

**Національний університет «Чернігівський колегіум»  
імені Т. Г. Шевченка**

Природничо-математичний факультет  
Кафедра математики та економіки

## Кваліфікаційна робота

на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

на тему:

**«Точкові ґратки та їх застосування»**

Виконала:

студентка 6 курсу, групи 61

спеціальності

111 Математика

Лутченко Анна Володимирівна

Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Нак Марина Миколаївна

Чернігів – 2019

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ТОЧКОВИХ ҐРАТОК .....	6
1.1. Точкові ґратки у кристалографії.....	6
1.2. Означення математичної точкової ґратки та її властивості.....	14
РОЗДІЛ 2 ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ ҐРАТОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ .....	17
2.1. Властивості, пов'язані з означеннями.....	17
2.2. Круги та кола на цілочисельних ґратках .....	24
2.2.1. Властивості цілочисельних ґраток на колі .....	24
2.2.2 Узагальнення властивостей ґраток на $k$ -вимірний простір.....	35
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОЧКОВИХ ҐРАТОК.....	38
3.1. Використання властивостей ґраток, пов'язаних із побудовою кіл.....	38
3.2. Використання властивостей ґраток, пов'язаних з побудовою на них многокутників.....	41
3.3. Практичні задачі, пов'язані з точковими ґратками .....	44
ВИСНОВКИ.....	50
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	51

## ВСТУП

З початком розвитку математичного мислення усі можливі властивості об'єктів та явищ оточуючого світу люди прагнули описати за допомогою чисел. Але ж якщо користуватися лише натуральними, далі цілими, далі раціональними числами, то, звичайно, різноманіття властивостей таких об'єктів буде обмежена. З іншого ж боку, використання дійсних чисел у повній мірі на ранніх етапах розвитку математики як науки не мало місця через їх надмірну абстрактність, подолати яку в деякій мірі можна було за допомогою геометричних образів. Так, ще в Стародавній Греції кожному числу намагалися поставити у відповідність довжину, площу чи об'єм деякої геометричної фігури (відрізок, многокутник тіло обертання тощо). Особливим етапом у цьому напрямі, було введення у 1637 р. французьким математиком Р. Декартом поняття «системи координат». Зважаючи на те, що координати точок у просторі – чи не найголовніша ланка зв'язку усіх розділів математики, будь-які пов'язані з нею спроби геометризувати останню можна вважати вдалими початками.

Так, одним з об'єктів побудови геометрії чисел визначають так звані *точкові ґратки*. Примітивно, це нескінченні множини точок  $(x; y)$  площини чи будь-якого  $n$ -вимірного простору, координати яких мають певні властивості. Поняття точкових ґраток розглядалося ще у XVII–XVIII століттях як засіб ілюстрації деяких задач теорії чисел (П. Ферма, Дж. Валліс, Л. Ейлер, К. Гаус, Ж.-Л. Лагранж, А. Лежандр). Сама ж теорія ґраток разом із своїм практичним застосуванням почала свій розвиток уже у XX столітті. На сьогодні, за допомогою точкових ґраток розв'язується дуже багато практичних прикладних задач у таких галузях знань, як алгебра та теорія чисел, математичний аналіз, диференціальні рівняння, топологія, дослідження операцій, кристалографія, криптографія, органічна та неорганічна хімія. Несподіваними також у застосуванні ґраток є дослідження в матричному численні, аналізі самоспряжених операторів, кількісних

методах прийняття рішень та економічному управлінні, біології, теорії розгалужених процесів, теорії коливань у нелінійних системах, теорії гомологій, кодуванні з малою щільністю перевірок на парність, теорії черг, граничному декодуванні, квантовій теорії полів тощо.

Тож тема даної кваліфікаційної роботи є досить актуальною.

**Метою роботи** є узагальнення та систематизація теоретичних відомостей про математичні основи поняття точкових ґраток, а також дослідження шляхів застосування їх властивостей при розв'язуванні задач.

**Основними завданнями** дослідження є:

- освітлення необхідних теоретичних відомостей про точкові ґратки як із точки зору наук природничого спрямування, зокрема кристалографії, так і з математичної точки зору;

- розкриття в достатній мірі властивостей точкових ґраток, пов'язаних безпосередньо з їх означенням, а також їх властивостей, пов'язаних із побудовою на них кіл та багатокутників; дослідити можливі узагальнення певних властивостей на  $n$ -вимірний простір.

- застосування теоретичного матеріалу при розв'язуванні конкретних задач.

**Об'єктом дослідження** точкові ґратки.

**Предметом дослідження** є застосування властивостей точкових ґраток до розв'язування математичних задач.

**Структура та обсяг роботи.** Зміст кваліфікаційної роботи включає в себе вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено об'єкт, предмет та основні завдання.

У першому розділі розглянуто основні принципи та властивості точкових ґраток у кристалографії. Досліджені також 2 основні означення точкових ґраток з математичної точки зору.

Другий розділ присвячений висвітленню усіх важливих властивостей точкових ґраток, зокрема тих, що пов'язані перш за все з їх означеннями,

чому і був присвячений перший пункт цього розділу. Далі у пунктах 2.2 та 2.3 розглянуто властивості ґраток, щодо побудови на них кіл та правильних багатокутників.

У третьому розділі розглянуто приклади використання властивостей точкових ґраток при розв'язуванні певних математичних задач, зокрема наведено застосування відповідного теоретичного апарату при доведенні теорем теорії чисел та їх наслідків. Пункт 3.3 містить розв'язані текстові задачі, які пов'язані з поняттям точкової ґратки.

У висновках роботи узагальнено результати дослідження.

**Апробація:** Результати кваліфікаційної роботи розглядались на Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, яка проходила в м. Чернігові, 27 листопада 2019 року.

## РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ТОЧКОВИХ ГРАТОК

Термін «точкова ґратка» вживається не лише в математиці, а й в інших галузях знань, таких як хімія та кристалографія. Тож розглянемо перш за все означення цього поняття з точки зору зазначених вище природничих наук.

### 1.1. Точкові ґратки у кристалографії

Використання терміну «точкова ґратка» зустрічається, як уже зазначалося, у кристалографії: щодо закономірної та досконалої геометрії кристалів, яка визначає наявну закономірність у їх внутрішній будові. Природно утворені плоскі грані та рівні ребра кристалічних тіл визначають будову їх внутрішньої структури і, таким чином, є зовнішньою ознакою упорядкованого розташування іонів, атомів, молекул чи їх певних сукупностей, що входять у хімічну формулу кристала. Ці упорядковані структурні частини, які розташовані прямолінійними рядами в ієрархічно строгій послідовності, визначають *просторову кристалічну точкову ґратку*.

Також точкові ґратки зустрічаються у визначенні антипода неперервних середовищ: природні середовища бувають суцільними (неперервними) та дискретними (перервними). Прикладами суцільних середовищ можуть слугувати фізичні поля: магнітне, електричне, гравітаційне тощо; прикладами ж дискретних середовищ може бути:

1) кристалічна точкова ґратка, як складається з правильно розташованих у просторі атомів;

2) точкова ґратка, визначена великою кількістю однакових біологічних одиниць – колонії бактерій, тканини тварин, які складаються з однакових клітин.

Точкові ґратки утворюються також «однаковими», або еквівалентними точками, які періодично повторюються в просторі (зокрема, при визначенні однорідності кристала).

Повторюючи однакові точки за допомогою паралельного перенесення (уздовж двох обраних осей), отримуємо *двовимірну точкову ґратку*, що цілком визначена трьома довільними її вузлами, які не лежать на одній прямій. Паралелограми, вершини яких є вузлами ґратки, називаються *комірками ґратки*. Плоску точкову ґратку (рис. 1.1) можна визначити довільною парою основних паралельних перенесень, що не лежать на одній прямій, але прийнято вибирати елементарні перенесення і власне ті, що якнайкраще відображають симетрію ґратки [7].

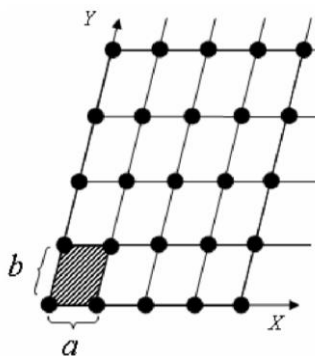


Рис. 1.1.

При паралельному перенесенні (з додатним вектором переміщення) часток уздовж деякої третьої осі утворюється *тривимірна точкова ґратка* (рис. 1.2а). Отримуємо просторову ґратку, тобто тривимірну систему еквівалентних вузлів. Основну трійку паралельних перенесень (її ще називають трансляційною групою) можна вибрати по-різному, проте прийнято, аналогічно плоскій ґратці, вибирати найкоротші перенесення, які відповідають симетрії ґратки і по можливості утворюють між собою прямі кути (рис. 1.2б). Таким чином, маємо таке означення

**Означення 1.1.** *Просторовою точковою ґраткою* називається нескінченне тривимірне періодичне утворення, або геометрична побудова, за допомогою якої в кристалічному середовищі виявляються однакові точки.

Вузли просторової ґратки не обов'язково ототожнюються з атомами чи взагалі з матеріальними точками.

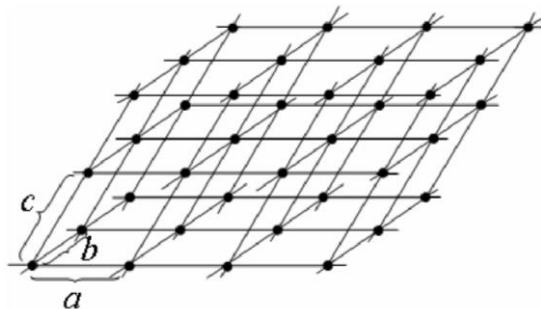


Рис. 1.2а

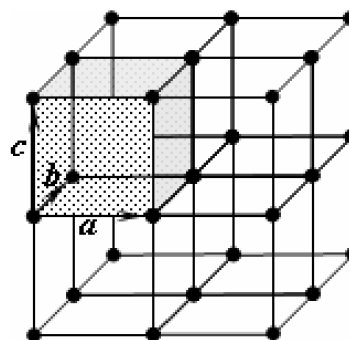


Рис. 1.2б

Паралелепіпед, що побудований на трьох паралельних перенесеннях називається елементарним паралелепіпедом або елементарною коміркою. Об'єм примітивної елементарної комірки не залежить від її форми і є сталою величиною для даної точкової ґратки; він дорівнює об'єму, що належить одному вузлу. Просторову ґратку можна розглядати як систему паралельних елементарних комірок, що мають одна з одною спільну грань та заповнюють увесь простір розглядуваного тіла. Отже, просторову ґратку можна визначити трьома способами:

- 1) трійкою елементарних некопланарних паралельних перенесень (або ж відповідними їх векторами переміщень);
- 2) системою еквівалентних вузлів, які взаємно перетворюються один в одного за допомогою 3-х основних трансляцій;
- 3) систему однакових паралелепіпедів, які щільно заповнюють простір і суміщаються один з одним за допомогою тих же трьох основних паралельних перенесень.

Слід зазначити також (як буде показано пізніше у властивостях математичних точкових ґраток), що плоске зображення будь-якої просторової точкової ґратки, тобто довільна її ортогональна проекція, є теж точковою ґраткою.



У 1848 р. французький вчений О. Браве математичним шляхом вивів 14 видів просторових точкових ґраток, які стали фундаментом для нової геометричної теорії будови кристалічних тіл чи інших природних систем, яка не втратила свого значення і в наш час. Ці ґратки були побудовані Браве із закономірно розташованих у просторі точок (вузлів) шляхом скінченних паралельних перенесень цих точок. Проведенням через ці точки прямих ліній та площин просторові точкові ґратки були поділені на комірки чотирьох типів.

Браве довів, що в кожній точковій ґратці із нескінченною кількістю породжуючих паралелепіпедів, завжди можна вибрати такий, за допомогою якого можна охарактеризувати ґратку повністю.

Породжуючий паралелепіпед має задовольняти такі умови:

1) симетрія елементарної комірки ґратки має відповідати симетрії кристала, точніше, найбільш високій симетрії тієї сингонії, до якої відноситься кристал. Ребра елементарної комірки повинні переходити в інші ребра за допомогою паралельних перенесень;

2) елементарна комірка має містити максимально можливу кількість прямих кутів;

3) кількість рівних ребер та кутів між ними в обраного паралелепіпеда має бути максимальною;

4) при виконанні перших трьох умов об'єм обраного паралелепіпеда має бути мінімальним.

Розглянемо п'ять можливих видів плоских ґраток [7] (див. рис. 1.3).

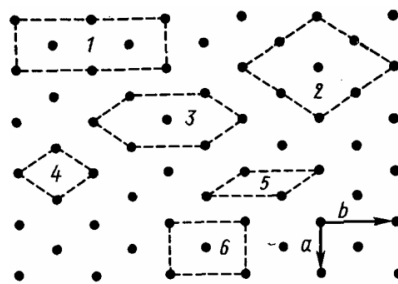


Рис. 1.3

Розглянемо комірку номер 1. Комірка 1 задовольняє симетрії ґратки, має максимальну можливу кількість прямих кутів, але вона не задовольняє умові мінімуму площі.

Комірки 2, 3, 4 відповідають симетрії ґратки, але у них немає прямих кутів і вони не задовольняють умові мінімуму площі (крім комірки 4), тому їх не можна прийняти за елементарні.

Комірка 5 не відповідає симетрії ґратки, у неї немає прямих кутів, але вона володіє найменшою площею.

