ k_2 & l_2 & m_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} k_1 & m_1\\ k_2 & m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} k_1 & l_1\\ k_2 & l_2\end{vmatrix}^2}}$.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Скласти канонічне і параметричне рівняння прямої, що задана як лінія перетину площин:* $\begin{cases}5x+y-3z+4=0\\ x-y+2z+2=0\end{cases}$.

Розв'язання. Рівняння прямої будемо шукати у вигляді: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Знайдемо координати $x_0;\,y_0;\,z_0$ будь-якої точки**,** що належить прямій та координати *m; n; p* напрямного вектора. Нехай $z_0=0$: $\begin{cases}5x_0+y_0=-4\\ x_0-y_0=-2\end{cases}$; $6x_0=-6$, $x_0=-1$, $y_0=1$. Точка $M\,(-1;\,1;\,0)$ – належить даній прямій, а напрямний вектор прямої колінеарний вектору $[n_1,\,n_2]$, де $\overrightarrow{n_1}(5;\,1;\,-3)$, $\overrightarrow{n_2}(1;\,-1;\,2)$ – нормальні вектори до даних площин. Координати *m, n, p* напрямного вектора пропорційні координатам вектора $[n_1,\,n_2]=(1;-13;-7)$. Отже, рівняння шуканої прямої має вид: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-13}=\dfrac{z}{-7}$. Від канонічного рівняння перейдемо до параметричного, для цього введемо параметр *t:* $\dfrac{x+1}{1}=t;$ $\dfrac{y-1}{-13}=t;$ $\dfrac{z}{-7}=t$. $\begin{cases}x=-1+t\\ y=1-13t\\ z=-7t\end{cases}$ – маємо параметричну форму рівняння даної прямої.

Приклад 2. *Скласти рівняння прямої, що проходить через дві дані точки A* (1; 4; –3) *і B* (2; 1; 3).

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої у вигляді $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=$ $=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Підставивши координати даних точок, отримаємо $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+3}{6}$.

Приклад 3. *З'ясувати взаємне розташування двох прямих в випадках:* $x=1+2t$, $y=7+t$, $z=-3+4t$ *і* $x=6+3t$, $y=-1-2t$, $z=-2+t$; *2)* $x=2+t$, $y=-3-2t$, $z=4-2t$ *і* $x=7+5t$, $y=8-10t$, $z=9-10t$.

Розв'язання. Запишемо визначник, що складається з коефіцієнтів даних прямих:

$$1)\ \Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 6-1 & -1-7 & -2-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 5 & -8 & -5\end{vmatrix}=0 \text{, прямі перетинаються.}$$

$$2)\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 5 & -10 & -10\\ 7-2 & 8+3 & 9-4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 5 & 11 & 5\end{vmatrix}=0 \text{, прямі паралельні.}$$

Приклад 4. *Через точку A* (1, –1, 2) *провести пряму, паралельну даній прямій* $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку *A*: $\frac{x-1}{k}=\frac{y+1}{l}=\frac{z-2}{m}$. За умовою паралельності прямих, повинно виконуватися: $\frac{1}{k}=\frac{3}{l}=\frac{2}{m}$, тобто $k=1,\ l=3,\ m=2$. Отримані напрямні коефіцієнти підставимо в рівняння прямої, що проходить через точку *A*. Отже, маємо: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$.

Приклад 5. *Через точку A* (1; 5; –1) *провести пряму, перпендикулярну до прямих* $a:\ \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1}$, $b:\ \begin{cases}x=2-3t\\ y=-1+t\\ z=-2t\end{cases}$.

Розв'язання. Напрямні вектори даних прямих $\vec{l_1}(-1;\,3;\,-1)$, $\vec{l_2}(-3;\,1;\,-2)$. Рівняння шуканої прямої запишемо у вигляді

$\dfrac{x-1}{l_1}=\dfrac{y-5}{l_2}=\dfrac{z+1}{l_3}$; умови того, що $a\perp c$, $b\perp c$: $\begin{cases}-l_1+3l_2-l_3=0\\ -3l_1+l_2-2l_3=0\end{cases}$.

Знайдемо розв'язки цієї системи, ввівши параметр t: $l_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}t=-5t$,

$l_2=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}t=t$, $l_3=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}t=8t$, покладемо, що $t=1$. Отже, рівняння шуканої прямої c: $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+1}{8}$.

