Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

# Кваліфікаційна робота

Освітнього ступеня «магістр»

на тему:

## «Методика реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи»

Виконала:

студентка 6 курсу, групи 61

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Хуторна А. А.

Науковий керівник:

к. п. н., доцент Соколенко Л. О.

Чернігів – 2019

Роботу подано до розгляду «____» _________________20___року.

Студент (ка) _______________ _______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _______________ _______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент _______________ _______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики та економіки

протокол №_____від «____» __________________ 20___ року.

Студент (ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____________ _______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

**Зміст**

# Вступ

«Розвивальне навчання» означають як активно - діяльнісний спосіб навчання, під час якого враховуються та використовуються природні закономірності індивідуального розвитку дитини, що зумовлюють розвиток знань, умінь, навичок і способів розумових дій, самокерованих механізмів особистості, емоційно-ціннісної та діяльнісно - практичної сфер [1с.46].

Не нова для педагогіки, психології і методики навчання математики проблема – навчити учнів вчитися, залишається актуальною і в даний час.

Управління та самоуправління навчально-пізнавальною діяльністю можливе лише за умови сформованості в учнів загальних і специфічних для математики прийомів розумової діяльності, а через них – і раціональних прийомів навчальної роботи [31,с.6]. Ці питання не втрачають своєї актуальності під час навчання основних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу на різних рівнях (рівні стандарту, профільному рівні), в старшій профільній школі, серед яких і змістова лінія «Вирази».

**Об'єктом дослідження** є процес навчання курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

**Предметом дослідження кваліфікаційної роботи** є система реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи.

**Метою кваліфікаційної роботи** є розробка методики реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи та впровадження її в шкільну практику .

**Завданнями кваліфікаційної роботи** є:

1) ознайомлення з дидактичними та психологічними принципами розвивального навчання;

2) з'ясування основних параметрів освітнього процесу у технології розвивального навчання;

3) аналіз загальних та специфічних прийомів розумової діяльності, призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи;

4) класифікація задач, призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи;

5) створення методики використання загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час навчання змістової лінії «Вирази» курсу алгебри і початків аналізу старшої школи на різних рівнях.

6) впровадження окремих результатів дослідження в практику роботи Чернігівського ЗЗСО № 13.

**Структура роботи.** Робота складається із вступу, двох розділів, висновку, списку використаної літератури. У вступі розкрито актуальність теми, визначені об’єкт та предмет дослідження, мета та завдання кваліфікаційної роботи. Перший розділ присвячений теоретичним основам дослідження, а саме аналізу стану проблеми дослідження в навчально-методичній літературі, психологічним та дидактичним принципам розвивального навчання. В цьому розділі проводиться аналіз діючих програм курсу математики старшої школи по темі дослідження, запропонована класифікація задач призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи.

У другому розділі роботи представлена методика формування загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи. Увага приділяється технології реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення теоретичного матеріалу та формуванню прийомів розумової діяльності під час розв’язування різних типів задач, запропонованої в роботі системи. Другий розділ роботи завершується результатами експериментальної перевірки окремих результатів дослідження.

Висновки обґрунтовують ефективність проведеного дослідження.

# РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Дидактичні принципи розвивального навчання.

Основною метою загальноосвітньої школи є формування достатньо розвиненої особистості, вважає З. І. Слєпкань [31] натомість виховання та навчання підпорядковуються цій меті і виступають як загальні форми розвитку людини, у навчально-виховному процесі, а також в процесі навчання математики. В навчальному процесі необхідно спиратися, як на загально-дидактичні принципи, висунуті Я. А. Коменським, так і на дидактичні та психологічні принципи розвивального навчання. Вчитель математики повинен чітко усвідомлювати, що у процесі навчання математики можна розвивати та формулювати в учнів не лише дидактичну мету вивчення кожної теми програми, а й мету виховання та розвитку учнів.

Одним із засобів, що використовують під час навчання у школі є можливість розвивати логічне мислення, просторові уявлення та уяву, алгоритмічну й інформаційну культуру, пам’ять, увагу, спостережливість.

Сучасні психологи світу визначають, що розвиток слідує за навчанням. Натомість чи не кожне навчання спричиняє розвиток кожного учня. В тому випадку, якщо вчитель на уроці користується  парними, груповими формами, коли сильний учень працює на уроці зі слабкими, то при такому навчанні може бути першим невстигаючий учень; якщо вчитель працює на уроці в основному з невстигаючими та середньо встигаючими учнями, то таке навчання гальмує розвиток здібних і обдарованих учнів, бо вони не працюють на уроці в зоні свого найближчого розвитку.