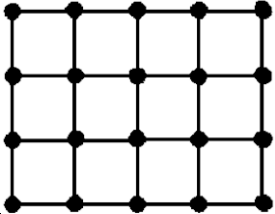
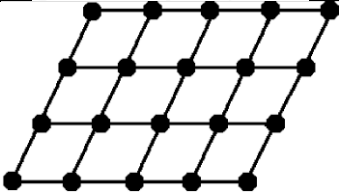
Комірка 6 задовольняє симетрії ґратки, має максимальну можливу кількість прямих кутів і має маленьку площу порівняно з коміркою 1.

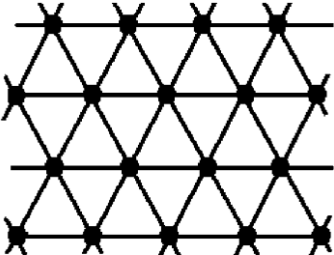
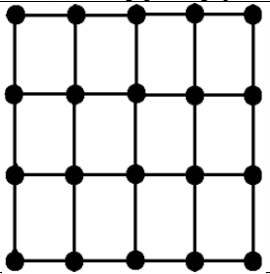
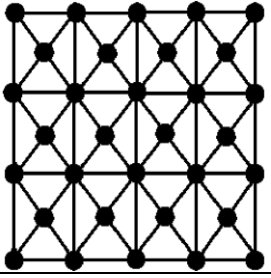
Отже, використовуючи послідовно три умови вибору елементарної комірки, обираємо для плоскої ґратки комірку 6.

Враховуючи вищенаведені умови існування ґраток Браве, а також враховуючи те, що плоска сітка визначається парою векторів переміщення і що комірки плоскої сітки мають заповнювати площину без проміжків, можна довести, що для плоских точкових ґраток існує всього п'ять плоских комірок Браве.

В таблиці 1.1 представлена коротка характеристика цих плоских ґраток.

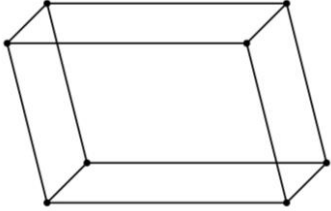
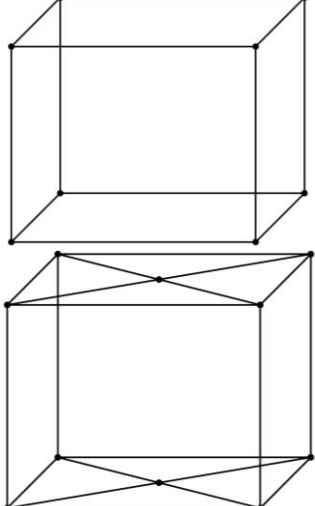
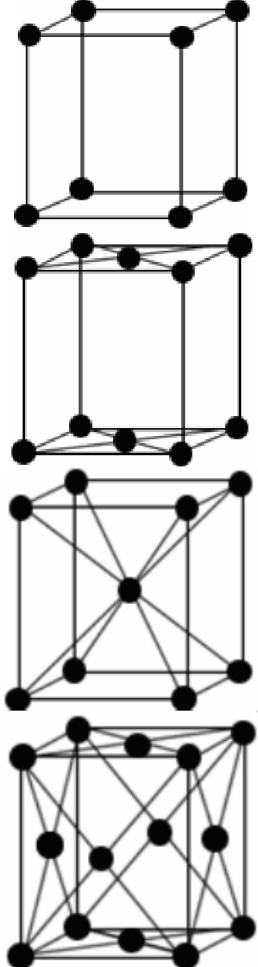
**Таблиця 1.1. Двовимірні точкові ґратки Браве**

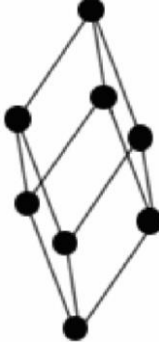
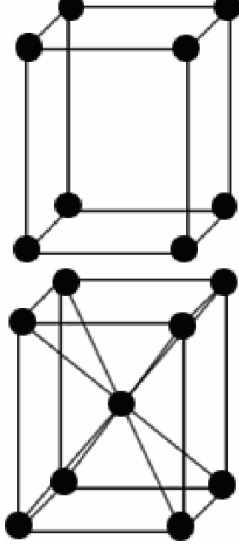
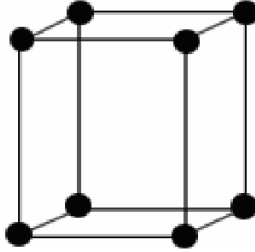
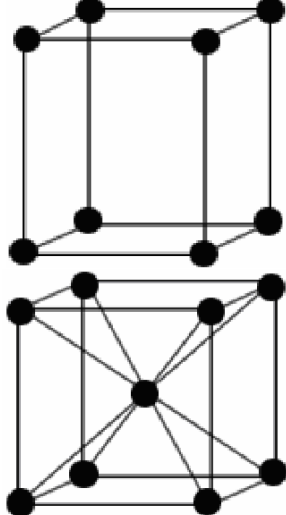
Назва ґратки	Елементарна комірка ґратки	Графічне зображення ґратки
Квадратна	квадрат $a = b, \varphi = 90^\circ$	
Косокутна	паралелограм $a \neq b, \varphi \neq 90^\circ$	

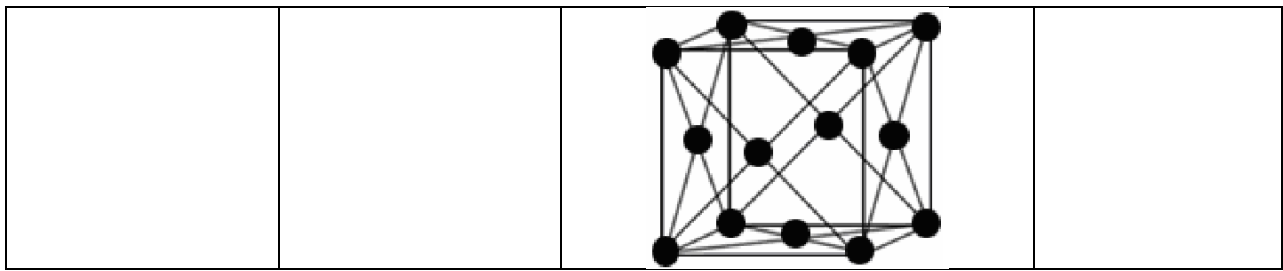
Гексагональна	ромб із гострим кутом $60^\circ$ . $a = b, \varphi = 120^\circ$	
Примітивна прямокутна	прямокутник $a \neq b, \varphi = 90^\circ$	
Центрована прямокутна	прямокутник $a \neq b, \varphi = 90^\circ$	

Елементарні комірки за Браве ще розділяються на 7 сингоній. Сім простих типів відрізняються один від одного набором елементів симетрії. Ребра цих комірок співпадають з напрямком кристалографічних осей і є найкоротшими трансляціями. Крім них можливі ще 7 елементарних комірок, де найкоротші трансляції йдуть не по ребрам, а по просторовим діагоналям комірок або діагоналям граней цих комірок. Ґратки, в яких такі комірки є елементарними, можна розглядати як складені об'єкти. Необхідність застосування складених точкових ґраток Браве виникає тоді, коли використання примітивної трансляційної комірки супроводжується зниженням її симетрії та одночасно призводить до більш низької сингонії кристалів. Тому існує 14 видів трансляційних ґраток, за допомогою яких може бути описана довільна кристалічна ґратка [7] (табл. 1.2).

Таблиця 1.2. Тривимірні ґратки Браве

Сингонія	Елементарна комірка	Графічне зображення	Ознаки
Триклинна	$a \neq b \neq c,$ $\alpha_{1,2,3} \neq 90^\circ.$		
Моноклінна	пряма призма з ребрами різної довжини $a \neq b \neq c,$ $\alpha_{1,3} = 90^\circ \neq \alpha_2.$		
Ромбічна	Прямокутний паралелепіпед з ребрами різної довжини		Три площини симетрії, які паралельні до граней, та три осі симетрії 2-го порядку, що проходять через середини протилежних однакових граней

<p>Тригональна (ромбоедрична)</p>	<p>ромбоедр</p>		<p>Координатні ребра ромбоедра утворюють однакові кути з головною віссю симетрії</p>
<p>Тетрагональна</p>	<p>прямокутний паралелепіпед з квадратною основою</p>		<p>Вісь обертання 4-го порядку та декілька площин симетрії</p>
<p>Гексагональна</p>	<p>призма з ребром, паралельним осі симетрії, і основою у формі ромба</p>		<p>Комірка визначається двома параметрами <math>a</math> і <math>c</math>. Тому користуються гексагональною призмою, яка складена з трьох примітивних комірок</p>
<p>Кубічна</p>	<p>куб</p>		



Існує ще один спосіб вибору елементарної комірки, яка називається коміркою Вігнера-Зейца. Для вибору комірки виділяють область простору «максимально наближену» до даного вузла кристалічної ґратки, ніж до інших. Для цього з'єднують обраний вузол з одним із найближчих (або іноді також і наступним за найближчими) його сусідами відрізком, знаходять його середину і через неї проводять перпендикулярну до даного відрізка площину, яка поділяє простір на два півпростори. Виділяють півпростір, який містить обраний вузол. Таку операцію повторюють із всіма сусідами обраного вузла. Перетин усіх виділених напівпросторів дасть комірку Вігнера Зейца. У випадку примітивних кубічної, тетрагональної та ромбічної ґраток комірка Вігнера-Зейца по формі та розмірам співпадають з елементарною коміркою, а її центр співпадає з вузлом ґратки. В інших випадках ґраток комірка Вігнера-Зейца має більш складну форму.

## 1.2. Означення математичної точкової ґратки та її властивості.

Зрозуміло, що математичні основи введення поняття точкових ґраток потребують використання певної системи координат. Тоді не порушуючи загальності нехай маємо пару  $(x; y)$  в якості системи прямокутних декартових координат. Розглянемо таке означення точкової ґратки.

**Означення 1.2.** Кажуть, що точки  $(X; Y)$ , що відповідають цілим значенням пари  $(x; y)$  у виразах

$$X = \alpha x + \beta y, \quad Y = \gamma x + \delta y$$

утворюють (двовимірну) *точкову ґратку*  $M$  (рис. 1.4).

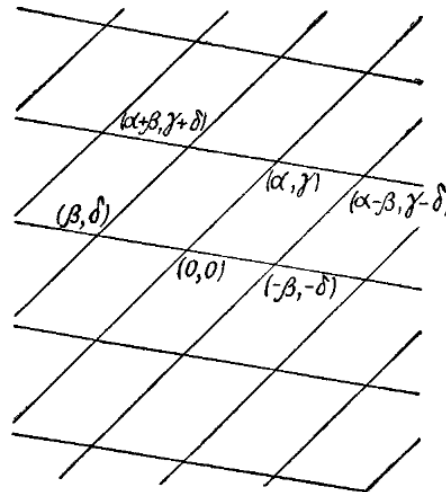


Рис. 1.4

В векторних позначеннях ґратка  $M$  є сукупністю точок

$$(X; Y) = u_1(\alpha; \gamma) + u_2(\beta; \delta), \quad (1.1)$$

де  $u_1, u_2$  набувають усіх значень із множини цілих чисел; точки (вектори)  $(\alpha; \gamma)$ ,  $(\beta; \delta)$  утворюють базис ґратки  $M$ .

**Означення 1.3.** Розглянемо на площині сітку, утворену двома сімействами паралельних прямих, що розрізають площину на однакові паралелограми (рис. 1.5). Тоді множина усіх вершин цих паралелограмів утворює *точкову ґратку*, причому самі вершини називаються її *вузлами*, а будь-який з паралелограмів розбиття – *породжуючим*, або *основним* паралелограмом розбиття.

Слід зауважити, що одна і та ж ґратка може вийти з різних сіток прямих: на рисунку 1.6 зображено так звану цілочисельну ґратку, тобто множину точок, що мають в декартовій системі координат цілочисельні координати. Цілочисельну ґратку разом із сіткою прямих, паралельних осям координат, можна уявляти собі як нескінченний лист аркуша у клітинку (тоді основним паралелограмом буде квадрат зі стороною 1). Ту ж саму цілочисельну ґратку можна отримати, проводячи прями (див. рис. 1.5) – тоді основним паралелограмом служить паралелограм  $ABCD$ .

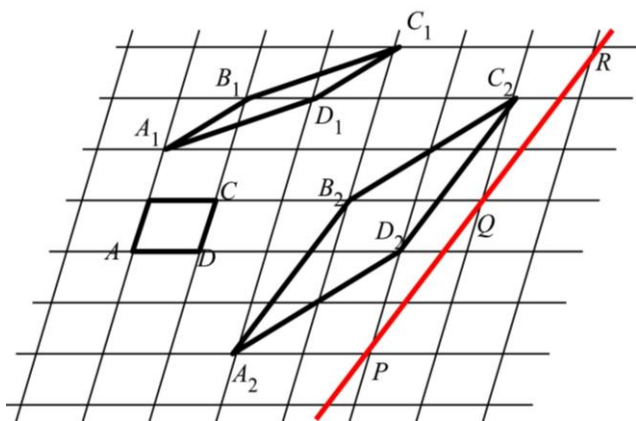


Рис. 1.5

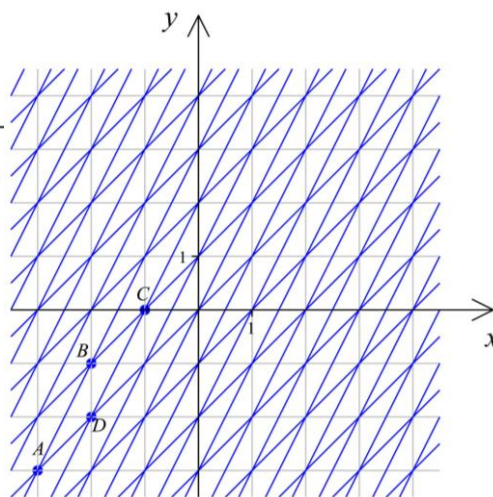


Рис. 1.6

Таким чином, поняття основного паралелограма ґратки пов'язане не лише із самою ґраткою, але й із сіткою прямих, що утворюють цю ґратку.



