Національний університет "Чернігівський колегіум" імені Т.Г.Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня «магістр»

на тему:

Застосування диференціального та інтегрального числення у фізиці та геометрії

Виконала:

студентка 6 курсу, 62 групи

спеціальності

111 Математика

Асатурян Марія Павлівна

Науковий керівник:

к.пед.н., доц. Нак М.М.

Чернігів - 2021 р.

Роботу подано до розгляду «_____» ______________ 20___ року

Студент (ка) ___________________ ____________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник ___________________ ____________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент ___________________ ____________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри ____

(назва кафедри)

протокол № _____ від «_____» _____________ 20___ року.

Студент (ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри ___________________ ____________________________

(підпис) (прізвище та ініціали

Зміст

Вступ

Актуальність теми.

Дане наукове дослідження присвячене диференціальному та інтегральному численню. Поняття інтеграла та диференціала повністю пронизує сучасну математику. У фізичних та технічних науках знаходять досить багато різних варіацій інтегралів та похідних. Досить лише відкрити будь-яку книгу, яка стосується точних наук, як обов'язково зустрінеться знак інтеграла або диференціальне числення. До того ж, останнім часом ввійшли до активного вживання терміни як, наприклад «економічна інтеграція», «інтегральна схема», котрі не стосуються інтеграла в прямому значенні, проте зберігають смислове навантаження. Все частіше і частіше у економічних та соціальних сферах для обчислень використовується числення.

Фахівці сучасності мають достатньо добре вміти володіти математичним апаратом, котрий має неабияке значення у розвитку економіки, бізнесу, фінансової справи та ін. Основою математики є математичний аналіз, а фундамент математичного аналізу – диференціальне та інтегральне числення.

Тема «Застосування диференціального та інтегрального числення у геометрії та фізиці» була і є актуальною, оскільки диференціальне та інтегральне числення це основа математичного аналізу і є реалізацією міжпредметного зв'язку алгебри та математичного аналізу з геометрією, фізикою, інформатикою. Диференціальне та інтегральне числення також застосовують у статистиці, техніці, економіці, бізнесі, медицині та інших сферах, в яких за задачею можна побудувати математичну модель.

Головною метою області математики, що носить назву математичного аналізу є дослідження функцій, а саме тих, що утворюються при кількісному дослідженні задач класичної фізики, механіки, техніки. До того ж важливу роль відіграє вивчення функцій в достатньо малих околах кожної точки області функції. Найбільш простими та важливими питаннями, на котрі потрібно отримати відповідь, - чи зростає функція в околі даної точки (чи спадає) та яка швидкість цього зростання (чи спадання). Вивчення функцій в достатньо малому околі кожної точки складає предмет розділу математичного аналізу, що називається *диференціальним численням.*

Не менш важливою є обернена задача - якщо відома поведінка функції в околі кожної точки її області визначення, то як відновити функцію в цілому, тобто у всій області визначення? Дана задача складає предмет вивчення так званого *інтегрального числення.*

Мета та задачі дослідження. Метою дипломної роботи є розгляд основних понять диференціального та інтегрального числення та їх застосування в геометрії та фізиці при розв'язуванні задач.

Для досягнення мети поставлені наступні завдання:

- ознайомлення з науковою, науково-методичною літературою з теми дослідження;
- вибір необхідного матеріалу;
- систематизація та узагальнення його;
- розгляд поняття диференціального та інтегрального числення в математиці, їх види та елементи;
- дослідження та представлення прикладів застосування.

Об'єктом дослідження є особливості диференціала та інтеграла.

Предметом дослідження є застосування диференціального та інтегрального числення.

Методи дослідження. При розв'язуванні поставлених задач кваліфікаційної роботи були використані сучасна теорія вищої математики, роботи провідних вітчизняних і зарубіжних науковців, періодичні видання за поданою темою, інформація мережі Internet.

Апробація результатів дипломної роботи. Основні положення дипломної роботи висвітлені на науковій конференції студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання».

Обсяг та структура роботи. Наукова робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Вона викладена на 53 сторінки.

У першому розділі кваліфікаційної роботи представлені теоретичні положення диференціального числення та інтегрального числення окремо.

У другому розділі розглянуті методи та способи застосування числення. Практична частина присвячена аналізу задач і їх розв’язуванню.

Розділ 1. Теоретичні основи. Проблематика дослідження.

1.1 Диференціальне числення

Основний принцип диференціального числення доволі простий. Якщо не вдаватися в деталі, то він полягає в наступному. Нехай дана функція $y = f(x)$, тобто така, що її графіком є неперервна плавна лінія, що не є ламаною. Візьмемо малий інтервал, до якого належить дана точка x_0 (рис.1).

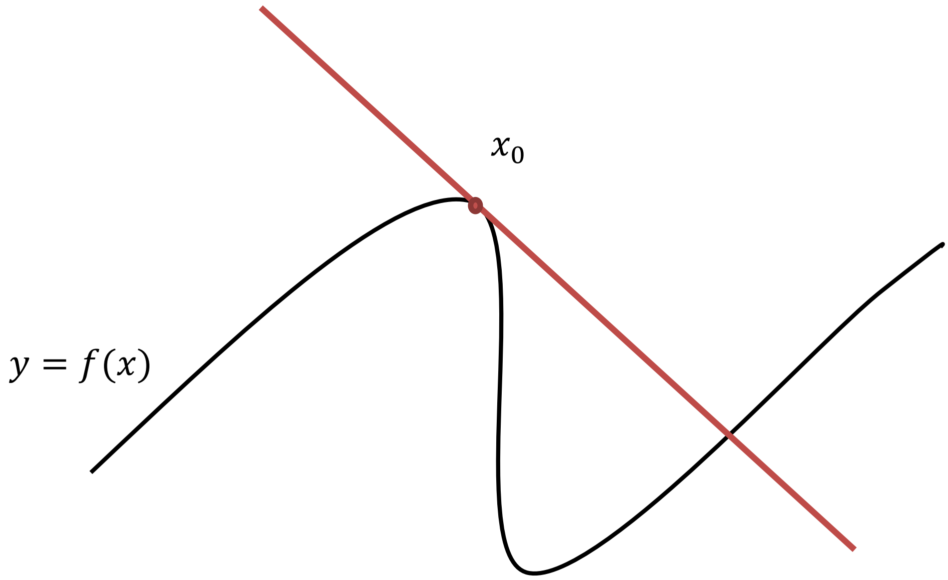

рис.1 Похідна функції

Якщо інтервал, що розглядається дійсно малий, то графік функції на цьому інтервалі не встигне зігнутися та буде наближатися до відрізку деякої прямої. Якщо розглядати всі інтервали більш малі, то дана частина графіка буде ще більше наближена до прямої. Частина графіка буде все більше прилягати до деякої прямої, а пряма є графіком лінійної функції. Звідси, можна стверджувати, що *будь-яка гладка функція на достатньо малому інтервалі зміни аргументу, майже лінійна і що меншим буде інтервал, тим ближчою буде функція до лінійної.*

Це і є сенс основного принципу диференціального числення.

Зрозуміло, що наведене формулювання принципу не є теоремою, оскільки передумова (гладкість функції)/неперервність та наближеність функції до лінійної не задані за допомогою строгих математичних визначень, лише за допомогою наочних геометричних прикладів. В цьому і є слабкість наведеного формулювання, але його важливість полягає в простоті та наочності, тому воно часто використовується в математиці.

Пряма, до якої найбільше прилягає графік функції $y = f(x)$ в околі точки з абсцисою x_0, називається *дотичною* до графіка в цій точці. Її кутовий коефіцієнт називається *значенням похідної* від функції $f(x)$ в точці x_0. Значення похідної в точці x_0 позначається $f'(x_0)$ або $y'_{x=x_0}$.

Значення похідної $f'(x_0)$ залежить від абсциси x_0 точки, для якої це значення визначається. Тому $f'(x_0)$ є значенням деякої функції, яка називається *похідною функції* $f(x)$. Дана функція позначається як $f'(x)$.

Розглянемо функцію $f(x)$ на інтервалі (a, b). Візьмемо точку $x_0 \in (a, b)$ і такий приріст аргументу Δx в цій точці, що $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Даному приросту аргументу буде відповідати приріст функції в точці x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тоді відношення приростів $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ в точці x_0 утворює функцію від Δx, оскільки для кожного значення $\Delta x \in (a - x_0, b - x_0)\backslash\{x_0\}$ існує єдине значення відношення приростів $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Точка являється точкою скупчення множини $(a - x_0, b - x_0)\backslash\{x_0\}$, а тому доречно розглядати границю відношення приростів в точці $\Delta x = 0$, а саме $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Границя, що отримали може існувати або й не існувати. [1]

Означення 1.1.1 (*похідної функції в точці*).

Якщо існує границя різницевого відношення $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то цю границю називають *похідною функції* $f(x)$ *в точці* x_0 і позначають $f'(x_0)$.

Тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Якщо у кожній точці $x \in (a, b)$ є похідна $f'(x)$ функції $f(x)$, то похідна цієї функції це функція, що залежить від x.

Означення 1.1.2 (*односторонніх похідних функцій*).

Лівосторонньою (правосторонньою) похідною називається границя зліва (справа) в точці Δx різницевого відношення функцій $f(x)$ в точці x_0. Позначення $f'_+(x_0)$ для правосторонньої похідної і $f'_-(x_0)$ для лівосторонньої.

Тобто $f'_\pm(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Розглянемо графік функції *(рис.2)* $y = f(x)$ на інтервалі (a, b).

Нехай точка $x \in (a, b)$, а Δx – такий приріст аргументу в точці x, що $x + \Delta x \in (a, b)$, тоді точки $M(x, f(x))$ і $P(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ належать графіку даної функції.

Означення 1.1.3 (*дотичної до графіка функції*) .

Дотичну до графіка функції $y = f(x)$ *в точці* M називають граничне положення січної MP при прямуванні точки P до точки M (тобто при $\Delta x \to 0$), якщо таке граничне положення існує (*рис. 2*)

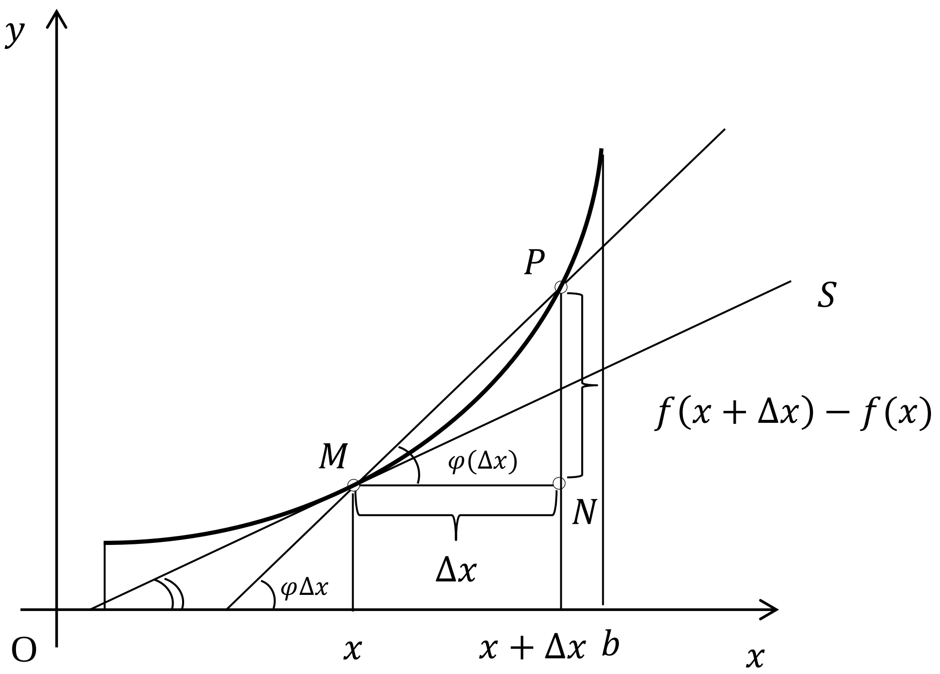

рис.2 Дотична до графіка функції

Теорема 1.1.1 (*геометричний зміст похідної*).

Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці x, тоді:

1) в точці $M(x, f(x))$ існує дотична до графіка даної функції;

2) кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу дотичної до додатного

напрямку осі OX) дорівнює похідній функції в точці x, тобто $tg\varphi_0 = f'(x)$.

З аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ та має відповідно кутовий коефіцієнт k, має вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, її нормаль $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$. Тоді, якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то з геометричного змісту похідної маємо, $k = f'(x_0)$, а *рівняння дотичної та нормалі до графіка функції у точці* $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ матимуть вигляд $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

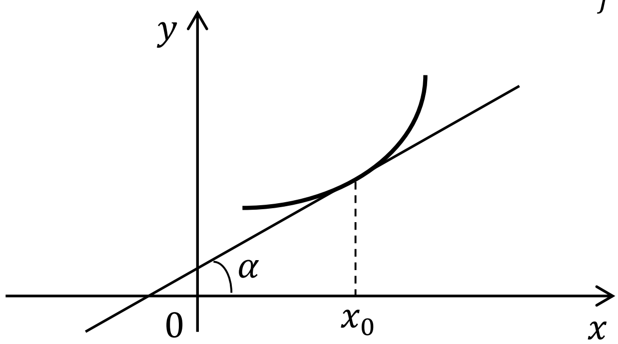

рис.3 Геометричний і фізичний зміст похідної

Фізичний зміст похідної:

Нехай функція переміщення матеріальної точки залежно від часу $t \in [0, T]$ має вигляд $S(t)$, а $t_0 \in [0, T]$, $t_0 + \Delta t \in [0, T]$. Тому середня швидкість матеріальної точки за час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює $\nu_{\text{ср}} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$.

Миттєва швидкість в момент часу t_0 дорівнює $\nu(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \nu_{cp}$, тому

$$\nu(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \nu_{cp} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} - S'(t_0).$$

Фізичний зміст похідної: похідна від функції переміщення в момент часу t_0 – це миттєва швидкість в цей момент часу.

<u>Теорема 1.1.2 (*похідна суми*)</u>

В тих точках, у котрих є диференційовні функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, теж є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, до того ж для всіх таких точок буде виконуватись рівність:

$\big(f(x)+f(x)\big)'=f'(x)+g'(x).$

Доведення:

Нехай x_0 – довільна задана точка, у якій функції f та g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y=f(x)+g(x)$ у точці x_0. Звідси маємно: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-f(x_0)-g(x_0)=\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)+\big(g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\big)=\Delta f+\Delta g.$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}==\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}).$

Якщо функції f та g диференційовні в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Звідси маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Отже, функція $y=f(x)+g'(x)$ – диференційована в точці x_0, до того ж її похідна у цій точці дорівнює $f'(x_0)+g'(x_0)$.

Теорема 1.1.3 (*похідна добутку*)

У таких точках, у яких диференційовними є функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$, також диференційовна функція $y=f(x)g(x)$, до того ж для всіх таких точок правильна рівність:

$$(f(x)g(x)')=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

Використовується також спрощений запис:

$$(fg)'=f'g+g'f$$

Доведення:

Нехай x_0 – довільна точка, в якій обидві функції f та g диференційовні. Далі знайдемо приріст функції $y=f(x)g(x)$ у точці x_0. Враховуючи рівності $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f, g(x_0+\Delta x)=g(x_0)+\Delta g$, тому:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)=$$
$$=(f(x_0)+\Delta f)(g(x_0)+\Delta g)-f(x_0)g(x_0)=$$
$$=f(x_0)g(x_0)+\Delta f\cdot g(x_0)+\Delta g\cdot f(x_0)+\Delta f\cdot\Delta g-f(x_0)g(x_0)=$$

$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta \mathrm{f}}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x)$$

Оскільки функції f та g диференційовні у точці x_0, то існують границі $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ та $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тому можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{g}}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{f}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{g}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

Отже, функція $y = f(x)g(x)$ – диференційовна у точці x_0, до того ж її похідна в цій точці маж вигляд:

$$f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

Теорема 1.1.4 (*похідна частки*)

У точках, у яких функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ диференційовні та значення функції g не рівне нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ теж диференційовна, до того ж для усіх подібних точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Доведення:

За означенням похідної та теоремами про границю суми, добутку та частки функцій маємо:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x)+\Delta f\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-\Delta g\cdot f(x)}{(g(x)+\Delta g)\cdot g(x)\cdot\Delta x} = = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}-f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2(x)+\Delta g\cdot g(x)} =$$

$$\frac{g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}} = \frac{f'g-fg\prime}{g^2+g\cdot 0} = \frac{f'g-fg\prime}{g^2}.$$

Теорема 1.1.5 (*про похідну складеної функції*)

Якщо функція $t = g(x)$ має похідну в точці $x \in X$, а функція $y = f(x)$ має похідну у відповідній точці $t = g(x) \in T$, тоді складна функція $y = q(x)$=f(g(x)) має похідну в точці x і має місце формула.

$y_x^I = y_u^I \cdot u_x^I$, де $u = g(x)$,

Доведення:

Вважатимемо, що функція $u = g(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u_0 = g(x_0)$, тобто існують такі границі $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ та $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \neq 0$.

Нехай аргументу x_0 надано приросту Δx, тоді змінна u набуде приросту $\Delta u \neq 0$. Оскільки $g(x)$ з приростом Δu, то функція у також буде мати приріст $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$.   Приріст Δx зумовив виникнення приросту Δu та Δy.

Подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$. Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$ (при цьому $\Delta u \to 0$)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Теорема 1.1.6 (*про похідну оберненої функції*).

Якщо функція $f(x)$, що задана на $[a, b]$, строго зростає, неперервна на $[a, b]$, має у всіх точках відрізку $[a, b]$ похідну $f'(x) \neq 0$, тоді:

1) існує обернена функція $f^{-1}(y)$, що задана, зростає, неперервна на $[f(a), f(b)]$,

2) у будь-якій точці $y = f(x)$ відрізка $[f(a), f(b)]$ обернена

функція $f^{-1}(y)$ має похідну, що обчислюється за формулою $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{g(x)}$.

Аналогічно дана теорема має місце і для спадної функції.

Якщо невід'ємна функція $y = f(x)$, що має похідну в точці x задається як добуток багатьох функцій або є показниково-степеневою функцією, то можна застосувати для обчислення похідної від неї логарифмічне диференціювання. Для цього обидві частини рівності логарифмують, тобто

$$y = f(x)$$

$$\ln y = \ln[f(x)]$$

Праву частину рівності перетворюють та використовують властивості логарифмів.

Диференційовність та диференціал функції.

Якщо існує похідна функції $f(x)$ в точці x_0, здійснюється рівність $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція в точці $\Delta x = 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Тоді приріст функції $f(x)$ в точці x_0 можна подати співвідношенням:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x). \tag{1.2}$$

Оскільки $f'(x_0)$ – стала у фіксованій т. x_0, то позначимо $A = f'(x_0)$. Функція $\Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою в точці $\Delta x = 0$ більш високого порядку за Δx, тобто $\Delta x \cdot \alpha(\Delta x) = \sigma(\Delta x)$. Тобто

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \sigma(\Delta x) \tag{1.3}$$

Означення 1.1.5 (*диференційованості і диференціалу*).

Якщо приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 можна представити у вигляді (1.3), то: 1) функція $f(x)$ називається *дифернційовною в точці* x_0,
2) головна лінійна частина приросту функції $A \cdot \Delta x$ називається *диференціалом функції* $f(x)$ *в точці* x_0 і позначається $df(x_0)$ (або $dy(x_0)$), тобто $df(x_0) = A \cdot \Delta x$.

Введемо позначення $dx = \Delta x$, тоді $df(x_0) = A \cdot dx$.

З поданих зауважень, наданих до означення випливає, що функція, яка має похідну в точці є в цій точці диференційовною.

За даним твердженням можна сформулювати теорему.

Теорема 1.1.7

Функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона в цій точці має похідну, крім того стала A в головній лінійній частині приросту функції дорівнює $f'(x_0)$.

Абсолютна похибка заміни Δf на df:

$$|\Delta f - df| = |\sigma(\Delta x)|$$

Відносна похибка: $\left|\frac{\Delta f - df}{\Delta f}\right| = \left|\frac{\sigma(\Delta x)}{A\Delta x + \sigma(\Delta x)}\right| = \left|\frac{\frac{\sigma(\Delta x)}{\Delta x}}{A + \frac{\sigma(\Delta x)}{\Delta x}}\right| = \alpha(\Delta x)$.

Властивості диференціалів:

$d(u \pm v) = du \pm dv$	$d(uv) = udv + vdu$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{x^2}$

З (*рис.4*) отримаємо:

$$\Delta f = PN = f(x + \Delta x) - f(x), df = f'(x)dx = tg(\alpha)\Delta x$$

$$\Delta x = MN, \triangle MNQ(\measuredangle N = 90°)$$

$$QN = MN - tg(\alpha)\Delta x$$

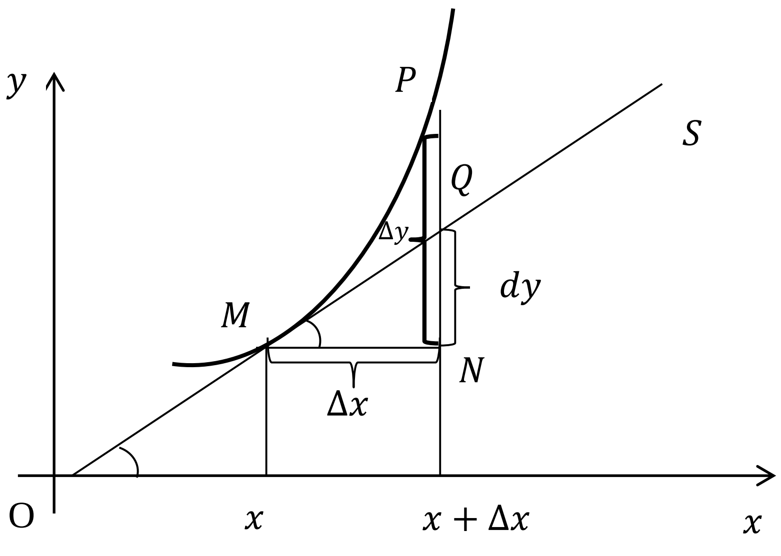

Рис.4 Геометричний зміст

Геометричний зміст диференціала: диференціал функції $y = f(x)$ в точці x – це приріст в т. $M(x, f(x))$ значень дотичної до графіка цієї функції.

Коли змінна x незалежна і коли x сама є диференційованою функцією, яка залежить від іншої змінної, форма першого диференціалу не змінюється, а саме: і в першому, і в другому випадках диференціал функції $f(x)$ дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал аргументу dx, тобто $df(x) = f'(x) \cdot dx$. Дана властивість диференціалу і є інваріантність форми першого диференціалу.

Нехай $f(x)$ – функція, задана на інтервалі (a, b) і диференційовна у всіх точках цього інтервалу. Тоді на інтервалі (a, b) визначена функція $f'(x)$. Якщо ця функція теж диференційовна у деякій точці x на інтервалі (a, b) (має похідну в цій точці), то значення похідної від функції $f'(x)$ в точці x має назву *друга похідна функції* $f(x)$ *в точці* x і позначається $f''(x)$, тобто $f''(x) \overset{def}{=} (f'(x))'$.

Якщо функція $f(x)$ в точці x має другу похідну $f''(x)$, то ф-я називається *двічі диференційовною* в цій точці.