Система розвивального навчання з’явилася і набула поширення в 50 – і роки XX століття. Цілями та завданнями розвивального навчання за Л. В. Занковим [3] були:

1) високий загальний розвиток особистості;

2) створення основи для всебічного гармонійного розвитку школярів в процесі навчання;

3) необхідність врахування індивідуального розвитку дитини, що зумовлений особливостями їх нервової системи;

Система розвивального навчання, за якою Л. В. Занков пропонує навчати учнів, відрізняється від традиційних методів тим, що перш за все сформульована мета навчання. До розгляду пропонується мета загального розвиту особистості школяра, а вже потім кожен учень індивідуально за своїми інтелектуальними здібностями набуває знань, умінь і навичок. Для найбільш ефективного загального розвитку школярів Л. В. Занков [3] розробив наступні дидактичні принципи розвивального навчання:

*1. Провідна роль теоретичних знань.*

Першочерговою метою під час вивчення будь-якої теми є засвоєння учнями теоретичного матеріалу, а саме означень, теорем, аксіом, алгоритму виконання дій, тотожних перетворень виразів, алгоритму побудови графіків, розв'язування задач.

*2. Навчання швидкими темпами.*

Даний принцип передбачає спочатку вивчення всього теоретичного матеріалу, а лише потім перехід до розв'язування вправ і задач. При вивченні теоретичного матеріалу, учням пропонується розглянути зразки розв'язання ключових задач теми. Даний методичний підхід дає змогу швидко опрацювати і засвоїти теоретичний матеріал, залишивши більше часу на формування вмінь і навичок при розв'язуванні практичних завдань. Проте темпи навчання повинні бути помірні, аби не заважати учням усвідомлювати матеріал.

*3. Навчання на високому рівні складності.*

Л. В. Занков пропонує розвивати розумові здібності учнів на задачах і вправах високого рівня складності. У зв'язку з цим дидактичним принципом необхідно пригадати введені Л. С. Виготським поняття про зону актуального розвитку (учень працює у сфері вже засвоєного навчального матеріалу) і зону найближчого розвитку (учень ще не може сам упоратися з будь-яким навчальним завданням, але виконує його за незначною допомогою вчитель або іншого учня). Складність реалізації даного принципу полягає в тому, що кожен учень має вже певну зону актуального розвитку (те, що він вже знає і вміє) і зону найближчого розвитку (на що він може бути здатний у навчанні). Тому, аби врахувати індивідуальні можливості всіх учнів в умовах класно-урочної системи, виникає потреба здійснювати рівневу диференціацію навчання. Диференціація навчання – це засіб індивідуалізації в умовах класно-урочної системи, коли учні класу розділяються на динамічні типологічні групи: гомогенні (однорівневі) і гетерогенні (різнорівневі), і вчитель після пояснення нового навчального матеріалу, під час формування навичок і вмінь, працює на уроці з цією групою, яка найбільше потребує його допомоги.

Розподілити учнів на типологічні групи можна врахувавши темп просування по матеріалу під час навчання, психологічні фактори, розумові здібності та інтерес до предмета.

*4. Усвідомлення всіма учнями процесу навчання.*

До реалізації цього принципу в процесі навчання, повинен прагнути кожний учитель. Обов’язковим є врахування того факту, що за найвищого рівня організації роботи, в класі можуть бути присутні невстигаючьі учні, які не усвідомлюють на потрібному рівні і не засвоюють на даному уроці новий навчальний матеріал. В цьому випадку процес засвоєння слід продовжити на наступних уроках.

В. Ф. Шаталов [38] практикував на своїх уроках пояснення нового матеріалу не менше двох разів. Перший – звичайними традиційними методами: пояснення, евристична бесіда, робота з підручником. Другий раз пояснення відбувалося більш швидкими темпами з використанням опорного сигналу, який учні відтворюють на початок наступного уроку. Цьому поясненню надається функція закріплення. Учитель вважає, що таке закріплення є потрібним для всіх учнів як сильних, так і слабких. При традиційному закріпленні в кінці уроку вчителі пропонують відтворити знання, як правило, сильним учням, а як засвоїли новий навчальний матеріал невстигаючі учні при такому закріпленні – залишається невідомим.

На наступних уроках В. Ф. Шаталов [38] пропонує учням картки самоконтролю, аби ще глибше і доцільніше закріпити теоретичний матеріал. У системі роботи цього вчителя новий матеріал повторюється і відтворюється від 5 до 7 разів, що забезпечує міцні знання основного у програмному матеріалі.

У системі роботи донецької вчительки В. П. Іржавцевої усвідомлення і закріплення вивченого здійснюється шляхом повторення начального матеріалу за змістовими лініями на початку кожного навчального року (10 перших уроків), актуалізація опорних знань і вмінь перед вивченням кожної нової теми і кожного уроку.

*5. Систематична робота вчителя над загальним розвитком усіх учнів, в тому числі і невстигаючих.*

Інтелектуальний розвиток учнів - основним завдання кожного вчителя, а в ньому – розвиток мислення, тому перш за все вчитель повинен ознайомити учнів з такими розумовими діями, як аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, встановлення і використання аналогій, класифікація і систематизація, специфічні розумові дії та прийоми розумової діяльності.