## РОЗДІЛ 2 ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ ГРАТОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

У цьому розділі розглянемо можливі властивості точкових ґраток, а також деяких геометричних об'єктів, побудованих на них.

### 2.1. Властивості, пов'язані з означеннями

Беручи до уваги означення 1.2. (див. пункт 1.2), розглянемо більш детально властивості ґраток, що випливають із цього означення. З огляду на те що ми розглядаємо ґратку  $M$  просто як множину точок, то вона може бути записана за допомогою різних базисів. Наприклад, пара

$$(\alpha - \beta; \gamma - \delta), (-\beta; -\delta)$$

є іншим базисом ґратки  $M$ . Фіксований базис  $(\alpha; \beta), (\gamma; \delta)$  ґратки  $M$  визначає розбиття площини двома сім'ями рівновіддалених паралельних прямих; перша сім'я складається з тих точок  $(X; Y)$ , які мають координати виду (1.1), де  $u_2$  – довільне ціле число, а  $u_1$  – довільне дійсне; для ліній іншої сім'ї  $u_1$  та  $u_2$  міняються ролями. Таким чином, площина розбивається на паралелограми, вершинами якого є власне точки ґратки  $M$ .

Зрозуміло, це розбиття залежить від вибору базису, проте ми покажемо, що площа паралелограма, а саме число

$$|\alpha\delta - \beta\gamma|,$$

не залежить від вибору базису. Ми можемо це зробити, показавши, що число  $N(n)$  точок ґратки в достатньо великому квадраті

$$S(n): |X| \leq n, |Y| \leq n$$

задовольняє співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{4n^2} = \frac{1}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}.$$

Дійсно, розглядаючи ідеї доведення теореми Мінковського про опукле тіло,

можна зробити висновок, що кількість точок ґратки  $M$  у квадраті  $S(n)$ , грубо кажучи, дорівнює кількості паралелограмів, що знаходяться в цьому квадраті, а ця кількість у свою чергу приблизно дорівнює площі цього квадрата  $S(n)$ , поділеної на площу  $|\alpha\delta - \beta\gamma|$  одного паралелограма.

**Означення 2.1.** Строго додатне число

$$d(M) = |\alpha\delta - \beta\gamma|$$

називається *визначником* ґратки  $M$ .

Як ми щойно показали, це число не залежить від вибору базису.

Використовуючи вищевказані поняття, можна помітити, що твердження про існування цілих розв'язків нерівності  $f(x; y) \leq \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

еквівалентне твердженню про те, що будь-яка ґратка  $M$  в області

$$X^2 + Y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} d(M)$$

має точки, відмінні від початку координат. В силу однорідності це твердження у свою чергу еквівалентне твердженню, що відкритий круг

$$X^2 + Y^2 < 1$$

містить точку кожної ґратки  $M$ , для якої  $d(M) < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ . А той факт, що існують такі квадратичні форми, для яких у нерівності

$$f(u_1; u_2) \leq \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

знак рівності є необхідним, еквівалентний існуванню ґратки  $M_k$  з

визначником  $d(M_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ , що не має точок у деякому крузі (не враховуючи його межі).

Аналогічно дослідження ґраток з точками в області

$$|XY| < 1$$

дає нам інформацію про мінімуми  $\inf |f(u_1; u_2)|$  невизначених бінарних квадратичних форм  $f(u_1; u_2)$ , тут точна нижня грань визначається за всіма цілими числами  $u_1$  та  $u_2$ , не рівним одночасно нулю. Приклади можна продовжити.

Подібні викладки призводять до наступних означень.

**Означення 2.2.** Кажуть, що ґратка  $M$  допустима для області (точкової множини)  $K$  у площині  $(X; Y)$ , якщо вона не містить жодних інших точок з  $K$ , крім, можливо, початку координат (якщо він є точкою області  $K$ ). Тоді ми говоримо, що ця ґратка є  $K$ -допустимою.

Точна нижня грань  $\Delta(K)$  визначників  $d(M)$  усіх  $K$ -допустимих ґраток є константою області  $K$ ; якщо  $K$ -допустимих ґраток не існує, то вважаємо, що  $\Delta(K) = \infty$ . Тоді будь-яка ґратка  $M$ , для якої  $d(M) < \Delta(K)$ , обов'язково містить точку області  $K$ , відмінну від початку координат.

**Означення 2.3.**  $K$ -допустима ґратка  $M$ , для якої  $d(M) = \Delta(K)$ , називається критичною (для множини  $K$ ).

Звичайно, критичні ґратки, взагалі кажучи, існують не завжди. Важливість критичних ґраток була помічена вже Мінковським. Має місце наступна теорема.

**Теорема 2.1.** Якщо  $M_k$  є критичною ґраткою області  $K$ , а ґратка  $M$  отримана з  $M_k$  невеликою деформацією (тобто малою зміною пари базисних векторів), то або ґратка  $M$  має точку, відмінну від початку координат, яка лежить в області  $K$ , або  $d(M) \geq d(M_k)$  (або те й інше разом).

**Доведення.** Як приклад, розглянемо відкритий круг

$$S: X^2 + Y^2 < 1.$$

Припустимо, що  $M_k$  – критична ґратка області  $K$ . Покажемо, що якщо критична ґратка існує, то вона повинна мати три пари точок  $\pm(A_1; A_2)$ ,  $\pm(B_1; B_2)$ ,  $\pm(C_1; C_2)$  на межі  $X^2 + Y^2 = 1$  розглядуваного круга.

Якщо  $M_k$  не має точок на колі  $X^2 + Y^2 = 1$ , то можна отримати  $S$ -допустиму ґратку з меншим визначником, гомотетично стискаючи ґратку  $M_k$  до початку координат, тобто розглядаючи ґратку  $M = tM_k$  точок  $(tX; tY)$ , де  $(X; Y) \in M_k$ , а  $t$  – фіксоване число з умовою  $0 < t < 1$ . Тоді  $d(M) = t^2 d(M_k) < d(M_k)$  і, очевидно,  $M$  буде також  $S$ -допустимою ґраткою, якщо  $t$  достатньо близьке до 1. Таким чином, ґратка  $M$  містить пару точок на колі  $X^2 + Y^2 = 1$ , координати яких після належного повороту осей ми можемо вважати рівними  $\pm(1; 0)$ .

Якщо б на колі  $X^2 + Y^2 = 1$  не було б інших точок ґратки  $M$ , то ми змогли б отримати  $S$ -допустиму ґратку  $M$  з меншим визначником, стискаючи ґратку  $M_k$  у напрямку, перпендикулярному осі  $OX$  тобто приймаючи за  $M$  ґратку точок  $(X; tY)$ , де  $(X; Y) \in M_k$ , а  $t$  – фіксоване число достатньо близьке до 1.

Нарешті, якщо  $M_k$  мала б тільки дві пари точок  $\pm(1; 0)$ ,  $\pm(B_1; B_2)$  на межі, то ґратку можна було б злегка деформувати так, щоб точка  $(1; 0)$  залишилася на місці, а точка  $(B_1; B_2)$  пройшла б уздовж кола  $X^2 + Y^2 = 1$  ближче до вісі  $OX$  (див. рис. 2.1).

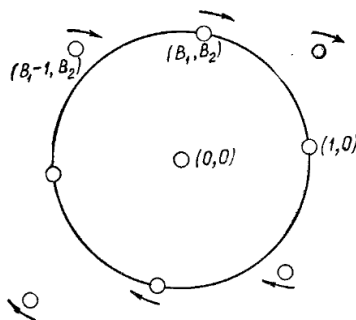


Рис. 2.1.

Ця операція, як легко перевірити, зменшує визначник. Дійсно, точки  $(1;0)$  та  $(B_1;B_2)$  можна розглядати як базис ґратки  $M_k$ . Тоді при невеликих деформаціях утворена ґратка  $M$  залишається  $S$ -допустимою. Отже, критична ґратка  $M_k$  (якщо вона існує) повинна мати три пари точок на колі  $X^2 + Y^2 = 1$ , і легко бачити, що єдиною ґраткою, у якої три пари точок лежать на колі  $X^2 + Y^2 = 1$ , а одна з пар є парою точок  $\pm(1;0)$ , є ґратка  $M'$  із базисом

$$(1;0), \quad \left(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right).$$

Вона містить вершини правильного шестикутника  $\pm(1;0)$ ,  $\pm\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ ,  $\pm\left(-\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ , що лежать на колі  $X^2 + Y^2 = 1$ , але не містить жодної точки (крім

початку координат) в крузі  $X^2 + Y^2 < 1$ . Таким чином, ми показали, що якщо

множина точок круга  $S$  має критичну ґратку, то  $\Delta(S) = d(M') = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Мінковський показав, що критичні ґратки існують для достатньо широкого класу областей  $K$ , показавши, грубо кажучи, що будь-яку  $K$ -допустиму ґратку  $M$  можна поступово деформувати до тих пір, поки вона не стане критичною. Надалі можемо, таким чином, розглядати властивості лише цілочисельної ґратки.

З найпростіших властивостей ґраток поки відзначимо наступні.

1) Будь-яке паралельне перенесення, що переводить деякий вузол ґратки в інший вузол, переводить ґратку в себе.

2) (Лема про четверту вершину паралелограма). Якщо три вершини паралелограма є вузлами деякої ґратки, то і четверта вершина – теж вузол цієї ґратки.

3) Якщо через довільні два вузли  $Q$  і  $R$  ґратки провести пряму, то ця пряма пройде через нескінченну кількість вузлів. При цьому всі відстані між

сусідніми вузлами, що лежать на прямій, будуть рівні (див. рис. 1.5, пункту 1.2).

4) Якщо паралелограм з вершинами у вузлах деякої ґратки не містить інших вузлів на сторонах і всередині себе, то він породжує цю ґратку.

Важливу властивість ґраток відображає наступна задача-жарт:

У деякому вузлі  $A$  ґратки знаходиться мисливець, а в інших вузлах сидять однакові й однаково розташовані зайці (див. рис. 2.2а). Мисливець навмання стріляє (траєкторія кулі – промінь, що виходить з точки  $A$ ). Чи повернеться він додому зі здобиччю? (Зайці вважаються «жирними».)

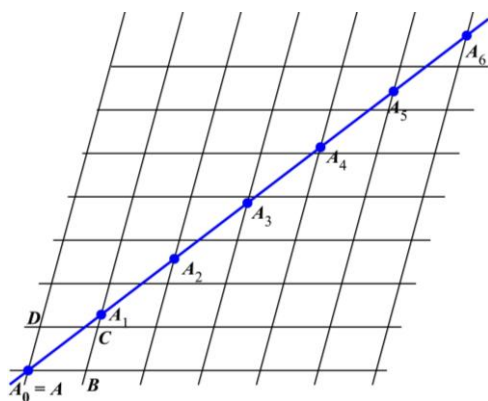


Рис. 2.2а

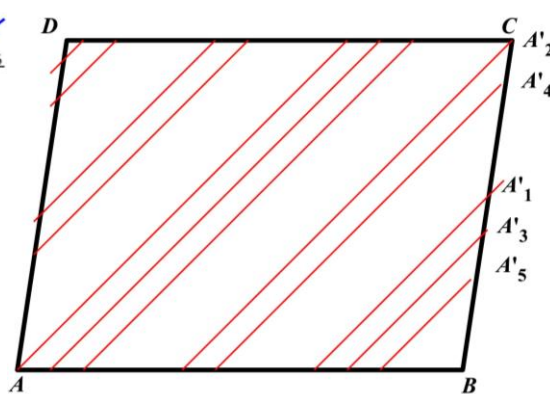


Рис. 2.2б

Зрозуміло, що якщо траєкторія кулі проходить через вузол (відмінний від точки  $A$ ), то заєць, який сидить в цьому вузлі, буде вбитий. Тому цікавий тільки той випадок, коли вузол  $A$  – єдиний на траєкторії кулі; виявляється, що і в цьому випадку який-небудь заєць буде убитий. Доведення міститься в наступній лемі.

5. (**Лема про мисливця та зайців**). Нехай промінь  $l$  проходить через вузол  $A$  деякої ґратки. Тоді знайдеться такий вузол, відстань від якого до променя  $l$  буде меншою будь-якого наперед заданого числа  $\varepsilon$ .