Приклад 6. *Знайти кут між двома прямими:* $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z+1}{-7}$; $\begin{cases}x=5+7t\\ y=-3+2t\\ z=6-8t\end{cases}$.

Розв'язання. Перша пряма має напрямний вектор $\overrightarrow{s_1}=(11,-8,-7)$, а друга $\overrightarrow{s_2}=(7,\,2,-8)$. Використовуючи формулу знаходження кута між двома прямими, отримаємо: $\cos\alpha=\dfrac{7\cdot 11-2\cdot 8+8\cdot 7}{\sqrt{49+4+64}\,\sqrt{121+64+49}}=\dfrac{117}{\sqrt{117}\,\sqrt{234}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=45^\circ$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві дані точки M з координатами (4; –1; 3) і P з координатами (2; 3; 4).
2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M (2; –1; –3) паралельно прямій $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-5}{4}$.
3. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через дану точку P (5; –1; –4), перпендикулярно площині $x+2y+3z-5=0$.
4. Обчислити кут між двома прямими: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{6}$; $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$.
5. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через початок координат, перпендикулярно площині $4x-3y+5z-7=0$.

6. Записати параметричне і канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 3x-4y+5z-10=0 \\ 6x-5y+z-17=0 \end{cases}$.

7. Дослідити взаємне розташування двох прямих, якщо: а) $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+5t \\ z=-3+4t \end{cases}$, $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=2-t \\ z=5-2t \end{cases}$; б) $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-5}{4}$ і $\begin{cases} x=6+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$.

8. Знайти рівняння проекції прямої $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-5}{4}$ на площину $2x+3y-7=0$.

9. Визначити кут між прямими $\begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-5z-4=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x-6y-6z+2=0 \\ 2x+2y+9z-1=0 \end{cases}$.

10. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ і $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-5}{-1}$.

11. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку A (1; 0; –3) паралельно: 1) вектору $c=(2;-3;5)$; 2) прямій $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; 3) площині $5x+2y+3z-7=0$.

12. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через дві точки: M з координатами (3; –1; 2) і K з координатами (1; 1; –2).

13. Довести паралельність прямих: $\begin{cases} x+3y+x+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5+2t \\ y=2-t \\ z=t-7 \end{cases}$.

14. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P (–1; 2; –3) перпендикулярно до вектора $\vec{a}=(6;-2;-3)$ і перетинає пряму, що задана рівняннями: $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=4+3t$.

15. Довести перпендикулярність прямих: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+1 \end{cases}$; $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$.

16. Знайти кут між прямими: $\begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z-4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-6y-6z+2=0 \\ 2x+2y+9z-1=0 \end{cases}$.

17. Обчислити відстань між двома даними прямими $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 4t \\ y = 8 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

18. Знайти відстань від точки *A* (7; –2; 3) до прямої $\dfrac{x-3}{-6} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

19. Точка $M(x, y, z)$ рухається рівномірно і прямолінійно з початкового положення $M_0(2; 12; -5)$ в направленні, протилежному вектору $\vec{c}(-1; 2; -2)$ зі швидкістю 12. Знайти рівняння руху точки M.

20. Скласти рівняння висоти трикутника, яку опущено з вершини *B* на протилежну сторону, якщо дано координати його вершин *A* (4; 1; –2), *B* (2; 0; 0), *C* (–2; 3; –5).

21. Маємо рівняння руху точки $M(x, y, z)$: $x = 3 + 6t$, $y = 5 - 2t$, $z = -8 + 3t$. Знайти її швидкість.

22. Маємо рівняння руху точки $M(x, y, z)$: $x = 2 + 2t$, $y = -2 - 2t$, $z = 1 + t$. Знайти відстань, яку пройшла точка *M* за проміжок часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$.

23. Точка *M* рухається рівномірно прямолінійно з початкового положення *A* (2; 12; –5) в напрямку, протилежному вектору $\vec{c}(-1; 2; -2)$ зі швидкістю 12. Знайти рівняння руху точки *M* і визначити точку, з якою вона співпадає в момент часу 4.