Система Д. Б. Ельконіна – В. В. Давидова з'явилася й набула поширення в 60-ті роки XX століття. Ідея концепції розвивального навчання полягала в наступному:

1) формування теоретичної свідомості і мислення у школярів;

2) відтворення в навчально-практичній діяльності учнів логіки наукового пізнання;

3) надання дітям не лише знань, вмінь і навичок, але й навчання їх способам розумових дій;

Д. Б. Ельконіна – В. В. Давидова розробили концепцію цілеспрямованої навчальної діяльності, за якою отримання результатів в процесі навчання спрямоване на досягнення теоретичного рівня мислення учнів.

До особливостей цілеспрямованої навчальної діяльності відносять:

1) ставлення дитини, як суб'єкта навчальної діяльності до процесу навчання;

2) розуміння та сприйняття дитиною начального матеріалу;

## 1.2 Психологічні принципи розвивального навчання.

Психологічні принципи розвивального навчання були висунуті З. І. Калмиковою. [6]

*1. Систематичний розвиток трьох основних видів мислення (наочно-дійового, або практичного мислення, наочно-образного й абстрактно-теоретичного).*

Помилковим є твердження, що перший вид мислення слід розвивати лише в молодших класах. Практика свідчить, що в розвитку першого виду мислення є потреба у старшій школі. Справді, при розв'язуванні стереометричних задач часто учням складно, наприклад, уявити відрізок, довжину якого необхідно знайти, або кут, величину якого необхідно обчислити. Допомагають таким учням моделі на яких вони можуть побачити потрібні геометричні об'єкти. Отже, чим складніше і абстрактніше поняття, яке вивчається в старший школі, тим більше потреба в унаочненні (наприклад, границя функції, неперервність, знаходження формули об'єму піраміди. тощо).

*2. Проблемність у навчанні.*

Створення проблемних ситуацій в процесі навчання активізує мислення учнів та сприяє підвищенню інтересу до навчання. Дуже добре, коли учні при введенні математичних понять щоразу на пред'явленому наочному матеріалі самі виділяли суттєві спільні властивості об'єктів і самостійно формулювали означення. Проте, даний методичний підхід потребує великих затрат навчального часу на уроці, і не залишається часу на розв'язування задач. Ще слід враховувати, що при вивченні таких начальних предметів, як математика, фізика, хімія, 50 відсотків сукупного начального часу уроку повинно відводитися на розв'язування задач, значна частина яких створює проблемну ситуацію. Отже, не можна захоплюватися створенням проблемних ситуацій на уроках математики, хоч це не означає, що їх не варто створювати. Крім того, створювати потрібно такі проблемні ситуації, на розв'язання яких не доведеться витрачати багато навчального часу, і такі, для яких у вчителя є впевненість, що в класі знайдеться учень, який поставлену проблему розв'яже.

*3. Індивідуалізація та диференціація навчання.*

У дидактиці і психології досить широко розкрите поняття індивідуалізації навчання. Щодо стосується поняття диференціації навчання, то воно до цього часу не знайшло однозначного трактування і триває його. Н. М. Шахмаєв [39,с.270] у своїй книзі веде мову про «внутрішню диференціацію» та «зовнішню диференціацію». «Під внутрішньою диференціацією розуміється така організація учбового процесу, за якою рахування індивідуальних особливостей учнів відбувається в умовах роботи вчителя в звичайному класі. Це, по суті, не що інше, як індивідуалізація навчання. Термін «зовнішня диференціація» означає таку організацію навчального процесу, при якій для врахування індивідуальних особливостей учнів останні об'єднуються в спеціальні диференційовані учбові групи». Автором виділяються такі види диференціації: за здібностями, за нездібностями, за проектуючою професією в дорослому житті, за інтересами.

В методичній літературі та шкільній практиці утвердилися два терміни щодо диференціації: рівнева і профільна диференціація.

Під рівнявою розуміється диференціація, що здійснюється при безумовному досягненні всіма учнями обов'язкових результатів навчання і створенні можливостей навчатися на підвищеному та поглибленому рівні тим учням, які мають математичні здібності і інтерес до навчання математики. Фактично, це диференціація за здібностями.

Профільна диференціація здійснюється в старшій школі відповідно до обраного учнем профілю майбутньої трудової діяльності.

*4. Систематичний розвиток в учнів як алгоритмічних та і евристичних прийомів розумової діяльності.*

Алгоритмічні прийоми розумової діяльності передбачають визначення з кількох можливих алгоритмів розв'язання найбільш раціональний і подальшу роботу виконувати за відповідним алгоритмом. Навчально-пізнавальна діяльність учнів значно активізується, а мислення розвивається на більш високому рівні, у тому випадку, коли вчитель пропонує не вже готові алгоритми, а організовує роботу учнів таким чином, аби вони самостійно шукали відповідним алгоритм розв'язання задачі. При даному методичному підході учні глибше усвідомлюють сутність алгоритму і міцніше запам'ятовують його. У процесі пошуку алгоритму здійснюється справжня евристична діяльність школярів.