**Доведення.** Позначимо точки перетину променя  $l$  з похилими прямими сітки через  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  (Див. Рис. 2.2). Сумістивши паралельним перенесенням всі паралелограми, на правих сторонах яких лежать ці точки, з паралелограмом  $ABCD$ , отримуємо, що тоді кожна точка  $A_n$  перейде в деяку точку  $A'_n$  на стороні  $AB$ . Для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдуться такі точки, що

відстань між ними буде менше  $\varepsilon$ . Далі легко довести, що відстань від точки  $A_k$  до одного з вузлів ґратки менша  $\varepsilon$  (зокрема, якщо  $A'_m$  збігається з  $A'_{m+k}$ , то  $A_k$  буде вузлом ґратки).

**Наслідок.** Для будь-якого ірраціонального числа  $\alpha > 0$  та будь-якого додатного числа  $\varepsilon$  знайдуться такі натуральні  $m$  і  $n$ , що  $|m\alpha - n| < \varepsilon$ .

**Доведення.** Виберемо на площині декартову систему координат і проведемо пряму  $y = \alpha x$ . В силу ірраціональності  $\alpha$ , єдиною точкою з цілочисельними координатами на цій прямій буде початок координат. Пряма  $y = \alpha x$  перетинає кожну вертикальну пряму  $x = m$  у точці  $(m, \alpha m)$ . Тоді за лемою 5° знайдеться такий вузол  $(m, n)$  цілочисельної ґратки, що відстань (по вертикалі) від нього до точки  $(m, \alpha m)$  буде меншою  $\varepsilon$ , що й треба було довести.

Легко бачити, що з-поміж усіх можливих попарних відстаней між вузлами будь-якої точкової ґратки є найменша.

Цю властивість разом з наведеною вище властивістю 2 ґратки можна прийняти за означення ґраток.

**Теорема 2.2.** Нехай множина  $M$  на площині має наступні властивості:

а) відстань між будь-якими двома її точками не менше деякого додатного числа  $d$ ;

б) якщо три точки  $A, B, C$  множини  $M$  є вершинами деякого паралелограма  $ABCD$ , то й четверта вершина  $D$  цього паралелограма належить множині  $M$ .

Тоді  $M$  – ґратка.

**Доведення.** Візьмемо довільну точку  $B$ , що належить множині  $M$ .

Нехай  $A$  – найближча до  $B$  точка з  $M$  (така точка існує, оскільки всі попарні відстані між точками множини  $M$  більші за число  $d$ ).

Через точки  $A$  і  $B$  проведемо пряму. Серед точок множини  $M$ , які не лежать на цій прямій, виберемо найближчу до точки  $B$  точку  $C$  – і побудуємо

паралелограм  $ABCD$ . В силу властивості б) точка  $D$  також належить множині  $M$ .

Побудуємо ґратку, що породжується паралелограмом  $ABCD$ . Доведемо, що множина  $M$  збігається з побудованою ґраткою.

Із властивості б) множини  $M$  випливає, що всі вузли цієї ґратки належать їй. Тому потрібно лише перевірити, що ні на контурі, ні всередині паралелограма  $ABCD$  немає точок множини  $M$ , відмінних від його вершин.

Це майже очевидно: якщо точка  $S$  лежить всередині паралелограма, то хоча б один з кутів  $\angle ASB, \angle BSC, \angle CSD, \angle ASD$  буде тупим або прямим, а тому відстань від  $S$  до однієї з його вершин виявиться меншою за якусь із його сторін (якщо  $S$  лежить на контурі – отримаємо ту ж саму ситуацію); нехай, наприклад, це буде відстань  $SC$ . Побудуємо паралелограм  $BCSS'$  ( $S'$  належить множині  $M$ ). Тоді  $BS'$  є меншою ніж  $BC$ , або ніж  $BA$ , але це суперечить вибору або точки  $C$ , або точки  $A$ . Аналогічно можна розглянути й інші випадки. Отже, теорема доведена.

## 2.2. Круги та кола на цілочисельних ґратках

Цей пункт присвячено вивченню властивостей можливого розташування круга на декартовій площині та з'ясуванню ситуації, коли для заданого натурального числа  $n$  даний круг містить рівно  $n$  вузлів целочисленої ґратки  $\mathbb{Z}^2$ , а коло, що обмежує цей круг, проходить рівно через  $n$  її вузлів.

### 2.2.1. Властивості цілочисельних ґраток на колі

Перше дослідження ґратки  $\mathbb{Z}^2$  як математичного об'єкта було, скоріш за все, зроблено К. Гаусом – королем математики, як його називали сучасники. Він зацікавився питанням про те, як швидко зі зростанням  $R$  збільшується число  $N(R)$  точок з цілими координатами в крузі



$$K(R) = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

де  $R \geq 0$  ціле число. Число  $N(R)$  дорівнює площі фігури  $F(R)$ , складеної з тих квадратів ґратки, у яких лівий нижній кут лежить в  $K(R)$  (див. рис. 2.3).

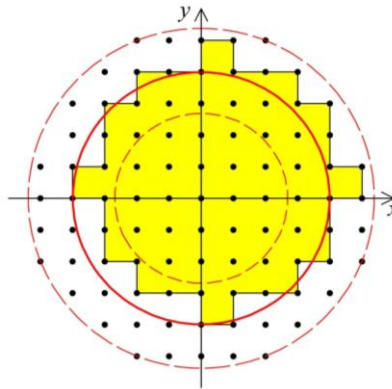


Рис. 2.3.

Оскільки найбільша відстань між двома точками одиничного квадрата ґратки не перевищує 2, то, очевидно, всі квадрати, які перетинають коло  $x^2 + y^2 = R^2$ , будуть розташовані в кільці (при  $R=4$  його межі на малюнку 2.3 зображені пунктиром)

$$\{(x; y) : (R - \sqrt{2})^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R + \sqrt{2})^2\}$$

Площа цього кільця дорівнює

$$\pi \left( (R + \sqrt{2})^2 - (R - \sqrt{2})^2 \right) = 4\pi R\sqrt{2},$$

і тому

$$|[F(R)] - \pi R^2| = 4\pi R\sqrt{2},$$

де  $[F(R)]$  позначає площу фігури  $F(R)$ . Отже,

$$\left| \frac{N(R)}{R^2} - \pi \right| \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{R}.$$

Таким чином, при всіх достатньо великих значеннях  $R$  має місце така оцінка

$$\frac{N(R)}{R^2} \approx \pi,$$

що в більш точній формі можна записати у вигляді такого твердження.

**Теорема 2.3 (К. Гаусс).** *Має місце співвідношення*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R^2} = \pi. \quad (1)$$

Гаусс (як зазначається в [1]) чисельно перевіряв точність формули (1), склавши таблицю, де в останньому рядку наводяться наближені значення для числа  $\pi$ .

Доведена рівність (1) пов'язана з однією з основних властивостей ґратки  $\square^2$ : площа будь-якого паралелограма, що породжує ґратку  $\square^2$ , дорівнює 1. Такі паралелограми називаються *фундаментальними*. Кажуть, що паралелограм породжує ґратку  $\square^2$ , якщо вся площина розбита (без накладання) на рівних паралелограмів  $\Pi$ , а множина вершин всіх паралелограмів розбиття збігається із множиною всіх вузлів цілочисельної ґратки. Для доведення сформульованого твердження встановимо взаємно однозначну відповідність між фундаментальними паралелограми та вузлами ґратки  $\square^2$ . Поставимо у відповідність кожному паралелограму його найлівішу вершину, а якщо таких вершин дві, то з них виберемо ту, яка має найменшу ординату. Модуль різниці площі кола  $K(R)$  та площі фігури  $F(R)$ , що складається з об'єднання всіх паралелограмів, які відповідають вузлам з  $K(R)$ , очевидно, менша площі кільця

$$\{(x; y) : (R - a)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R + a)^2\},$$

де  $a$  – найбільша діагональ паралелограма  $\Pi$  (на рис. 2.4. маємо таким чином  $R = 4, a = \sqrt{13}$ ). Якщо позначити за  $\Delta = [\Pi]$  – площу породжуючого паралелограма, то отримуємо  $[F(R)] = \Delta N(R)$  а, отже,

$$|\Delta N(R) - \pi R^2| < \pi \left( (R + a)^2 - (R - a)^2 \right) = 4a\pi R.$$

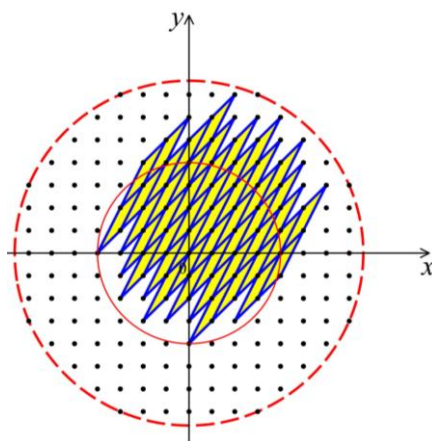


Рис. 2.4.

Таким чином,

$$\left| \frac{N(R)}{R^2} - \frac{\pi}{\Delta} \right| < \frac{4a\pi}{R\Delta}.$$

Тоді, перейшовши до границі при  $R$  прямуючому до нескінченності, за доведеним вище отримуємо, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R^2} = \frac{\pi}{\Delta} = \pi,$$

тобто  $\Delta = 1$ .

Можна отримати ще один цікавий наслідок з формули (1). Введена раніше величина  $N(R)$  дорівнює кількості всіх упорядкованих пар цілих чисел  $(x; y)$ , для яких  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Для будь-якого вузла  $(x; y) \in \square^2$  сума  $x^2 + y^2$  є, звичайно, цілим числом. Тому якщо позначити за  $r(k)$  кількість усіх різних (мають відрізнятися і складом множини доданків і її порядком уходження) способів подання натурального числа  $k$  у вигляді суми двох квадратів цілих чисел, то

$$N(R) = r(0) + r(1) + \dots + r(n),$$

де  $n = R^2$ , тобто має місце теорема.

**Теорема 2.4. (К. Гаус).** *Має місце рівність*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(0) + r(1) + \dots + r(n)}{n} = \pi.$$

Слід зазначити, що сама функція  $r(n)$  поводиться нерегулярно. Наприклад,  $r(0)=1$ ,  $r(3)=r(6)=r(7)=\dots=r(21)=r(22)=r(23)=r(24)=0$ ,  $r(1)=r(2)=r(4)=r(8)=\dots=4$ ,  $r(25)=12$ .

### Кола Шинцеля.

Спочатку відзначимо, що для будь-якого натурального числа  $n$  існує круг з центром в точці  $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$ , який містить в собі  $n$  точок цілочисельної ґратки. Для доведення цього факту покажемо, що якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – два різних вузли ґратки  $\square^2$ , то вони знаходяться на різних відстанях від точки  $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$ . Дійсно, якщо

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2,$$

то

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - 2\sqrt{2}(x_1 - x_2) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$x_1 = x_2 \text{ і } y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 = 0$$

Друга рівність означає, що

$$\left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2, \text{ або } 3y_1 - 1 = \pm(3y_2 - 1),$$

тобто або  $y_1 = y_2$ , або  $3(y_1 + y_2) = 2$ , що неможливо. Таким чином,  $x_1 = x_2$  і  $y_1 = y_2$ . Отже, можна вибрати таку зростаючу послідовність радіусів  $R^n$ , що в

крузі  $(x - \sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = R_n^2$  міститиметься рівно  $n$  точок ґратки. Більш

цікавим і важким є наступне питання: скільки точок ґратки  $\square^2$  може потрапити на коло? Легко відшукати кола, які проходять через 1, 2, 3 або 4

точки. Неважко створити приклади для  $n = 8$  (див. рис. 2.5, рис. 2.5) і  $n = 12$  (рис. 2.7).

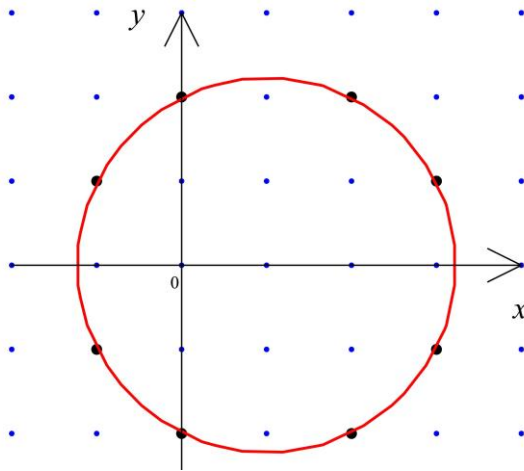


Рис. 2.5.

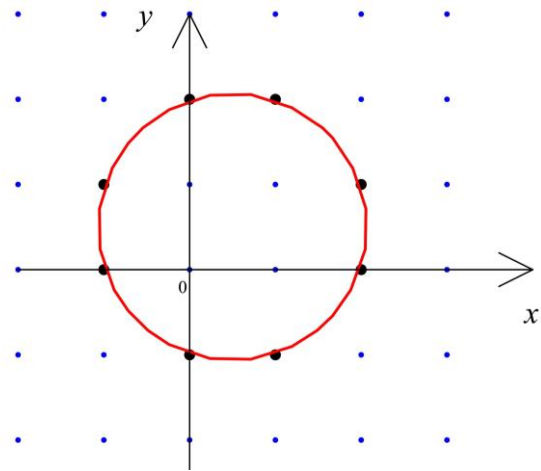


Рис. 2.6.