24. Точки *M* і *P* рухаються прямолінійно і рівномірно: точка *M* з початкового положення *A* (–5; 4; –5) зі швидкістю 14 в напрямку вектора $\vec{c}(3; -6; 2)$, а точка *P* з початкового положення *B* (–5; 16; –6) зі швидкістю 13 в протилежному напрямку вектору $\vec{k}(-4; 12; -3)$. Знайти рівняння руху кожної з точок.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, $\alpha \parallel L_1$, $\alpha \parallel L_2$, дві прямі, що задані рівняннями в канонічній формі: $L_1 - \dfrac{x - x_1}{k_1} = \dfrac{y - y_1}{l_1} = \dfrac{z - z_1}{m_1}$, $L_2 - \dfrac{x - x_2}{k_2} = \dfrac{y - y_2}{l_2} = \dfrac{z - z_2}{m_2}$, де $\vec{s_1}(k_1, l_1, m_1)$ – напрямний вектор першої прямої, $\vec{s_2}(k_2, l_2, m_2)$ – напрямний вектор другої прямої. Тоді *рівняння* *площини, що проходить через точку, паралельно двом прямим має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$.

Нехай площина α проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\alpha \parallel L$, $L: \dfrac{x-x_0}{k} = \dfrac{y-y_0}{l} = \dfrac{z-z_0}{m}$, де $\vec{s}(k, l, m)$ – напрямний вектор прямої. *Тоді рівняння площини, що проходить через дві точки, паралельно прямій має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$.

Нехай пряма $L: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases} \in \alpha$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\vec{s}(k, l, m)$ – напрямний вектор прямої і точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$. *Тоді рівняння прямої, що проходить через пряму і точку має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$.

Прямі L_1, L_2 перетинаються і лежать в одній площині α. Рівняння прямих подано в канонічній формі: $\dfrac{x-x_1}{k_1} = \dfrac{y-y_1}{l_1} = \dfrac{z-z_1}{m_1}$, $\dfrac{x-x_2}{k_2} = \dfrac{y-y_2}{l_2} = \dfrac{z-z_2}{m_2}$. *Тоді рівняння площини, в якій лежать дві прямі, що перетинаються має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$.

Маємо дві паралельні прямі, рівняння яких задані в параметричній формі: $L_1 \parallel L_2$, $L_1: \begin{cases} x = x_1 + kt \\ y = y_1 + lt \\ z = z_1 + mt \end{cases}$; $L_2: \begin{cases} x = x_2 + kt \\ y = y_2 + lt \\ z = z_2 + mt \end{cases}$. Тоді рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі має вид: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$.

Нехай пряма $L_1 \in \alpha$, $L_1: \dfrac{x-x_1}{k_1}=\dfrac{y-y_1}{l_1}=\dfrac{z-z_1}{m_1}$, $\alpha \parallel L_2$, $L_2: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$. *Тоді рівняння прямої, що проходить через пряму, паралельно даній прямій має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ k & l & m \\ k_1 & l_1 & m_1 \end{vmatrix} = 0$.

Маємо пряму $L \in \alpha$, $L: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$, $\alpha \perp \beta$, $\beta: Ax + By + Cz + D = 0$. *Тоді рівняння площини, що проходить через пряму, перпендикулярно до даної площини, має вид:* $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k & l & m \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$.

Нехай дано пряму $L: x = x_0 + kt,\ y = y_0 + lt,\ z = z_0 + mt$ і площину $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді рівняння *кута між прямою і площиною* має вид*:*

$$\sin\alpha = \frac{|Ak + Bl + Cm|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{k^2+l^2+m^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Ak + Bl + Cm = 0$*;*

Умова перпендикулярності прямої і площини: $\dfrac{A}{k}=\dfrac{B}{l}=\dfrac{C}{m}$ *або* $A = \lambda k$, $B = \lambda l$, $C = \lambda m$.

Умова, при якій пряма лежить на площині: $Ak + Bl + Cm = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Скласти рівняння площини, що проходить через дану точку M з координатами* (1; –1; 7) *та пряму* $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Розв'язання. З рівняння прямої – точка $P\,(0;\,3;\,5)$ належить шуканій площині; напрямний вектор даної прямої $\vec{l} = (2;\,5;-1)$, через яку проходить площина, паралельний до площини. Так як точки M і P належать площині, то вектор $\overrightarrow{PM}$ паралельний до шуканої площини і має координати (1; 0; 2). Отже рівняння площини набуде вигляду: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-7 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ або розв'язавши визначник третього порядку (за правилом трикутника), маємо рівняння площини $2x - y - z + 8 = 0$.