За аналогією визначається третя, четверта похідні і тд. Якщо похідна $(n-1)$-го порядку від функції $f(x)$ вже визначена і функція $f^{(n-1)}(x)$ є задана на інтервалі (a, b) та диференційовна в деякій точці x інтервалу (a, b), то значення похідної від $f^{(n-1)}(x)$ у точці x називається похідною *n-го порядку від функції* $f(x)$ *в точці* x і позначається $f^{(n)}(x)$, тобто $f^{(n)}(x) \overset{def}{=} (f^{(n-1)}(x))'$.

Якщо функція $f(x)$ у точці x має похідну n-го порядку $f^{(n)}(x)$, то функція називається *n разів диференційовною* в цій точці.

Формула Лейбніца

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + u'v' + v'u' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + u''v' + 2(u''v' + u'v'') + u'v'' + uv'''$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Маємо формулу:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} =$$

$$= uv^{(n)} + nu'^{v^{(n-1)}} + \cdots + C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} + \cdots + nu^{(n-1)}\, v' + u^{(n)} v$$

Отже, у диференціальному численні основна задача – це знаходження похідної функції, що задана або ж швидкість зміни даної функції у порівнянні з її аргументом. Проте більш часто трапляються задачі обернені, коли є відома швидкість ходу деякого процесу, а треба відновити сам процес. Тобто за похідною $S'(t)$ потрібно відновлювати функцію $S(t)$. Такий розділ математичного аналізу, що вивчає відновлення функції за її похідною, називається інтегральним численням. [2]

1.2 Інтегральне числення

За *проміжок* будемо мати на увазі відрізок, інтервал, пів інтервал, промінь або числову пряму повністю.

<u>Означення 1.2.1</u>

Функція $F(x)$ називається *первісною (примітивною) функцією* для функції $f(x)$, на деякому проміжку, якщо в кожній точці цього проміжку $F(x)$ диференційована і $F'(x) = f(x)$.

Для функції $f(x) = x^2$ первісних безліч, але для того щоб їх записати, достатньо знати тільки одну.

<u>Теорема 1.2.1</u>

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то множина $\{F(x) + C | C \in R\}$ (2.1) є множиною усіх первісних для функції $f(x)$ на цьому проміжку.

З поданої теореми, знаючи лише одну первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, можливо знайти всю множину первісних для $f(x)$. Отже, можемо надати цій множині окрему назву.

Означення 1.2.2

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку, та позначається $\int f(x)dx$.

$\int$ – знак інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція.

$$\int f(x)dx \coloneqq F(x) + C, C \in R$$

Висновок: Щоб знайти невизначений інтеграл, достатньо знайти одну первісну, додати до неї довільну сталу, одержимо невизначений інтеграл.

Саму операцію пошуку інтегралу (або первісної) називають інтегруванням функції.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що якщо побудувати криву – графік деякої первісної функції $f(x)$, то решта кривих (графіки інших первісних для даної функції) одержуються шляхом зміщення кривої вздовж осі ординат на величину C *(рис. 5)*

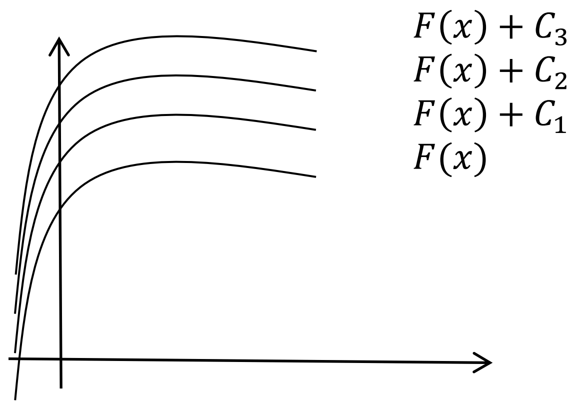

Рис. 5 Графік первісних

Основні властивості інтегралів:

1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції

$$d\int f(x)dx = f(x)dx;$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2) Невизначений інтеграл від диференціалу неперервно-диференційованої функції дорівнює цій самій функції з точністю до сталого доданка.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3) Відмінний від нуля сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій рівний такій самій сумі невизначених інтегралів даних функцій:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Якщо первісна деякої функції $f(x)$ є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражають через елементарну функцію.

У диференціальному численні було вказано, що похідна будь-якої елементарної функції так само є елементарною функцією, тобто операція диференціювання не виводить нас з класу елементарних функцій. Під час інтегрування можна вказати елементарні функції, інтеграли від яких вже не будуть елементарними. Загалом це такі інтеграли:

1) $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ (інтеграл Пуассона, або інтеграл помилок, який використовують в статистичній фізиці);
2) $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ (інтеграли Френеля, які використовуються в оптиці);
3) $li = \int \frac{dx}{\ln x}(x > 0; x \neq 1)$, $ci = \int \frac{\cos x}{x}dx(x \neq 0)$, $si = \int \frac{\sin x}{x}dx$ (інтегральний логарифм, інтегралиний косинус, синус).

<u>Означення 1.2.3</u>

Функції, які не є елементарними, але визначаються через елементарні функції за допомогою аналітичних співвідношень типу інтегрування чи диференціювання, зазвичай називають *спеціальними функціями*.

Існують різні методи інтегрування, які дозволяють зводити інтеграли до табличного виду.

1. *Метод безпосереднього інтегрування* опирається на таблицю інтегралів та основні властивості невизначеного інтеграла, зокрема лінійність:

$$\int \big(\alpha u(x) + \beta v(x)\big)dx = \alpha \int u(x)dx + \beta \int v(x)dx$$

Правило 1. Інтеграл суми довірнює сумі інтегралів.

Правило 2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

2. *Інтегрування заміною змінних.*

Теорема 1.2.2. Нехай функція $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{t})$ визначена і диференційована на проміжку T, а проміжок X,- множина її значень. Якщо функція $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ визначена на проміжку X, і має на ньому первісну F(x), тоді функція $\mathrm{F}(\varphi(\mathrm{t}))$ є первісною для функції $\mathrm{f}\big(\varphi(\mathrm{t})\big) \cdot \varphi'(\mathrm{t})$ на проміжку T і $\int \mathrm{f}\big(\varphi(\mathrm{t})\big) \cdot \varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \mathrm{F}\big(\varphi(\mathrm{t})\big) + \mathrm{C}$ (1.2.5)

Правило заміни змінної.

Підінтегральну функцію $f(x)$ намагаються подати у вигляді добутку складеної функції і похідної внутрішньої функції:

$f(x) = g\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$.

Якщо функція $g(t)$ має первісну $G(t)$, тоді

$$\int f(x)dx = \int g\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int g(t)dt =$$

$$= G(t) + C = G\big(\varphi(x)\big) + C$$

Правило підстановки.

Коли підставити у вираз під інтегралом $f(x)dx$ замість $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – диференційовна функція, яка має обернену $t = \varphi^{-1}(x)$, то $\int f(x)dx =$

$$\left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt = \int g(t)dt = |G'(t) = g(t)| = G(t) + C = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C\,.$$

3. *Інтегрування частинами.*

З диференціювання за правилом добутку функцій $u(x)$ і $v(x)$ маємо: $d(uv) = vdu + udv$. Якщо похідні або диференціали деяких функцій рівні, то їхні інтеграли теж рівні: $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, тому $\int udv = uv - \int vdu$ (1.2.4).

Теорема 1.2.3

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на деякому проміжку, і на цьому проміжку існує $\int vdu$, то існує й інтеграл $\int udv$ і має місце рівність (1.2.4), або $\int u(x)\, v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)\, u'(x)dx$. (1.2.5)

Суть методу інтегрування частинами в тому, що вираз, який під інтегралом подають у вигляді добутку udv, де і u і v – деякі функції від x, до того ж дані функції обирають так, щоб інтеграл $\int vdu$ був «простішим», ніж початковий. Далі для того щоб обчислити $\int vdu$ спочатку шукають du і $v = \int du$.

Метод інтегрування частинами досить доречно і зручно застосовувати у випадках, якщо підінтегральна функція має такий вигляд:

- $P_n(x)e^x$, $P_n(x)sinx$, $P_n(x)cosx$. Тут за $u(x)$ доречно приймати многочлен $P_n(x)$, а за $dv(x)$ відповідно $e^x dx$, $sinxdx$, $cosxdx$.
- $P_x(x)\ln x$, $P_n(x)arctgx$, $P_n(x)arcsinx$. Тут за $u(x)$ доречно взяти трансцендентний множник $(u = \ln x\,; u = arctgx; u = arcsinx)$, а за $dv = P_n(x)dx$.
- $e^{ax}sinbx$, $e^{ax}cosbx$. Тут вибір u та dv не так важливий, оскільки двократне застосування методу інтегрування частинами підводить до початкового інтегралу. Тоді для того, щоб обчислити інтеграл розв'язують лінійне рівняння.

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int arcsinxdx = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$$

Інтегральне числення вивчає визначення, властивості та застосування взаємопов’язаних понять, невизначеного інтеграла та визначеного інтеграла. Інтегруванням називається процес знаходження значення інтегралу.

Диференціальне числення будується на таких основних поняттях математики, як дійсні числа, функція, границя та неперервність.

Диференціальне й інтегральне числення вивчають змінні, так само як геометрія – форми, алгебра – операції та їх застосування. [3]

Інтегральне числення з’явилось в результаті розгляду великої кількості завдань з математики та природознавства. Досить важливою з них є задачі фізична, на знаходження пройденого шляху за даний час за відомою, проте можливо змінною швидкістю руху та більш давня задача на обчислення площ та об’ємів геометричних фігур.

Диференціальне та інтегральне числення застосовують та використовують майже в кожній області фізичних та математичних наук, комп’ютерних науках, економіці, медицині та інших. У цьому розділі розглянемо приклади застосування диференціального та інтегрального числення у геометрії, а також у фізиці.

Розділ 2. Застосування диференціального та інтегрального числення у геометрії

2.1 Застосування диференціального числення у геометрії

Формула диференціала $y = x^2$ має досить простий геометричний зміст. Якщо $S = x^2$ – площа квадрата, сторона котрого дорівнює x, тоді ΔS – площа фігури, на яку її площа збільшується. Звідси відомо, що за малих Δx основну частину даної площі займає площа двох прямокутників, котра дорівнює $2x\Delta x$, тобто диференціалу функції $S = x^2$. Вираз $(\Delta x)^2$ – площа квадрата, яка є нескінченно малою порівняно з Δx.

Візьмемо до розгляду рівняння кривої $y = f(x)$ (рис. 6). Розглянемо на кривій точку $M_1(x_1; y_1)$ та складемо рівняння дотичної до даної кривої в точці M_1, припустивши, що ця дотична не є паралельною до жодної координатної осі. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k та проходить через точку M_1 має такий вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Для дотичної $k = f'(x_1)$, рівняння дотичної буде таким:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

Пряма, що проходить через цю точку та перпендикулярна до дотичної в цій точці називається нормаллю до кривої в даній точці.

За означенням нормалі маємо, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{нормалі}}$ пов'язаний з кутовим коефіцієнтом $k_{\text{дотичної}}$ такою рівністю:

$k_{\text{нормалі}} = -\frac{1}{k_{\text{дотичної}}}$, тобто $k_{\text{нормалі}} = -\frac{1}{f'(x_1)}$.

Звідси маємо рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_1(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

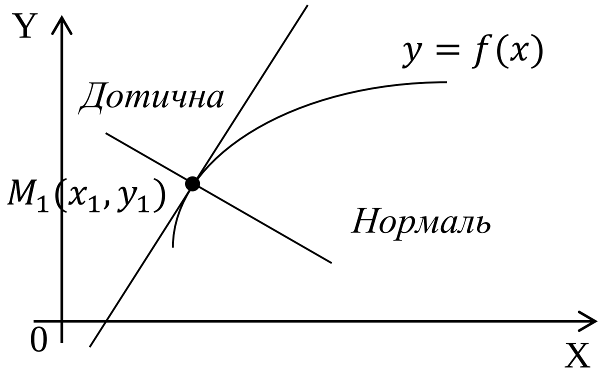

Рис. 6 Дотична до нормалі

Для того щоб розв’язати геометричну задачу, що приводить до диференціального числення, потрібно:

1) побудувати малюнок;

2) позначити шукану криву через $y = f(x)$ (коли задача розв'язується у прямокутних координатах), розділити умови, яким є місце в довільній точці кривої, а також ті, що виконуються для окремих точок (початкові умови);

3) виразити через x, y та y'. Тоді для задачі можна будувати її модель, звідки потрібно знайти невідому функцію $y = f(x)$;

4) знайти загальний розв’язок або інтеграл та вилучити з нього за допомогою початкових умов рівняння шуканої кривої.