*5. Систематичний розвиток мнемонічної діяльності, що сприяє розвитку пам'яті.* Добре розвинена  пам'ять необхідна для створення у кожного учня фонду дійових знань, на необхідність чого звертала увагу у своїх працях З.  І. Калмикова [4,с.71-80].

Існує ряд факторів, що сприяють розвитку пам'яті та забезпеченню міцності знань. Перший із них – високий рівень пояснення вчителем навчального матеріалу та глибоке усвідомлення його учнями. Важливими є рекомендації вчителя учням, стосовно виділення основних моментів, поради стосовно запам'ятовування матеріалу. За дослідженнями німецьких психологів, більшу частину інформації діти забувають  у перші години після її вивчення. Тому важливим є своєчасне закріплення знань та подальше повторення нового матеріалу, задля запам'ятовування. Саме на це спрямовані опорні сигнали в методичній системі В. Ф. Шаталова.

Досвід показує, що для більш ефективного запам'ятовування алгоритмів розв'язування завдань, формул є мнемонічні правила. Давайте розглянемо цей метод запам'ятовування більше глибше. Мнемоніка – мистецтво запам'ятовування, сукупність прийомів і способів, що полегшують запам'ятовування і збільшують обсяг пам'яті шляхом утворення штучних асоціацій. Одним із компонентів інноваційних технологій навчання є асоціативний метод. Під мнемонікою розуміють набір методів  і прийомів, що збільшують якість і обсяги тієї частини інформації, що запам'ятовується на основі асоціативних зв'язків.  Суть мнемоніки в заміні слів абстрактних понять на візуальні образи, а також уявлення про об'єкт. Іншими словами мнемотехніка, це метод запам'ятовування, що ґрунтується на послідовному вивченні інформації, що перетворюється в комбінацію зорових образів.

## 1.3 Загальні та специфічні розумові дії та прийоми розумової діяльності у навчанні математики.

Значний внесок у дослідження теорії розвивального навчання зробили Л. С. Виготський, В. В. Давидов, Д. Б. Ельконін, Л. В. Занков, Г. К. Селевко, І. С. Якиманська. Розробкою методики навчання математики, що враховує особливості розвивального навчання школярів, займалися З. І. Слєпкань, С. П. Семенець, Н. В. Ванжа, В. Я. Забранський.

Загалом, усі вони класифікують розумові дії за різними основами. У психолого-педагогічній літературі достатньо обґрунтоване положення про те, о в процесі навчання необхідно виділяти дві самостійні та взаємопов'язані задачі: опанування учнями змістом того чи іншого предмета і цілеспрямоване формування в них прийомів розумової діяльності. Прийоми розумової діяльності можна поділити на дві групи за ступенем використання в різних галузях людської діяльності: загальні розумові дії; специфічні розумові дії.

***Загальні розумові дії (операції)*** як механізми, необхідні для успішного протікання розумових дій. Такими діями вважають: аналіз, синтез, аналіз через синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, аналогія, конкретизація, індукція та дедукція.

Навчальну діяльність ні в якому разі не можна звести лише до одного з цих компонентів. Тільки у взаємному поєднанні вони забезпечують повноцінну навчальну діяльність. Учень добре усвідомлює лише те, що виступає як предмет і мета його діяльності. Тому діяльність учіння передбачає виконання дій з навчальним матеріалом і перетворення матеріалу, що засвоюється, на пряму мету цих дій (розв'язування задач). Важливим є те, щоб з діяльності, що виконується, і її результатів учень здобував інформацію про істотні властивості реального світу. Активне формування навчальної діяльності сприяє суттєвому зміненню в особистості учня, його свідомості, а отже, сприяє становленню учня як суб'єкта діяльності (індивідуальності). Інтелектуальний розвиток відбувається в процесі засвоєння учнями знань і способів діяльності.

Формування цих прийомів дає можливість учню самостійно організовувати свою навчальну діяльність, оцінювати її результати (що є необхідною умовою для саморегуляції навчальної діяльності), коригувати її у процесі виконання.

Залежно від індивідуальних особливостей і ступеня підготовленості учнів, складності і обсягу матеріалу, що вивчається, в одних випадках учителеві необхідно добирати спеціальну систему вправ для вивчення і закріплення нового матеріалу, за допомогою якої і формуються прийоми діяльності, в інших випадках доцільно знайомити учнів відразу із структурним складом прийому, його сутністю, правилом-орієнтиром. Такий підхід породжує деякі перехідні варіанти. Одним з таких варіантів є методика формування прийомів розумової діяльності, розроблена О.Н. Кабановою-Меллер, за якою в центрі уваги на уроці перебувають певні прийоми розумової діяльності, але структура цих прийомів учням жорстко не задається. Тому вони часто ставляться в умови самостійного виділення послідовності дій, яка задає прийом, або знаходження загального орієнтиру. Доцільно, щоб учні підводилися до розуміння прийомів і оволодіння ними у процесі засвоєння нових знань.

Розглянемо характеристику деяких прийомів загальних розумових дій учнів та можливості їх формування при вивченні математики.