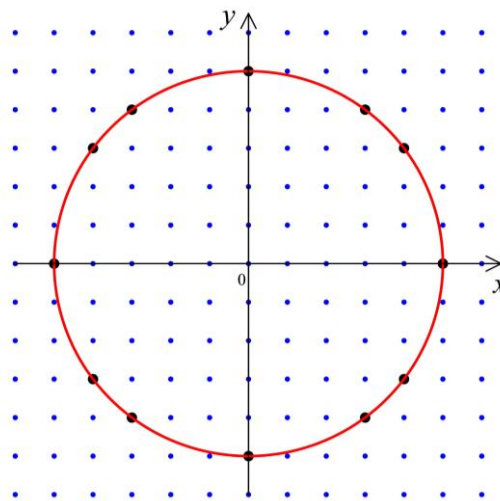


Рис. 2.7

Менш тривіальним є випадок, коли  $n = 6$  (рис.2.8). Уважно порівнявши кола на малюнках 2.8 і 2.9, можна здогадатися, як був побудований цей приклад. Коло радіуса 5 було побудоване з центром в точці  $(1; 0)$  (рис.2.9). З 12 точок на ньому 6 мають парні координати, тобто є вузлами ґратки  $(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$ , яка складається з точок з парними координатами. Розглядаючи цю розріджену ґратку, ми і отримуємо малюнок 2.9. Однак, маючи тільки ці приклади, не зовсім зрозуміло, чи існують кола, на яких лежать 5, 7 або 17 точок, наприклад.

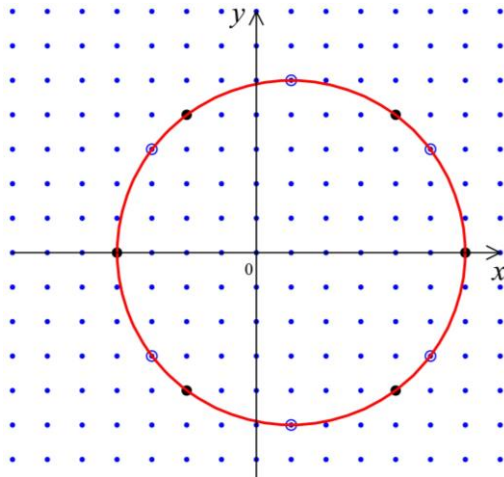
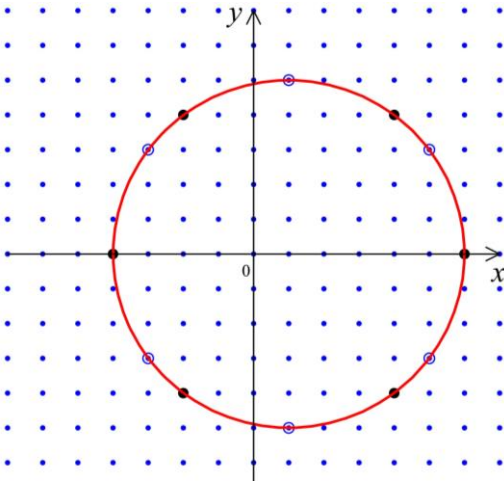
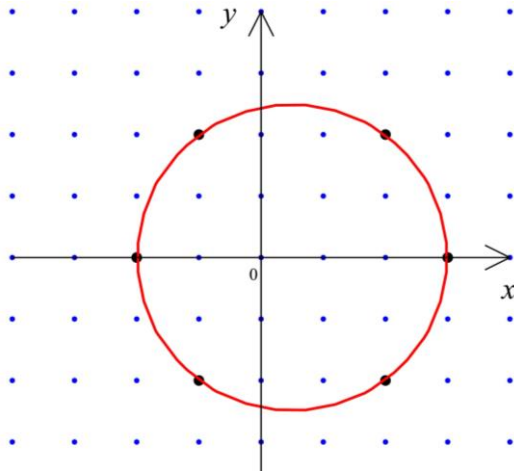


Рис. 2.7.

Рис. 2.9

**Теорема 2.5 (А. Шинцель).** Для будь-якого натурального  $n$  існує коло, що проходить рівно через  $n$  точок ґратки  $\mathbb{Z}^2$ .

*Доведення.* Друге твердження теореми про подання цілих чисел у вигляді суми двох квадратів (див. пункт 3.1.), звичайно, дозволяє для будь-якого  $n$  побудувати коло, на якому лежать рівно  $4n$  точок. Для цього

достатньо помістити центр кола в початок координат, а в якості радіуса вибрати число  $R = 5^{(k-1)/2}$ .

Рисунок 2.7 із шістьма точками на колі наптовхує на думку, що корисно розглянути кола з центром в точці  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ . Якщо в якості радіуса взяти число  $R = \frac{1}{2} \cdot 5^{(k-1)/2}$ , то рівняння кола запишеться у вигляді

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{k-1}}{4},$$

або

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1} \quad (4)$$

Як уже зазначалося раніше, рівняння

$$a^2 + b^2 = 5^{k-1} \quad (5)$$

має рівно  $4k$  розв'язків. Зрозуміло, що в рівності (5) одне з чисел  $a, b$  має бути парним, а інше – непарним. В рівнянні (4) парність кожного з доданків фіксована, а тому з кожних двох розв'язків  $(a, b)$ ,  $(b, a)$  рівняння (5) отримуємо рівно 1 розв'язок рівняння (4) (чорні та білі точки на рисунку 2.9 симетричні відносно прямої  $y = x - 1$ ). Таким чином, рівняння (4) має  $2k$  розв'язків (у 2 рази менше, ніж рівняння (5)).

Отже, ми можемо побудувати коло з будь-якою парною кількістю точок на ній. Наприклад, щоб отримати коло з 10-ма точками ґратки  $\square^2$ , достатньо у рівнянні (4) взяти  $k = 5$  (рис. 2.10).

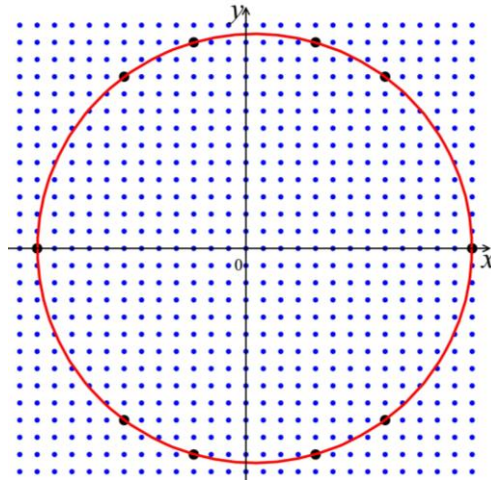


Рис. 2.10

Зрозуміло, що точку  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$  не можна брати в якості центру, якщо ми хочемо знайти коло з непарною кількістю цілих точок на ній (малюнок завжди симетричний відносно прямої  $x = \frac{1}{2}$ ). Виявляється, що для цього достатньо зрушити центр кола в точку  $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ . Дійсно, запишемо рівняння кола з центром у цій точці та радіусом  $R = \frac{1}{3} \cdot 5^k$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{2k}}{9}, \quad (6)$$

або

$$(3x - 1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k} \quad (7)$$

Знову за другим твердженням теореми 3, рівняння

$$a^2 + b^2 = 5^{2k} \quad (8)$$

має рівно  $4(2k+1)$  розв'язків. Розглядаючи остачі від ділення на 3, отримуємо (квадрати цілих чисел при діленні на 3 можуть лише давати остачі 0, або 1), що одне з чисел  $a, b$  ділиться на 3, а інше – ні. Не порушуючи загальності, припустимо, що  $a \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $b \equiv \pm 1 \pmod{3}$ . Тоді з чотирьох пар  $(a, b)$ ,  $(a, -b)$ ,  $(b, a)$ ,  $(-b, a)$  – точно лише одна пара є розв'язком рівняння



(7). Отже, рівняння (7) має в 4 рази менше розв'язків, ніж рівняння (8), тобто  $2k + 1$ . Наприклад, при  $k = 2$  виходить коло (рис.2.11; можна порівняти його з рис. 2.10)

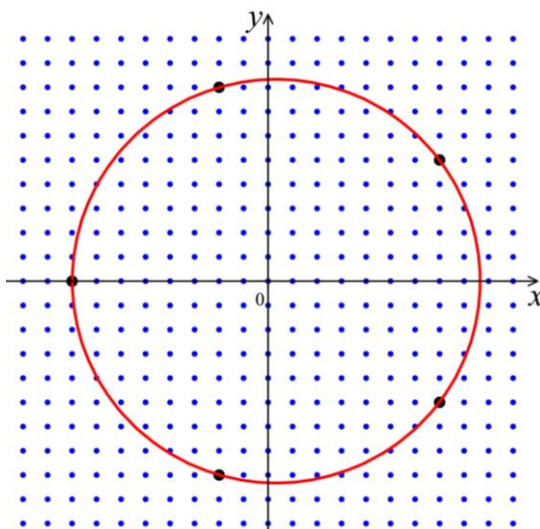


Рис. 2.11

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^4}{9},$$

або

$$(3x - 1)^2 + (3y)^2 = 625.$$

Таким чином, теорема 5 повністю доведена. Кола, які задаються рівняннями (3) і (6), називаються колами Шинцеля. Відзначимо, що для даного числа  $n$  ці рівняння можуть задавати, взагалі кажучи, кола не найменшого радіуса, що проходять через  $n$  точок ґратки. Так відбувається, наприклад, при  $n = 4$  (очевидно, що можна побудувати коло радіуса  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ) і при  $n = 9$  (коло Шинцеля має радіус  $625/3$ , але коло з центром у точці  $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$  та радіусом  $65/3$  також проходить через 9 цілих точок).

Можливі більш нетривіальні конфігурації точок. Так, на рисунку 2.12 зображене коло з центром в точці  $(1/5; 2/5)$  і радіусом  $\sqrt{13 \cdot 17 / 5}$ . Воно проходить через чотири цілочисельні точки  $(-6; -2)$ ,  $(1; 7)$ ,  $(2; -6)$ ,  $(5; 5)$ . На рисунку 2.13 можна бачити коло, що проходить через п'ять цілих точок  $(-12;$

$-4$ ),  $(-7; 11)$ ,  $(4; -12)$ ,  $(10; -8)$ ,  $(13; 1)$ . Його центр знаходиться в точці  $(1/7; 2/7)$ , а радіус дорівнює  $\frac{25}{7}\sqrt{13}$ . У зв'язку з цим виникає наступна дослідницька задача: описати множину кіл, які проходять рівно через  $n$  точок. Передбачається, що коло, що проходить через чотири точки, – достатньо рідкісне явище, тобто якщо провести коло через три випадково вибрані точки ґратки  $\square^2$ , то через четверту цілу точку вона пройде з малою ймовірністю. З цим завданням тісно пов'язане й питання про зображення круга на екрані комп'ютера.

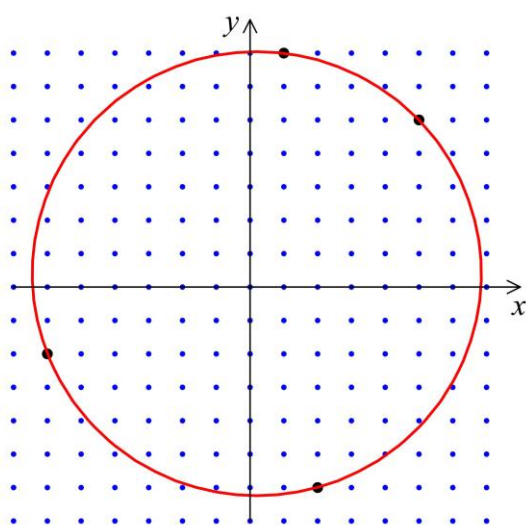


Рис. 2.12

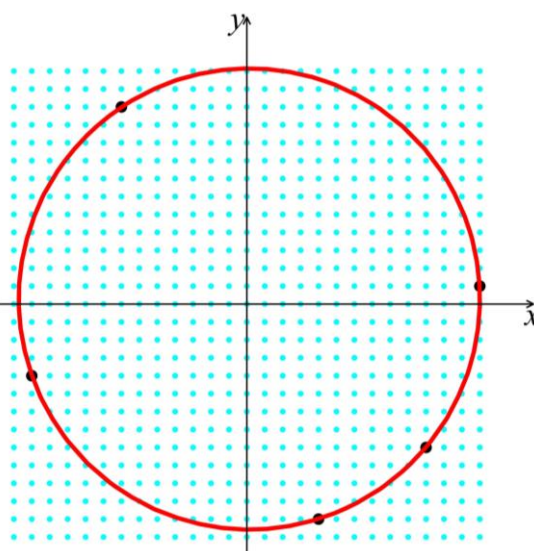


Рис. 2.13.

Можна вважати, що монітор – це прямокутний аркуш паперу у клітинку, а круг на екрані – об'єднання всіх таких клітинок (пікселів), які перетинаються із внутрішністю круга. Завдання полягає в тому, щоб з'ясувати, скільки різних зображень на екрані має круг даного радіуса. На рисунках 2.14а–2.14с представлені усі можливі зображення кола радіуса 1. Цій тематиці був присвячений виступ британського математика М. Хакслі на одній із конференцій з теорії чисел у 2006 році. Повних відповідей на сформульовані питання поки немає.

