Національний університет “Чернігівський колегіум” імені Т.Г. Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня “магістр”

на тему

Функціональна змістова лінія в курсі математики профільної школи

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 61

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Топорець Т. О.

Науковий керівник:

доцент, к. п. н. Філон Л. Г.

Чернігів − 2019

Роботу подано до розгляду «____» ________________20___року.

Студент (ка) _______________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _______________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент _______________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики та економіки

протокол №_____від «____» _________________ 20___ року.

Студент (ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний етап розвитку суспільства ставить нові вимоги до підготовки випускників освітніх установ, які здатні працювати у швидко мінливих умовах, використовувати наявні знання, вміння та навички для орієнтації та прийняття рішень у новій ситуації, для формування процедури вирішення проблеми. Нові умови вимагають від випускників бути компетентними у предметних областях, вміти застосовувати знання у новій ситуації, володіти навичками критичного мислення для раціонального використання інформації. Учителі й викладачі постали перед проблемою практичної реалізації компетентнісного підходу до процесу навчання й виховання. Компетентнісний підхід необхідно реалізовувати на всіх рівнях навчання учнів, при вивченні ними всіх навчальних предметів.

У сучасних умовах розвитку освіти в Україні ефективність математичної освіти пов’язується з рівнем сформованості в учнів математичної компетентності. Компетентнісні результати навчання визначено у «Державному стандарті базової і повної середньої загальної освіти» [6], вимогах до засвоєння програмового змісту з математики, до контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів. Математична компетентність учнів визначається як поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини, які забезпечують успішне розв'язання проблем, що потребують застосування математики. Мають на увазі не конкретні математичні вміння, а більш загальні здатності, що включають математичне мислення, математичну аргументацію, постановку, розв'язання математичної проблеми, математичне моделювання.

Математична компетентність належить до 10 ключових компетентностей випускника школи. Математична компетентність передбачає культуру логічного й алгоритмічного мислення, учні мають набути вміння застосовувати математичні методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах, здатність до побудови, розуміння і використання простих математичних моделей.

Матеріальна єдність світу проявляється у взаємозв'язку різних явищ та процесів, що відбуваються в природі. При розгляді цих явищ доводиться враховувати зміни одних величин в залежності від зміни інших. Наприклад, розглядаючи рух ми встановлюємо залежність пройденого шляху від часу; при визначенні площ фігур ми можемо вказати на залежність між площею круга та його радіусом; при вивченні теплової дії струму – залежність кількості тепла, що виділяється від величини струму, опору провідника та часу протікання струму. Розкриття зв'язків та встановлення залежностей між величинами, залученими в тому чи іншому процесі, призводить до відкриття певних законів і є головною задачею природничих та технічних наук. Такі залежності є функціональними.

Саме поняття функціональної залежності відображає об'єктивні закономірності природи — рухливість і взаємну обумовленість реальних величин. Важлива роль у підготовці майбутніх фахівців належить розвитку умінь будувати та досліджувати ці функціональні залежності. Це поняття є основним у вищій математиці, тому свідоме засвоєння його в школі — важлива передумова до засвоєння його у курсі вищої математики.

Таким чином, вивчення функцій є центральним у шкільному курсі математики як з теоретичного, так і з прикладного погляду.

Функціональна змістова лінія — провідна у профільному навчанні математики. Вона має величезне значення для формування математичної компетентності учнів, а саме: вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміти будувати модель, досліджувати її методами математики.

Водночас практика навчання показує, що у вивченні функцій учні часто зазнають труднощів, допускають помилки під час встановлення властивостей функцій, їх дослідження та застосування. Тому запровадження компетентнісного підходу в навчанні функцій – нагальна потреба сьогодення.

Об'єкт дослідження –навчання алгебри і початків аналізу в профільній школі.

Предмет дослідження – цілі, зміст та організація вивчення функцій в профільній школі.

Мета дослідження – розробити методичні рекомендації навчання учнів функціональних понять на засадах компетентнісно орієнтованого підходу в класах фізико-математичного профілю.

Реалізація поставленої мети передбачає розв'язання таких **завдань**:

1) проаналізувати особливості трактування поняття «функція» у математичній науці та шкільному курсі математики; розкрити теоретичні основи навчання функціональної змістової лінії;

2) з'ясувати значення функціональної змістової лінії у формуванні математичної компетентності учнів, її місце теми у профільному навчанні математики та провести порівняльний аналіз трактування основних функціональних понять у чинних шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу;

3) розробити методичні рекомендації до формування основних функціональних понять під час вивчення конкретних видів функцій з урахуванням компетентнісного підходу;

4) розробити систему прикладних задач, орієнтованих на вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю, та методичні рекомендації до її використання у навчальному процесі;

5) експериментально перевірити окремі положення дослідження та з'ясувати їх ефективність.

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань були використані такі **методи дослідження**:

теоретичні – системний і порівняльний аналіз психолого-педагогічної і науково-методичної літератури для виявлення провідних тенденцій у навчанні математики, з'ясування цілей та завдань вивчення функцій; аналіз програм, підручників і навчальних посібників, порівняння;

емпіричні – спостереження, бесіди з учителями, учнями, аналіз уроків, письмових робіт учнів, узагальнення передового педагогічного досвіду.

Апробація дослідження. За темою дослідження підготовлена доповідь на Всеукраїнську науково-практичну конференцію студентів, аспірантів і молодих учених (м. Чернігів, 2019). Опубліковано тези доповіді «Функціональна складова зовнішнього незалежного оцінювання з математики» до Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених [27].

Розділ 1. НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1. Еволюція підходів до означення поняття «функція» в математиці

Ідея функціональної залежності прийшла з давнини. Її зміст можна знайти в перших математичних співвідношеннях між величинами, у перших правилах дій над числами, у перших формулах для знаходження площ і об’ємів. Так, вавилонські вчені ще 4–5 тисяч років тому експериментальним шляхом установили, що площа круга є функцією від його радіуса, і дізналися її наближену формулу: $S = 3r^2$.

Прикладами таблично заданих функцій є астрономічні таблиці вавилонян, античних греків і індійців, таблиці квадратів і кубів чисел, які також застосовували вавилоняни.

Чіткого уявлення поняття функції в XVII ст. ще не було, проте шлях до такого поняття проклав Рене Декарт. У своїй «Геометрії» в 1637 р. він систематично розглядав лише ті криві, які можна було задати за допомогою рівнянь, притому переважно алгебраїчних. Так з’явилася можливість записувати загальні формули.

У «Геометрії» Декарта і в роботах Ферма, Ньютона, Лейбніца поняття функції мало інтуїтивний характер і було пов’язане або з геометричним, або з механічним уявленням: ординати точок кривих – функції від абсцис, шлях і швидкість – функції від часу тощо.

Термін *функція* (від латинського *functio* – вчинення, виконання) у 1694 р. запровадив німецький математик Лейбніц. Функціями він назвав абсциси, ординати та інші відрізки, пов’язані з точкою, що рухається вздовж певної лінії. Термін «функція від *x*» стали вживати Лейбніц і Бернуллі; починаючи з 1698 р. Лейбніц увів також терміни *змінна* і *константа*. Для позначення довільної функції від x Йоганн Бернуллі застосовував знак φ_x , називаючи φ характеристикою функції. Лейбніц застосовував позначення x^1 , x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$; Ейлер позначав функцію як $f:(x)$ замість сучасного $f(x)$, а Д'Аламбер писав так: fx або $f(x)$, тобто прийшов до сучасного позначення функції [9 с.71].

Явне означення поняття функції вперше дав у 1718 р. один з учнів Лейбніца, видатний швейцарський математик Йоганн Бернуллі: «Функцією змінної величини називають кількість, утворену будь-яким способом із цієї змінної величини і констант».

Остаточно означення функції сформулював у своїй праці «Введення в аналіз нескінченних» (1748 р.) видатний учень Йоганна Бернуллі Леонард Ейлер, який дещо змінив означення свого вчителя. Означив Ейлер функцію так: «Функція змінної кількості є аналітичним виразом, який складено деяким чином із цієї кількості і чисел або сталих кількостей». Так розуміли функцію протягом майже всього XVIII ст.

У XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку. Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Больцано, а узагальнив – німецький математик Діріхле. У 1837 р. він так сформулював загальне означення поняття функції: «y є функцією змінної x (на відрізку $a \ll x \ll b$), якщо кожному значенню x (на цьому відрізку) відповідає цілком визначене значення y, причому неважливо, у який спосіб установлено цю відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або просто словами». Скорочене й осучаснене саме таке означення функції трапляється в більшості шкільних підручників [9 с.72].

Аналіз навчально-методичної літератури для шкіл і вищих навчальних закладів свідчить, що в ній існують два підходи до означення функції: класичний і сучасний.

У межах *класичного підходу* є кілька напрямів до розуміння поняття функції. Зокрема, функцію тлумачать як:

1) змінну величину, числові значення якої змінюються залежно від числових значень іншої змінної величини;

2) закон (або правило), за яким значення залежної змінної величини змінюються за зміни незалежної змінної;

3) відповідність між значеннями змінних величин.

Означеннями класичного напряму послуговуються природничі науки. Недоліками цих означень є те, що, по-перше, вони ґрунтуються на понятті «величина», зміст якого не можна розкрити; по-друге, вони не охоплюють відповідностей між об'єктами будь-якої природи [22 с. 237].

Сучасний підхід у тлумаченні поняття функції охоплює такі означення, які ґрунтуються на теоретико-множинній основі та використовують поняття «відповідність», «множина». У межах цього підходу також існує кілька напрямів:

1) означають не саму функцію, а лише функціональну ситуацію;

2) функцію розглядають як відповідність або відношення між певними множинами;

3) функцію означають як закон відповідності між множинами:

Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, при якій кожному значенню змінної x з множини D відповідає одне й тільки одне значення змінної y з множини E. При цьому вважають, що: x — *незалежна змінна або аргумент;* y — *залежна змінна або функція;* f — символ закону відповідності; D — область визначення функції; E — *множина значень функції.*

Означення сучасного напряму охоплюють широкий клас об'єктів будь-якої природи, тому їх можна використовувати і в традиційних застосуваннях математики (зокрема, у природничих науках) і в тих, які виникли останніми десятиріччями.

У зв'язку з модернізацією шкільної математичної освіти і завданням наближення її до ідей та методів сучасної математичної науки з 70-х років XX ст. змінилося місце поняття функції в шкільних програмах і підручниках, а також його тлумачення. Якщо в традиційному курсі алгебри означення класичного напряму вводилось у 8 класі (за старою нумерацією), то з 70-х років XX ст. поняття функції стало предметом вивчення в 6 класі, а означення сучасного напряму формулювалося через поняття відповідності між множинами. Щоправда, упродовж трьох десятиріч була спроба подавати в шкільних підручниках алгебри різні варіанти сучасних означень. Так, у перших виданнях навчального посібника з алгебри за редакцією О. І. Маркушевича функція означалась як відповідність між множинами *X* і *У*, за якої кожному елементу першої множини *X* відповідає єдиний елемент другої множини *У*. Була спроба означити функцію як відношення між елементами двох множин *X* і *У*, за якого кожному елементу множини *X* відповідає не більше ніж один елемент множини *У*. Проте знову повернулися до означення функції як відповідності певного виду між двома множинами [22 с. 238].

Шкільна практика тих років і експериментальні дослідження з проблем методики навчання математики показали, що сучасні означення функції як відповідності між множинами або як бінарного відношення між елементами двох множин, маючи безсумнівні переваги перед іншими підходами до означення функції з погляду математичної строгості, виявились невдалими для сприймання учнями. Поняття функції вони пов'язували зі стрілочними діаграмами, які використовуються для ілюстрації лише скінченних множин. Крім того, ці означення позбавляли функцію її основної риси — динамічності і не використовувалися для характеристики реальних процесів, особливо в суміжних предметах. [22 с. 238]

У сучасних підручниках поняття функції вводять у 7-му класі. Так, наприклад, у підручнику [12 с. 134] поняття функції трактують «як правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної». Виявилося, що для такого пояснення функції учні підготовлені життєвим досвідом і легше його сприймають. Це не виключає можливості надалі в курсі алгебри і початків аналізу ознайомити учнів із сучасним означенням функції як відповідності між двома множинами. Так, в 10-му класі автор підручника [18 с. 16] надає наступне означення: «Числовою функцією з областю визначення *D* називається залежність, при якій кожному числу *x* із множини *D* (області визначення) ставиться у відповідність єдине число *y*».

1.2 Місце функціональної змістової лінії у профільному навчанні математики та її значення у формуванні математичної компетентності учнів

Згідно з навчальними програмами МОН України [17], вивчення математики в профільній школі відбувається на рівні стандарту або на профільному рівні.

Профільний рівень — для учнів, які вивчатимуть математику на профільному рівні, укладено 2 навчальні програми: одна призначена для учнів, які до 10 класу навчались в загальноосвітніх класах і вирішили обрати математичний профіль лише в 10 класі *(профільний рівень*). Інша програма розрахована на учнів, які вивчали математику поглиблено з 8 класу (*поглиблений рівень).*

У курсі алгебри і початків аналізу в 10 класі продовжується розвиток функціональної лінії.

Розглянемо більш детально змістове наповнення програми профільного рівня функціональною складовою. Програма *профільного рівня* для 10 класу передбачає введення поняття числової функції після опрацювання теми «Множини, операції над множинами». Надається повторення таких тем як способи задання функцій, область визначення і множина значень функції, графік функції. Повторюються також властивості зростання і спадання функції. Вводяться такі поняття як парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції. Вивчаються властивості графіків парних і непарних функцій, побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

У 10 класі учнів також ознайомлюють зі степеневою функцією, тригонометричними функціями, вводять такі поняття як періодичність функцій, вивчають властивості та графіки тригонометричних функцій, вводять обернені тригонометричні функції, їх властивості і графіки.