За даним алгоритмом, розв’яжемо приклади застосування диференціального числення в геометрії.

Приклад 2.1.1

Перейти до натуральної параметризації заданої прямої рівнянням $\bar{r}(t) = (t + 1{,}2t - 3{,}3t)$.

Розв’язання

Знайдемо $\bar{r}(t) = (1{,}2{,}3)$, $|\bar{r}(t)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

$$s(t) = \int_0^t |\bar{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{14} dt = \sqrt{14} t.$$

Звідси $t = \frac{s}{\sqrt{14}}$.

Після того як підставимо, знайдене $t = t(s)$ у рівняння прямої, одержимо шукану натуральну параметризацію $r(s) = (\frac{s}{\sqrt{14}} + 1, \frac{2s}{\sqrt{14}} -$

$3, \frac{3s}{\sqrt{14}}$).[8]

Приклад 2.1.2

Нехай задана крива $\bar{r}(t) = (t+1, t^2 - t + 3, sin2t)$. Знайти рівняння дотичної прямої, нормальної та дотичної площини в точці

$M = \bar{r}(0)$. [8]

Розв'язання

Спочатку знайдемо декартові координати точки $M = \bar{r}(0) = (1{,}3{,}0)$. Напрямний вектор для дотичної прямої у довільній точці

$\bar{r}(t) = (1{,}2t - 1{,}2\cos(2t))$,

а в точці $M - \bar{r}'(0) = (1 - 1{,}2)$.

Канонічні рівняння дотичної прямої в точці М $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{2}$.

Для того щоб скласти рівняння нормальної площини ми маємо координати точки та координати нормального вектора.

Тому $1(x-1) + (-1)(y-3) + 2(z-0) = 0$, або після зведення подібних доданків, отримуємо рівняння нормальної площини у вигляді $x - y + 2z + 2 = 0$.

Далі знайдемо $\bar{r}'(t) = (0{,}2 - 4\sin(2t))$ в довільній точці, а потім в точці М, маємо $\bar{r}'(t) = (0{,}2 - 4\sin(2t))$ в довільній точці, а потім в точці М, отримаємо $\bar{r}'(t) = (0{,}2{,}0)$. Тепер можливо знайти координати нормального вектора дотичної площини у т. М:

$$[\bar{r}'(0), \bar{r}'(0)] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Тому звідси, координати нормального вектора дотичної площини є числа – 4, 0, 2.

Рівняння дотичної площини $-4(x-1) + 0(y-3) + 2(z-0) = 0$, або після зведення подібних доданків отримали $2x - z + 2 = 0$.

Приклад 2.1.3

Знайти рівняння дотичної прямої та нормальної площини до кривої

$\begin{cases} x^2 + v^2 + z^2 - 14 = 0 \\ x^2 - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ в точці M(1,2,3). [8]

Розв'язання

Крива, яка задана неявно, тобто належить одночасно до двох поверхонь. Для функції $F(x, y, z) = x^2 + v^2 + z^2 - 14$ знайдемо:

$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z.$

Підставивши координати точки M, отримаємо координати градієнта цієї функції $\overline{\nabla F}|_M = (2,4,6)$. За аналогією для функції $\Phi(x, y, z) = x^2 - y + 3z - 8$ $\Phi'_x = 2x$, $\Phi'_y = -1, \Phi'_z = 3,$

$\overline{\nabla\Phi}|_M = (2, -1,3).$

Знайдемо координати напрямного вектора дотичної прямої заданої кривої в точці M

$$\left[\overline{\nabla F, \nabla\phi}\right]|_M = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 18\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 10\bar{k} =$$
$$= (18,6, -10).$$

Отже, рівняння дотичної прямої $\frac{x-1}{18} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{-10}$, а рівняння нормальної площини $18(x - 1) + 6(y - 2) - 10(y - 3) = 0$.

<u>Приклад 2.1.4</u>

Знайти координати векторів базису Френе кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$ у точці M, що відповідає значенню параметра $t = 0$. [8]

Розв'язання

Знайдемо похідні $\bar{r}'(2t, 1,2\cos(2t))$, $\bar{r}'(t) = (2,0, -4\sin(2t))$. Підставивши значення параметра, отримаємо $\bar{r}'(0) = (0,1,2)$, $\bar{r}'(0) = (2,0,0)$.

Далі обчислюємо

$$[\bar{r}'(0), \bar{r}'(0)] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0,4, -2)$$

Для знаходження координат векторів базису Френе в точці $M =$

$\bar{r}(0)$ скористаємось формулами $\bar{m}_1(0) = \frac{\bar{r}\prime(0)}{|\bar{r}\prime(0)|}$, $\bar{m}_3(0) = [\bar{r}'(0), \bar{r}'(0)]$, $\bar{m}_2(0) = [\bar{m}_3, \bar{m}_1]$, звідси маємо

$$\bar{m}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}}(0,1,2) = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\bar{m}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

$$\bar{m}_3(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}}(0,1,2) = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

<u>Приклад 2.1.5</u>

Знайти кривину й скрут кривої $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t + 3, \sin(2t))$ в точці M, що відповідає значенню параметра $t = 0$. [8]

Розв'язання

Знайдемо похідні $\bar{r}'(t) = (2t, 1, 2\cos(2t))$, $\bar{r}'(t) = (2,0,-4\sin(2t))$, $\bar{r}'(t) = (0,0,-8\cos(2t))$.

Після того, як підставимо значення параметра, одержимо

$\bar{r}'(0) = (0,1,2), \bar{r}'(0) = (2,0,0), \bar{r}'(0) = (0,0,-8)$.

Далі обчислимо $|\bar{r}'(0)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$[\bar{r}'(0), \bar{r}'(0)] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 2\bar{k} =$$

$$= (0, 4, -2)$$

$$|[\bar{r}'(0), \bar{r}'(0)]| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\left(\bar{r}'(0), \bar{r}'(0), \bar{r}'(0)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16.$$

Використавши формули для кривини та скруту кривої, отримаємо $\aleph = \frac{(\bar{r}', \bar{r}', \bar{r}')}{|\bar{r}', \bar{r}\prime|} = \frac{16}{\left(2\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

<u>Приклад 2.1.6</u>

Відновити криву за її натуральними рівняннями $\begin{cases} k(s) = 2s \\ \aleph(s) = 0 \end{cases}$ [8]

Розв'язання

З умови скрут у довільний точці кривої дорівнює нулю. Це значить, що крива лежить у деякій площині. Візьмемо цю площину за OXY. Рівняння кривої шукатимемо у вигляді $\bar{r}(s) = (x(s), y(s), 0)$. Оскільки параметр натуральний, то $|\bar{r}'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} = 1$. Звідси випливає, що існує така функція $\alpha(s)$, що $x' = cos\alpha(s)$, $y' = sin\alpha(s)$, тобто $\bar{r}'(s) = (cos\alpha(s), sin\alpha(s), 0)$.

Знайдемо вектор кривини $\bar{r}'(s) = (cos\alpha(s), sin\alpha(s), 0)$.

Відомо, що $k(s) = |\bar{r}'(s)|$, тому

$k(s) = \sqrt{(-\alpha' sin\alpha)^2 + (\alpha' cos\alpha)^2} = \alpha'(s) = 2s$ або $\frac{d\alpha}{ds} = 2s$.

Звідси отримаємо, що $\alpha(s) = \int 2sds = s^2$.

<u>Приклад 2.1.7</u>

Знайти довжину дуги AB лінії $u = v$, що лежить на поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$, якщо $A(u = 0, v = 0)$, $B(u = 2, v = 2)$. [8]

Розв'язання

Нехай $v = t$. Тоді $u = t, du = dt$, $dv = dt$. Точка А відповідає значенню параметра $t = 0$, а точка В відповідає значенню $t = 2$ – параметр.

Знайдемо довжину дуги АВ, користуючись формулою:

$$s = \int_0^2 \sqrt{ds^2} = \int_0^2 \sqrt{(1 + sh^2 t)dt^2} = \int_0^2 chtdt = zht|_0^2 = sh2.$$

<u>Приклад 2.1.8</u>

Знайти кут між кривими $l_1: u = v$ й $l_2: u = -v$, що належать до поверхні з першою квадратичною формою

$ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$.[8]

Розв'язання

Точка перетину цих кривих $M(u = 0, v = 0)$.

Для кривої l_1 матимемо $du = dv$, а для кривої l_2:

$\delta u = -\delta v$. Використаємо формулу косинуса кута між лініями на поверхні, отримаємо

$$\cos\phi = \frac{du\delta u + sh^2u dv\delta v}{\sqrt{du^2 + sh^2u dv^2}\sqrt{\delta u^2 + sh^2u\delta v^2}} = \frac{-dv\delta v + sh^2 0 dv\delta v}{\sqrt{dv^2 + sh^2 0 dv^2}\sqrt{(-\delta v)^2 + sh^2 0\delta v^2}} = \frac{-dv\delta v}{\sqrt{dv^2}\sqrt{\delta v^2}} =$$

$$= -1.$$

Тому маємо, що $\phi = \pi$.

Приклад 2.1.9

Знайти площу фігури, що лежить на поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + sh^2u dv^2$ і обмежена лініями $u = 0, v = 0, u = 1, v = 2$. [8]

Розв'язання

Знайдемо підінтегральну функцію за формулою площі області на поверхні $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{sh^2u} = shu$.

Тоді $S = \int_0^2\int_0^1 shududv = 2\int_0^1 shudu = 2chu|_0^1 = 2ch1 - 2$.

Приклад 2.1.10

На поверхні $\bar{r}(u,v) = (ucosv, usinv, 2v)$ знайти лінії кривини і асимптотичні лінії. [8]

Розв'язання

Коефіцієнти першої і другої квадратичних форм можна знайти: $g_{11} = g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = u^2 + 4, \ \ h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = h_{21} = \frac{-2}{\sqrt{u^2+4}}$.

Підставимо дані вирази в рівняння $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$, яке є диференціальним рівнянням ліній кривини поверхні. Одержимо рівняння

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{u^2+4}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $(u^2 + 4)dv^2 - du^2 = 0$.

Основні напрямки у довільній точці поверхні вигладають так:

$\frac{dv}{du} = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}$, звідси $dv = \pm\frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$. Отримали рівняння з розділеними змінними. Після того як проінтегрували, отримали рівняння двох сімей ліній кривини у вигляді $v = C \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + 4})$.

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд $h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dy)^2 = 0$, оскільки за означенням у кожній точці асимптотичної лінії II=0. У цьому випадку воно має вигляд $\frac{-4dudv}{\sqrt{u^2+4}} = 0$. Звідси $du = 0$ або $dv = 0$. Тобто асимптотичні лінії поверхні – це координатні лінії $u = const$ і $v = const$.