*Аналіз і синтез* – взаємообернені дії, складові процесу мислення. Даними термінами називають реальний поділ, або з'єднання матеріальний об'єктів, подій, явищ з метою подальшого їх дослідження.

***Аналіз*** — логічний прийом, метод дослідження, котрий полягає в тому, що об'єкт, який вивчається в умі, або практично, розчленується на окремі елементи (ознаки, властивості, відношення), кожній з який досліджується окремо [37]. Розв'язування будь-якої задачі починається з аналізу умови, виділення вихідних даних (аргументів) і результатів. Далі відбувається синтезація  розв'язку, зіставляються аргументи і результати. Ці процеси чітко виражені при розв'язуванні задач на побудову різного роду алгоритмів і запису їх алгоритмічною мовою або подання за допомогою графічних схем. Аналізуючи умову задачі, вихідні дані, необхідно з'ясувати, які саме властивості вихідних даних, виявлені в процесі аналізу, синтезуватимуться у висновки, що приведуть до розв'язку. Аналіз здебільшого використовують під час доведення теорем. Часто вживаними є терміни «Аналіз контрольної роботи», «аналіз уроку», коли розглядається питання «Чи весь матеріал розглянули та досягли поставлених цілей?». Аналіз є засобом пошуку розв'язання, доведення, хочу в більшості випадків, сам по собі не є розв'язком, доведенням. Синтез, спираючись на дані, які одержані в процесі аналізу. Дає розв'язання задачі або доведення теореми.

***Синтез*** — поєднання окремих елементів, об'єднання частин у ціле [37]. У методиці навчання математики аналізом і синтезом традиційно називають два протилежні щодо розвитку думки міркування, які використовують під час розв'язування задач і доведення теорем.

Метою аналізу нерідко буває з'ясування причин помилки. Сутність пошуку помилки полягає втому, щоб відшукати той момент, коли прогнозований результат використання алгоритму розходиться з фактичним. С. Л. Рубінштейн виокремив важливу форму аналізу – аналіз через синтез і дав йому назву «основний нерв будь-якої розумової діяльності». Аналіз через синтез як прийом розумової діяльності інколи називають «прийомом переосмислення елементів задачі». Узагальнюючи можемо сказати, що аналіз – міркування від того, що потрібно знайти, або довести, до того, що дано або встановлено раніше. Синтез – міркування у зворотному напрямі.

*Порівняння і аналогія* – логічні прийоми, що використовуються в навчанні. **Порівняння -** це розумова дія, спрямована на виокремлення спільних і відмінних рис в предметах і явищах, що починається із синтезу, а далі відбувається аналіз порівнювальних об'єктів [37]. Наприклад, порівняння трикутника і чотирикутника розкриває їх спільні властивості: наявність сторін, вершин, кутів, скільки саме вершин і кутів, скільки сторін, та різне: у трикутника – три вершини(сторони), у чотирикутника – чотири. Порівняння паралелограма і трапеції дозволяє встановити їх спільні властивості: обидва вони чотирикутники. Обидва мають паралельні сторони, і різне: в одному дві пари паралельних сторін, і іншому – одна. Виокремлене завдяки аналізу істотне спільне об'єднує, а отже синтезує об'єкти. Таким чином здійснюється узагальнення. Порівняння – це обов'язкова умова абстрагування і узагальнення, тому К. Д. Ушинський вважав, що порівняння – є основою будь-якого розуміння і мислення, будь-якої аналітико-синтетичної діяльності.

Розрізняють дві форми порівняння: *зіставлення і протиставлення.*

***Зіставлення*** - розумова дія, спрямована на виокремлення істотних ознак, спільних для деяких об'єктів.

**Протиставлення** – спрямоване на виявлення відмінного, того, чим можна знехтувати. [37]

***Аналогія*** – прийом розумової діяльності, спрямований на отримання нових знань про властивості, ознаки, відношення предметів і явищ, що вивчаються на підставі знань про їхню часткову подібність.  А. І. Уйомов вважає, що аналогія є одним із різновидів асоціацій за подібністю, на основі якої одна думка спричинює іншу. В одних випадках така асоціація сприяє досягненню істини, а в інших – заважає, але яким буде результат, передбачити неможливо. Аналогії дуже часто притаманна велика переконливість, оскільки асоціація, що спричинила ту чи іншу думку в однієї людини, може зумовити виникнення її в іншої. Однак, цю переконливість не слід ототожнювати з обґрунтованістю. Такою є психологічна концепція аналогії. Висновки за аналогією можуть виявитись або правильними, або хибними, вони потребують обґрунтування правильності чи хибності за допомогою дедуктивних міркувань (доведень).

*Узагальнення і абстрагування* **-** два логічних прийоми, які застосовуються майже завжди разом в процесі пізнання.