Вивчаються такі теми: границя функції в точці, основні теореми про границі функції в точці, неперервність функції в точці і на проміжку. Вводиться поняття похідної функції в точці. Розглядається дослідження функцій за допомогою похідної (достатні умови зростання і спадання функції, екстремуми функції, найбільше і найменше значення функції на проміжку), вводиться поняття складеної функції та її похідної. Учнів вчать знаходити другу похідну, проміжки опуклості функції та точок її перегину, асимптоти, застосовувати першу та другу похідні до дослідження функцій і побудови їх графіків.

Програма *профільного рівня* для 11 класу передбачає введення таких понять як первісна та інтеграл, вивчаються показникова і логарифмічна функції, їх властивості, графіки, похідні.

Програми для профільного рівня і класів з поглибленим вивченням математики відрізняються змістовим наповненням і структурно. Складові частини поглибленого вивчення математики органічно включені до загальноосвітнього курсу як його поглиблення, розширення і застосування набутих в основному курсі знань до більшого кола задач, а також розширене вивчення властивостей об'єктів, що вивчаються в основному курсі. Розглядаються додаткові методи для розв'язування задач на базі теоретичного матеріалу, поданого в основному курсі.

Зміст теми „Тригонометричні функції" в основному збігається з матеріалом курсу профільного рівня, поглиблення вивчення відбувається за рахунок впровадження побудови графічних образів.

Тема «Числові послідовності» має місце лише на поглибленому рівні, застосування теорем про границі числових послідовностей є пропедевтичною базою для подальшого вивчення курсу математичного аналізу.

Варто також відмітити відмінності в змісті програм профільного і поглибленого рівнів наявністю таких тем на поглибленому рівні: поняття границі функції на нескінченності та нескінченно велика функція в точці, перша чудова границя, похідна оберненої функції, похідна обернених тригонометричних функцій, основні теореми диференціального числення, нерівність Йенсена та її застосування, Нерівність Коші як наслідок нерівності Йєнсена.

На рівні стандарту курс "Алгебра і початки аналізу" розпочинається з узагальнюючого повторення основних відомостей про функцію, введенням понять парності/непарності функцій, найбільшого та найменшого значень. На відміну від програми профільного рівня, програма рівня стандарту не передбачає вивчення таких понять: оборотні функції, взаємно обернені функції, обернені тригонометричні функції, друга похідна, опуклість функції, точки перегину, асимптоти графіка функції.

Збільшення навчального часу на вивчення алгебри і початків аналізу для профільного рівня, порівняно з рівнем стандарту, дає можливість поглибити як поглиблений, так і профільний рівні навчання за рахунок включення до програми окремих питань математичного та фізичного змісту, а також прикладних задач зі сфери техніки, енергетики, ядерної фізики, екології, економіки тощо, методи розв'язування яких спираються на вивчений матеріал.

Вивчення матеріалу функціональної лінії має основною навчальною метою усвідомлення учнями на тому чи іншому рівні поняття функції як однієї з основних математичних моделей, що дозволяє описувати й вивчати різноманітні залежності між реальними величинами, а також оволодіння найпростішими методами дослідження функцій. Первинною математичною моделлю є функція, тому функції, їх властивості та графіки, як у явній, так і в неявній формі, складають стрижень шкільного курсу математики.

Жодне з інших понять не відображає явищ реальної дійсності з такою безпосередністю і конкретністю, як поняття функції.

У профільній школі функціональна лінія є провідною. Вона акумулює всі знання і прийоми діяльності з інших змістових ліній, має величезне значення для забезпечення математичної компетентності – здатності розв'язувати прикладні задачі, задачі з «життя». Математична компетентність виявляється у розумінні учнем ролі математики у пізнанні дійсності; володінні математичною термінологією, умінні логічно розмірковувати, обґрунтовувати свої дії; умінні користуватися знаковою та графічно поданою інформацією; здатності розв’язувати математичні задачі, умінні оцінити доцільність використання математичних методів для розв’язання практичної задачі; умінні формулювати математичні моделі практичних задач, розв’язувати їх математичними методами та інтерпретувати результати; здійснювати аналіз та оцінку отриманих результатів.

Потенціал функціональної змістової лінії у розвиненні пізнавальних прийомів діяльності є практично невичерпним. Після вивчення цієї лінії в профільній школі учні мають володіти такими прийомами:

1) розпізнавання функціональних залежностей за їхніми графіками або аналітичними виразами;
2) оперування різними способами задання функцій: аналітичним, графічним, табличним, описовим;
3) обчислення значень функцій за даними значеннями аргументу і значень аргументу, за яких функція набуває певного значення;
4) читання графіків функцій, тобто встановлення їхніх властивостей за графіком;
5) дослідження властивостей функцій, заданих аналітично;
6) розпізнавання основних елементарних функцій і функцій, які одержують з них за допомогою геометричних перетворень, а також їхніх графіків;
7) побудова графіків функцій;
8) знаходження оберненої функції для даної;
9) застосування функцій та їх властивостей для розв’язування рівнянь, нерівностей, їх систем;
10) застосування функцій та їх властивостей до дослідження реальних процесів;
11) диференціювання функцій за допомогою таблиці похідних та правил диференціювання;
12) заходження швидкості зміни величини в точці;
13) знаходження похідних другого порядку, застосування другої похідної для розв’язування фізичних задач;

14) наближене обчислення значення і приросту функції в даній точці;
15) застосування похідної для встановлення властивостей функції;
16) знаходження найбільшого і найменшого значення функції, розв'язування прикладних задач на знаходження найбільших та найменших значень реальних величин;
17) знаходження первісних із використанням таблиці первісних;
18) обчислення інтеграла;
19) розв'язування прикладних задач, що зводяться до знаходження інтеграла;
20) застосування функцій, їх похідних та первісних до моделювання реальних процесів, зокрема знаходження швидкості та встановлення законів змінювання величин.

Вивчення теми "Функції" займає важливе місце в курсі математики, оскільки закладає основи аналітичного мислення, формує інтуїцію, розвиває уяву учня, формує наукову базу для подальшого глибшого вивчення математики.

1.3. Пропедевтика функціональної залежності в шкільному курсі математики

Для свідомого засвоєння відомостей про функцію в курсі алгебри потрібно, починаючи з 1 класу, проводити *функціональну пропедевтику* – підготовчу роботу, спрямовану на формування поняття функції, способів її задання, властивостей окремих видів функції. У 1 класі, розв'язуючи текстові задачі, учні виявляють залежність вартості товару від ціни, зміну результатів дій від зміни компонентів, обчислюють значення виразів. У 3 класі учні обчислюють шлях залежно від швидкості та від часу, визначають площу прямокутника залежно від довжини однієї зі сторін та ін.

У 5 класі в темі «Додавання і віднімання натуральних чисел» учні ознайомлюються з величинами, залежностями між величинами, прямою та оберненою пропорційностями, а також із складанням та обчисленням числових виразів, вивчають буквені вирази та їх числові значення, складають таблиці значень виразів.

У 6 класі у темі "Числа і дії над ними" вивчають графічні ілюстрації відсоткового відношення. У темі "Відношення і пропорції" вводиться поняття прямої і оберненої пропорційної залежності. У цьому ж класі учні ознайомлюються з прямокутною системою координат, координатами точки, абсцисами, будують діаграми, будують графіки залежностей, ще не називаючи їх функціями. При розв'язуванні текстових задач звертається увага учнів на залежність між величинами, які визначають умову задачі, вживаючи терміни «змінюється», «залежить», «відповідає» тощо.

Основна мета функціональної пропедевтики полягає у формуванні в учнів поняття змінної величини та залежності між цими величинами. Згідно з програмою, після вивчення курсу математики 5 – 6 класів учень має володіти такими прийомами математичної діяльності, що належать до функціональної змістової лінії:

1) володіти буквеною символікою;
2) обчислювати значення виразів при заданих значеннях букв;
3) володіти правилами складання числових і буквених виразів;
4) виконувати обчислення за формулами;
5) складати формули для запису правил, властивостей, залежностей;
6) встановлювати зв’язки між величинами: ціною, кількістю і вартістю; швидкістю, часом і відстанню при рівномірному русі; масою одного предмета, кількістю предметів і загальною масою і т. д.;
7) встановлювати, як змінюється результат арифметичної дії при зміні компонентів;
8) користуватися табличною формою представлення інформації;
9) зображати числа на координатному промені і координатній прямій;
10) володіти прямокутною системою координат, зображати на ній залежності між реальними величинами (температурою повітря і часом доби, ростом певної дитини та її віком і т. д.), читати графіки залежностей, зображених у системі координат;

11) розрізняти пряму і обернену пропорційні залежності, застосовувати їх для моделювання залежностей між величинами.

У **7** класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять — поняття «функція». Під час формування загального поняття функції важливо використати приклади залежностей, що задаються різними способами (за допомогою формули, графіка, таблиці), відомі учням з попередніх класів, і ті знання та вміння, які вони здобули під час здійснення функціональної пропедевтики.

Оскільки функція вважається заданою, якщо вказано спосіб залежності між змінними і область визначення функції, то природно, розглядаючи приклади, запровадити поняття області визначення та області значень функції.

Приклад: Учні 7 класу чергують у класі впродовж лютого. Кожному дню лютого, в який відбувається заняття відповідає певний черговий. Чергових призначають у тому порядку, в якому прізвища учнів розміщено в класному журналі.

Потрібно зауважити, що областю визначення в цьому прикладі є множина днів лютого, в які відбуваться заняття школярів, а областю значень – множина учнів, яких призначають черговими.

У цьому ж класі розглядається лінійна функція та її графік. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв’язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Пояснення починають зазвичай з розгляду залежностей між значеннями двох змінних, в яких кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної.

Інші види функцій розглядаються у зв’язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу.

Зокрема, у 8 класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ та їх властивостями.

У 9 класі розглядається квадратична функція, перетворення графіків функцій учні вивчають властивості функції: нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції.

1.4 Основні методи дослідження властивостей функції

Виділяють три способи дослідження функції: *аналітичний* (дослідження елементарними засобами і дослідження за допомогою похідної), *графічний* і *комбінований* спосіб.

Результатом аналітичного методу є побудова графіка функції. При дослідженні використовуються рівняння і нерівності. При графічному методі по точках будується графік, і з нього зчитуються властивості.

Комбінований метод використовується у двох випадках:

1) частина властивостей обґрунтовується аналітично, а частина – графічно;

2) спочатку будується графік по точках, зчитуються властивості, а потім вони доводяться без всякої опори на графік.

Необхідно чітко розмежовувати мови, на яких розглядаються властивості функцій: словесний, графічний, аналітичний.

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що подається графік цієї функції. Для використання графіків функції використовують прямокутну систему координат . Це сукупність двох взаємно перпендикулярних числових осей зі спільним початком. Одну з осей – горизонтальну – називають віссю абсцис, або віссю іксів. Другу, вертикальну вісь, називають ординатою або віссю ігреків. Числа, що позначають положення точки на координатній площині, називають координатами точки.

Графіком функції називається фігура, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Щоб побудувати графік функції, треба скласти таблицю значень її аргументу і знайти відповідні їм значення функції. Точки з одержаними координатами наносять на координатну площину і з'єднують їх лінією. За допомогою графіка функції можна знаходити значення функції в інших точках координатної площини. Для цього треба знайти на осі потрібне значення аргументу, відповідну йому точку графіка, і з'ясувати, яку ординату має ця точка графіка.

Хоча графік функції не завжди дає можливість точно визначити числові значення x та y, він наочно відображає якісну поведінку функції (неперервність, монотонність, максимуми, мінімуми, точки перегину і т. д.) і тому є важливим засобом дослідження функції.

Графічний метод дослідження властивостей:

За графіком встановлюють такі властивості функції:

1. Область визначення функції
2. Найбільше та найменше значення функції
3. Область значень функції
4. Неперервність, точки розриву.
4. Нулі функції.
5. Проміжки знакосталості.
6. Проміжки зростання та спадання.

В основній школі властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу.

При введенні поняття «функція» слід звернути увагу на перехід від однієї форми задання функції до іншої. У школі, як правило, він здійснюється по схемі: аналітична модель $\rightarrow$ таблиця $\rightarrow$ графік. Для введення конкретних функцій краще використовувати схему: словесна модель $\rightarrow$ таблиця $\rightarrow$ графік $\rightarrow$

аналітична модель. Дуже важливо, щоб учні розуміли, що одна і та ж функція може бути задана і формулою, і таблицею, і графіком, але не всяка (деякі функції, що задаються графічно, не можуть бути задані формулою, наприклад, кардіограми). При введенні запису $y = f(x)$ необхідно, щоб учні розуміли сенс букви f, яка означає закон відповідності.

Аналітичний спосіб задання функції полягає в тому, що виражають за допомогою формули або аналітичного виразу. Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Розглянемо алгоритми для деяких властивостей функції, які обґрунтовуються аналітично:

Алгоритм на знаходження області значень функції:

1) Позначимо значення заданої функції $f(x)$ через a.
2) З'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (при цьому значенні x значення $f(x) = a$).
3) Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = a$, увійдуть до області значень функції. Множина всіх таких a і складе область значень функції.

Алгоритм дослідження функції на зростання і спадання на певній множині М:

Для доведення зростання (спадання) функції на множині М потрібно:

1) вибрати $x_2 > x_1$, де $x_1 \in M$ та де $x_2 \in M$;
2) скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$;
3) встановити знак утвореної різниці:

- якщо вона додатна, то $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція зростаюча на множині M;
- якщо вона від'ємна, то $f(x_2) < f(x_1)$, тобто функція спадна на множині M.