Приклад 2. *При яких значеннях* m *пряма* $x = 2 + 5t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 + mt$ *паралельна площині* $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

Розв'язання. Застосовуючи умову паралельності прямої і площини будемо мати: $Ak + Bl + Cm = 0$, $2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (-6)m = 0$, $18 - 6m = 0$, $m = 3$.

Приклад 3. *Скласти рівняння площини, що проходить через пряму* $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ *і точку* M (2; –2; 1).

Розв'язання. Пряма проходить через точку A (1; 2; –3) і напрямний вектор даної прямої має координати $\vec{s}(2; -3; 2)$. Застосовуючи рівняння площини, що проходить через пряму і дану точку, будемо мати: $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z+3 \\ 2-1 & -2-2 & -3-1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Обчисливши визначник третього порядку, отримаємо шукане рівняння площини: $4x + 6y + 5z - 1 = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку B (3; –4; 5) паралельно прямим $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$.
2. Через точку A (1; 0; 7) паралельно площині $3x - y + 2z - 15 = 0$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$.
3. Довести, що прямі $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ перетинаються.
4. Довести, що пряма $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ паралельна даній площині $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.
5. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A (1; –2; 1) перпендикулярно прямій $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$.

7. Довести, що пряма $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежить в площині $4x-3y+7z-4=0$.

8. *П*ри якому значенні C пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна даній площині $2x-y+Cz-2=0$.

9. Знайти проекцію точки P (5; 2; –1) на площину $2x-y+3z+23=0$.

10. Знайти точку A симетричну точці B (1; 1; –4) відносно площини $3x+y-2z=0$.

11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (1; 2; –3) паралельно прямим $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$; $\frac{x+5}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+3}{-1}$.

12. Довести, що прямі лежать в одній площині, і знайти рівняння цієї площини, якщо: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$; $\begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$.

13. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

14. Знайти точку A симетричну точці B (–3; 2; 5) відносно площини, що проходить через точки P (–6; 1; –5), K (7; –2; –1), O (11; –7; 1).

15. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму, задану рівняннями $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-1$, паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$.

16. Скласти рівняння площини, що проходить через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно площині $3x+2y-z-5=0$.

17. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку M з координатами (3; –2; –5) паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$ і перетинає пряму $x=2-3t$, $y=2t-4$, $z=1-2t$.

18. Знайти точку перетину прямої $\begin{cases} x=6-2t \\ y=7-t \\ z=8+3t \end{cases}$ і площини $3x-4y+5z+16=0$.

19. При якому значенні l пряма $\frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+5}{6}$ паралельна площині $2x-5y+3z-7=0$.
20. Знайти проекцію точки P (1; 2; –3) на площину $6x-y+3z-41=0$.
21. Положення дзеркала визначається рівнянням $2x-6y+3z-42=0$. З якою точкою повинно співпадати дзеркальне відображення точки A (3; –7; 5)?

ПОВЕРХНІ В ПРОСТОРІ. СФЕРА, КОНІЧНІ І ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ (еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди). ЗВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ 2-ГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння виду $F(x,y,z)=0$ називається поверхнею. Поверхня, яка визначається рівнянням другого порядку відносно координат *x, y, z* називається поверхнею другого порядку.

Поверхню називають *циліндричною*, якщо вона разом з кожною своєю точкою містить усю пряму – твірну циліндричної поверхні, яка проходить через дану точку паралельно заданому вектору $\vec{s}$.

Рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі *Oz*, має вид: $F(x,y)=0$. Тоді рівняння *напрямної* циліндричної поверхні: $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Циліндричними поверхнями 2-го порядку із твірними, паралельними осі *Oz,* і напрямними – кривими 2-го порядку є: 1) *еліптичний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<b\le a$; 2) *параболічний циліндр* $y^2=2px$, $p>0$; 3) *гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$.

Конічною поверхнею називається поверхня, яка описується прямою,що проходить через дану точку (вершину конуса) і перетинає дану лінію (напрямну конуса). Рівняння конічної поверхні має вид: $F(x,y,z)=0$.

Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить усе коло, утворене обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої – осі обертання, називають поверхнею обертання. Запишемо рівняння поверхонь, утворених обертанням кривих 1-го та 2-го порядку:

Еліпсоїд

1. *Еліпсоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій системі координат задають рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $0<c\le b\le a$.