Приклад 2.1.11

Крива $y = f(x)$ проходить через точку (1;2). Кожна дотична до неї перетинає пряму y =1 у точці з абсцисою, що рівна подвоєній абсцисі точки дотику. Знайдіть криву. [11]

Розв'язання

Нехай $M(x;y)$ - довільна точка на заданій кривій (малюнок). Рівняння дотичної, що проведена до даної кривої в точці М, буде мати такий вигляд: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, де X, Y – координати довільної точки прямої. (рис.6)

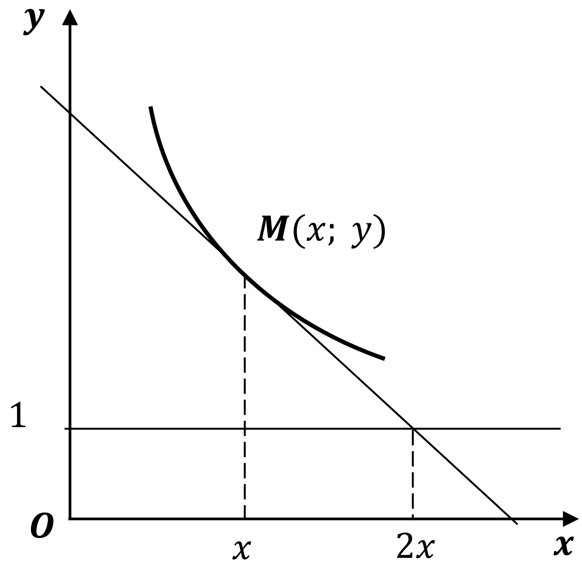

Рис.7

З умови, що дотична перетинає y=1 в точці з абсцисою 2x, отримаємо диференціальне рівняння $1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x)$; $x\frac{dy}{dx} = 1 - y$.

Відокремивши змінні та про інтегрувавши дане рівняння, отримаємо

$y - 1 = \frac{C}{x}$.

Крива проходить через точку (1;2), а тому C=1.

Отже, $y = 1 + \frac{1}{x}$ – шукана крива.

Приклад 2.1.12

Знайти криві, в яких нормаль стала (дорівнює a). Визначити з них ту криву, яка проходить через точку $M_0(0;1)$. [11]

Розв'язання

Рівняння нормалі у точці M(x;y) (див. малюнок) $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$. При Y=0: $-y = -\frac{1}{y'}(X_A - x)$ або $yy' = X_A - x$. Довжина відрізка MA нормалі:

$MA^2 = (X_A - x)^2 + y^2$, та, за умовою, $a^2 = (X_A - x)^2 + y^2$. Тоді $\sqrt{a^2 - y^2} = \pm y'y$; $y' = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$; $\pm\frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx$; $\mp\sqrt{a^2 - y^2} = x + C$.

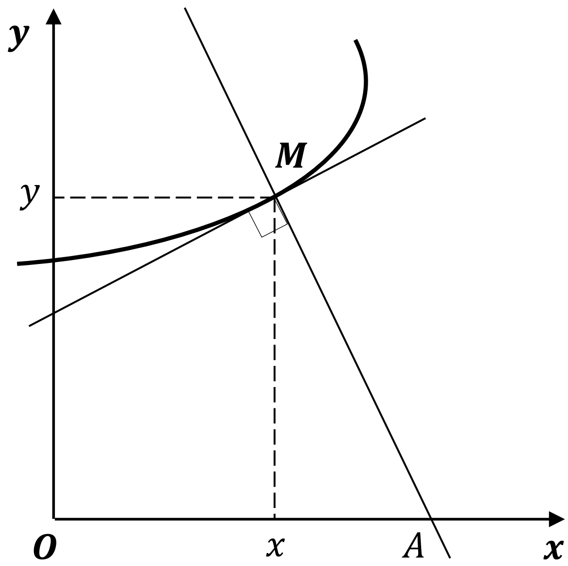

Рис.8

З початкової умови (x=0 при y=1) маємо $C = \mp\sqrt{a^2 - 1}$, а рівняння шуканої кривої: $(x \pm \sqrt{a^2 - 1})^2 + y^2 = a^2$.

Приклад 2.1.13

Знайти лінію, для якої сума нормалі і під нормалі пропорційна абсцисі точки дотику.[11]

Розв'язання

Піднормаль $TK = -yy'$.

Зрозуміло, що $MT = \sqrt{KM^2 + KT^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = |y|\sqrt{1 + (y')^2}$.

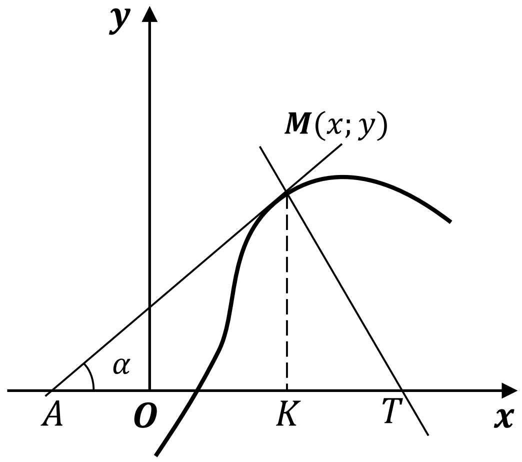

Рис.9

Тому, виходячи з умови задачі, маємо диференціальне рівняння $|y|\sqrt{1 + (y')^2} - yy' = kx$, або після розв'язку відносно похідної - однорідне рівняння $y' = \frac{y^2 - k^2x^2}{2kxy}$.

$y = Ux, y' = U'x + U$. $\quad U'x + U = \frac{U^2x^2 - k^2x^2}{2kxUx}, U'x + U = \frac{U^2 - k^2}{2kU}$,

$U'x = \frac{U^2 - k^2 - 2kU^2}{2kU}, \frac{2kU}{(1-2k)U^2 - k^2} dU = \frac{dx}{x}$.

Інтегруючи та повернувшись до змінних на початку, отримаємо рівняння шуканої кривої $y^2 = Cx^{\frac{1}{k}} + \frac{k^2x^2}{1-2k}$.

<u>Приклад 2.1.14</u>

Площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою біжучої точки M кривої та дотичною до кривої в даній точці, є стала величина a^2. Знайти криву.[11]

Розв'язання

Відрізок, який відділяє дотична на осі Oy, дорівнює $|y - xy'|$. Площа трапеції, яка зображена на рисунку, $\frac{y - xy' + y}{2} x = a^2$. Звідси маємо диференціальне рівняння: $y'^{x^2} - 2xy + 2a^2 = 0$ - лінійне рівняння. Його загальний розв'язок $y = Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}$ (С – довільна стала).

Коли за умовою задачі розглянути треба площу криволінійної трапеції, що обмежена змінною дугою шуканої кривої або довжину цієї дуги, то використовують їх подання через визначений інтеграл зі змінною верхньою межею: $\int_{x_0}^{x} |y| dx$ $і$ $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2} dx$ відповідно (у декартових координатах). Тоді до диференціального р-ня переходять після диференціювання співвідношення, що відповідає умові.

2.2 Застосування інтегрального числення у геометрії

За допомогою використання інтегралів можна обчислювати площу, об'єм, довжину.

Теорема (площа криволінійної трапеції)

Нехай $y = f(x)$ – непарна та невід'ємна на відрізку $[a, b]$ функція, а S – площа відповідної криволінійної трапеції. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на інтервалі, що містить відрізок $[a, b]$, то

$$S = \int_a^b [F(b) - F(a)]\, dx$$

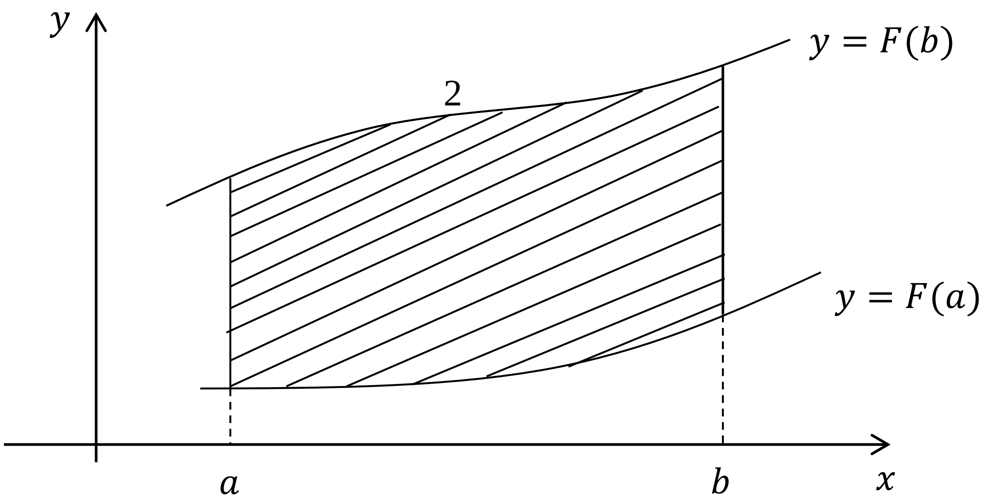

Рис. 10 Криволінійна трапеція

Теорема(об'єм за допомогою визначеного інтеграла)

Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком заданої функції $y = f(x)$, що неперервна та невід'ємна на відрізку $[a, b]$, Ox та прямими $x = a$ і $x = b$.

Внаслідок обертання даної криволінійної трапеції навколо осі Ox

утворилося тіло, об’єм котрого можливо обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Розглянемо приклади застосування інтегрального числення у геометрії на знаходження площі та довжини.

Приклад 2.2.1

Обчисліть площу плоскої фігури, що обмежена лініями $y = 1 - x, y = x^2 - 2x - 1$. [4]

Спочатку шукаємо координати точок M_1, M_2 перетину заданих ліній (прямої та параболи) як розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = x^2 - 2x - 1, \end{cases} \quad x^2 - 2x - 1 = 1 - x, \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2, M_1 = M_1(-1,2), M_2 = M_2(2,-1)$$

та зобразимо описану плоску фігуру

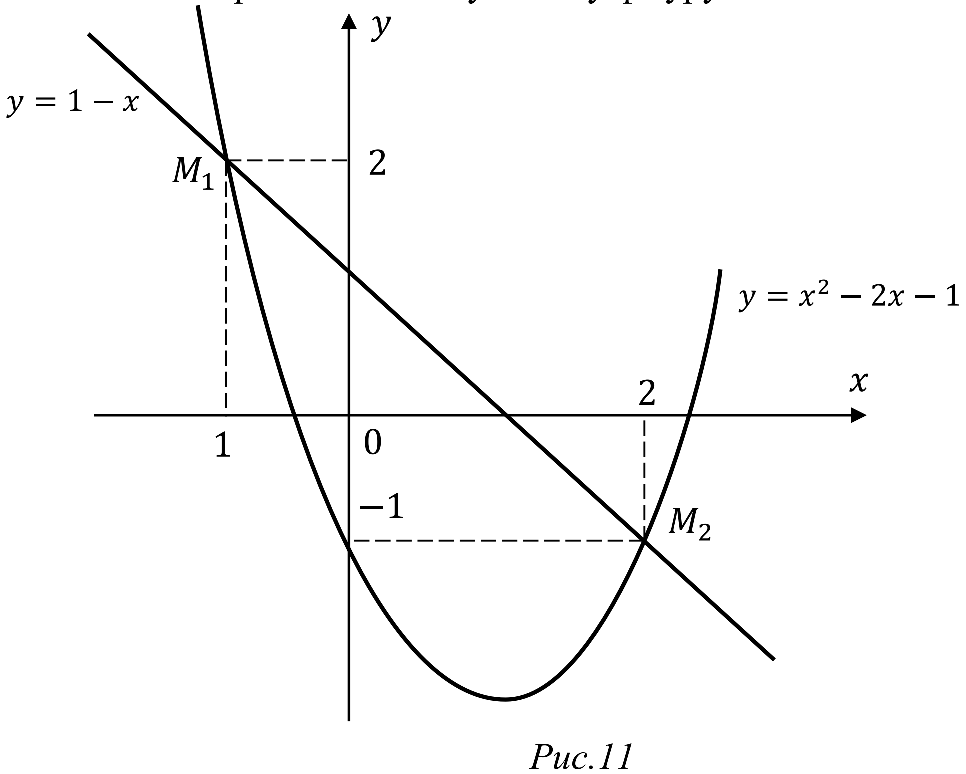

Рис.11

Для знаходження площі S фігури застосуємо формулу

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx,$$

за якою маємо

$$S = \int_{-1}^{2} (1 - x - x^2 + 2x + 1)dx = \int_{-1}^{2} (2 + x + x^2)dx = (2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}|_{-1}^{2} =$$

$= 4 + 2 - \frac{8}{3} - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$

Приклад 2.2.2

Знайти площу плоскої фігури, яка обмежена неявно заданою кривою за допомогою рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Крива є еліпсом, а рівняння задається також параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint, \end{cases} t \in [0,2\pi]$. [4]

Позначимо площу усієї фігури, яка обмежена еліпсом, через S. Унаслідок симетрії еліпса досить обрахувати площу тільки четвертої частини заданої фігури, яка заштрихована на зображенні. Для цього використаємо формулу $\frac{S}{4} = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$, беручи до уваги те, що $0 = acos\frac{\pi}{2}, a = acos0$, і, отже, $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$.