Алгоритм дослідження функцій на парність (непарність):

Для того, щоб дослідити функцію на парність (непарність), потрібно:

1) перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат;

2) перевірити, чи виконується рівність $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих істотних властивостей, то функція не належить ні до парних, ні до непарних функцій.

Як ми уже зазначали, одним з аналітичних методів знаходження властивостей функції є дослідження функції за допомогою похідної.

У шкільному курсі алгебри і початків аналізу за допомогою похідної функції досліджують на:

1) монотонність (зростання і спадання);

2) точки екстремуму і екстремуми функції;

3) досягнення найбільших і найменших значень на відрізку;

4) опуклість, угнутість та знаходження точок перегину.

Оскільки тема «Похідна» не є предметом нашого дослідження, то зупинятися на ній більш детально ми не будемо.

Розділ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ КОМПЕТЕНТНІСНО ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ ФУНКЦІЙ У КЛАСАХ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ

2.1. Методичні рекомендації до вивчення основних понять, що стосуються числової функції

На початку вивчення курсу з "Алгебри і початків аналізу" потрібно пригадати поняття «множина», з яким учні могли ознайомитися як в курсі геометрії, так і в суміжних дисциплінах. Слід зауважити, що це загальноматематичне поняття належить до первісних, неозначуваних понять і широко використовується під час вивчення функцій, рівнянь, нерівностей, їх систем, геометричних фігур. Над множинами виконують операції. Основними з них є об'єднання і переріз. Тепер слід ввести означення цих операцій і відповідну символіку.

Потім доцільно пригадати загальне поняття функції, з яким учні ознайомилися в курсі алгебри за 7 клас: залежність однієї змінної від іншої, за якої кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, називають функціональною залежністю, або функцією. Учні згадують поняття області визначення й області значень, способи задання функцій, символіку.

На цьому етапі доцільно ввести означення числової функції як окремого виду загального поняття функції: числовою функцією з областю визначення X називають залежність, за якої кожному числу x із множини X ставиться у відповідність єдине число y.

Учні наводять приклади вже відомих їм числових функцій, указують область визначення та область значень для кожної з них.

Для опрацювання поняття області визначення доцільно навести такі приклади:

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4-|x|} + \frac{1}{x+2}$.

Розв'язання:

Маємо підкореневий вираз, який має бути невід'ємним, та знаменник має не дорівнювати нулю. Об'єднаємо ці умови в систему:

$\begin{cases} 4-|x| \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| \leq 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$

D(y) = $[-4;\ -2) \cup (-2; 4]$

Відповідь: $[-4;\ -2) \cup (-2; 4]$.

Приклад 2. Знайти область визначення функції *y*=$\sqrt{(x-2)(x-1)^2}$.

Розв'язання:

Маємо підкореневий вираз, який має бути невід'ємним:

$(x-2)(x-1)^2 \geq 0$, нерівність рівносильна системі:

$\left[\begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

D(y) = $[2;\ +\infty) \cup \{1\}$.

Відповідь: $\{1\} \cup [2;\ +\infty)$.

На цьому етапі доцільно також розглянути з учнями вправи на знаходження області значень згідно з алгоритмом, який наведено в п. 1.4.

Приклад 3. Знайти область значень функції *y*= $\frac{3x+1}{2x+3}$.

Розв'язання: Нехай a - множина значень, тоді задача зводиться до знаходження всіх значень a, при яких рівняння $\frac{3x+1}{2x+3} = a$ має розв'язки. Це рівняння рівносильне системі:

$\begin{cases} 3x+1 = a(2x+3) \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+1 = 2ax+3a \\ 2x \neq -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2ax = 3a-1 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x(3-2a) = 3a-1 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3a-1}{3-2a} \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\frac{3a-1}{3-2a} \neq -\frac{3}{2}$

$\begin{cases} 2(3a-1) \neq -3(3-2a) \\ 3-2a \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \neq -7 \\ a \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ $a \neq \frac{3}{2}$.

E(y) = $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Приклад 4. Знайти область значень функції $y=3x^2-2x+1$.

Розв'язання: Нехай a - множина значень, тоді задача зводиться до знаходження всіх значень a, при яких рівняння $3x^2-2x+1=a$ має розв'язки:

$3x^2$-$2x$+1= a

$3x^2$-$2x$+1- a =*0*

D=4−4·3· (1-a) $= 4 - 12 + 12a = -8 + 12a$.

Квадратне рівняння має розв'язки, якщо $D \geq 0$, тобто $-8 + 12a \geq 0$, звідси

$a \geq \frac{2}{3}$. E(y) = $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Відповідь: $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 5. Доведіть, що при $k \neq 0$ областю значень лінійної функції $y=kx+b$ є множина всіх дійсних чисел .

Коментар: Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $kx+b$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x таке, що $f(x)=a$. Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Розв'язання: Якщо $kx+b=a$. (де $k \neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x=(a-b)/k$ існує для будь-якого a з множини R ($k \neq 0$ за умовою). Таким чином, значенням заданої функції може бути будь- яке дійсне число, отже, її область значень $E(f)=R$.

Потрібно пригадати означення зростаючої та спадної функцій на множині M і навести приклади таких функцій, виконати вправи на доведення властивостей зростання і спадання для відомих функцій. Учителю слід сформулювати алгоритм дослідження функції на зростання і спадання на певній множині M, який наведено в п. 1.4.

Розглянемо приклади доведення зростання/спадання функції, опираючись на означення монотонності функції:

Приклад 6. Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання:

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$. Маємо:

$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

Приклад 7. Доведіть, що функція $y = x^2$спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання:

Нехай x_1 *і* x_2— довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж

$x_1 < x_2$. Покажемо, що ${x_1}^2 > {x_2}^2$.

Маємо: $x_1 < x_2$, помножимо обидві частини нерівності на (-1)

$-x_1 > -x_2$, обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами.

Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що:

$(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, тобто ${x_1}^2 > {x_2}^2$.

Зазначимо, що в подібних випадках кажуть, що проміжок $(-\infty; 0]$ є *проміжком спадання* функції $y = x^2$.

Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є *проміжком зростання* функції $y = x^2$.

Приклад 8. Доведіть, що функція $\frac{1}{x}$ є спадною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання:

Нехай x_1 і x_2 довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$.

Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводиться, що функція $f(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Приклад 9. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, $x \in (2; +\infty)$.

Розв'язання:

Нехай $2 < x_1 < x_2$, тоді маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+3}{x_2-2} - \frac{x_1+3}{x_1-2} = \frac{x_1x_2+3x_1-2x_2-6-x_1x_2+2x_1-3x_2+6}{(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{5\,(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)} < 0,$$

отже, $f(x_2) < f(x_1)$.

Отже, функція $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, $x \in (2; +\infty)$ спадає.

Поняття парної та непарної функцій за чинною програмою не розглядаються в основній школі і виявляються новими для учнів. Під час запровадження цих понять насамперед звертають увагу на те, що таку властивість мають функції, область визначення яких є множиною чисел (точок), симетричною відносно початку координат. Це означає, що для будь-якого x з області визначення число $-x$ також належить області визначення. Крім того, для парних функцій виконується умова $f(-x)=f(x)$, а для непарних умова $f(-x)= - f(x)$, для будь-якого x з області визначення. Доцільно відразу сформулювати алгоритм дослідження функцій на парність (непарність), який наведено в пункті 1.4.

Неважко довести, що графіки парних функцій симетричні відносно осі Oy, а непарної – відносно початку координат.

Справді, якщо $y = f(x)$ парна, тобто її область визначення симетрична відносно початку координат і $f(-x) = f(x)$, то це означає, що будь-які точки $M(x; f(x))$ і $M_1(-x; f(x))$ або $M(x; y)$ і $M_1(-x; y)$ належать графіку функції. В системі координат ці точки симетричні відносно осі Oy.

Аналогічно доводять центральну симетрію відносно початку координат графіка непарної функції.

Досвід показує що учні самостійно наводять приклади парної ($y=x^2$) та непарної функції ($y=x^3$, $y=x$), але тільки деякі самостійно роблять висновок стосовно парності й непарності функції $y=ax+b$ залежно від значень a і b.

Під час вивчення теми «Парні і непарні функції» доцільно розв'язати з учнями такі вправи:

Приклад 10. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^4$.

Розв'язання:

$D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля.

Оскільки $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, то функція парна.

Корисною може бути властивість парної функції: графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі Oy.

Приклад 11. Дослідити на парність функцію $f(x) = -\frac{10}{x}$.

Розв'язання:

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = \frac{10}{x} = - f(x)$, то функція непарна.

Корисною є властивість непарної функції: графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад 12. Дослідити на парність функцію $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Розв'язання:

$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Область визначення не симетрична відносно нуля, оскільки значення $x = -2$ належить області визначення, а значення $x = 2$ не належить області визначення.

Тому функція ні парна, ні не парна.

Приклад 13. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2 - x$.

Розв'язання:

$D(f) = (-\infty;+\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля.

$f(-x) =(-x)^2 -(-x)= x^2+ x= -(-x^2- x)$

f(-x) ≠ f(x) і *f(-x) ≠ -f(x)*, то функція ні парна, ні не парна.

Одним з важливих і складних завдань навчання алгебри і початків аналізу є формування понять *неперервності функції* і забезпечення його застосування у цьому навчанні. Треба добре усвідомити, що ми постійно користуємось цією властивістю функції, коли при побудові її графіка з’єднуємо побудовані точки графіка неперервною лінією. Саме наочно-образне сприйняття неперервності має бути в основі формування математичного поняття неперервності і точок розриву функції. Усвідомлення геометричної сутності неперервності і точок розриву, розгляд цих понять як моделей особливостей поведінки залежностей величин є тим фундаментом, на якому ці поняття можуть збагачуватись, уточнюватись, узагальнюватись протягом усього курсу залежно від рівня і умов навчання [1].

Для більш ефективного засвоєння учнями теми «Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій» нами було розроблено таблицю 2.1

Таблиця 2.1

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій

1.1	***y = f(x)+a***, де a - число, $a \neq 0$	$a > 0$	Графік функції ***y = f(x)*** переносимо вгору на a одиниць
1.2		$a < 0$	Графік функції ***y = f(x)*** переносимо вниз на $\lvert a \rvert$ одиниць
2.1	***y = f(x−c)***, де c - число, $c \neq 0$	$c > 0$	Графік функції ***y=f(x)*** переносимо вправо на c одиниць
2.2		$c < 0$	Графік функції ***y=f(x)*** переносимо вліво на $\lvert c \rvert$ одиниць
3.1		$b > 1$	Графік функції ***y=f(x)*** розтягуємо від осі *Ох* вздовж осі *Оу* в ***b*** разів

3.2	***y* =*b*· *f*(*x*)**, де b - число, $b \neq 0$	$0 < b < 1$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** стискаємо в $\boldsymbol{\frac{1}{b}}$ разів вздовж осі *Oy* до осі *Ox*
3.3		$b = -1$	Функція набуває вигляду $\boldsymbol{y = -f(x)}$, графік функції ***y* = *f*(*x*)** відображаємо симетрично відносно осі *Ox*
3.4		$b < -1$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** розтягуємо від осі *Ox* вздовж осі *Oy* в $\lvert b\rvert$ разів і відображаємо симетрично відносно осі *Ox*
3.5		$-1 < b < 0$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** стискаємо в $\left\lvert\boldsymbol{\frac{1}{b}}\right\rvert$ разів вздовж осі *Oy* до осі *Ox* і відображаємо симетрично відносно осі *Ox*
4.1	***y* = *f* (*k*·*x*)**	$k > 1$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** стискаємо в ***k*** разів вздовж осі *Ox* до осі *Oy*
4.2		$0 < k < 1$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** розтягуємо в $\boldsymbol{\frac{1}{k}}$ разів вздовж осі *Ox* від осі *Oy*
4.3		$k = -1$	Функція набуває вигляду $\boldsymbol{y = f(-x)}$, графік функції ***y*=*f*(*x*)** відображаємо симетрично відносно осі *Oy*
4.4		$k < -1$	Графік функції ***y*=*f*(*x*)** стискаємо в $\lvert\boldsymbol{k}\rvert$ разів вздовж осі *Ox* до осі *Oy* і відображаємо симетрично відносно осі *Oy*
4.5		$-1 < k < 0$	Графік функції $\boldsymbol{y=f(x)}$ розтягуємо в $\left\lvert\boldsymbol{\frac{1}{k}}\right\rvert$ разів вздовж осі *Ox* від осі *Oy* і відображаємо симетрично відносно осі *Oy*

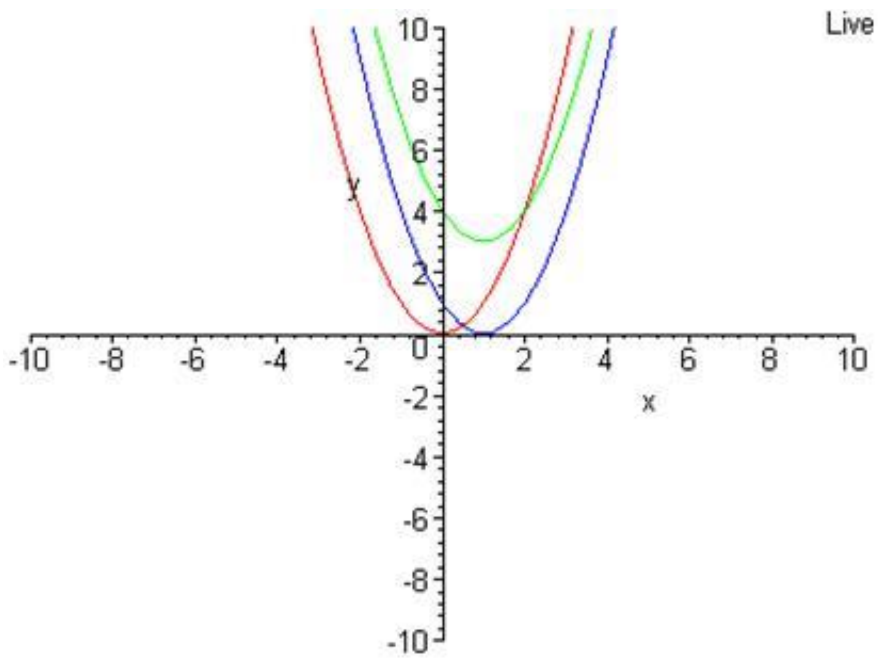
5	$\boldsymbol{y} = \lvert\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rvert$	Щоб побудувати графік функції $\boldsymbol{y} = \lvert\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rvert$ ту частину графіка *y=f(x)*, яка знаходиться вище осі *Ox* і точки цього графіка на осі *Ox* залишаємо без змін, ту частину графіка яка знаходиться нижче осі *Ox* відображаємо симетрично відносно осі *Ox*
6	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\lvert\boldsymbol{x}\rvert)$	Для побудови графіка функції $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\lvert\boldsymbol{x}\rvert)$ ту частину графіка *y=f(x)*, яка знаходиться правіше від осі *Oy* і точки цього графіка на осі *Oy* залишаємо без змін, і відображаємо (те, що залишили) симетрично відносно осі *Oy*.