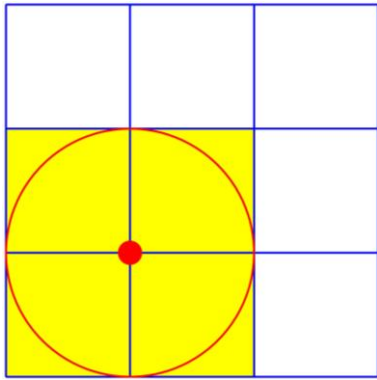


Рис. 2.14а

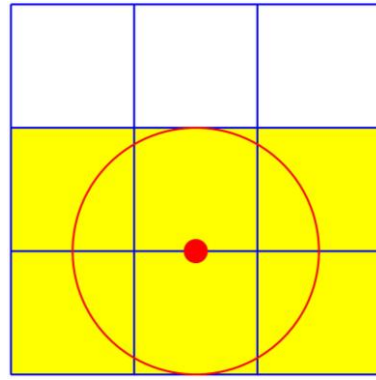


Рис. 2.14б

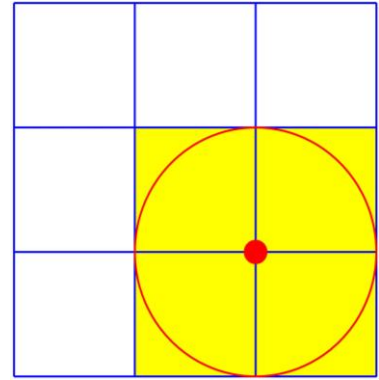


Рис. 2.14в

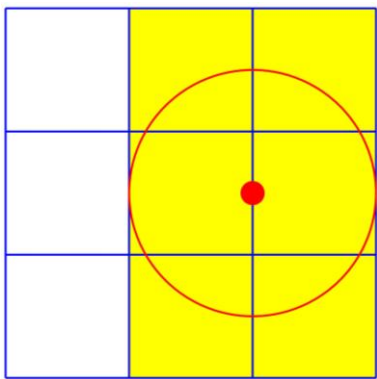


Рис. 2.14г

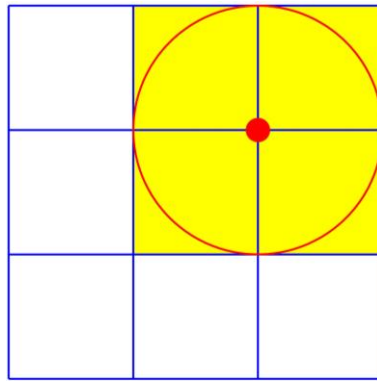


Рис. 2.14ж

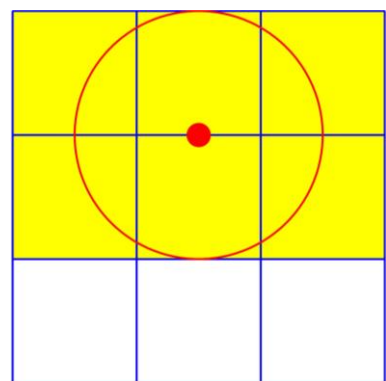


Рис. 2.14з

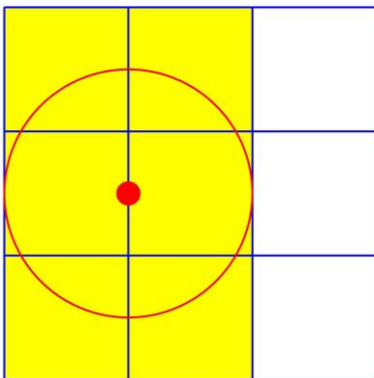


Рис. 2.14й

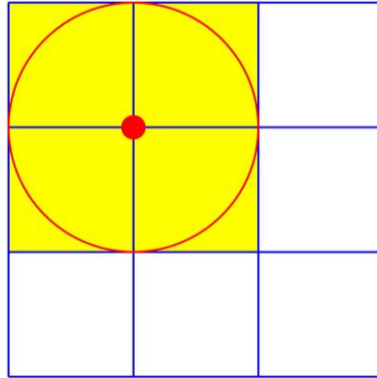


Рис. 2.14к

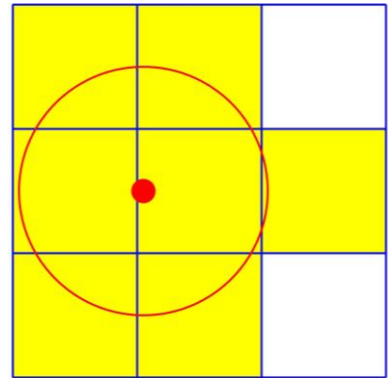


Рис. 2.14л

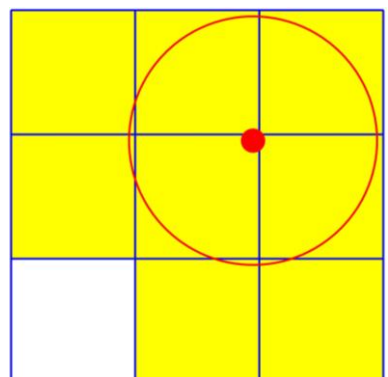
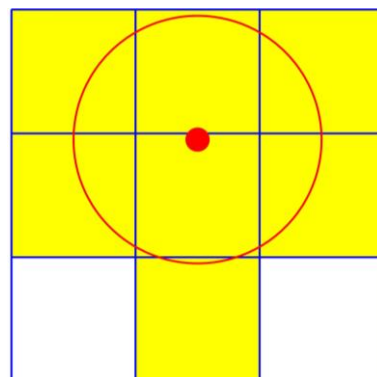
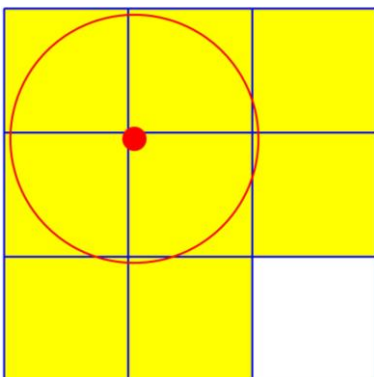


Рис. 2.14м

Рис. 2.14н

Рис. 2.14п

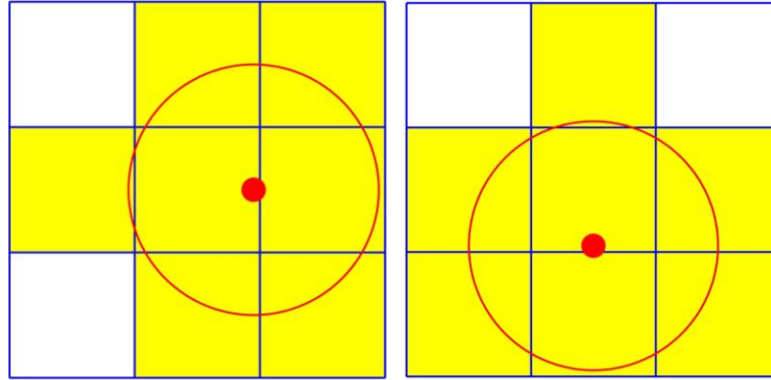


Рис. 2.14р

Рис. 2.14с

## 2.2.2 Узагальнення властивостей ґраток на $k$ -вимірний простір

Очевидно, ми можемо розглядати множину точок із цілими координатами (вузли цілочисельної ґратки  $\square^k$ ) на  $k$ -вимірній сфері з квадратом радіуса  $n$  та центром у початку координат

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \square^k, \sum_{i=1}^k x_i^2 = n \right\}$$

як множину розв'язків квадратичної форми, і використовувати теорію загальних квадратичних форм, щоб отримати оцінки кількості точок на такій сфері. Очікувана кількість точок із цілими координатами на сфері, безумовно, залежить від розмірності  $k$  цієї сфери. Примітивний підхід знайти порядок магнітуди для заданої розмірності є використанням об'єму кулі, поділеного на кількість сфер, що містяться в ній. Об'єм кулі радіуса  $\sqrt{n}$  зростає як  $n^{k/2}$ , де  $n$  – кількість відповідних сфер. При  $k=2$ , очевидно, визначається стала кількість точок ґратки на колі, при  $k=3$  уже кількість точок на сфері зростає пропорційно з коефіцієнтом пропорційності  $\sqrt{n}$  і т.д. Однак, при малих значеннях  $k$  цей підхід вводить в оману; зростання вельми нерегулярно, і залежить від структури дільників числа  $n$ . При  $k=2$ , ми бачимо (теорема 3.1), що тільки значення  $n$  виду  $n = 2^s q^2 p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , де  $q$  –

добуток простих чисел виду  $4m + 3$ , а  $p_i$  є простими числами виду  $4m + 1$ , пов'язують коло з точковою ґраткою, і, таким чином, більшість кіл не проходять через жоден із її вузлів. Справді, Ландау довів у 1908 році, що кількість кіл, що проходить принаймні через один вузол цілочисельної ґратки, для квадрата радіуса меншого за  $x$ , величина  $\frac{Cx}{\sqrt{\log x}}$  зростає. Крім того, існують також нескінченні множини кіл з дуже мало кількістю точок ґратки: наприклад радіуси яких є степенем 2 (вони проходять через 4 точки ґратки), або радіуси яких є коренем із простого числа виду  $p = 4m + 1$  (вони проходять рівно через 8). З іншого боку, кількість цілих точок на колі – необмежена, наприклад, на колі з квадратом радіуса  $n = p_1 p_2 \dots p_r$ , де всі прості числа  $p_i$  відрізняються один від одного маємо  $2^{r+2}$  точки ґратки.

В розмірності 3, усі значення  $n$ , що не можна представити у вигляді  $n = 4^s (8m + 7)$ , дають сфери, що містять точки з цілими координатами. Це дає ще достатньо велику кількість сфер, без точок ґратки, але для наших цілей це не має ніякого значення, оскільки такі сфери не з'являються в формулах підсумовування. Серед сфер із точками ґратки, помноживши радіус на 2, не отримаємо більшої кількості точок, але якщо ми виправимо цей факт, співвідношення між кількістю точок і наївною оцінкою обмежено, аж до констант тільки в залежності від  $d$ , зверху  $d$ , а знизу.

Багатовимірні випадки поводяться дещо регулярнішим чином. Лагранж довів, що кожне натуральне число може бути записане у вигляді суми чотирьох квадратів, а, отже, для розмірності  $k \geq 4$ , кожна сфера, квадрат радіуса якої є цілим числом, мають точки ґратки. При  $k \geq 4$  кількість точок як і раніше коливається досить дико, зі сферами, радіуси яких є степенем 2, маємо всього 24 точки ґратки, але для великих розмірів, наївна оцінка дає правильне асимптотичну зростання числа точок. Отримання кіл (або сфери) з «достатньо великою кількістю» точок ґратки, how завжди, не цілком достатньо для наших цілей: нам необхідно, щоб точкова ґратка зберігала

рівномірний розподіл при проектуванні на одиничну сферу. Має місце така теорема.

**Теорема 3.3.** (Ціллуеруело [1]) Для будь-якого  $\varepsilon > 0$  і для будь-якого цілого  $k$ , існує коло  $x^2 + y^2 = n$  з більш ніж  $k$  токами ґратки таким чином, що всі її точки знаходяться на дугах  $\sqrt{ne}^{\frac{\pi(t+\theta)i}{2}}$ , де  $|\theta| < \varepsilon$ ,  $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

### РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОЧКОВИХ ҐРАТОК

Серед задач та теорем класичної та аналітичної теорії чисел, а також математичного аналізу є достатня кількість тих, що можуть бути розв'язані чи доведені, використовуючи ту чи іншу властивості точкових ґраток. Розглянемо деякі з них.

#### 3.1. Використання властивостей ґраток, пов'язаних із побудовою кіл

Очевидно, що на площині ми можемо розглядати вузли цілочисельної точкової ґратки, що належать заданому колу з центром у початку координат та радіусом  $R = \sqrt{n}$ , як комплексні числа  $z = x + yi$  з цілими дійсною та уявною частинами та квадратом модуля  $|z|^2 = n$ . Це, звичайно, є очевидним фактом, але при цьому є можливість уже використовувати деякі методи з теорії алгебраїчних чисел. Цілі гаусові числа, тобто множина

$$\mathbb{Z}[i] = \{x + yi \in \mathbb{C} : (x, y) \in \mathbb{Z}^2\},$$

є кільцем цілих чисел поля  $\mathbb{Q}(i)$ . З точки зору останньої, як відомо, розділяється важлива властивість звичайних цілих чисел, а саме єдиний його розклад на множники, тобто як будь-яке ціле число розкладається на прості множники, а розклад є єдиним з точністю до перестановки цих множників та множення на  $-1$ , цілі гаусові числа розкладаються на прості гаусові множники, однозначно з точністю до їх упорядкування та множення на одне з чисел  $-1, i, -i$ .

Така відповідність дає цікаві результати застосування властивостей точкових ґраток у теорії чисел.

#### Подання чисел у вигляді суми двох квадратів.

З геометричної точки зору величина  $r(k)$  – це кількість цілих точок на колі з радіусом  $k$  та центром у початку координат. Нижче нам знадобляться формули для обчислення значень функції  $r(k)$ .

Для натурального  $m$  запис  $a \equiv b \pmod{m}$  означає, що числа  $a$  та  $b$  дають однакові остачі при діленні на  $m$ ; тобто,  $a = mt + b$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Інструментом для подальших досліджень є наступний важливий результат.