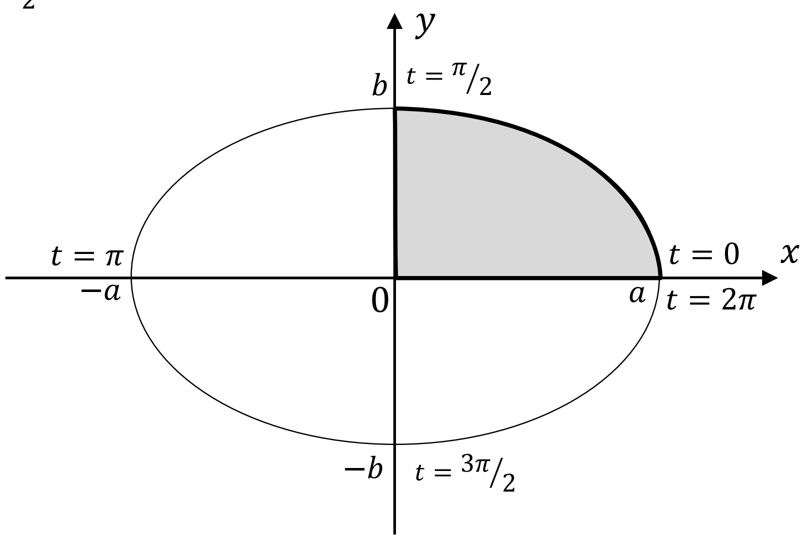

Рис. 12

Отримаємо, врахувавши наведену в прикладах рівність,

$$\frac{S}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint(-asint)dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2tdt = ab\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$S = \pi ab$$

Приклад 2.2.3

Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена лінією, що задана рівнянням $\rho = a(1 + cos\varphi)$, де ρ, φ – полярні координати. [4]

Бачимо, що коли φ буде змінюватись на проміжку $[0,2\pi]$, точка (φ, ρ) опише замкнену криву, яка має назву *кардіоїда* і є симетричною відносно полярної осі.

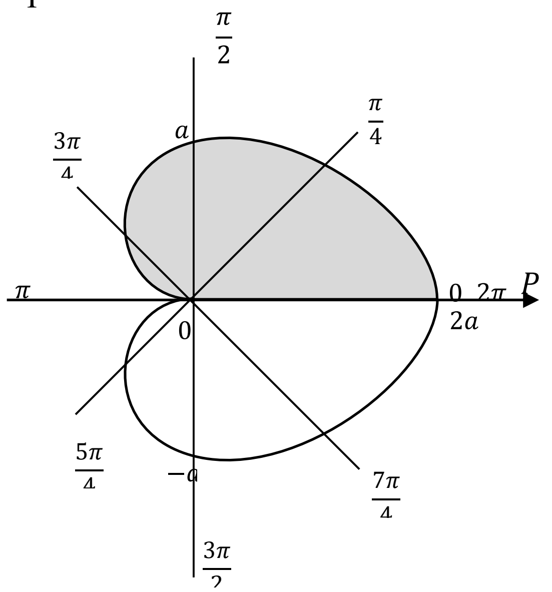

Рис.13

Унаслідок цього доцільно обчислювати половину площі S заданої фігури (на мал.. заштрихована) за допомогою формули $\frac{S}{1} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$, де $\alpha = 0, \beta = \pi$.

$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + 2cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + cos2\varphi)\right)d\varphi =$

$\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2sin\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right)|_0^{\pi} = \frac{3a^2\pi}{4}$

$$S = \frac{3a^2\pi}{2}$$

<u>Приклад 2.2.4</u>

Обчислити довжину L дуги кривої заданої явно рівнянням в декартових координатах $y = \frac{1}{2}(3 - e^x - e^{-x}, x \in [0,3]$. [4]

У відповідності з формулою $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ маємо, враховуючи, що $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx,\ (chx)' = shx, ch^2x - sh^2x = 1,$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + sh^2xdx}dx = \int_0^3 \sqrt{ch^2x}dx = \int_0^3 chxdx = shx|_0^3 = sh3$$

<u>Приклад 2.2.5</u>

Обчислити довжину L дуги кривої заданої заданої параметрично з допомогою рівнянь $\begin{cases} x = acos^3t, \\ y = asin^3t, \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$. [4]

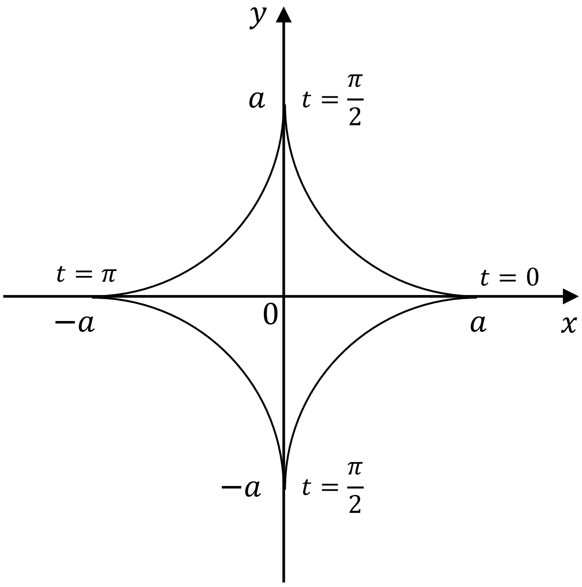

Рис.14

Дана крива зображена на малюнку та називається астроїдою.

Щоб при завершенні інтегрування уникнути розкривання модулів, доцільно унаслідок симетрії астроїди обчислювати четверту частину її довжини L (відповідна частина астроїди виділена на зображенні).

$$\frac{L}{4} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-3acos^2tsint]^2 + [3asin^2tcost]^2} dt =$$

$$= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} costsintdt == \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2tdt = -\frac{3a}{4} cos2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(-2) = \frac{3a}{2},\ L =$$

$$= 6a.$$

<u>Приклад 2.2.6</u>

Обчислити довжину L дуги кривої заданої у полярних координатах рівнянням $\rho = a(1 - sin\varphi)$. [4]

Це кардіоїда, яка зображена на рисунку, але повернута на кут $-\frac{\pi}{2}$.

Для спрощення розрахунків слід використати її симетрію та знаходити половину довжини L даної кривої, що виділена на рисунку.

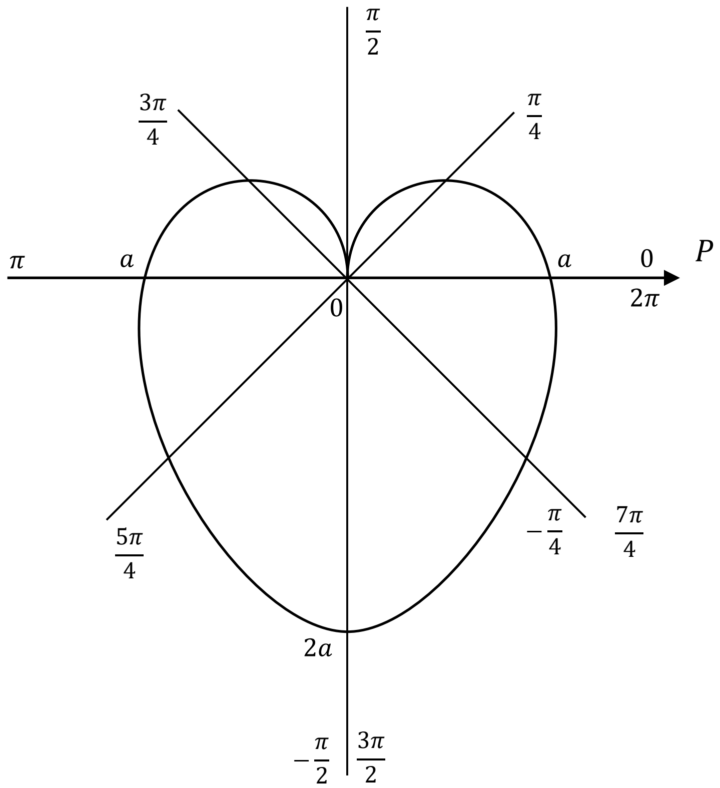

Рис.15

$$\frac{L}{2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - sin\varphi)^2 + a^2cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2sin\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi} d\varphi = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 - sin\varphi)} d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \varphi = t - \frac{\pi}{2} \\ d\varphi = dt \end{matrix} \right| = a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + cost)} dt = a \int_0^{\pi} \sqrt{4cos^2\frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{\pi} cos\frac{t}{2} dt =$$

$$= 4asin\frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a$$

$$L = 8a$$

Диференціальне та інтегральне числення також використовують у фізиці, приклади застосування розглянемо в наступному розділі.

Розділ 3. Застосування диференціального та інтегрального числення у фізиці

3.1 Застосування диференціального числення у фізиці

Для того, щоб розв'язати фізичні задачі за допомогою диференціального числення, необхідно поетапно реалізувати схему такого виду:

1. Підготовчий етап

а) встановити величини, що змінюються у заданому процесі і знайти фізичні закони, які пов'язують їх;

б) обрати незалежну змінну та її функцію, котру потрібно знайти;

в) з умови задачі, знайти початкові та(або) крайові умови.

2. Формалізація задачі

Використавши ідею лінеаризації – заміни функцій, що розглядають на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями та вважаючи швидкості зміни величин, що описують процес, сталою:

а) отримати наближену рівність, поділити на приріст аргументу та перейти до границі;

3. Розв'язування математичної задачі всередині збудованої моделі.

Знаходження загального розв'язку або загального інтегралу диференціального рівняння та за початковими (крайовими) умовами вилучити з нього частинний.

4. Інтерпретація результату

Дослідити отриманий розв'язок, тобто:

а) перевірити розмірність;

б) обрати оптимальний результат для циклу подібних задач.

Робота. Знайдемо роботу, котру виконує дана сила F під час переміщення по осі Ox. Якщо сила F постійна, то робота A дорівнює добутку сили на довжину шляху. Коли сила змінюється, то розглянемо її як функцію від x: $F = F(x)$. Приріст роботи A на $[x, x + dx]$ неможливо точно обчислити як $F(x)dx$, оскільки сила на даному відрізку змінюється. Проте при малих dx

можна вважати, що сила не значно змінюється і диференціалом роботи буде $dA = F(x)dx$. Отже, сила це похідна роботи з переміщення.

Заряд. Нехай q – заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за час t. Якщо сила струму не змінюється, то за час dt струм перенесе заряд Idt. За сили струму, яка змінна з часом, $I(t)dt$ дає основну частину приросту заряду на малому відрізку часу $[I, t \pm dt]$. Диференціал заряду: $dq = I(t)dt$. Звідси сила струму це похідна заряду за часом.

Маса тонкого стержня. Нехай існує неоднорідний тонкий стержень. Маса шматка стержня від точки O до I - $m = m(I)$. Неоднорідність стержня значить, що його лінійна щільність не стала, а залежна від положення точки I за деяким законом $p = p(I)$. Якщо на малому відрізку стержня $[I, I + dI]$ щільність постійна та рівня $p(I)$, то $p(I)dI$ дає диференціал маси dm. Отже, лінійна щільність – похідна маси за довжиною.