Розглянемо на конкретних прикладах методику навчання учнів будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій:

Приклад 14. Побудувати графік функції $y = (x-1)^2$+3.

Розв’язання:

Спочатку побудуємо графік функції y=x^2. Потім графік функції y=x^2 переносимо вправо на 1 одиницю, отримаємо графік функції y = $(x-1)^2$, далі графік функції $y = (x-1)^2$ переносимо вгору на 3 одиниці. Отримаємо графік функції $y = (x-1)^2$+3.



Приклад 15. Побудувати графік функції $y = \frac{3x-1}{x-1}$.

Розв'язання:

1) Знайдемо область визначення функції $y = \frac{3x-1}{x-1}$:

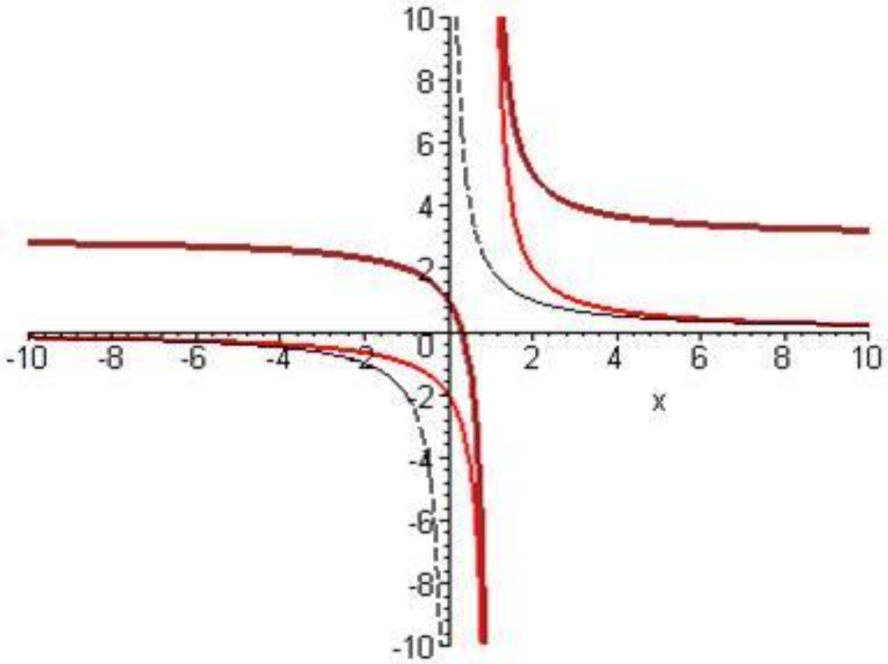
$x - 1 \neq 0$, звідси $x \neq 1$ тобто D(y) = (−∞; 1)∪ (1; +∞).

2) Перетворимо дану функцію до вигляду функції оберненої пропорційності:

$y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3x-3+2}{x-1} = \frac{3x-3}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 3+\frac{2}{x-1}$.

3) Тепер нам потрібно побудувати графік функції $y = 3+\frac{2}{x-1}$:

Спочатку побудуємо графік функції $y = \frac{2}{x}$. Потім графік функції $y = \frac{2}{x}$ переносимо вправо на 1 одиницю, отримаємо графік функції $y = \frac{2}{x-1}$, далі графік функції $y = \frac{2}{x-1}$ переносимо вгору на 3 одиниці. Отримаємо графік функції $y = 3+\frac{2}{x-1}$.



Приклад 16 . Побудувати графік функції y=$|x^2 - 2x - 8|$.

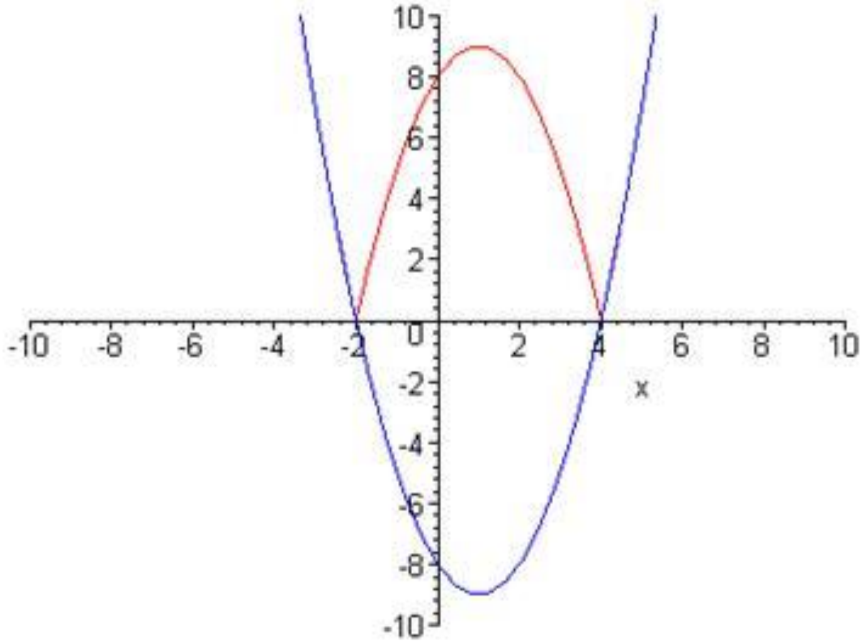
Розв'язання:

Будуємо спочатку графік функції $y = x^2 - 2x - 8$. Для цього використовуємо спосіб виділення повного квадрата квадратного тричлена:

$x^2 - 2x - 8$=$(x^2 - 2x + 1) - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9$.

Далі спочатку побудуємо графік функції y=x^2. Потім графік функції y=x^2переносимо вправо на 1 одиницю, отримаємо графік функції у = $(x - 1)^2$, далі графік функції у = $(x - 1)^2$ переносимо вниз на 9 одиниць. Отримаємо графік функції y = $(x - 1)^2 - 9$.

Далі потрібно ту частину графіка y = $(x - 1)^2 - 9$, яка знаходиться вище осі *Ox* і точки цього графіка на осі *Ox* залишити без змін, ту частину графіка яка знаходиться нижче осі *Ox* відобразити симетрично відносно осі *Ox* - отримаємо графік функції y=$|x^2 - 2x - 8|$.



Приклад 17. Побудувати графік функції y=$\left|x^2 - 4|x|\right|$

Розв'язання:

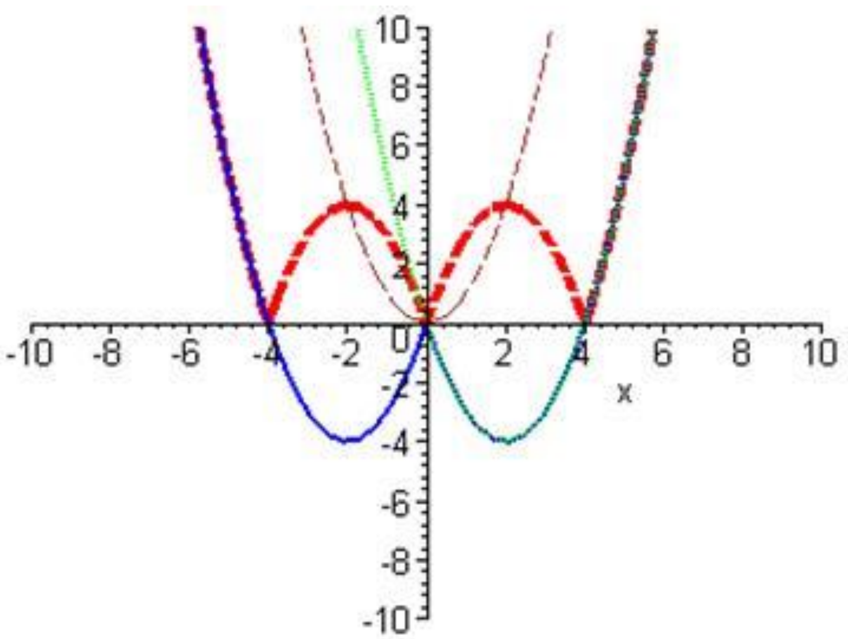
Будуємо спочатку графік функції y =$x^2 - 4x$. Для цього використовуємо спосіб виділення повного квадрата квадратного тричлена:

$x^2 - 4x$ = $(x^2 - 4x + 4) - 4 = (x - 2)^2 - 4$.

Далі спочатку побудуємо графік функції $y = x^2$. Потім графік функції $y = x^2$ переносимо вправо на 2 одиниці, отримаємо графік функції $y = (x-2)^2$, далі графік функції $y = (x-2)^2$ переносимо вниз на 4 одиниці, отримаємо графік функції $y = (x-2)^2 - 4$.

Далі залишаємо ту частину графіка $y = (x-2)^2 - 4$, яка знаходиться правіше від осі *Oy* і точки цього графіка на осі *Oy* залишаємо без змін, і відображаємо (те, що залишили) симетрично відносно осі *Oy,* отримаємо графік функції $y = x^2 - 4|x|$.

Наприкінці ту частину графіка $y = x^2 - 4|x|$, яка знаходиться вище осі *Ox* і точки цього графіка на осі *Ox* залишаємо без змін, ту частину графіка яка знаходиться нижче осі *Ox* відображаємо симетрично відносно осі *Ox,* отримаємо графік функції $y = \left|x^2 - 4|x|\right|$.



Окремо слід розглянути задачі на компетентність. Особливістю підручника [18], є наявність таких задач під рубрикою «Виявіть свою компетентність», де наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв’язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань. Наведемо приклади деяких з них:

Задача 2.1.14. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років ($a< 18$) для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою: $t = 16 - \frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16)$, $t(15)$, $t(14)$.

Розв'язання:

$t(16) = 16 - \frac{16}{2} = 16 - 8 = 8$ (год);

$t(15) = 16 - \frac{15}{2} = 16 - 7{,}5 = 8{,}5$ (год);

$t(14) = 16 - \frac{14}{2} = 16 - 7 = 9$ (год).

Відповідь: 8; 8,5; 9.

Задача 2.3.4. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн. та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн. за кожний кілометр.

1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані.
2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

Розв'язання:

1) Нехай x - відстань, яку проїхав пасажир на таксі, $f(x)$ -вартість поїздки. тоді $f(x)=25+5x$.

2) $f(30)=25+5\cdot 30 = 175$ (грн.)- вартість поїздки при відстані 30 км.

Відповідь: $f(x)=25+5x$; 175 грн.

2.2. Навчання учнів дослідження та доведення властивостей функцій на різних етапах їх вивчення

Окрему увагу потрібно приділити методиці навчання учнів доведенню властивостей функції. Для ефективного розвитку вмінь доводити варто всі елементарні функції вивчати вже у 10-му класі за такою схемою:

1. Область визначення.
2. Область значень.
3. Парність (непарність).
4. Періодичність.
5. Нулі функції.

6. Проміжки знакосталості.
7. Проміжки монотонності.
8. Точки екстремуму і екстремуми функції (до вивчення похідної – без доведення, використовуючи означення, інтуїтивні уявлення і графік функції).

Оскільки у доведенні тієї чи іншої властивості функції основною є дія підведення об'єкта під поняття, то на перших уроках в 10-му класі варто привести в систему основні означення і твердження.

Розглянемо на прикладах деяких функцій методику доведення властивостей функцій:

Методика доведення властивостей тригонометричних функцій

Перш ніж вивчати властивості тригонометричних функцій, попередньо потрібно довести їхню періодичність і, послуговуючись означенням та цією властивістю, побудувати графіки. Графіки дають змогу виявити інші властивості, а потім обґрунтувати їх аналітично.