Еліпсоїд не проходить через початок координат канонічної системи координат, бо координати $O\,(0, 0, 0)$ не задовольняють рівняння; точки перетину еліпсоїда з осями координат називають *вершинами* еліпсоїда, а числа *a, b, c – півосями;* так як змінні *x, y, z* рівняння еліпсоїда входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат. Лінія перетину еліпсоїда з довільною площиною представляє собою еліпс. Так як ця лінія скінченна, то вона не може бути ні гіперболою, ні параболою, ні парою прямих. а тому вона еліпс.

Гіперболоїди

2. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називають множину всіх точок простору координати яких у деякій прямокутній системі координат задовольняють рівняння, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $a,b,c>0$.

Однопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок координат, так як координати точки $O\,(0, 0, 0)$ не задовольняють рівняння гіперболоїда; перетинає вісь *Ox* у вершинах – точках з координатами $(\pm a;\,0;\,0)$, а вісь *Oy* – у точках з координатами $(0;\,\pm b;\,0)$; вісь *Oz* не перетинає; так як рівняння поверхні містить змінні *x, y, z* у парних степенях, то однопорожнинний гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

Двопорожнинним гіперболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій прямокутній системі координат задовольняють рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $a,b,c>0$.

Двопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок координат пдск; перетинає вісь *Oz* у двох точках – вершинах з координатами $(0;\,0;\,\pm c)$; осі *Ox, Oy* не перетинають поверхню; числа *a, b, c* – півосі гіперболоїда; двопорожнинний гіперболоїд міститься всередині асимптотичного конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, де $a,b,c>0$ і за межами $|z|\ge c$.

При перетині гіперболоїдів довільною площиною можуть отримуватися різні конічні перерізи.

Параболоїди

3. *Еліптичним параболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій прямокутній системі координат задовольняють рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$, $a,b>0$.

Еліптичний параболоїд проходить через початок координат; з осями координат має лише одну спільну точку – вершину – точку O (0, 0, 0); так як рівняння містить змінні *x, y* у парних степенях, то еліптичний параболоїд симетричний щодо площин *Oyz, Oxz;* поверхня не симетрична відносно площини *Oxy*, тому параболоїд симетричний координатній осі *Oz* і не симетричний щодо осей *Ox* та *Oy* і початку координат; всі точки еліптичного параболоїда, крім початку координат, розміщені по один бік від площини *Oxy.*

Гіперболічним параболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій прямокутній системі координат задовольняють рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, $a,b>0$.

Гіперболічний параболоїд проходить через початок координат; перетинає осі канонічної системи координат у єдиній точці – початок координат; симетричний відносно площин *Oxz, Oyz* і не симетричний щодо площини *Oxy*, тому поверхня симетрична відносно осі *Oz* і не симетрична щодо осей *Ox* та *Oy* і початку координат.

Площини, паралельні площині *Oxy*, крім самої площини, перетинають еліптичний параболоїд по еліпсам, а гіперболічний параболоїд – по гіперболам. Площина O*xy* перетинає гіперболічний параболоїд по двом прямим.

Зведення рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду

Якщо крива лінія другого порядку має довільне розташування відносно осей координат, то її рівняння задається так:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 .$$

Значення інваріантів визначають геометричні характеристики лінії. *Інваріантом рівняння лінії 2-го порядку* називають функцію від коефіцієнтів цього рівняння, значення якої не змінюється після переходу від однієї пдск до іншої. Величини $I_1=a_{11}+a_{12}$, $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, де $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$, є інваріантами рівняння лінії 2-го порядку. Усі геометричні образи 2-го порядку поділяються на три типи:

1) Якщо $I_2 > 0$, то геометричний образ еліптичного типу;

2) Якщо $I_2 = 0$, то геометричний образ параболічного типу;

3) Якщо $I_2 < 0$, то геометричний образ гіперболічного типу.

За допомогою перетворення координат рівняння лінії другого порядку можна звести до одного з таких типів:

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + m = 0$ – для еліпсів і гіпербол;

2) $\lambda_1 x^2 + 2ky = 0$ – для парабол;

3) $\lambda_1 x^2 + n = 0$ – для вироджених парабол.

Коефіцієнти цих рівнянь можна виразити через інваріанти: $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$, $I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 m$. З поданих рівностей і теореми Вієта випливає, що власні числа λ_1, λ_2 є коренями квадратного рівняння виду $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$; $m = \dfrac{I_3}{I_2}$.