***Абстрагування*** – розумова дія, спрямована на виявлення в предметах і явищах істотного і відокремлення неістотного [37]. Результатом абстрагування є образи. Термін «абстракція» вживають для позначення методу наукового дослідження під час вивчення певних об'єктів, явищ, процесів, коли не враховуються їх неістотні ознаки. Це надає змогу спростити картину явища і розглядати його ніби в «чистому вигляді». Наприклад, такі геометричні фігури, як точка, площина, пряма, виявилися результатом абстрагування від властивостей реальних об'єктів, від яких вони походять.

***Узагальнення*** - мисленне виділення, фіксування яких-небудь загальних, істотних властивостей, які належать певному класу предметів або відношень [37]. На думку С. Л. Рубінштейна - узагальнення – практично значиме і науково виправдане; наукове узагальнення об'єднує не взагалі властивості, спільні або подібні для певних явищ, а властивості істотні для них. Істотними називають такі властивості, які не можна виокремити для певного класу предметів. Вони однозначно відрізняють будь-який предмет певного класу від предметів іншого класу . Наприклад, сприймаючи поняття «зовнішній кут трикутника», учні повинні знайти в запропонованому вчителем навчальному матеріалі, істотну ознаку спільну для всіх зовнішніх кутів трикутників – бути суміжним внутрішньому куту, і неістотні, якими відрізняються зовнішні кути трикутника, (величина кута, розміщення трикутника).

Узагальненням користуються в різних видах навчально-пізнавальної діяльності під час вивчення математики: формулюючи поняття, доводячи теореми, розв'язуючи задачі. Навчити прийомам правильного узагальнення - одне з найважливіших завдань. Необхідною умовою формування правильних узагальнень є варіювання неістотних ознак, понять, властивостей, фактів.

В навчальній практиці користають лише двома прийомами узагальнення.

*Перший прийом* – учні зіставляють задані об'єкти (наприклад, фігури в геометрії, вирази, формули, рівняння в алгебрі), виокремлюють і формулюють їхні істотні спільні властивості, залишаючи осторонь неістотні, і об'єднують об'єкти за цими властивостями (узагальнюють). При цьому учні виділяють загальні істотні властивості самостійно. Другий прийом – учням відомо, які саме істотні властивості треба виокремити, тому із даних об'єктів вони виокремлюють ті, які відповідають змісту поняття, що формулюється, зіставляючи, виокремлюючи в кожному об’єкті ці властивості, і об’єднують об’єкти за спільними .

*Індукція і дедукція.*

***Індукція*** **–** форма мислення, за допомогою якої на підставі знання про окреме робиться висновок, про загальне. У шкільному курсі математики розрізняють три види індукції: неповна індукція – міркування, що проводяться від окремого до загального, тобто умовивід, який ґрунтується на вивченні властивостей окремих об’єктів певної сукупності і поширюється на всі її об’єкти (наприклад, графіком лінійної функції є пряма, отже за індукцією графіком будь-якої лінійної функції є пряма); повна індукція – умовивід, у правильності якого переконуються, розглядаючи всі окремі випадки (об’єкти, фігури, числа), що утворюють скінченну множину. Твердження, що ґрунтуються на застосуванні методу повної індукції, завжди правильні, тобто повна індукція є методом доведення; математична індукція – один з найважливіших методів доведення математичних тверджень, які охоплюють нескінченну кількість випадків.

## 1.4 Аналіз навчальних програм з математики старшої школи на предмет навчання змістової лінії «Вирази».

Метою базової загальної середньої освіти є розвиток особистості, котра поєднує в собі бажання до навчання, ініціативність до саморозвитку та самонавчання в сучасних умовах. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях. Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язування практичних задач.

Чинними програмами з математики для старшої школи передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу, серед інших, набуде такі компетентності:

- вміти виконувати математичні розрахунки, раціонально поєднуючи усні та письмові обчислення;
- вміти виконувати тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів під час розв’язування різних задач (рівнянь, нерівностей, їх систем, геометричних задач, задач із застосуванням тригонометрії).

У курсі алгебри і початків аналізу 10,11 класів вирази, які містять корені та степені з раціональними показниками, тригонометричні вирази, логарифмічні вирази [9, с.6-32], [22, с.47-105].

Навчальною програмою з математики рівня стандарт для 10-11 класів передбачене вивчення наступних тем, які є складовими змістової лінії «Вирази» [18], [19]:

| **Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів** | **Зміст навчального матеріалу** |
|---|---|
| **Тема 1. ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ,( 15 годин) 10 кл.** | |
| **Учень/учениця:**<br><br>**користується** різними способами задання функцій;<br><br>**знаходить** область визначення функціональних залежностей; значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення;<br><br>**встановлює** за графіком функції її основні | Числові функції та їх властивості. Способи задання функцій. Парні та непарні функції.<br><br>*Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня, його властивості.*<br><br>*Степінь з раціональним показником, та його властивості*<br><br>*Степеневі функції, їхні* |