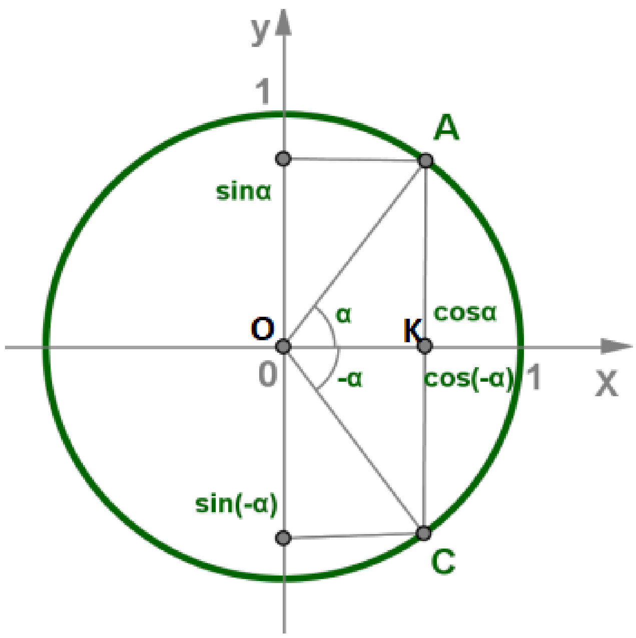


рис.2.1 Одиничне коло

Використовуючи означення синуса і косинуса числового аргументу та враховуючи їх геометричну інтерпретацію на одиничному колі, матимемо: $sin(x + 2\pi n) = \sin x$; $cos(x + 2\pi n) = cos x$, де $n \in Z$, $n \neq 0$, тобто періодом синуса і косинуса є числа $2\pi n$. Застосовуючи лінії тангенсів і котангенсів, неважко зробити висновок, що $tg(x + \pi n) = tgx$, $ctg\ (x + \pi) = ctgx$, тобто періодом тангенса і котангенса є числа πn.

Розглянемо сім властивостей для функції $y = sinx$.

1. Оскільки синус існує для будь-якого дійсного числа і як ордината точки одиничного кола змінюється на відрізку [-1; 1], то областю визначення функції $y = sinx$ є множина R всіх дійсних чисел, областю значень - відрізок [-1; 1].

2. Графік функції симетричний відносно початку координат, тобто функція $y = sinx$ непарна. Доведемо це за допомогою одиничного кола на рис.2.1. Область визначення цієї функції – множина, симетрична відносно початку координат. Залишається довести, що $sin\ (-\alpha) = -\ sin\ \alpha$. Позначимо на одиничному колі точки A_α та $C_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$, що належать множині R. Оскільки прямокутні трикутники $A_\alpha\ OK$ і $C_{-\alpha}\ OK$ рівні, то КA_α= К$C_{-\alpha}$ (ОК – спільний катет).

Отже, абсциси точок A_α та $C_{-\alpha}$ однакові, а ординати - протилежні числа. Тому, $sin(-\alpha) = -\ sin\alpha$.

3. Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π.
4. Функція набуває значення, що дорівнює нулю (нулі функцій) при $x = \pi k$, де $k \in Z$, оскільки ординати точок одиничного кола перетворюються на нуль на відрізку $[0; 2\pi]$ у двох точках $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, а функція періодична.
5. Проміжки зростання функції – відрізки $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, де $n \in Z$.

Оскільки $y = sinx$ – періодична функція, то досить довести зростання на одному із названих відрізків, наприклад на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Слід акцентувати увагу учнів на те, що для доведення скористаємось означенням зростаючої функції:

Нехай $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $x_2 > x_1$.

Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна.

Справді, $f(x_2) - f(x_1) = sinx_2 - sinx_1 = 2\ cos\ \frac{x_1+x_2}{2}\ sin\ \frac{x_2-x_1}{2}$, оскільки за умовою $x_2 - x_1 > 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq x_2 < \frac{\pi}{2}$, тому $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$;

$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, отже $cos\,\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ і $sin\,\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$.

Отже, $sinx_2 > sinx_1$.

6. Проміжками, де синус додатний, є *(2πn ; π+ 2πn), n ∈Z,* оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду2π, функція додатна на проміжку *(0 ; π).* Синус від'ємний на проміжках є *(π+ 2πn;2π+2πn),*

   Оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ він від'ємний на проміжку $(\pi; 2\pi)$.
7. Синус досягає максимуму, що дорівнює 1, в точках $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, де $n \in Z$, а мінімуму, що дорівнює -1, у точках $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, , де $n \in Z$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ ордината точки одиничного кола дорівнює 1 за $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і -1 за $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Доцільно розглянути сім властивостей тригонометричних функцій *y* = cos*x*, *y = tgx, y* = ctgx і систематизувати їх так, як це наведено для функції *y* = sin*x*.

Для опрацювання поняття *області значень для тригонометричних функцій* пропонуємо розглянути такі приклади:

Приклад 1. Знайти область значень виразу: $\frac{1}{1-\cos x}$.

Розв'язання:

Оскільки значення $\cos x$ змінюється від -1 до 1 включно, то

$-1 \leq \cos x \leq 1$; $\quad -1 \leq -\cos x \leq 1$;

$0 \leq 1 - \cos x \leq 2$; $\quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1-\cos x} \leq +\infty$.

Звідси область значень дорівнює $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Відповідь: $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Приклад 2. Знайти область значень виразу $\frac{2}{4\sin x - 3}$.

Розв'язання:

Оскільки значення $\sin x$ змінюється від -1 до 1 включно, то

$-1 \leq \sin x \leq 1$; $\ -4 \leq 4\sin x \leq 4$;

$-7 \leq 4\sin x - 3 \leq 1$;

$$\left[\begin{array}{l} -7 \le 4\sin x - 3 \le 0 \\ 0 < 4\sin x - 3 \le 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\infty < \frac{1}{4\sin x - 3} \le -\frac{1}{7} \\ 1 \le \frac{1}{4\sin x - 3} < +\infty \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\infty < \frac{2}{4\sin x - 3} \le -\frac{2}{7} \\ 2 \le \frac{2}{4\sin x - 3} < +\infty \end{array}\right.$$

Звідси область значень дорівнює $\left(-\infty;\ -\frac{2}{7}\right] \cup [2;\ +\infty)$.

Відповідь: $\left(-\infty;\ -\frac{2}{7}\right] \cup [2;\ +\infty)$.

Для опрацювання поняття парності, непарності для тригонометричних функцій пропонуємо розглянути такі приклади:

Приклад 3. Дослідити на парність функцію $y = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$.

Розв'язання:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Область визначення не симетрична відносно нуля, оскільки значення $x = -1$ належить області визначення, а значення $x = 1$ не належить області визначення.

Тому функція ні парна, ні непарна.

Приклад 4. Дослідити на парність функцію $y = \frac{x^3 \sin x}{x}$.

Розв'язання:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Область визначення симетрична відносно нуля. Тепер потрібно перевірити, чи виконується рівність $y(-x) = y(x)$ або $y(-x) = -y(x)$.

$y(-x) = \frac{(-x)^3 \sin(-x)}{-x} = -\frac{x^3 \sin x}{x} = -y(x)$.

Отже, функція непарна.

Приклад 5. Дослідити на парність функцію $y = \frac{x \sin x}{1-\cos x}$.

Розв'язання:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

$D(f)$: $\cos x \neq 1, x \neq 2\pi n, n \in Z$.

Область визначення симетрична відносно нуля. Тепер потрібно перевірити, чи виконується рівність $y(-x) = y(x)$ або $y(-x) = -y(x)$.

$y(-x) = \frac{(-x)\sin(-x)}{1-\cos(-x)} = \frac{x \sin x}{1-\cos x} = y(x)$.

Отже, функція парна.

Приклад 6. Довести аналітично зростання функції $y = sinx$ на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

Розв'язання:

Після вивчення формули різниці синусів доведення зростання функції $y = sinx$ на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, де $n \in Z$ *може бути виконано аналітичним способом, використовуючи означення зростаючої функції.*

Нехай $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, застосовуючи формулу різниці синусів знаходимо $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \cos \frac{x_2 + x_1}{2}$. З нерівності $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ слідує, що

$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ і $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, тому $\cos\frac{x_2+x_1}{2} > 0$ і $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, а отже, $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$, тобто $\sin x_2 > \sin x_1$.

При цьому вчителю слід звернути увагу на пояснення того, як з нерівності $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$ виходять нерівності $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ і $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Це доцільно проілюструвати, зобразивши відрізок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Зауважимо, що $\frac{x_2+x_1}{2}$ не що інше, як середнє арифметичне чисел x_1 і x_2, а, отже, належить відрізку $[x_1;\ x_2]$, який, в свою чергу, цілком лежить в відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тобто перша нерівність має місце.

Більш складнішим є обгрунтування другої нерівності. Зауважимо, що модуль різниці $|\ x_2 - x_1\ |$ —це відстань між точками x_1 і x_2, а так як обидві точки належать одному відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то відстань між ними не може перевищувати довжини цього відрізка, тобто π. З іншого боку модуль - функція невід'ємна, більш того, в даному випадку позитивна, так як x_1 і x_2 різні.

Маємо $0 <|\ x_2 - x_1\ | \le \pi$, але так як $x_1 < x_2$, то $|\ x_2 - x_1\ | = x_2 - x_1$. Розділивши всі частини нерівності на 2, отримаємо нерівність $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Методика доведення властивостей показникової функції

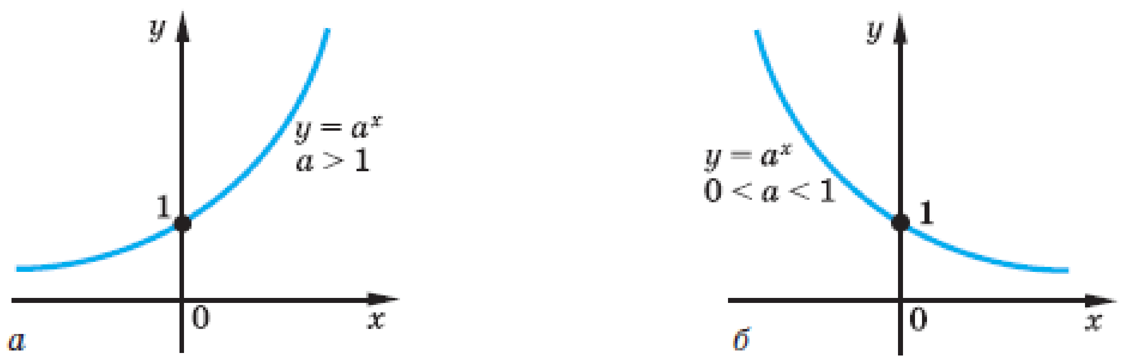


Рисунок 2.2 Графік показникової функції

1. Областю визначення функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел, оскільки вираз a^x за $a > 0$ визначений для будь-якого x.

2. Областю значень функції $y = a^x$ є множина всіх додатних чисел

Доведення:

Справді, за $a > 0$ і $x > 0$ вираз a^x додатний, а за $x < 0$

$a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$, оскільки $-x > 0$ і $a^{-x} > 0$.

3. Якщо $a > 1$, то за $x > 0$ $a^x > 1$, за $x < 0$ $0 < a^x < 1$.

Якщо $a < 1$, то навпаки за $x > 0$ $0 < a^x < 1$, а за $x < 0$ $a^x > 1$.

Доведення:

Нехай, $a > 1$. Розглянемо значення показника x із різних числових множин:

1) Нехай x – додатне раціональне число, тобто $x = \frac{m}{n}$, де m і n натуральні числа. Тоді $y = a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, оскільки за $a > 1$ і $a^m > 1$ і $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

2) Нехай x – додатне ірраціональне число, тоді існують додатні раціональні числа $x^{/}$ і $x^{//}$, які є десятковими наближеннями x, тобто $x^{/} < x < x^{//}$.

Вище було доведено, що $a^{\frac{m}{n}} > 1$, а тому і $a^x > 1$.

3) Якщо $x < 0$ – будь-яке дійсне число, то $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$, де $-x > 0$.

Тоді $a^{-x} > 1$, тому $a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1$.

Випадок, коли $0 < a < 1$, зводиться до попередніх. Учням можна запропонувати як домашнє завдання самостійно виконати доведення для цих значень a.

4. Якщо $x = 0$, то за будь-якого $a > 0$ $y = a^x = 1$, що випливає з означення степеня з нульовим показником.

5. Показникова функція за $a > 1$ зростаюча, а за $0 < a < 1$ спадна.

Доведення:

Слід акцентувати увагу учнів на те, що для доведення скористаємось означенням зростаючої функції.

Нехай $a > 1$ та $x_2 > x_1$. Тоді $x_2 = x_1 + d$, де $d > 0$.

Складемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+d} - a^{x_1} == a^{x_1}(a^d - 1) > 0$, оскільки за другою властивістю показникової функції

$a^{x_1} > 0$, а за третьою властивістю $a^d > 1$.

Отже, $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Аналогічно доводиться властивість спадання показникової функції.

Для опрацювання поняття *області визначення і області значень, найбільшого та найменшого значень, парності, непарності для показникової функції* пропонуємо розглянути такі приклади:

Приклад 1. Знайти область визначення функції *y* = $\sqrt{\frac{1}{3}^x - 27}$.

Розв'язання:

Маємо підкореневий вираз, який має бути невід'ємним:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \geq 0 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27;$

Представимо 27 у вигляді степеня з основою $\frac{1}{3}$:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, оскільки основа степеня менше одиниці, то знак нерівності змінюється: $x \leq -3$.

D(y): x ∈ $(-\infty;-3]$.

Відповідь: $(-\infty;-3]$.

Приклад 2. Знайти область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x-9}$.

Розв'язання: Позначимо $3^x = t$, і з'ясуємо при яких a рівняння $\frac{t}{t-9} = a$ має додатний корінь.

$\frac{t}{t-9} = a$; *t =ta-9a;* *ta-t =9a;* *t(a-1)=9a;* $t=\frac{9a}{a-1}$.

$t > 0$, якщо $\begin{cases} 9a > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases}$ та при $\begin{cases} 9a < 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0 \\ a > 1 \end{cases}$ та при $\begin{cases} a < 0 \\ a < 1 \end{cases}$

Розв'язки систем: $a > 1$ та $a < 0$.