Зауважимо, що рівняння $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_{13} y + b_{33} = 0$, $b_{33} = a_{33}$ може задавати:

1) Порожню множину $I_2 > 0$, $I_3 > 0$ або $I_2 = I_3 = 0$, $a_{31}^2 - a_{11} a_{33} < 0$;

2) Точку $I_2 > 0$, $I_3 = 0$;

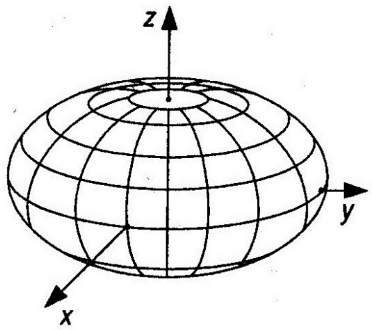
3) Пару прямих, що перетинаються $I_2 < 0$, $I_3 = 0$;

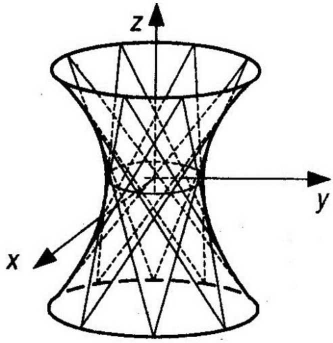
4) Пару паралельних прямих $I_2 = I_3 = 0$, $a_{31}^2 - a_{11} a_{33} > 0$;

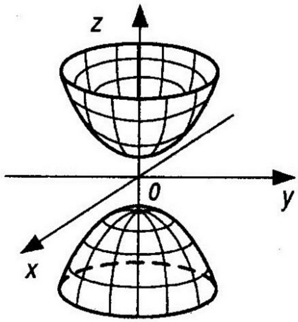
5) Еліпс $I_2 > 0$, $I_3 < 0$;

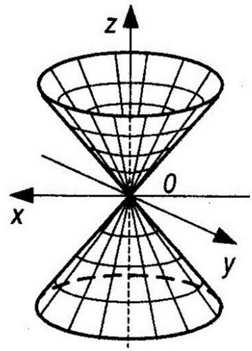
6) Параболу $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$;

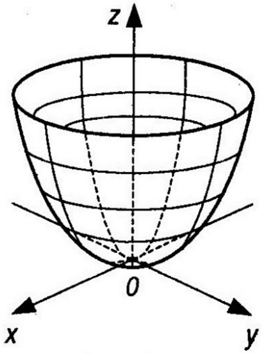
7) Гіперболу $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$.