**Теорема 3.1. (Про подання цілих чисел у вигляді суми двох квадратів).** Нехай  $n > 1$  – натуральне число. Тоді по-перше

$$r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)),$$

де  $d_1(n)$  – кількість дільників числа  $n$ , які мають вигляд  $4k + 1$ , а  $d_3(n)$  – кількість дільників числа  $n$ , які мають вигляд  $4k + 3$ . По-друге, якщо  $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_l^{\beta_l}$  – канонічний розклад числа  $n$  на прості множники, в якому  $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $q_j \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\forall i = \overline{1, k}$ ,  $\forall j = \overline{1, l}$ , то

$$r(n) = \begin{cases} 4(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1), & \text{якщо } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l \text{ є парними} \\ 0, & \text{якщо } \exists j : \beta_j \text{ – непарне.} \end{cases}$$

Повне доведення цієї теореми, що використовує властивості комплексних чисел, можна знайти в статті О. Гончарова «Арифметика гауссових чисел» («Квант» №12 за 1985 г.)

Відзначимо один корисний окремий випадок теореми 3.1: рівняння

$$x^2 + y^2 = 5^k \quad (k \geq 0)$$

має рівно  $4(k + 1)$  цілочисельних розв'язків; це означає, що коло з радіусом  $5^{k/2}$  та центром у початку координат проходить рівно через  $4(k + 1)$  вузлів цілочисельної ґратки.

Теорема 3.1 має багато різних застосувань. В якості першого з них наведемо доведення формули Лейбніца, яка на перший погляд не пов'язана ні з ґратками, ні з представленнями чисел у вигляді суми двох квадратів.

**Теорема 3.2 (Г. Лейбніц).** Справедлива рівність

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

де під виразом зліва мається на увазі



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Доведення. Відповідно до твердження теореми 3.1, що  $r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$ ,

тоді

$$N(R) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{R^2} (d_1(n) - d_3(n)).$$

У той же час, маємо

$$\sum_{n=1}^{R^2} (d_1(n)) = \left[ \frac{R^2}{1} \right] + \left[ \frac{R^2}{5} \right] + \left[ \frac{R^2}{9} \right] + \dots,$$

де справа стоїть скінченна сума, а рівність має місце, оскільки кожний

доданок виду  $\left[ \frac{R^2}{k} \right]$  ( $k = 1, 5, 9, 13, \dots$ ) дорівнює кількості чисел з множини

$\{1, 2, \dots, R^2\}$ , кратних  $k$ . Аналогічно,

$$\sum_{n=1}^{R^2} (d_3(n)) = \left[ \frac{R^2}{3} \right] + \left[ \frac{R^2}{7} \right] + \left[ \frac{R^2}{11} \right] + \dots$$

Таким чином,

$$\frac{1}{4}(N(R) - 1) = \left[ \frac{R^2}{1} \right] - \left[ \frac{R^2}{3} \right] + \dots + \left[ \frac{R^2}{4n+1} \right] - \left[ \frac{R^2}{4n+3} \right] + \dots$$

Позначимо  $\sigma_n(R)$  як

$$\frac{1}{4}(N(R) - 1) = \left[ \frac{R^2}{1} \right] - \left[ \frac{R^2}{3} \right] + \dots + \left[ \frac{R^2}{4n+1} \right] - \left[ \frac{R^2}{4n+3} \right] + \sigma_n(R) \quad (2)$$

З одного боку, залишок  $\sigma_n(R)$  є невід'ємним, оскільки

$$\sigma_n(R) = \left( \left[ \frac{R^2}{4n+5} \right] - \left[ \frac{R^2}{4n+7} \right] \right) + \left( \left[ \frac{R^2}{4n+9} \right] - \left[ \frac{R^2}{4n+11} \right] \right) + \dots$$

(кожна дужка невід'ємна). З іншого ж боку,

$$\sigma_n(R) = \left[ \frac{R^2}{4n+5} \right] - \left( \left[ \frac{R^2}{4n+7} \right] - \left[ \frac{R^2}{4n+9} \right] \right) - \dots \leq \left[ \frac{R^2}{4n+5} \right].$$

Нехай  $R = 4n + 3$ . Тоді очевидно, що  $0 \leq \sigma_n(R) \leq R$

Якщо у формулі (2) відкинути всі цілі частини, то її права частина (по модулю) зміниться не більше ніж на  $R$ . Таким чином,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1) = R^2 \left( 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) + 2\theta R,$$

або

$$\frac{N(R)-1}{4R^2} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{R-2} - \frac{1}{R} + \frac{2\theta}{R},$$

де  $|\theta| \leq 0$ . Спрямовуючи тепер  $R$  до нескінченності, з урахуванням рівності (1) отримуємо формулу Лейбніца.

### 3.2. Використання властивостей ґраток, пов'язаних з побудовою на них многокутників

#### Ірраціональність значень тригонометричних функцій

У теорії функцій дійсної змінної виникають питання щодо ірраціональності чисел, породжених неалгебраїчними функціями, зокрема тригонометричними. Наприклад, чи є раціональними числа:

$\sin 1^\circ, \cos \frac{\pi}{19}, \operatorname{tg} \frac{7\pi}{55}$ ? Або на таке загальніше питання: чи є числа  $\pi$  та  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$

сумірними (тобто чи є їх відношення раціональним числом)?

І взагалі: для яких кутів  $\alpha = \frac{p\pi}{q}$  ( $p$  і  $q$  – цілі числа) будуть раціональними числа: а)  $\cos \alpha$ ; б)  $\sin \alpha$ ; в)  $\operatorname{tg} \alpha$ ?

Очевидно, що  $\cos \alpha$  є раціональним при  $\alpha = \frac{k\pi}{2}$  та  $\alpha = \frac{(3k \pm 1)\pi}{3}$ ;  $\sin \alpha$  – при  $\alpha = \frac{k\pi}{2}$  та  $\alpha = \frac{(6k \pm 1)\pi}{6}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha$  – при  $\alpha = \pi k$  та  $\alpha = \frac{(4k \pm 1)\pi}{4}$  ( $k$  – ціле число). Далі ми побачимо, що при інших значеннях  $\alpha = \frac{p\pi}{q}$  значення усіх

трьох функцій є ірраціональними. Для доведення нам знадобляться наступні прості факти з тригонометрії:

1. Для будь-якого натурального  $n$  функція  $\cos nx$  є многочленом  $n$ -го степеня відносно функції  $\cos x$  із цілими коефіцієнтами, тобто

$$\cos nx = P_n(\cos x),$$

де  $P_n(y)$  – многочлен із цілими коефіцієнтами степеня  $n$ .

2. Функція  $\sin nx$  є добутком функції  $\sin x$  на деякий многочлен степеня  $(n - 1)$  відносно функції  $\cos x$  із цілими коефіцієнтами, тобто

$$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x),$$

де  $Q_{n-1}(y)$  – многочлен із цілими коефіцієнтами степеня  $n$ .

Відзначимо прості наслідки цих тверджень:

а) якщо  $\cos x$  – раціональне число, то  $\cos nx$  – теж раціональне число, а числа  $\sin x$  і  $\sin nx$  є сумірними, або одночасно дорівнюють нулю;

б) якщо  $p$  і  $q$  – взаємнопрості числа і  $\cos \frac{p\pi}{q}$  раціональне число, то

число  $\cos \frac{\pi}{q}$  є теж раціональним.

Доведемо властивість б) (властивість а) є майже очевидною). Зауважимо, що якщо  $p$  і  $q$  взаємнопрості та більші одиниці, то існує таке натуральне число  $k$ , що число  $kp$  при діленні на  $q$  дає в остачі 1, тобто  $kp = lq + 1$ .

Отже, число  $\cos \frac{p\pi}{q}$  при взаємнопростих  $p$  і  $q$  більших за 1 є раціональним тоді і тільки тоді, коли раціональним є і  $\cos \frac{\pi}{q}$ .

Тепер доведемо методом від супротивного, що  $\cos \frac{\pi}{q}$  при всіх натуральних  $q > 3$ . Припустимо, що  $\cos \frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1}$  – раціональне число ( $m_1$  та  $n_1$  – натуральні). Введемо на площині декартову систему координат та

проведемо промені, що утворюють із додатнім напрямком вісі  $Ox$  кути:

$$0, \frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}, \dots, \frac{(2q-1)\pi}{q}.$$

Нехай  $A_0, A_1, \dots, A_{2q-1}$  – точки перетину цих променів з одиничним колом (рис. 3.1).

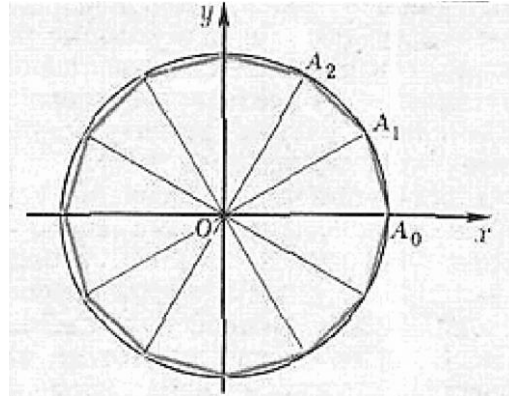


Рис. 3.1.

Тоді можна стверджувати, що багатокутник  $A_0A_1\dots A_{2q-1}$  – правильний; точка  $A_k$  має наступні координати:

$$\left( \cos \frac{k\pi}{q}; \sin \frac{k\pi}{q} \right).$$

Оскільки  $\cos \frac{\pi}{q}$  за припущенням є раціональним, то абсциса точки  $A_k$  – число раціональне:

$$\cos \frac{k\pi}{q} = P_k \left( \cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{m_k}{n_k};$$

ордината ж її дорівнює добутку раціонального числа  $Q_k \left( \cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{r_k}{s_k}$  на

число  $\sin \frac{\pi}{q}$ .

Отже,

$$A_k = \left( \frac{m_k}{n_k}; \frac{r_k}{s_k} \sin \frac{\pi}{q} \right).$$

Приведемо усі дроби  $\frac{m_k}{n_k}; \frac{r_k}{s_k}$  до спільного знаменника; позначимо його

через  $D$ , Тоді

$$A_k = \left( \frac{M_k}{D}; \frac{N_k}{D} \sin \frac{\pi}{q} \right),$$

$M_k$  і  $N_k$  – цілі числа,  $k = 1, 2, \dots, 2q - 1$ .

Розглянемо тепер усі точки з координатами

$$\left( \frac{i}{D}; \frac{i}{D} \sin \frac{\pi}{q} \right).$$

Ці точки утворюють ґратку, причому вершини нашого правильного  $2q$ -кутника  $A_0 A_1 \dots A_{2q-1}$  є її вузлами. Але цього не може бути (див. пункт 2.1),

так як  $2q \geq 8$ . Тому наше припущення про те, що при  $q > 3$  число  $\cos \frac{\pi}{q}$  є

раціональне, було невірним, а отже, всі числа  $\cos \frac{p\pi}{q}$  ( $q > 3$ ,  $p$  і  $q$  – взаємнопроті) є ірраціональними.

### 3.3. Практичні задачі, пов'язані з точковими ґратками

Розглянемо приклади задач, які безпосередньо пов'язані з точковими ґратками та їх властивостями.

**Приклад 3.1.** На нескінченному білому аркуші паперу в клітинку скінченну кількість клітинок пофарбовано в чорний колір так, що у кожній чорній клітинки парна кількість (0, 2 або 4) білих клітинок, що мають з нею спільну сторону. Доведіть, що кожну білу клітинку можна пофарбувати в червоний або зелений колір так, щоб у кожній чорній клітинки червоних і зелених клітинок, що межують з нею, стало порівну.

#### Розв'язання

Введемо координати так, щоб множина центрів клітинок паперового аркуша збігалася з множиною точок цілочисельної ґратки. Тоді будемо

фарбувати не клітинки, а вузлові точки цієї ґратки. З'єднаємо пари сусідніх чорних точок відрізками одиничної довжини. За умовою, з кожної чорної точки виходить парна кількість відрізків. Ідея розмальовки полягає в наступному. Можна показати, що об'єднання проведених відрізків розбиває площину на області, які можна пофарбувати в два кольори (жовтий і синій, наприклад) так, щоб області, які межують з відрізком, мали різні кольори. Далі, пофарбуємо зеленим в синіх областях точки з парною абсцисою, а в жовтих - з непарною абсцисою. Решту клітинок пофарбуємо у червоний колір (див. рис. 3.2.). Проведемо формальні міркування. Спочатку пофарбуємо всі білі точки «у смужку», тобто так, щоб зелені точки мали непарну абсцису, а червоні – парну.