Отже *E(y)* = $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 3. Знайти область значень функції *f(x)*= $3^{|sinx\ cosx|}$.

Розв'язання:

$sinx\ cosx = \frac{1}{2}\ sin2x$. Оскільки, $|sin2x| \leq 1$, то $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\ sin2x \leq \frac{1}{2}$;

$0 \leq \left|\frac{sin2x}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$. Тоді значення функції змінюються від 3^0 до $3^{\frac{1}{2}}$, тобто від 1 до $\sqrt{3}$, оскільки функція зростаюча.

E(f): $x \in [1; \sqrt{3}]$.

Відповідь: $[1; \sqrt{3}]$.

Приклад 4. Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

Розв'язання:

Оскільки $0 < \frac{1}{6} < 1$, то функція *y* спадна, тоді свого найбільшого значення вона набуває при $x = -2$: $y(-2) = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = 6^2 = 36$.

Відповідь: 36.

Приклад 5. Дослідити на парність функцію $y(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$.

Розв'язання:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

Знайдемо область визначення функції: вираз в знаменнику, приймає лише додатні значення, отже *D(f): x ∈ R.* Область визначення симетрична відносно нуля.

Тепер потрібно перевірити, чи виконується рівність $y(-x) = y(x)$ або $y(-x) = -y(x)$.

$$y(-x) = \frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1} = \frac{1-2^x}{1+2^x} = -y(x).$$

Отже, функція непарна.

Приклад 6. Дослідити на парність функцію $y(x) = \left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

Розв'язання:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

Знайдемо область визначення функції: *D(f): x* ∈ *R.* Область визначення симетрична відносно нуля.

Тепер потрібно перевірити, чи виконується рівність $y(-x) = y(x)$ або $y(-x) = -y(x)$.

$$y(-x) = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}} + \frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}} =$$

$$\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}}{(4-3)^{x}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}}{(1)^{x}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{x} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{x} = y(x).$$

Отже, функція парна.

Методика доведення властивостей логарифмічної функції

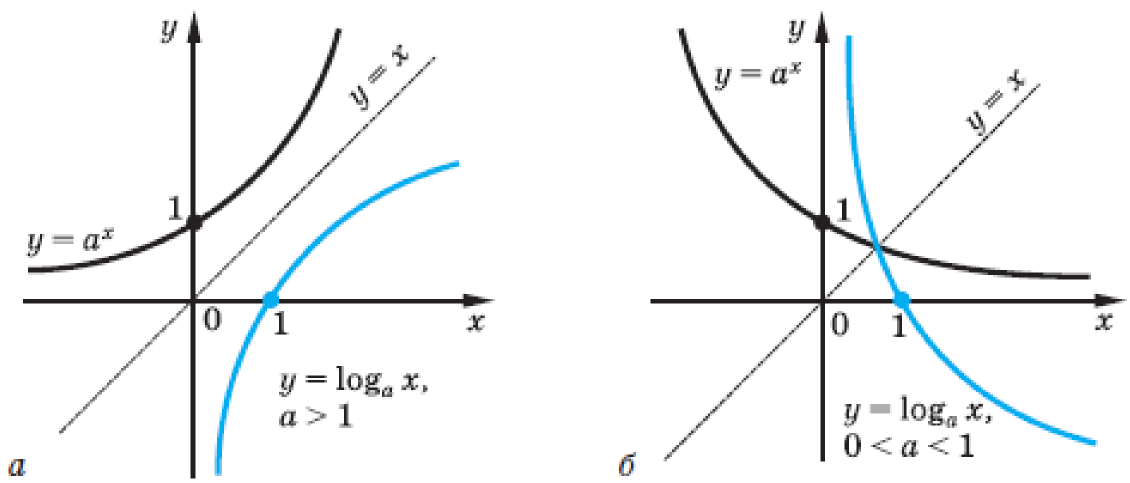


Рисунок 2.3 Графік показникової і логарифмічної функцій

Покажемо, що логарифмічна функція функція $y = \log_a x$ є оберненою до функції $y = a^x$.

Дійсно, показникова функція $f(x) = a^x$ при $a > 1$ зростає на множині *R*, а при $0 < a < 1$ — спадає на множині *R*. Область значень функції $f(x) = a^x$— проміжок $(0; +\infty)$. Отже, функція $f(x)$ оборотна(набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення) і має обернену функцію з областю визначення (0; +∞) і областю значень R. Нагадаємо, що для запису формули оберненої функції досить з рівності $y = f(x)$ виразити x через y і в одержаній формулі $x = g(y)$ аргумент позначити через x, а функцію — через y.

Тоді з рівняння $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) за означенням логарифма одержуємо $x = \log_a y$— формулу оберненої функції, у якій аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, маємо формулу $y = \log_a x$ — функції, оберненої до функції $y = a^x$.

Оскільки область визначення прямої функції є областю значень оберненої, а область значень прямої функції — областю визначення оберненої, то, знаючи ці характеристики для функції $y = a^x$, одержуємо відповідні характеристики для функції $y = \log_a x$:

Характеристика	Функція	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення	R	(0; +∞)
Область значень	(0; +∞)	R

1) Областю визначення функції $y = \log_a x$ є множина R+ всіх додатних чисел ($x > 0$);

2) Областю значень функції $y = \log_a x$ є множина R всіх дійсних чисел (тоді функція $y = \log_a x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень).

3) Функція $y = \log_a x$ не може бути ні парною, ні непарною, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.

4) Графік функції $y = \log_a x$ не перетинає вісь Oy, оскільки на осі Oy $x = 0$, а це значення не входить до області визначення функції $y = \log_a x$.

Графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, оскільки $\log_a 1 = 0$ при всіх значеннях a ($a > 0$, $a \neq 1$).

5) Потім доцільно *довести з учнями монотонність логарифмічної функції*:

Доведіть, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є монотонно зростаючою, а при $0 < a < 1$ — монотонно спадною.

Нехай $a > 1$ та $x_2 > x_1$. Потрібно довести, що $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Для доведення припустимо протилежне, що $\log_a x_2 < \log_a x_1$ або $\log_a x_2 = \log_a x_1$. При $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є монотонно зростаючою. Тому з умови $\log_a x_2 < \log_a x_1$ випливає, що $a^{\log_a x_2} < a^{\log_a x_1}$, але $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$. Отже, $x_2 < x_1$.

Але це суперечить умові, згідно якої $x_2 > x_1$. До протиріччя призводить й інше припущення: $\log_a x_2 = \log_a x_1$.

В цьому випадку $a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1}$ або $x_2 = x_1$. Залишається визнати, що $\log_a x_2 > \log_a x_1$.

Тим самим ми довели, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ є монотонно зростаючою.

Випадок, коли $a < 1$, можна запропонувати учням довести самостійно.

6) *Проміжки знакосталості*. Оскільки графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь *Ox* у точці $x = 1$, то, враховуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, маємо:

Характеристика	Значення аргументу	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

Для опрацювання поняття *області визначення, найбільшого та найменшого значень, парності, непарності для логарифмічної функції* пропонуємо розглянути такі приклади:

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y(x) = \frac{4}{\log_5(10-x)}$.

Розв'язання:

Застосовуючи властивість логарифма 10-$x > 0$ та знаменник не повинен дорівнювати нулю $\log_5(10 - x) \neq 0$, об'єднаємо це в систему:

$$\begin{cases} 10 - x > 0 \\ log_5(10 - x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ log_5(10 - x) \neq log_5 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ 10 - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

D(*f*) = $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$.

Відповідь: $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$.

Приклад 2. Знайдіть найбільше значення функції $y = \log_{0.1}(x^2 + 100)$.

Розв'язання:

Функція $y = log_{0.1} f(x)$ спадна, тому найбільшого свого значення вона набуває при найменшому значенні $f(x)$.

$f(x) = x^2 + 100$ свого найменшого значення набуває при $x = 0$.

Отже, найбільше значення функції дорівнює $y(0) = \log_{0.1}(0 + 100) = \log_{0.1} 100 =$ $= -2$.

Відповідь: -2.

Приклад 3. Знайдіть найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 14)$.

Розв'язання:

Функція $log_{\frac{1}{5}} f(x)$ спадна, тому найбільшого свого значення вона набуває при найменшому значенні $f(x)$.

$f(x) = x^2 - 6x + 14$ свого найменшого значення набуває в точці, яка є вершиною параболи. Знайдемо координати вершини параболи: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2} =$ $=3$.

$y(3) = \log_{\frac{1}{5}}(9 - 18 + 14) = \log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$.

Відповідь: -1.

Приклад 4. Доведіть, що функція *y(x)* = $\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ непарна.

Доведення:

Потрібно нагадати учням, що перш за все, потрібно перевірити, чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат.

Знайдемо область визначення функції: вираз під логарифмом має приймати лише додатні значення.

Вираз $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)>0$ при будь-якому значенні x, отже областю визначення є множина дійсних чисел R, це означає, що область визначення симетрична відносно нуля.

Вираз під логарифмом можемо помножити і поділити на один й той самий вираз, відмінний від нуля$(\sqrt{x^2+1}+x)$:

y(x)= $\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lg\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lg\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lg\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$

$=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$.

Тепер потрібно перевірити, чи виконується рівність $y\,(-x)=y\,(x)$ або $y\,(-x)=-\,y\,(x)$.

$y\,(-x)=\lg\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\,y(x).$

Отже, функція непарна.

2.3. Прикладні аспекти вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю

Володіння певними видами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язування прикладних задач є запорукою успішної участі особистості в сучасному суспільному житті.

Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики. Математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення *прикладної спрямованості викладання математики* сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема [25].

Радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – *прикладні задачі*, розв'язування яких потребує глибоких знань як з математики, так і з інших дисциплін [25].

Прикладні задачі – один з дієвих і ефективних засобів для формування в учнів вмінь і навичок застосовувати набуті в курсі алгебри і початків аналізу знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Їх вкрай недостатньо в чинних шкільних підручниках з математики [24].

Однією з методичних вимог щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу є наповнення навчального процесу *прикладними задачами*, що задовольняють такі методичні вимоги:

1) задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань;

2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і чинним підручникам з курсу алгебри і початків аналізу щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв'язування;

3) прикладні задачі природничого характеру повинні демонструвати практичне застосування математичних ідей у різних галузях;

4) зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес, давати можливість демонструвати ефективне використання математичних знань на практиці;

5) поняття і терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням;

6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати існуючим на практиці, тобто бути реальними [24].

Необхідно зазначити, що процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання.

- переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, на мову математики (I етап, **створення математичної моделі**);

- розв’язування отриманої математичної задачі (ІІ етап, **дослідження математичної моделі**);

-інтерпретація отриманих результатів, тобто переклад розв’язку математичної задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (ІІІ етап, **інтерпретація розв’язків**) [25].

Спеціальні дослідження показують, що найбільш складним для учнів є І етап: дуже слабко володіють навичками перекладу прикладної задачі з природної мови на мову математики, створення адекватної математичної моделі.

Якщо ж учням запропонувати готову або допомогти створити математичну модель прикладної задачі (рівняння, систему рівнянь, функцію тощо), то з її розв’язанням вони вправляються добре.

Менш успішним, порівняно з ІІ етапом, є ІІІ етап (– не завжди учні вміють інтерпретувати розв’язок математичної задачі як розв’язок прикладної задачі). Слід зазначити, що навчання учнів розв’язування прикладних задач – завдання не з легких. Труднощі виникають і в тих, хто навчає, і в тих, хто вчиться [24].

Для організації ефективної навчальної діяльності учнів із розв’язування прикладних задач для кожного із вказаних вище етапів можна виділити відповідні методичні прийоми і найбільші загальні орієнтовні дії:

І етап: - використати евристичні запитання (евристичні приписи, спеціальні евристики, які застосовуються для вивчення конкретного навчального матеріалу);

- абстрагуватися від властивостей об’єкту, несуттєвих для побудови адекватної моделі;

- допомагати учням чітко вказувати на відмінності між об’єктом та його моделлю;

- формулювати умову та вимогу прикладної задачі на мові математики.

ІІ етап: - використати (за необхідності) джерела додаткових даних і теоретичних відомостей;

- використати ілюстративні креслення, графіки або ескізи, які допомагають знайти розв’язання задачі;

- використати (за необхідності) математичні задачі-двійники;

- використовувати систематично ІКТ для виконання рисунків, графіків, проведення обчислень;

- довести знайдений розв’язок до числового значення або розрахункової формули.

ІІІ етап: - здійснити відбір тих розв’язків математичної задачі, які будуть розв’язками прикладної задачі, посилаючись на область визначення даних задачі, здійснюючи перевірку розв’язку;

- оцінити (за необхідності) ступінь точності отриманих розв’язків.[24]

Функціональна змістова лінія має величезне значення для забезпечення здатності розв’язувати *прикладні задачі.*

Нині діючими навчальними програмами з математики для учнів 10-11 класів передбачено при вивченні елементарних функцій робити наголос на моделюванні реальних процесів. В уявленні учнів характер реального процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями.[23]
Для огляду властивостей певного виду функцій корисно розглядати залежність, яка має місце в природі і техніці, або закономірнісь деякого життєвого процесу, зрозумілу і просту для сприйняття. Вибрана залежність є функцією певного виду, а, отже, властивості, які має ця залежність, є властивостями функцій даного виду. Однак помітити ці властивості учневі буває інколи простіше на конкретній закономірності, ніж здогадатися про них, виходячи з загального аналітичного виразу функції. Це і є метою введення залежностей реальних процесів та явищ [23].

В класах фізико-математичного профілю доцільно вже на етапі введення **степеневої функції** звернути увагу учнів на те, що на практиці у фізиці і техніці дуже часто доводиться мати справу з ***степеневою функцією*** виду $y=Cx^p$, де C, p – дійсні числа.