Теплота. Для розгляду візьмемо процес нагрівання деякої речовини та обчислимо кількість теплоти $Q(T)$, що необхідна для нагрівання 1 кг речовини від 0°C до T. Залежність $Q = Q(T)$ досить складна та досліджується і визначається експериментально. Якщо б теплоємність з даної речовини не залежала від температури, то з cdT мали б зміну кількості теплоти. На малому відрізку $[T, T + dT]$ теплоємність постійна, звідси маємо диференціал кількості теплоти $dQ = c(T)dT$. Тому теплоємність є похідною теплоти за температурою.

Перейдемо безпосередньо до розгляду задач на застосування диференціального числення.

<u>Приклад 3.1.1</u>

На дні циліндричного резервуара висотою H і радіусом основи R, наповненого водою, є невеликий круглий отвір площею S.[11]

Знайти закон зміни рівня води h в резервуарі в залежності від часу та час, за який витече вся вода. Коефіцієнт витікання k.

Розв'язання

1. Нехай t – незалежна змінна, $h(t)$ – залежна змінна, функція від часу,яку і треба знайти. Початкові умови: при t =0 $h(t)$=H.   Швидкість витікання води з отвору обчислюється за законом Торрічеллі: $v = k\sqrt{2gh}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 – прискорення вільного падіння.

2. а) $v(t) = k\sqrt{2gh(t)}$.

$$v(t+\Delta t) = k\sqrt{2gh(t+\Delta t)} = k\sqrt{2g(h(t)+\Delta h} =$$

$$= k\sqrt{2gh(t)(1+\frac{\Delta h}{h(t)})}, \text{тобто } v(t+\Delta t) = k\sqrt{2gh(t)} \cdot \sqrt{1+\frac{\Delta h}{h(t)}}$$

(тут $\Delta h < 0$). $v_{\text{сер}} = \frac{v(t)+v(t+\Delta t)}{2} = k\sqrt{2gh(t)} + 0\big(k\sqrt{2gh(t)}\big) = k(2gh(t) + \alpha$, де $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = 0$.

Прирівнявши величини звільненого об’єму в резервуарі та об’єму води, що вилилась в циліндричну трубку через отвір: $-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{2gh}S$.

б) Зроблений «миттєвий знімок» процесу витікання води за нескінченно малий проміжок часу dt, якому відповідає нескінченно мала зміна висоти dh. Прирівнюючи з попереднім випадком, два вирази для одного і того самого об’єкту, одразу отримаємо диференціальне рівняння у диференціальній формі $-\pi R^2 dh = k\sqrt{2gh}Sdt$.

3. Відокремивши змінні, інтегруємо дане диференціальне рівняння. Маємо $-\frac{dh}{\sqrt{h}} - \frac{kS\sqrt{2g}}{\pi R^2}dt$; $-2\sqrt{h} - \frac{kS\sqrt{2g}}{\pi R^2}dt + C$.

Використовуючи початкові умови, знайдемо сталу інтегрування:

$-2\sqrt{H} = C$. Отже, $h = (\sqrt{H} - \frac{\sqrt{2gk}S}{2\pi R^2}t)^2$ – закон зміни рівня води.

Час повного витікання: $h = 0{:}\, t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{\pi R^2}{Sk}$.

5. Розмірність правої частини рівності для визначення часу: $T = L^2 \frac{\sqrt{L}}{L^2(\sqrt{\frac{L}{T^2}})}$.

Приклад 3.1.2

Нехай даний тонкий однорідний стержень масою М та довжиною l. Матеріальна точка масою m знаходиться на осі стержня на відстані від його лівого кінця. Знайти силу тяжіння стержня та матеріальної точки. [11]

За законом Ньютона F тяжіння між матеріальними точками з масами m_1 та m_2, розташованими на відстані одна від одної, вираховується за формулою $Fk = \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Позначимо $F(x)$ силу, з якою частина даного стержня з початком в лівому кінці та з довжиною притягує матеріальну точку. За законом Ньютона та з рисунку

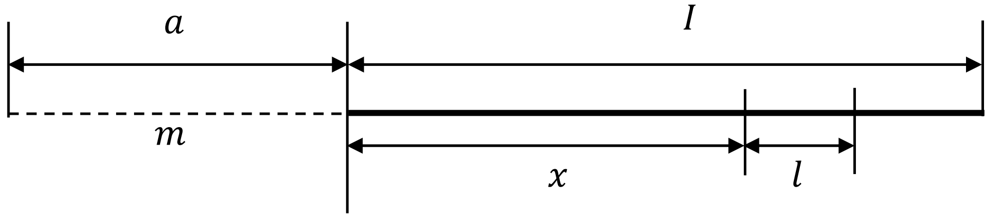

Рис.16

маємо, що приріст $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$, що є силою тяжіння заданої точки та частини стержня Δ, виражається наближеною формулою

$$\Delta F \approx k \frac{m(\frac{M}{l})}{(a+x)^2} \Delta x.$$

Дана формула була б точною, якби вся маса $(\frac{M}{l})\Delta$ частини стержня Δ була зосереджена в точці. Звідси отримуємо, що зі зменшенням Δ формула стає все більш точною. Тому диференціальне рівняння поданої задачі має вигляд $dF = k \frac{m(\frac{M}{l})}{(a+x)} dx$.

Інтегруючи його, отримаємо $F(x) = -k \frac{m(M/l)}{(a+x)} C$.

З початкової умови $F(0)\ 0$ випливає, що $C\ k = \frac{(\frac{M}{l})}{a}$.

Тому $F(x) = k \frac{(\frac{M}{l})}{(a+x)} + k \frac{m(\frac{M}{l})}{a}$

Тяжіння маси всім стержнем виражається формулою

$$F(l) = k\frac{M}{(a\ l)}$$

<u>Приклад 3.1.3</u>

У банку, котра до початку експерименту містила L л води, починає безперервно поступати зі швидкістю 1л за хвилину розчин, в кожному літрі якого міститься m кг солі. Розчин, що поступає в банку, миттєво переміщується з вмістом банки, і суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в банці через t хвилин після початку експерименту? [11]

Розв'язання

Нехай через t хвилин з початку експерименту в банці було $x(t)$ кг солі.

Знайдемо, на скільки зміниться кількість солі від моменту t до моменту $t + \Delta t$. За одну хвилину поступає l літрів розчину, за Δt хвилин - $l\Delta t$ літрів; у цих $l\Delta t$ літрах міститься $l\Delta t$ кг солі. З іншої сторони, за час Δt з банки витікає $lt\Delta$ літрів розчину. В моменту t у банці міститься (t) кг солі, тому, в $l\Delta t$ л розчину, що витікає, містилося б $x(t)(\frac{l}{L})\Delta t$ кг солі, якби за час Δt вміст солі в банці не змінювався. Звідси маємо, що приріст $\Delta = x(t + \Delta t) - x(t)$ кількості солі в банці виражається наступною наближеною формулою

$$\Delta \approx \left(m - \frac{x}{L}\right) l\Delta t.$$

При $\Delta x, \Delta t \to 0$ попередня наближена рівність перетворюється на точну. Тому диференціальне рівняння задачі має вигляд

$$dx\left(m\ \frac{x}{L}\right) ldt = \dot{x} - \left(\frac{l}{L}\right) x + ml$$

Під час розв'язування даного лінійного неоднорідного рівняння, отримаємо $(t) = Ce^{(l/L)t} + mL.$

З початкової умови (0) випливає, що $C - mL$. Тому, звідси

$$x(t) = mL(1 - e^{-\left(\frac{l}{L}\right)t}.$$

Приклад 3.1.4

Струмовий кабель з мідного дроту та ізоляції. Якщо через x позначити відношення радіус мідного дроту до товщини ізоляції, тоді швидкість телеграфування $v = Ax^2 \ln\frac{1}{x}$. При якому x, буде найбільша швидкість?

Розв'язання:

За умовою досліджуємо функцію $v = Ax^2 \ln\frac{1}{x}$ на екстремум і знайдем її найбільше значення.

$$D(v): x \in (0; \infty).$$

$v'(x) = 2Ax\ln\frac{1}{x} - Ax = A(2x\ln\frac{1}{x} - x), v'(x) = 0: 2x\ln\frac{1}{x} - x = 0, x(2\ln\frac{1}{x} -$
$-1) = 0{,}0$

$$x = 0, \qquad 2\ln\frac{1}{x} = 1, \ \ \ln\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{2}}, \ \ x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$

Звідси, $x = 0$, $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ – критичні точки.

$$v''(x) = A\left(\ln\frac{1}{x} - 2\right), v''(0)\nexists,$$

$$v''\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right) = A\left(\ln\frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} - 2\right) = A\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -1.5A < 0$$

Отже, $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ – точка максимуму. Ця точка єдина, тому при $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ функція набуває найбільшого значення.

Приклад 3.1.5

Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом V . Які повинні бути його розміри, для того, щоб на виготовлення пішло якомога менше матеріалу?

Візьмемо параметри циліндра: радіус основи R і висоту H . Вони пов'язані між собою уже заданим об'ємом $V = \pi R^2 H$, звідки $H = \frac{V}{\pi R^2}$.

Площа поверхні циліндра: $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.

Підставивши у вираз співвідношення $H = \frac{V}{\pi R^2}$, отримаємо функцію залежності поверхні циліндра від радіуса основи S(R) :

$S(\mathrm{R}) = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$.

Критичні точки даної функції:

$S'(\mathrm{R}) = 4\pi R + \frac{2V}{R^2}$. $S'(\mathrm{R}) = 0$: $\frac{2V}{R^2} = 4\pi R$, $R^3 = \frac{V}{2\pi}$, тоді $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Знайдемо вид екстремуму в критичній точці: $S``(\mathrm{R}) = 4\pi + \frac{4V}{R^3}$,

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0.$$

Друга похідна в критичній точці додатна, а отже, $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ - точка мінімуму та в цій точці функція має найменше значення.

Звідси розміри циліндра: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Приклад 3.1.6

За заданої довжини, міцність балки прямокутного перерізу пропорційна ширині і квадрату висоти. З циліндричного стовбура дерева діаметром d Потрібно вирізати найміцнішу балку. Визначити ширину та висоту балки.

Розв'язання:

Позначимо ширину балки x , та висоту h (x > 0, h > 0) . Розміри балки пов'язані з діаметром стовбура теоремою Піфагора: $d^2 = h^2 + x^2$, звідки $h^2 = d^2 - x^2$.

Залежність між міцністю балки та її розмірами можна визначити за функцією $f(x,h) = kxh^2$, або $f(x) = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3)$, де k - коефіцієнт пропорційності (k > 0).

Дослідимо функцію f (x) на екстремум: $f`(x) = k(d^2 - 3x^2)$.

Критичні точки: f ′(x) = 0 або $d^2 - 3x^2 = 0, x^2 = \frac{d^2}{3}$. Врахувавши, що x>0, отримаємо одну критичну точку $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

$f``(x) = -6kx, f``(x) = -6k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0$, тому $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ - точка максимуму, а функція f (x) досягає в цій точці найбільшого значення.

Визначаємо висоту балки: $h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3}, h = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$

Найміцніша балка матиме ширину $\frac{d}{\sqrt{3}}$ та висоту $\sqrt{\frac{2}{3}}d.$

<u>Приклад 3.1.7</u>

Визначити, яким повинен бути опір r електронагрівного приладу, що ввімкнутий в коло струму опору R, для того, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти, якщо $Q = \frac{rE^2}{(R+r)^2}$.

Розв'язання

За умовою задачі дослідимо функцію $Q(r) = \frac{rE^2}{(R+r)^2}$ на екстремуми та знайдемо її найбільше значення. D(Q): x∈(0;∞).