| | |
|---|---|
| властивості;<br><br>**встановлює** властивості функцій;<br><br>***обчислює та порівнює*** *значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені;*<br><br>**розпізнає та схематично зображує** графіки степеневих функцій;<br><br>**моделює** реальні процеси за допомогою степеневих функцій. | *властивості та графіки.* |
| **Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ (18годин) 10 кл.** | |
| **Учень/учениця:**<br><br>**вміє** переходити від радіанної міри кута до градусної й навпаки;<br><br>**встановлює** відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;<br><br>**розпізнає і схематично будує** графіки тригонометричних функцій;<br><br>**ілюструє** властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків;<br><br>***перетворює*** *нескладні тригонометричні вирази;*<br><br>**застосовує** тригонометричні функції до опису реальних процесів;<br><br>**розв'язує** найпростіші тригонометричні | Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів.<br><br>Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення.<br><br>Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.<br><br>*Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них.*<br><br>Найпростіші тригонометричні |

| | |
|---|---|
| рівняння. | рівняння. |

| | |
|---|---|
| **Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ (16 годин) 11 кл.** | |
| **Учень/учениця:**<br><br>**розпізнає і будує** графіки показникової і логарифмічної функцій;<br><br>**ілюструє** властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків;<br><br>**застосовує** показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів;<br><br>***розв'язує*** *найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.* | Властивості та графіки показникової функції.<br><br>*Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції.*<br><br>*Найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.* |

Навчальною програмою з математики профільного рівня для 10-11 класів передбачене вивчення наступних тем, які є складовими змістової лінії «Вирази» [18], [19]:

| | |
|---|---|
| **Тема 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ (30 годин) 10 кл.** | |
| Учень (учениця):<br><br>***формулює*** *означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником;*<br><br>***обчислює, оцінює та порівнює*** *значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками;* ***зображує*** | *Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості. Перетворення виразів з коренями n-го степеня.*<br><br>Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.<br><br>*Степінь Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником.*з раціональним показником, його властивості. |

| | |
|---|---|
| *графік степеневої функції;*<br><br>**розв'язує** ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; **застосовує** властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей. | Степенева функція, її властивості та графік.<br><br>Ірраціональні рівняння. Ірраціональні нерівності.Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами. |
| **Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ (34години) 10 кл.** | |
| Учень (учениця):<br><br>**виконує** перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; **встановлює** відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;<br><br>**обчислює** значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень;<br><br>**формулює** означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій; **будує** графіки періодичних функцій;<br><br>**ілюструє** властивості періодичних функцій за допомогою графіків; ***перетворює*** *тригонометричні вирази.* | Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.<br><br>*Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного* |

| | |
|---|---|
| | *аргумента.* |

| Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ (40 год)11 кл. | |
|---|---|
| Учень (учениця):<br><br>***формулює*** *означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;*<br><br>***формулює*** *означення логарифма та властивості логарифмів;*<br><br>**будує** графіки показникових і логарифмічних функцій;<br><br>перетворює вирази, які містять логарифми;<br><br>**знаходить** похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і **застосовує** їх до дослідження цих класів функцій;<br><br>**розв'язує** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами<br><br>**застосовує** показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задачах. | *Степінь із дійсним показником. Показникова функція. Логарифми та їх властивості.* Логарифмічна функція. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.<br><br>Похідні показникової та логарифмічної функцій. |

Навчальною програмою з математики поглибленого рівня для 10-11 класів передбачене вивчення наступних тем, які є складовими змістової лінії «Вирази» [18], [19]:

| **Навчальні досягнення учнів** | Зміст навчального матеріалу |
|---|---|
| Учень (учениця):<br><br>***формулює*** *означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня и-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником;*<br><br>***обчислює, оцінює та порівнює*** *значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками;* **зображує** графік степеневої функції;<br><br>**розв'язує** ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; ***застосовує*** *властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.* | **Тема 1. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ(24год) 10 кл.**<br><br>*Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня, його властивості. Перетворення виразів з радикалами.*<br><br>Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.<br><br>Ірраціональні рівняння. *Ірраціональні нерівності.*<br><br>*Степінь з раціональним показником, його властивості. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником.*<br><br>*Степенева функція, її властивості та графік.*<br><br>Оборотні функції. Взаємно обернені функції.<br><br>Ірраціональні рівняння, нерівності *та їх системи з параметрами.* |
| Учень (учениця):<br><br>**виконує** перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; | **Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ(42) 10 кл.**<br><br>Радіанне вимірювання кутів. Синус, |

| | |
|---|---|
| **встановлює** відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;<br><br>***обчислює*** *значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень;*<br><br>**формулює** означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій;<br><br>**будує** графіки періодичних функцій;<br><br>**ілюструє** властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків; ***перетворює*** *тригонометричні вирази.*<br><br><br>Учень (учениця):<br><br>***формулює*** *означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;*<br><br>***формулює*** *означення логарифма та властивості логарифмів;* | косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.<br><br>*Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.*<br><br>**Тема 7. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ(36)11кл.**<br><br>*Степінь із дійсним показником. Показникова функція. Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція.* Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності *та їх системи,* |

| | |
|---|---|
| **будує** графіки показникових і логарифмічних функцій;<br>***перетворює*** *вирази, які містять логарифми;*<br>**знаходить** похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і **застосовує** їх до дослідження цих класів функцій;<br>**розв'язує** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. | *зокрема з параметрами.*<br>Похідні показникової і логарифмічної функцій.З астосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах. |