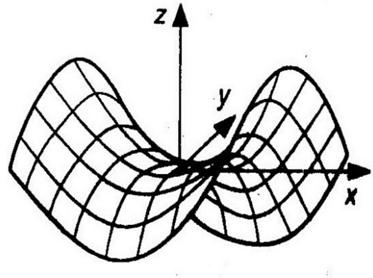

z
y
x

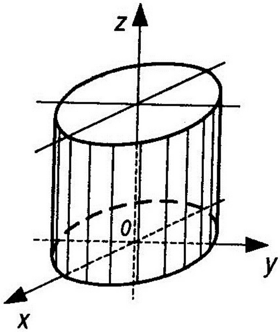

z
y
x

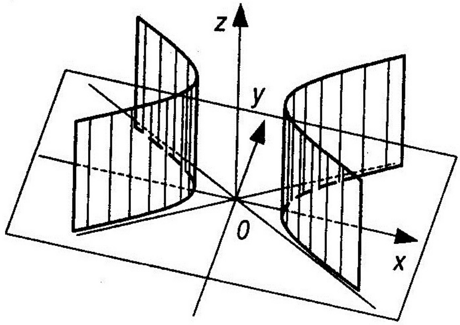

z
0
y
x

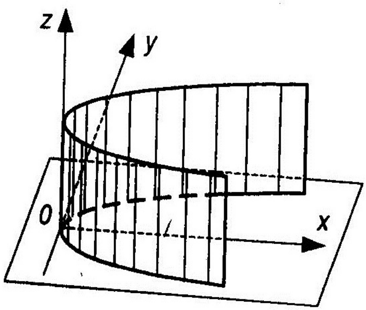

z
0
x
y

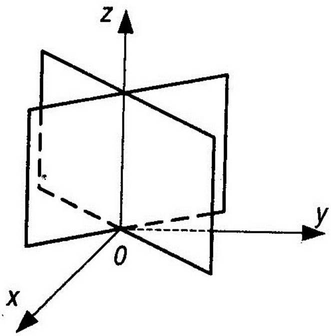

z
0
x
y

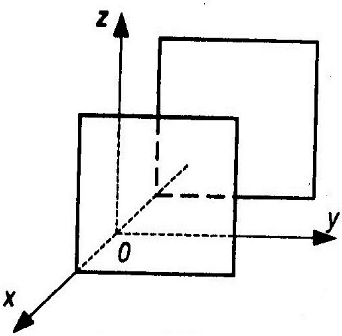

z
y
x

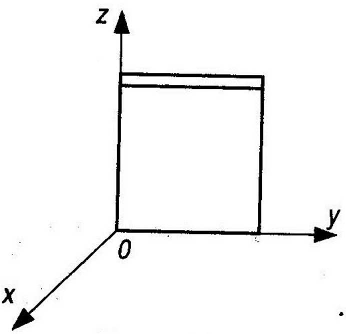

z
0
y
x


z
y
0
x


z
y
0
x


z
y
0
x


z
y
0
x


z
y
0
x

Приклади розв′язання задач

Приклад 1. *Користуючись інваріантами, звести рівняння до простішого вигляду:* 1) $x^2+2xy-y^2+8x+4y-8=0$; 2) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

Розв'язання. Складемо інваріант $I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$, $I_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -8\end{vmatrix}=44$.

Оскільки $I_2\neq 0$, то крива центральна і її спрощене рівняння матиме вид: $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\dfrac{I_3}{I_2}=0$, $\lambda^2+I_1\lambda+I_2=0$, $I_1=\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо корені: $\lambda^2-2=0$, $\lambda_1=\sqrt{2}$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$. Спрощене рівняння кривої буде: $\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}y^2-22=0$.

Складемо інваріанти для другого рівняння кривої: $I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$,

$I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ -1 & -3 & 25\end{vmatrix}=-64$. Так як $I_2=0$, нецентральна. Дана крива – парабола, оскільки $I_3\neq 0$. Її спрощене рівняння записується так: $y^2=\pm\dfrac{2}{I_1}\sqrt{-\dfrac{I_2}{I_1}}\,x$ (знак перед радикалом збігається зі знаком I_1). Знайдемо $I_1=1+1=2$. Отже, рівняння даної кривої має вид: $y^2=\dfrac{2}{2}\sqrt{\dfrac{-64}{-2}}\,x=4\sqrt{2}\,x$.

Приклад 2. *Яку поверхню визначає рівняння* $x^2+y^2=25$*?*

Розв'язання. В дане рівняння не входить член з координатою *z*. Тому відповідно до формули $F(x,y)=0$, робимо висновок, що дане рівняння визначає циліндричну поверхню з твірною, паралельною до осі *Oz*. В площині *xOy* рівняння напрямної цієї циліндричної поверхні буде коло, радіуса 5. Отже, дане рівняння визначає прямий коловий циліндр $\begin{cases}x^2+y^2=0\\ z=0\end{cases}$.

Приклад 3. *Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить в точці К* (0; 2; 3), *а напрямною є лінія* $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\\ z=-2\end{cases}$.

Розв’язання. Складемо рівняння довільної твірної конічної поверхні, знайдемо залежність між l і m, що випливає з умови перетину твірної і напрямної, розв’язавши для цього систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \\ z=-2 \\ \dfrac{x}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z-3}{1} \end{cases}$, де l, m – довільні.

Виключимо біжучі координати: $\dfrac{x}{l}=z-3$, $z=-2$, $x=-5l$, $\dfrac{y-3}{m}=z-3$, $y=2-5m$. Знайдені значення x і y підставимо в 1 рівняння системи $\dfrac{25l^2}{25}+\dfrac{(2-5m)^2}{16}=1$ або $16l^2+25m^2-20m-12=0$. Це рівняння виражає залежність між параметрами l і m. Біжучу точку твірної конічної поверхні можна розглядати як біжучу точку поверхні. Визначимо l, m через змінні і підставимо отримані значення в останнє рівняння: $\dfrac{x}{l}=z-3$, $l=\dfrac{x}{z-3}$, $\dfrac{y-2}{m}=z-3$, $m=\dfrac{y-2}{z-3}$.