$Q`(r) = \frac{E^2(R+r)^2 - rE^2(2r+2r)}{(R+r)^4} = \frac{E^2\left((R+r)^2 - r(4r)\right)}{(R+r)^4} = \frac{E^2((R+r)^2 - 4r^2)}{(R+r)^3} = \frac{E^2(R^2+2Rr-3r^2)}{(R+r)^3}.$

$Q`(r) = 0: E^2(R^2 + 2Rr - 3r^2) = 0,$ звідки $D = (2R)^2 + 4 \cdot 3 \cdot R^2 = 16R^2,$

$r_1 = \frac{-2R+4R}{-6} = -\frac{R}{3}, r_2 = \frac{-2R-4R}{-6} = R$ – критичні точки.

$$r_1 = -\frac{R}{3} < 0 - \text{не задовольняє умову задачі.}$$

$Q''(r) = \frac{E^2(2R-6r)(R+r)^3 - E^2(R^2+2Rr-3r^2)(3R^2+6Rr-9r^2)}{(R+r)^6} = \frac{E^2((2R-6r)(R+r)^3 - 3(R^2+2Rr-3r^2)^2)}{(R+r)^6},$

$Q''(R) = \frac{E^2((2R-6R)(R+R)^3 - 3(R^2+2RR-3R^2)^2)}{(R+R)^6} = \frac{E^2(-4R)(2R)^3}{(2R)^6} = \frac{-32E^2R^4}{64R^6} = -\frac{E^2}{2R^2} < 0.$

Звідси, $r_2 = R$ - точка максимуму. Дана точка єдина, звідси випливає, що при $r_2 = R$ функція набуває найбільшого значення.

Отже, опір r електронагрівного приладу повинен дорівнювати R, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти.

3.2 Застосування інтегрального числення у фізиці

За допомогою визначеного інтегралу можна визначити: роботу при змінній силі, робота при змінній потужності, координата тіла, швидкість, маса стержня, електричний заряд, кількість теплоти.

$A = \int_a^b F(x)dx$ - робота при змінній силі

$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$ – робота при змінній потужності

$x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ – координата тіла

$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ – швидкість тіла

$m = \int_0^l \rho(x)dx$ – маса стержня

$q(t) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ – електронний заряд

$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$ – кількість теплоти

Застосування вищенаведених формул можна зустріти в наступних задачах.

Приклад 3.2.1

Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб відкачати воду із ями глибиною 4м, маючи квадратний переріз зі стороною 2м. Густина вони $\rho = 10^3$кг/м^3 . [21]

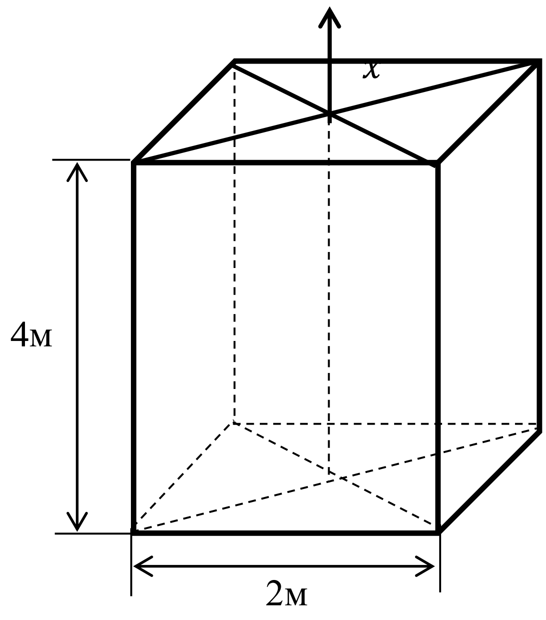

Рис.17

Спрямуємо вісь Ох уздовж діючої сили. Значення сили $F(x)$, що діє на переріз прямокутного паралелепіпеда площею $4\,\text{м}^2$, визначається вагою шару води, що знаходить вища від цього перерізу. Отже,

$$F(x) = S_{\text{осн}} \cdot H \cdot \rho g = 4\rho g(4 - x), x \in [0; 4], g \approx 9{,}8\text{м/с}^2$$

$A = \int_0^4 4\rho g(4 - x)dx = 4\rho g\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)|_0^4 = 4\rho g(16 - 8) = 32 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \approx 313{,}6 \cdot 10^3(\text{Дж}) \approx 3{,}1 \cdot 10^5(\text{Дж})$.

Приклад 3.2.2

Знайти масу стержня за довжиною 35см, коли його лінійна густина змінюється за законом $\rho(1) = (4l + 3)(\frac{\text{кг}}{\text{м}})$

Розв'язання

$$m = \int_0^{0{,}35} (4l + 3)dl = (2l^2 + 3l)|_0^{0{,}35} = 1{,}295 \approx 1{,}3(\text{кг})$$

За означенням,сила струму є похідною від кількості електрики $Q = Q(t)$, де t – час, тобто $I(t) = Q'(t)$. А тому функція $Q = Q(t)$ – це первісна для функції $I = I(t)$, а тому кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час від $t1$ до $t2$, можна вирахувати за формулою $Q = \int_{t1}^{t2} I(t)dt$.

Приклад 3.2.3

Знаходження кількості електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за 10с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = (4t + 1)(A)$.

Розв'язання

$$q = \int_0^{10} (4t + 1)dt = (2t^2 + t)|_0^{10} = 210(\text{Кл})$$

Приклад 3.2.4

Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лініями: $y = cosx$; $y = sinx$; $x = 0$. [21]

Розв'язання

Область D, яку займає пластина в площині xOy, зображення на рисунку

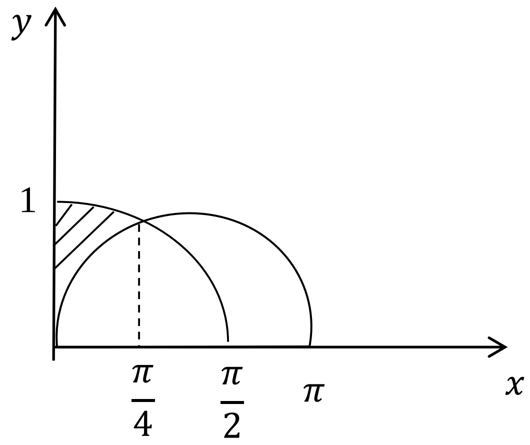

Рис.18

Точка перетинання кривих $y = cosx$ і $y = sinx$ має абсцису $x = \frac{\pi}{4}$.

За формулою $m = \int\int_D \gamma(x,y)dS$ для $\gamma = 1$ маємо:

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{sinx}^{cosx} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y|_{sinx}^{cosx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)dx = (sinx + cosx)|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4$$

<u>Приклад 3.2.5</u>

Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривини $y^2 = x, x^2 = y$

Розв'язання

Параболи перетинаються в точках (0,0) і (1,1)

Оскільки пластина однорідна, то $y = 1$, і маса пластини знаходяться за формулою $m = \int\int_D \gamma(x,y)dS$:

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)|_0^1 = \frac{1}{3}$$

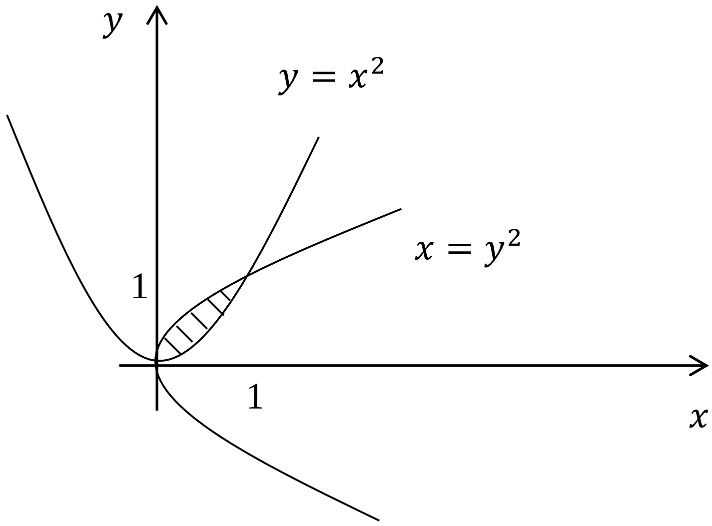

Рис.19

Статичні моменти знаходяться за допомогою використання формул:

$$M_x = \iint_D ydxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20};$$

$$M_y = \iint_D xdxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xdy = \int_0^1 x(y)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Отже,координати центра мас дорівнюють:

$x_c = \frac{9}{20}$; $y_c = \frac{9}{20}$

Висновки

У кваліфікаційній роботі присутні теоретичні обґрунтування та матеріали про диференціальне та інтегральне числення. Представлено способи та варіанти застосування диференціального та інтегрального числення у геометрії та фізиці.

Під час виконання роботи були використані наукові, науково-методичні джерела з теми, праці провідних вітчизняних і зарубіжних науковців, періодичні видання за поданою темою. Було систематизовано та узагальнено всю інформацію. Після аналізу теорії було представлено приклади застосування диференціального та інтегрального числення у геометрії та фізиці.

У першому розділі кваліфікаційної роботи розглянуто теоретичні положення та основні поняття диференціального та інтегрального числення. Викладено основні аспекти числення, розглянуто основні теоретичні відомості.

У другому розділі розглянуті вправи на застосування диференціального та інтегрального числення саме у геометрії.

У третьому розділі наведені приклади застосування диференціального та інтегрального числення у фізиці.

Провели практичне закріплення з теми, проілюстрували міжпредметні зв'язки математичного аналізу з геометрією та фізикою. Практична частина присвячена розгляду вправ різного типу та на різні теми. Дана робота доводить, що розглянута тема є актуальною у вивченні та дослідженні різних тем та задач.

Список використаних та рекомендованих джерел

1. Фадєєв Д.К., Нікулін М.С., Соколовський І.Ф., Москва «Наука», «Елементи вищої математики для школярів», 1987, 336с.

2. Д'яченко Н.М., Клименко М.І., Запоріжжя: «Диференціальне числення функції однієї змінної», 2008, $[\text{с.} 5-25]$, 98 с.

3. Ковтонюк М.М., Вінниця: «Лекції з математичного аналізу», 2009, $[\text{с.} 7-21]$, 273 с.

4. Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2011 р., 51 с.

5. Дубініна О.М., Харків: «Визначений інтеграл і система комп'ютерної математики MATHCAD», 2017, 227с.

6. Врановський А.Ц., Карплюк С.О., Житомир: «Диференціальна геометрія», 2013, 25с.

7. Бусарова Т.М., Кравець В.В., Міхєєва Н.В., Петренко В.О., Дніпропетровськ: «Інтегральне числення», 2006, 57с.

8. Величко І.Г., Гургєнідзе М.О., Стєганцева П.Г., Запоріжжя: «Диференціальна геометрія кривих та поверхонь» 2009, 75с.

9. Ніколенко В.В., «Інтегральне числення. Первісна. Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування. Методпідстановки. Інтегрування частинами.», 29с.

10. http://mathem-kstuca.ucoz.ua/Liter/diff_calc_econ_ua.pdf

11. Григоренко В.К., Лила Д.М., Черкаси: «Диференціальні рівняння», Вид. від. Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, 2011. − 232 с.

12. Дюкарев Ю.М., Літвінова О.Г., Харків: «Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення», 2010, 139с.

13. Geometrichne-zastosuvannya-diferentsialnogo.pdf
Це документ із сайту web.kpi.kharkov.ua

14. Гайдей В.О., Федорова Л.Б., Алєксєєва І.В., Диховичний О.О., Київ: «Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної», 2013, 103с.

15. Аршава О.О., Кононенко А.І., Поклонський Є.В., Котульська О.І, Харків: «Поверхневі інтеграли», 2011, 41с.

16. Пришляк О., Київ: Вид.-поліграфічний центр «Київський університет», 2004, 68с.

17. Диференціальне та інтегральне числення : навч. посіб. / С. Банах ; пер. з пол. та ред. П.І. Каленюка, О.М. Рибицької. – Львів : Львівська політехніка, 2017. – 428 с.

18. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч.-метод. посіб. / [О. Я. Мильо та ін.] ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. - Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. - 267 с.

19. Вища математика : збірник задач. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2006.- 648 с.

20. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навчальний посібник / І. В. Абрамчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. - 152 с.

21. https://naurok.com.ua/urok-zastosuvannya-pohidnoi-ta-integralu-u-fizici-140353.html