Степенева функція виражає залежність енергії E рухомого тіла при сталій масі m від його швидкості v: $E=\frac{1}{2}mv^2$; шляху S , який проходить тіло при рівноприскореному русі за час t , без початкової швидкості: $S=\frac{1}{2}at^2$; витрат води Q через русло параболічної форми, ширина якого B, від найбільшої глибини h води у річці: $Q = 0{,}2Bh\cdot\sqrt[3]{h^2}$.

Розглянуті вище фізичні залежності відомі учням з курсу фізики основної школи.

В класах фізико–математичного профілю під час вивчення теми «Степенева функція» на етапі застосування вмінь і навичок доцільно розглянути такі задачі:

Задача № 1*:*

Проникність броні для снаряда, діаметр якого D, вага W, швидкість влучання v, визначається за формулою $P=R\cdot\frac{W^{\frac{5}{7}}\cdot v^{\frac{10}{7}}}{D^{3,75}}$, де R - стала. На скільки процентів зросте проникність броні при збільшенні швидкості влучання на 1%?

Відповідь. проникність броні зросте на 1,43%.

Задача № 2

Русло річки Терека в районі станиці Котляревської має параболічну форму і найбільші витрати води в цьому районі складають 1340 *м³/с*. . Знайти найбільшу глибину ріки Терека в цьому районі, якщо ширина ріки дорівнює 120 м.

Вказівка. Використайте залежність витрат води через русло ріки від ширини русла і найбільшої глибини води у річці $Q = 0{,}2Bh\cdot\sqrt[3]{h^2}$.

Відповідь. 11,2 м.

На етапі мотивації при введені поняття **тригонометричних функцій** учням повідомляють, що за допомогою цього виду функцій виражається залежність зміни шляху від часу в різноманітних коливних процесах, подаються закони оптики. За допомогою тригонометричних функцій обґрунтовуються численні природні явища та процеси різної природи (механічні, оптичні, електричні та ін.), які відбуваються за законом гармонічного коливання

$y = Asin\,(\varphi x + \alpha)$ або $y = Acos\,(\varphi x + \alpha)$, де y - зміщення точки від положення рівноваги в даний момент часу, A, ω, α - сталі величини, A - амплітуда коливання ($A > 0$) - найбільше зміщення початкової точки від положення рівноваги, ω - циклічна частота ($\omega > 0$) - кількість повних коливань точки за 2π одиниць часу, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, де T - період коливання (проміжок часу протягом якого здійснюється одне повне коливання), α - початкова фаза коливання, визначає ординату точки перетину графіка функції з віссю Oy . Початкові уявлення про гармонічні коливання учні одержують в курсі фізики основної школи в темі ”Механічний рух” 7 класу, вивчаючи коливальний рух, амплітуду коливань, період коливання маятника. А більш детальне їх вивчення відбувається в 10 класі в темі ”Механічні коливання і хвилі”, де безпосередньо розглядають рівняння гармонічних коливань. Гармонічні електромагнітні коливання є складовою теми ”Електромагнітні коливання і хвилі” курсу фізики 11 класу.

Природі відомі інші явища, які обґрунтовуються за допомогою тригонометричних функцій.

Наприклад, райдуга виникає завдяки тому, що сонячне світло заломлюється у дощових краплях за *законом заломлення* $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$, де α - *кут падіння, β- кут заломлення світла*, v_1 - швидкість світла у першому середовищі, v_2 - швидкість світла у другому середовищі, n_1 - показник заломлення першого середовища, n_2 - показник заломлення другого середовища.

Під час вивчення теми «Тригонометричні функції» на етапі застосування вмінь і навичок доцільно розглянути такі задачі:

Задача № 3. Координата тіла, виміряна в метрах, змінюється з часом так $x = 0{,}02sin\left(\varphi t + \frac{\pi}{4}\right)$.Чому дорівнює амплітуда коливання тіла? Визначте фазу коливання і координату тіла в момент часу $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{T}{8}$.

Відповідь. 0,02; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$; 0,014 *м*, -0,014 *м*, 0,02 *м*.

Задача № 4. Точка здійснює гармонічні коливання. У деякий момент часу t_1 зміщення y_1 = 5 *см*. При збільшенні фази вдвічі зміщення точки стало y_2= 8 *см*. Знайдіть амплітуду коливання.

Вказівка . Фаза коливання дорівнює ωt+α, де *ω* - циклічна частота, *α*- початкова фаза.

Розв'язання . Згідно з умовою задачі маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5 = \ Asin(\varphi t_1 + \alpha) \\ \varphi t_2 + \alpha = 2(\varphi t_1 + \alpha) \\ 8 = \ Asin2(\varphi t_1 + \alpha) \end{cases}$$

Використавши формулу подвійного аргументу, з третього рівняння одержимо: $8 = \ 2Asin(\varphi t_1 + \alpha) \cdot cos(\varphi t_1 + \alpha)$. $Asin(\varphi t_1 + \alpha) \ = 5$.

Отже, $cos(\varphi t_1 + \alpha) = \frac{4}{5}$. За основною тригонометричною тотожністю знаходимо, що $sin(\varphi t_1 + \alpha)$ = $\frac{3}{5}$. З першого рівняння маємо $A = \frac{25}{3} \approx 8.3$ (см).

Відповідь. 8,3 *см.*

На етапі введення **показникової функції** учням наголошують, що за допомогою цієї функції описуються процеси природного зростання чи спадання. В класах фізико-математичного профілю доцільно вже на етапі мотивації привести приклади застосування показникової функції в фізиці: процеси новоутворення і розпаду математично можуть бути описані за допомогою залежності P= $P_0 e^{kt}$, де P – кількість новоутвореної речовини або речовини, що розпалася, в момент часу t, P_0 – початкова кількість речовини, k – стала, яка стосується конкретного випадку. За таким законом відбувається радіоактивний розпад, зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі людини за рахунок виведення його природним шляхом. З законом радіоактивного розпаду учні знайомляться в курсі фізики 11 класу в темі "Атомна і ядерна фізика". Відома й інша формула радіоактивного розпаду m=$M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, де m - кількість речовини в момент часу t, M- початкова кількість речовини, T - період піврозпаду речовини.

Також за допомогою показникової функції описуються:

1) залежність атмосферного тиску від висоти P=$P_0 \cdot a^{-kh}$, де P - тиск на висоті h, P_0 - тиск на рівні моря, a, k - деякі сталі;

2) залежність між температурою тіла і температурою навколишнього середовища T =$T_0 \cdot e^{kt}$, де T - різниця температур в момент часу t, T_0- початкова різниця температур, k - стала;

3) залежність між силами F і F_0, F=$F_0 \cdot k^x$, де F_0- прикладена сила, F - сила, що утримує корабель, ($F_0 < F$), k - стала, яка залежить від матеріалу з якого зроблено канат і стовп, x - число витків на барабані.

В класах фізико-математичного профілю під час вивчення теми «Показникова функція» не етапі застосування вмінь і навичок доцільно розглянути такі задачі:

Задача № 5. При розпаді *4*–х грамів радіоактивної речовини була визначена залежність залишку m цієї речовини (в грамах) від часу t (в добах): $m(t)$=$4\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Через який проміжок часу залишилось *0,125 г* радіоактивної речовини?

Розв'язання. Згідно з умовою задачі одержуємо рівність $0{,}125=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$, яка рівносильна рівності $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Звідки знаходимо, що t = 5 діб.

Відповідь. через 5 діб.

Задача № 6. Вакуумний насос може відкачати *2%* газу, який міститься у камері, при кожному окремому повному русі. Скільки необхідно часу, щоб відкачати *95%* газу, якщо насос виконує один повний рух протягом двох секунд? Для розв'язування задачі використайте залежність P= $P_0 e^{-kt}$, де P – кількість газу в камері в момент часу t, P_0 – початкова кількість газу у камері.

Відповідь. 300 с.

Задача № 7. Охолодження тіла відбувається за законом D=$D_0 \cdot b^t$, де D – різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; t – час (у хвилинах); D_0 = $D(0)$ – початкова різниця температур; b –

стала величина, яка залежить від форми тіла і матеріалу, з якого воно виготовлене. Металеву кульку, температура якої *160°C*, помістили в кімнату, температура повітря в якій *23°C*. Протягом *1* хвилини температура кульки стала *146°C*. Якою буде температура кульки через *5* хвилин?

Розв'язання. Для визначення параметра b знайдемо D_0 та D, скориставшись даними з умови задачі. $D_0 = 160° - 23° = 137°$, $D = 146° - 23° = 123°$. Підставляючи одержані дані в закон охолодження тіла, матимемо $123 = 137 \cdot b^1$, звідки $b \approx 0.9$. Отже, маємо

$D(t) = 137 \cdot 0.9^t$ Оскільки $D(5) = 137 \cdot 0.9^5 \approx 80.9(℃)$, то температура кульки дорівнює $D(5) + 23℃ = 103{,}9(℃)$.

Відповідь. 103,9 *°C*.

Вивчення **логарифмічної функції** розпочинається з введення поняття логарифма та розгляду відомостей про логарифми чисел. Перед вивченням означення логарифма корисно проілюструвати потребу введення такого поняття. Це можна зробити, використовуючи приклади, які були розглянуті при вивченні показникової функції, конкретизувавши їх і поставивши відповідні питання. Так, у класах фізико-математичного профілю доцільно буде навести такий приклад:

Задача: При розпаді *4*–х грамів радіоактивної речовини була визначена залежність залишку m цієї речовини (в грамах) від часу t (в добах): $m(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$. Через який проміжок часу залишилось *0,125 г* радіоактивної речовини?

Розглядаючи приклади такого типу, учні помітять, що доводиться розв'язувати рівняння $a^x = N$, де a і N- деякі числа, причому $a > 1$ і $a \neq 1$.

Після того, як буде з'ясовано існування єдиного кореня даного рівняння при $N > 0$, вводиться означення логарифма.

Відповідність, яка існує між кожним додатним числом x і певним значенням його логарифма: $\log_a x$ (основа a розглядається як дане стале додатне число, $a \neq 1$), приводить до поняття нової логарифмічної функції, визначеної на множині всіх додатніх чисел.

Вивчаючи логарифмічну функцію, на етапі застосування вмінь і навичок корисно розглянути з учнями ряд прикладів її практичного застосування. Її можна використовувати для визначення величини землетрусу, інтенсивності звуку та в інших явищах, процесах та практичних ситуаціях, окремі з яких представлені у таблиці 2.2:

Таблиця 2.2

Практичне застосування логарифмічної функції

№	Формула залежності	Значення змінних та сталих
1	$R = \lg\frac{I}{I_0}$	залежність величини землетрусу R (*показання шкали Ріхтера)* від інтенсивності землетрусу I, де I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями
2	$\beta = 10 \cdot \lg\frac{I}{I_0}$	залежність інтенсивності звуку β від сили звуку I, де I_0 - сила звуку на порозі чутності (мінімальна інтенсивність, при якій людське вухо перестає сприймати звук)
3	$y = \log_2 n + 1, n \in N$	кількість одиниць вимірювання інформації (бітів), необхідних для збереження в комп'ютері натурального числа n (у звичайному для комп'ютера двійковому форматі)
4	$n = \frac{\boldsymbol{lgP - lgC}}{\boldsymbol{lg\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)}}$ формула складних відсотків	число проміжків часу n необхідне для того щоб початкове значення величини C (початкова сума) при відсотковій ставці p% досягло значення P (кінцевої суми)

Доцільно, щоб приклади мали не тільки ілюстративний характер, а й входили до складу практичних задач. Це допоможе глибше усвідомити властивості логарифмічної функції і засвоїти поняття, пов'язані з нею.

Розглянемо приклади таких практичних задач:

Задача № 8. Яким буде відношення інтенсивності землетрусу, величина якого за шкалою Ріхтера *8* балів, до інтенсивності землетрусу, величина інтенсивності якого *5* балів?

Вказівка.

Використайте формулу $R=\lg\frac{I}{I_0}$, де R - величина землетрусу (*показання шкали Ріхтера*), I - інтенсивність землетрусу, I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями.

Відповідь. 1000:1.

Задача № 9. Голосність β рок–музики *110 дб.* У скільки разів сила звуку I перевищує його силу I_0 на порозі чутності, коли відомо, що $\beta=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$?

Відповідь. У 10^{11} раз.

Наведені прикладні задачі доцільно використовувати як при введенні понять функцій, так і при вивченні їх властивостей та побудові графіків. Вдало підібрані, на основі теоретичного матеріалу функціональної змістової лінії, прикладні задачі допомагають розкривати його наукове і практичне значення, що є важливим засобом пробудження в учнів активного мислення і ефективним стимулом для розвитку та зміцнення відповідних інтересів.

2.4. Експериментальна перевірка основних положень дослідження та її результати

Як уже зазначалося, за темою дослідження була виконана публікація у вигляді тез «Функціональна складова зовнішнього незалежного оцінювання з математики» до Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених від 28 листопада 2019 р. [27]

Під час написання тез, нами був глибоко проаналізований зміст завдань зовнішнього незалежного оцінювання, і було досліджено, що завдання, які стосуються функцій, їх властивостей і графіків, широко представлені в сертифікаційних роботах з математики. Це спонукало нас до розробки ефективної методики навчання учнів будувати графіки за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій. Було розроблено систематизуючу таблицю, користуючись якою, учні, перш за все, уникають помилок під час побудови графіків і швидше запам'ятовують основні правила геометричних перетворень. Таблицю 2.1 «Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій» представлено в другому розділі кваліфікаційної роботи.

Експериментальна перевірка основних положень дослідження здійснювалася в період з 16.09.2019 по 10.10.2019. На етапі обґрунтування гіпотези було проведено навчальний педагогічний експеримент.