$$16\left(\frac{x}{z-3}\right)^2+25\left(\frac{y-2}{z-3}\right)^2-20\frac{y-2}{z-3}-12=0.$$

$$16x^2+25y^2-12z^2-20yz-112z-128=0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння сфери, що проходить через дані точки A (1; 1; 0), B (7; 11; 0), C (10; 1; 9), P (–2; –11; 9). Знайти центр і радіус сфери.
2. Знайти точки перетину сфери $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=81$ з прямою $x=3-t$, $y=-3+2t$, $z=4-2t$.
3. Скласти рівняння циліндра, якщо його вісь задано рівнянням $x=9-t$, $y=4-2t$, $z=7+2t$ і точка M (1; –2; 3) належить циліндру.
4. Напрямна конуса задана рівнянням $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1 \\ y=0 \end{cases}$, а вершина знаходиться в точці K (0; –3; 4).

5. Скласти рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання, отриманого при обертанні гіперболи навколо осі OZ, $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$.

6. Рівняння поверхні привести до канонічного вигляду і визначити вид поверхні: а) $9x^2+16y^2+36z^2-18x+64y-216z+253=0$; б) $4x^2-9y^2+36z^2-16x-54y-72z-65=0$.

7. Довести, що еліпсоїд $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ має одну спільну точку з площиною $4x-3y+12z-54=0$, знайти її координати.

8. Знайти точки перетину поверхні $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$ з прямою $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

9. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{a}=(2;-1;2)$, що дотикається до еліптичного параболоїда $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=2z$.

10. Встановити, що площина $y+6=0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z$ по параболі, знайти її параметр і вершину.

11. Скласти рівняння сфери, якщо вона проходить через точку A (2; –1; –3) і має центр C (3; –2; 1).

12. Встановити, що площина $z+1=0$ перетинає однопорожниний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1$ по параболі. Знайти її центр і вершину.

13. Довести, що еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=2y$ має одну спільну точку з площиною $2x-2y-z-10=0$, знайти координати точки.

14. Скласти рівняння поверхні, що утворена при обертанні еліпса $z=0$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ навколо осі OX.

15. Звести рівняння до канонічного вигляду і визначити вид поверхні: а) $x^2-2z-8x-7=0$; б) $x^2+2y^2+6x-18y-8z+49=0$.

16. Скласти рівняння конуса, якщо його вершина знаходиться в точці K (5; 0; 3), а напрямна задана рівнянням $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $z=0$.

17. Скласти рівняння циліндра, якщо дано рівняння його осі $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ і точка на його поверхні A (1; –2; 1).

18. Які геометричні образи задають рівняння: 1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$; 2) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

19. Знайти прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда, що проходить через точку M (4; –3; –2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

20. Знайти лінію перетину поверхні: 1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{8} = 1$ з площиною $z + 2 = 0$, визначити величину осей і вершин лінії; 2) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ з площиною $y + 6 = 0$, визначити параметри і вершини лінії.

21. Знайти прямолінійні твірні поверхні $\frac{x^2}{25} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, що проходять через точку A (5; 2; 4).

V. ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч.І. – М.: Просвещение, 1973. – 455 с.
2. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч.1. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Ч.І. – М: Просвещение, 1986. – 336 с.
4. Базылев В. Т. и др. Геометрия. Ч.І. – М.: Просвещение, 1974. – 351 с.
5. Дадаян А. А., Дударенко В. А. Алгебра и геометрия. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – 288 с.
6. Дадаян А. А., Маслова Е. С. Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры. – Минск: Вышэйшая школа, 1981. – 224 с.
7. Дадаян А. А., Маслова Е. С. Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры. – Минск: Вышэйшая школа, 1982. – 206 с.
8. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч.1,2. – К.: Вища школа, 1974. – 198 с.
9. Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 223 с.
10. Погорелов А. В. Геометрия. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
11. Погорєлов О. В. Геомерія 7-11. – К.: Освіта, 1993. – 314 с.
12. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
13. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 356 с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Коваленко Володимир Іванович

Нак Марина Миколаївна

Хайтова Оксана Михайлівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів
спеціальності «інформатика та фізика»

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 22.05.2019 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 6,28. Обл.-вид. 5,74.
Наклад 50 прим. Зам. № 877.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т.Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
Тел. 65-17-99. nuchk.tipograf@gmail.com