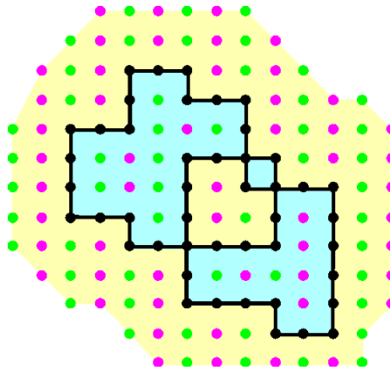


Рис. 3.2

Почнемо рух по відповідній ламаній з якоїсь пофарбованої у чорний колір точки  $A_1$ , при цьому утворюється послідовність чорних точок  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , в якій кожна точка з'єднана відрізком з наступною. Увійшовши в чорну точку, рухаючись по деякому відрізку, можна вийти через інший відрізок (оскільки кількість відрізків, що виходять з однієї точки, є парною), до того моменту, коли в перший раз не потрапимо в вершину  $A_n$ , в якій вже раніше побували (тобто  $A_k = A_n$  для деякого  $k < n$ ). Таким чином, знайдений цикл  $A_k A_{k+1} \dots A_n$  з відрізків, який обмежує на площині багатокутник  $X$ . Змінимо колір у всіх червоних і зелених точках, що лежать всередині  $X$ , а відрізки  $A_k A_{k+1}, A_{k+1} A_{k+2}, \dots, A_{n-1} A_n$  зітремо. У системі відрізків, що залишилися, з кожної чорної точки також виходить парна кількість відрізків, тому знову

знаходимо цикл, що обмежує багатокутник, робимо перефарбування всередині нього та стираємо відповідні відрізки. Діємо так доти, доки всі відрізки не будуть стерті (кроки перефарбовування показані на малюнку 3.3). Доведемо, що отримане в кінці розфарбування задовольняє умові задачі. Якщо у чорної точки  $P$  чотири білих «сусіда», то при кожному перефарбуванні вони перебували або всі всередині багатокутника, або все – поза ним, а отже, перефарбовувалися однаково кількість разів. Тоді у  $P$  по два червоних і зелених «сусіда», оскільки так було в початковому розфарбуванні. Нехай у чорної точки  $P$  два білих «сусіда»  $K$  та  $L$  і два чорних сусіда  $M$  і  $N$ . Перший випадок: якщо  $K$  та  $L$  – «сусіди по діагоналі», то при кожному перефарбуванні відрізок  $KL$  знаходиться або весь всередині багатокутника, або весь – поза ним. Тому  $K$  і  $L$  перефарбовувалися однаково кількість разів, а отже, одна з них зелена, а інша – червона, як це було спочатку. Другий випадок: якщо  $K$  та  $L$  лежать в одній горизонталі або в одній вертикалі, то при перефарбуванні всередині багатокутника, межа якого містить шлях  $MPN$ , одна з точок  $K$  чи  $L$  лежить всередині, а інша – зовні багатокутника. При будь-якому іншому перефарбуванні відрізок  $KL$  знаходиться або весь всередині, або весь зовні. Тому кількість перефарбовувань точок  $K$  та  $L$  відрізняється на 1. Оскільки при початковому розфарбуванні  $K$  і  $L$  одного кольору, то в кінцевій – різнокольорові.

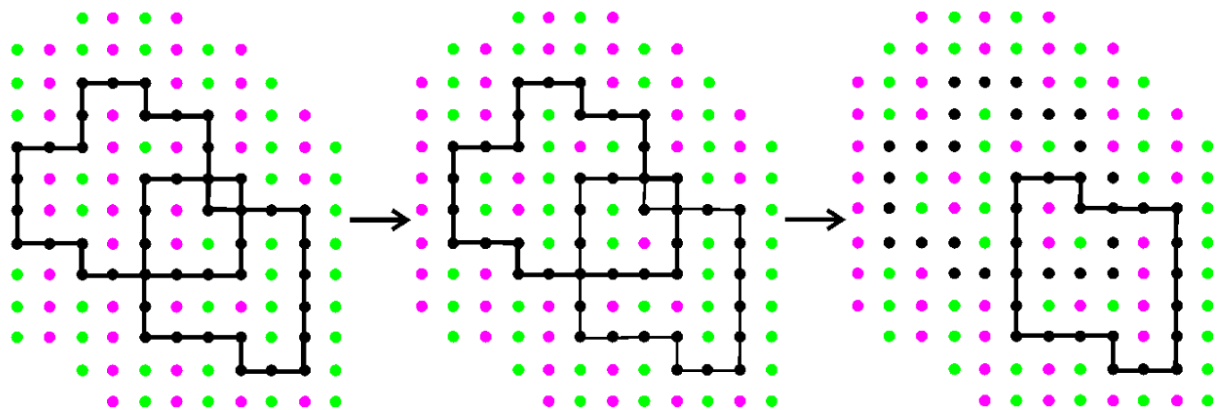


Рис. 3.3.

**Приклад 3.2.** Чи можна вузли цілочисельної ґратки позначити буквами  $a, b, c, d$  так, щоб кожен твірний квадрат мав у своїх вершинах всі чотири букви і щоб в кожному стовпці і кожному рядку ґратки теж фігурували всі чотири букви?

**Розв’язання**

Позначення вузлів ґратки способом, зазначеним в умові задачі, неможливо. Доведемо цей факт методом від супротивного.

Припустимо що вузли ґратки таки можна позначити відповідним чином, як цього вимагає умова задачі, та розглянемо довільний рядок цієї ґратки. У такому рядку обов’язково є три послідовних вузла, які позначені трьома різними літерами, наприклад це будуть букви  $a, b$  та  $c$  (рис. 3.4а) (в іншому випадку рядок міг би містити щонайбільше дві різні літери, що суперечить умові завдання). У наступному рядку (рис. 3.4б), нижче вузлів, позначених буквами  $a, b$  та  $c$ , повинні знаходитись вузли, позначені відповідно буквами  $c, d$  та  $a$ , якщо позначення вузлів відповідає умові завдання. Тоді вузли наступного рядка повинні бути відповідно позначені буквами  $a, b$  та  $c$  (рис. 3.4с). Продовжуючи ці міркування, ми бачимо, що в кожному з трьох стовпців розглянутої ділянки ґратки присутні лише дві різні літери:  $a$  і  $c$ , або  $b$  і  $d$ . Отже, вузли кожного рядка та кожного стовпця не можуть позначатися чотирма різними літерами, а отже, не існує такого позначення ґратки, про яке йде мова в задачі.

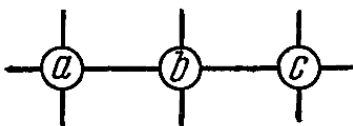


Рис. 3.4а

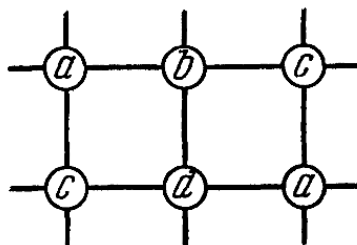


Рис. 3.4б

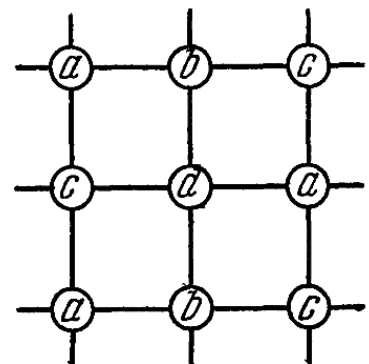


Рис. 3.4в



**Приклад 3.** Очевидно, вибираючи потрібний радіус, завжди можна домогтися того, щоб коло цього радіусу з центром у точці  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  проходило через задану точку ґратки. Довести, що все ж таки на кожному такому колі лежить не більше однієї точки ґратки.

**Доведення.**

Нехай на колі радіуса  $r$  з центром у точці  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  знаходяться дві точки  $(x_1; y_1)$  та  $(x_2; y_2)$  нашої ґратки. Тоді маємо:

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + (y_2 - \sqrt{3})^2 = r^2,$$

звідки

$$c\sqrt{2} + d\sqrt{3} = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = n,$$

де  $c = 2(x_2 - x_1)$ ,  $d = 2(y_2 - y_1)$  та  $n$  – цілі числа.

Отже, піднісши ліву та праву частини останньої рівності до квадрата, отримуємо:

$$2c^2 + 3d^2 + 2cd\sqrt{6} = n^2.$$

Але оскільки  $\sqrt{6}$  – число ірраціональне, а  $c$ ,  $d$  та  $n$  – цілі числа, то припущення про те, що  $cd \neq 0$ , призводить до протиріччя (у цьому випадку

$\sqrt{6} = \frac{n^2 - 2c^2 - 3d^2}{2cd}$  – раціональне), тому  $cd = 0$ . Якщо  $c = 0$ , то  $d\sqrt{3} = n$ , що

може мати місце лише при  $d = n = 0$ ; аналогічно, з  $d = 0$  випливатиме, що  $c = 0$ . Отже,  $c = d = 0$ , тобто  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ , що і означає збіг точок  $(x_1; y_1)$  та  $(x_2; y_2)$ .

**Приклад 4.** Довести, що для будь-якого цілого невід'ємного числа  $n$  існує круг, що містить рівно  $n$  точок цілочисельної ґратки.

**Доведення.**

Для будь-якого числа  $r$  позначимо через  $f(r)$  кількість точок ґратки, що знаходяться всередині (не враховуючи межі) круга радіуса  $r$  з центром у

точці  $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ . З попередньої задачі випливає, що при зростанні  $r$  число  $f(r)$  збільшується кожного разу на 1. Покажемо тоді, що для достатньо малих  $r$  маємо  $f(r) = 0$ , а для більших  $r$  величина  $f(r)$  приймає які завгодно натуральні значення. Очевидно, що для  $r = 0,1$  маємо  $f(r) = 0$ . Будь-який квадрат зі сторонами, паралельними осям координат, довжина яких більша натурального числа  $n$ , містить принаймні  $n^2$  точок ґратки, оскільки між прямими  $x = a$  та  $x = a + n$  є принаймні  $n$  вертикальних рядів точок ґратки і аналогічним чином, прямі  $y = a$  та  $y = a + n$  теж обмежують принаймні  $n$  горизонтальних рядів точок ґратки. Але круг радіуса  $r > n$  містить квадрат зі сторонами, більшими за  $n$  (які також є паралельними осям координат), а отже, він містить принаймні  $n^2$  точок ґратки, тобто  $f(r) > n^2$  при  $r = n + 1$ . Таким чином, ми з'ясували, що  $f(r)$  – необмежена функція, яка на проміжку  $(0; +\infty)$  зростає від значення 0 одиничними стрибками, а отже, вона приймає усі цілі додатні значення.

## ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена дослідженню маловідомих фактів, пов'язаних з властивостями точкових ґраток та шляхів їх застосування.

Так розглядалися дослідження, пов'язані з розташуванням кола на декартовій площині відносно цілочисельної ґратки  $\mathbb{Z}^2$ . У цьому контексті вивчено результати К. Гауса про кількість вузлів ґратки  $\mathbb{Z}^2$  у крузі певного радіуса; результати А. Шинцеля про існування кіл, що проходять через певну кількість вузлів цілочисельної ґратки на площині та їх узагальнення на тривимірний простір. Цікавою характеристикою вузлів цілочисельної ґратки є їх зв'язок із цілими гаусовими числами  $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi \in \mathbb{Z}, (x; y) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

Також проведено аналіз результатів досліджень, пов'язаних з побудовою правильних багатокутників з вершинами у вузлах ґратки  $\mathbb{Z}^2$ .

Щодо практичного застосування, опрацьований матеріал знаходить широке використання в теорії чисел, зокрема при доведенні теореми про розклад числа у суму 2-х квадратів. Залишається також можливість подальшого дослідження застосування наведеного матеріалу, зокрема при розв'язуванні діофантових рівнянь, рівнянь у цілих числах з обмеженнями та інше.

Матеріал роботи може бути використаний викладачами та студентами при вивченні курсу «Алгебри та теорії чисел», а також у позакласній роботі вчителів математики середніх та старших класів загальноосвітніх шкіл.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Honsberger R. Circles, Squares, and Lattice Points. Ch. 11 in *Mathematical Gems I*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 117–127, 1973.
2. Huxley M. N. *Area, Lattice Points, and Exponential Sums* / Clarendon press, Oxford, 1996.
3. Sierpiński W. A. *Selection of Problems in the Theory of Numbers*. New York: Pergamon Press, 1964.
4. Sloane N. J. A. Sequences A006339, A062875, and A062876 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences." (Electronic resources).
5. Вавилов В., Устинов А. Окружности на решетках / *Квант*, № 6. – 2006, С. 10–14.
6. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. – М.: Наука, 1981.
7. *Основи кристалографії: навчальний посібник* / Укл.: І. М. Фодчук, О. О. Ткач. – Чернівці: ЧНУ, 2007 – 110 с.
8. Серпинский В. *Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики*. – М.: Просвещение, 1961.
9. Штейнгауз Г. *Задачи и размышления*. Пер. с польск. Сост. и перев. Ю. А. Данилов. Под ред. Я. А. Смородинского, М., «Мир», 1972.
10. Штейнгауз Г. *Сто задач*. – М.: Наука, 1976.
11. *Кристаллографія, кристалохімія та мінералогія [Електронний ресурс] : підручник для студ. спеціальності 132 Матеріалознавство / Л. О. Бірюкович ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2.832 Кбайт). – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 234 с.*
12. Узлов К.І. *Кристаллографія, кристалохімія та мінералогія. Частина I: Конспект лекцій*. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 36 с.
13. Поплавко Ю.М., Воронов С.О. *Фізичне матеріалознавство: навчальний посібник*. Інтернет - видавництво Національного Технічного університету України, 2015

14. Збірник задач з фізики конденсованого стану : навчальний посібник. В 2 т. Т. 1 / А. В. Коротун, І. М. Тітов, Ю. А. Куницький, В. В. Погосов. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2011. – 358 с.
15. Давыдов А.С. Теория твердого тела. – М.: Наука, 1976.
16. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978.
17. Куровець М.І. Кристалографія і мінералогія. Ч.1. Кристалографія мінералів. - Львів: Світ, 1996.- 236 с.
18. Дискретная математика : учебное пособие / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.В. Кулаков, В.А. Гриднев, В.Г. Однолько. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 128 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1074-2.
19. Фльорко, О. В. Математична модель дифузії в деформованій гратці / О. В. Фльорко, В. Ф. Чекурін // Вісник ДУ «Львівська Політехніка». Елементи теорії та прилади твердотілої електроніки. — 2000. — № 393. — С. 64-67.