В експерименті брало участь 30 учнів 10 класу фізико-математичного профілю (15 - контрольна група, 15 - експериментальна).

Він був спрямований на перевірку основних положень дослідження, згідно з якими, запропонована методика навчання може сприяти підвищенню ефективності математичної освіти.

Мета проведення навчального експерименту полягала в перевірці впливу запропонованої методики вивчення теми «Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій» на якість математичних знань і вмінь учнів.

Обиралися групи учнів, що знаходяться приблизно в рівних умовах на початку експерименту. Однаковими умовами при проведенні експерименту були: обсяг навчального матеріалу, встановлений навчальною програмою з алгебри і початків аналізу для 10 класу на профільному рівні; час, що відводиться на його вивчення, текст контрольної роботи.

Різниця при викладанні теми в контрольній та експериментальній групах полягала в тому, що в контрольній групі (КГ) навчання учнів будувати графіки функцій проходило без дотримання певної схеми, описаної в розробленій таблиці, заняття велися за традиційною методикою; в експериментальній групі (ЕГ) заняття велися за запропонованою методикою, з використанням розробленої таблиці 2.2 «Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій», представленої в другому розділі кваліфікаційної роботи. На заняттях з учнями з експериментальної групи (ЕГ) ми відпрацьовували на практиці кожен вид перетворення, вчили учнів співвідносити графік до певного виду перетворень, писати послідовність побудови графіка функцій.

З метою оцінки результатів експерименту, учням була запропонована контрольна робота в кінці навчального експерименту. Завдання контрольної роботи були складені відповідно до вимог програм з математики. При аналізі виконання контрольної роботи проводилося порівняння якості знань учнів контрольної (КГ) та експериментальної групи (ЕГ) в кінці експерименту. Контрольна робота містила шість практичних завдань різної складності. Максимальна кількість балів, яку міг заробити учень -12.

Завдання з контрольної роботи представлені нижче:

Використовуючи геометричні перетворення, побудуйте графіки функції:

1. $y = (x+3)^2 - 5$ *2.* $y = \frac{4x+14}{x+1}$

3. $y = 2\sqrt{3x-1}$ *4.* $y = \frac{1}{|x|-3}$

5. $y = \sqrt{|x+2|}$ *6.* $y = |x^2 - 5|x| + 6|$

Результати контрольної роботи представлені в таблиці 2.3, а також на діаграмі 2.1:

Таблиця 2.3

Результати контрольної роботи

Кількість балів	Кількість учнів, які набрали цю кількість балів	
	КГ	ЕГ
12	0	1
11	1	2
10	2	3
9	3	4
8	3	3
7	2	1
6	2	1
5	1	0
4	1	0
3	0	0
2	0	0
1	0	0

Діаграма 2.1

Отримані результати дозволяють зробити наступний висновок: якість знань в експериментальній і контрольній групах після експерименту різні. Результати учнів експериментальної групи мають тенденцію бути вище, ніж результати учнів контрольної групи. На підставі цього можна стверджувати, що запропонована методика позитивно впливає на якість знань учнів.

Отже, викладені результати педагогічного експерименту свідчать про більш високі показники якості знань в учнів експериментальної групи.

Таким чином, експеримент підтвердив наше припущення про ефективність запропонованої методики.

ВИСНОВКИ

Досліджуючи методичні аспекти вивчення основних понять, що стосуються числових функцій, ми дійшли таких висновків.

Функціональна лінія пронизує весь шкільний курс математики і розвивається в тісному взаємозв'язку з іншими змістовими лініями, слід також враховувати існуючі міжпредметні зв'язки з геометрією, фізикою, інформатикою.

Ця лінія має величезне значення для забезпечення математичної компетентності - вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміти будувати модель, досліджувати її методами математики.

Мотивацією для вивчення властивостей функцій має бути їх широке прикладне застосування, жодне з інших понять не відображає явищ реальної дійсності з такою безпосередністю і конкретністю, як поняття «функція».

В ході даної роботи було проаналізовано науково-методичну та навчальну літературу з теми дослідження, зроблено аналіз навчальних програм з математики рівня стандарту, профільного і поглибленого рівня. Також було проведено порівняльний аналіз трактування основних функціональних понять у чинних шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу.

В процесі дослідження було розроблено узагальнюючі таблиці, розкрито методичні особливості щодо вивчення основних понять теми в курсі профільної школи, надано методичні рекомендації до формування основних функціональних понять під час вивчення конкретних видів функцій з урахуванням компетентнісного підходу, представлено тренувальні вправи та задачі, які можуть бути використані вчителями при викладанні курсу алгебри і початків аналізу.

Також було розроблено систему прикладних задач, спрямованих на навчання функцій у класах фізико-математичного профілю. Ці задачі доцільно використовувати як при введенні понять функцій на етапі мотивації, так і при вивченні їх властивостей та побудові графіків. Прикладні задачі – дієвий і ефективний засіб, який формує в учнів вміння і навички застосовувати набуті в курсі алгебри і початків аналізу знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Прикладні задачі є стимулом для розвитку та зміцнення відповідних інтересів.

Ми розробили спеціальну методику для вивчення теми «Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень вже відомих графіків функцій», було проведено навчальний педагогічний експеримент, результати якого підтвердили ефективність запропонованої методики.

Поставлена мета досягнута, завдання виконані повністю.

Проведене дослідження не вичерпує всіх проблем удосконалення математичної підготовки учнів профільної школи, і дослідження, сфокусовані на удосконалення компетентнісно орієнтованої методики навчання функцій в курсі алгебри і початків аналізу є перспективними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьєва О. М. Математика в 10-му класі: Книга для вчителя/ О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, Сліпенко А. К.-Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2013-304с.
2. Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальній посібник / Бевз Григорій Петрович. – 3-те видання, доповнене і перероблене.– К.: Вища школа, 1989. – 369 с.
4. Виленкин Н. Я. Математический анализ: учебное пособие / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбруд. – М.: Просвещение, 1973. – 512 с.
5. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / Микола Степанович Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – №1. – С. 35–39.
6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України № 1392 від 23 листопада 2011 р.
7. Дубовик В.П Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632
8. Егерев В. К. Методика построения графиков функций. Учебное пособие для студентов вузов, изд.2-е , М.-«Высшая школа» 1970 /Егерев В. К. и др.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл./ О. С. Істер — Київ : Генеза, 2017.—264 с.
10. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018.—448 с.

11. Литвиненко В. Н. Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учебное пособие для студентов физ-мат. спец. пед. ин-тов, 3-е изд., перераб. и доп., - М., «ABF» 1995
12. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський , М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 256 с.
13. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.
14. Мерзляк А. Г Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. —Х. : Гімназія, 2018. — 400 с.
15. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011
16. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. —256 с.
17. Навчальні програми МОН (математика) [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi
18. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти /Є. П. Нелін.—Харків : Вид-во «Ранок»,2018—272 с.
19. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти /Харків: Вид-во «Ранок», 2019—240 с.
20. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для

використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням українською мовою [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/

21. Постанова Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 № 1392 «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти» https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF
22. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, доповнене і перероблене / Слєпкань Зінаїда Іванівна. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.: іл.
23. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка,2002.-128с.
24. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.
25. Соколенко Л.О., Швець В.О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в сучасній школі. – 2013, №12.- С.32-41.
26. Тести ЗНО онлайн з предмета «Математика» [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/.
27. Топорець Т О., Філон Л. Г. Функціональна складова зовнішнього незалежного оцінювання з математики. // *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання:* Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (27 листопада 2019 р., м. Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2019. С. 98-99.
28. Філон Л.Г. Про підготовку випускників закладів загальної середньої освіти до державної підсумкової атестації з математики// Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи: збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-

практичної конференції з міжнародною участю, 20-21 вересня 2019 р. /Міністерство освіти і науки України, ДЗ “ПНПУ імені К. Д. Ушинського”. Х.: Вид-во «Ранок», 2019. С. 124- 125.

29. Філон Л.Г. Функціональна складова змістової лінії «Рівняння і нерівності» у профільному навчанні математики//Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО– 2019) м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. – Черкаси Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019, С. 86-87
30. Чашечникова О. С. Функції та їх графіки: побудова графіків функцій та рівнянь, аналіт. вираз яких містить тригонометричні функції: навч.-метод. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-тів пед. ун-тів/О.С.Чашечникова, Л.Г.Чашечнікова, О.В.Мартиненко. Рівне: Волин. обереги, 2008. 130 с.
31. Шунда Н. М. Функції та їх графіки. Посібник для вчителів. К., Радянська школа, 1983, 190 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Трактування функціональних понять з огляду їх подання в альтернативних підручниках для 10 класу

Для вивчення алгебри і початків аналізу в 10-му класі учасникам освітнього процесу пропонуються підручники різних авторів. Кожен автор чи авторський колектив подає навчальний матеріал у власному трактуванні. Тому, учителям при викладанні доцільно звернути увагу на різницю в трактуванні функціональних понять та означень, поданих в різних підручниках , а також розсудливо і творчо підходити до подання відповідного матеріалу. Нами було здійснено аналіз таких підручників: [10], [14] , [18].

Було розроблено таблицю А.1, де, наведено трактування функціональних понять в різних сучасних підручниках для 10 класу.

Таблиця А.1

Трактування функціональних понять в альтернативних підручниках для 10 класу

Автори: Істер О. С., Єргіна О. В.	автори: Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С.	автор: Нелін Є. П.
Числовою функцією (або функціональною залежністю) називають таку залежність між двома змінними, при якій кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає за певним правилом єдине	Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція** — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна	**Числовою функцією** з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y.

значення залежної змінної.	знайти єдине значення залежної змінної з множини *Y*.	
Областю визначення функції *y*= *f* (*x*) називають множину всіх значень, яких може набувати аргумент *x*.	Множину всіх значень, яких набуває аргумент, тобто множину *X*, називають **областю визначення** функції та позначають *D* (*f*) або *D* (*y*).	**Область визначення** функції *f* — це множина всіх тих значень, яких може набувати аргумент *x*. Її позначають *D* (*f*).
Множиною (або областю) значень функції *y*= *f* (*x*) називають множину, що складається з усіх чисел *f* (*x*), де *x*∈ *D* (*f*).	Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, тобто множину *Y*, називають **областю значень** функції та позначають *E* (*f*) або *E* (*y*).	**Область значень** функції *f* - це множина, яка складається з усіх чисел *f (x),* де *x* належить області визначення. Її позначають *E* (*f*).
Якщо графік функції *y*= *f* (*x)* на проміжку $[a; b]$ є неперервною лінією, то у множині значень функції є найбільше число і найменше число. Ці числа називають **найбільшим і найменшим значеннями** функції на проміжку $[a; b]$.	Число $f\ (x_0)$ називають **найбільшим значенням** функції *f* на множині $M \subset D\ (f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f\,(x_0) \geq f\,(x)$. Число $f(\ x_0\ )$називають **найменшим значенням** функції *f* на множині	**Найбільшим (найменшим) значенням** функції *f(x)*на множині *M,* на якій ця функція задана, називається значення функції *f(x)* у деякій точці x_0 множини *M*, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.

	$M \subset D$ (*f*), якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.	
Значення аргументу *x*, при яких значення функції *y=f (x)* дорівнюють нулю, називають **нулями функції.**	Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають **нулем функції** *	
Проміжок, на якому функція зберігає знак, називають **проміжком знакосталості функції.**	Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають **проміжком знакосталості функції** *	
Функцію *y=f (x)* називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжка відповідає більше значення функції. Інакше кажучи, функцію *y=f (x)* називають **зростаючою** на деякому проміжку,	Функцію *f* називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.* Автор зазначає, що часто використовують і таке формулювання: Функцію називають	Функція *f (x)* називається **зростаючою** на множині Р, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає більше значення функції. Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини *P*: якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$.

якщо для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$ справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.	**зростаючою** на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. *	
Функцію *y=f(x)* назива-ють **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжка відповідає менше значення функції. Тобто, функцію $y=f(x)$ називають **спадною** на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$ справджується нерів-ність $f(x_2) < f(x_1)$.	Функцію f називають **спадною** на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.* Автор зазначає, що часто використовують і таке формулювання: Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу із цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. *	Функція $f(x)$ називаєть-ся **спадною** на множині P, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає менше значення функції. Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P: якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) < f(x_1)$.

Функцію $y=f(x)$ називають **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля, і для кожного x з області визначення справджується рівність $f(-x) = f(x)$. Графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі ординат.	Функцію f називають **парною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(–x) = f(x)$. Область визначення парної функції симетрична відносно початку координат. Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.	Для функцій, області визначення яких симетричні відносно початку координат, визначено поняття парності/непарності: Функція f називається **парною**, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(–x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.
Функцію $y=f(x)$ називають **непарною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля, і для кожного x з області визначення справджується рівність $f(-x) = -f(x)$. Графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.	Функцію f називають **непарною**, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(–x) = –f(x)$. Область визначення непарної функції симетрична відносно початку координат. Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.	Для функцій, області визначення яких симетричні відносно початку координат, визначено поняття парності/непарності: Функція f називається **непарною**, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(–x) = –f(x)$. Графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.

* Слід відмітити, що автори підручника [14] означення таких понять як нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання і спадання надають в підручнику з алгебри для 9 класу, не повторюючи їх в підручнику для 10 класу.

Робота над такого роду таблицями дозволить учителю математики здійснити аналіз введення певного поняття, побачити, що доцільно зберегти, який підхід логічно стрункіший, яким варто скористатися, враховуючи особистісно орієнтований принцип навчання, дотримуючись мети освітнього процесу та вимог навчальної програми. Зауважимо, що усі подані означення є правильними.