**1.5 Аналіз альтернативних шкільних підручників, посібників, методичних статей по темі дослідження.**

Проблемам розвивальної освіти, реалізації відповідної функції навчання присвячені роботи психологів Л. С. Виготського, В. В. Давидова, Д. Б. Ельконіна, О. В. Запорожця, В. П. Зінченка; педагогів минулого Д. Дьюї, Л. В. Занкова, М. І. Махмутова, Й. Г. Песталоцці, Д. Пойа, А. А. Столяра, В. О. Сухомлинського, К. Д. Ушинського та ін. На необхідності розвивальної освіти акцентують увагу сучасні українські дослідники О. Є. Антонова, Р. С. Гуревич, О. Л. Музика, С. О. Сисоєва, О. І. Скафа, О. В. Скрипченко та ін. Проблемам методики розвивального навчання математики, підготовки майбутніх учителів до реалізації розвивального навчання присвячені дисертаційні роботи Е. І. Александрової, Л. І. Балабанової, Л. М. Будаєвої, О. Б. Воронцова, О. В. Калабіної, М. Г. Шалунової та ін.

Математичні знання і вміння розглядаються не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості школяра, забезпечення його математичної грамотності як здатності розуміти роль математики в світі, в якому він живе, висловлювати обґрунтовані математичні судження і використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

Вперше з темою «Вирази» учні зустрічаються в 5-6 класах під час вивчення теми «Методика вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів», ознайомлюються з числовими та буквенними виразами; продовжують вивчення даної теми в 7 класі повторюючи і уточнюючи відомості про числові вирази, доводять поняття, тотожно рівні вирази, тотожності, тотожні перетворення цілих виразів (одночленів, многочленів) використовуючи тільки розглянуті формули скороченого множення; у 8 класі передбачене вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових виразів, ірраціональних виразів, показника з квадратним коренем;

Проведемо аналіз викладу теоретичного матеріалу та запропонованих вправ у альтернативних шкільних підручниках з математики старшої школи, які мають безпосереднє відношення до змістової лінії «Вирази».

За підручником [22, с. 47]:

Починаючи вивчення теми «Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня, його властивості», спочатку проводять аналогію між вже вивченим у 8 класі квадратним коренем, замінюючи квадрат на степінь n; область допустимих значень квадратного кореня – підкореневий вираз більше або дорівнює 0, натомість область допустимих значень степеневого виразу залежить від парності чи непарності показника степеня кореня. Увагу учні пропонують звернути на властивості кореня n-го степеня.

Вивчивши властивості кореня n-го степеня та навчившись застосовувати їх на практиці, учні переходять до тотожних перетворень виразів, що містять корінь n-го степеня, а саме вчаться вносити множник під знак кореня; виносити множник з під знака кореня, спрощувати вирази, скорочувати дроби, звільнятися від ірраціональності в знаменнику дробу та доводити тотожності, що містять корінь n-го степеня. Після вивчення теоретичного матеріалу по темі властивостей степеня з раціональним показником учні застосовують їх під час подання степеня з дробовим показником у вигляді кореня і навпаки, коли корінь записують у вигляді степеня з раціональним показником; оцінюють значення виразів, спрощують вирази використовуючи властивості степенів; наступною темою учні перетворюють вирази, що містять степінь з раціональним показником;

Тема «Тригонометричні функції» [22] включає вивчення наступних питань, які є теоретичною основою завдань на спрощення виразів, доведення тотожностей, тощо.

1. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

2. Формули додавання, виходячи з яких виводяться наступні формули:

а) формули зведення; б) формули подвійного, потрійного і половинного аргументів; в) формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток; г) формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток; д) формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму; е) вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу;

У підручнику [9] першою до вивчення пропонується тема «Показникова функція та її властивості». Учні за вказівками вчителя будують графік показникової функції, за графіком досліджують властивості, відбувається повторення властивостей степенів, що вивчаються в 7 класі, далі переходять до практичних завдань, що включають завдання на спрощення виразів, знаходження значень виразів. Після показникової функції переходять до вивчення логарифмічної функції, будують її графік та розглядають обмеження, що накладається на основу, підлогарифмічний вираз. Вивчаються властивості логарифмів та теореми.

У збірнику задач і контрольних робіт з алгебри і початків аналізу 10 класу [8] розміщені три варіанти тренувальних вправ, розроблена система контрольних робіт для самоперевірки та контролю знань вчителем. Завдання розміщені за темами та порівнево, починаючи від найнижчого рівня складності до найвищого, тому за даним збірником можна підібрати систему задач, яка буде доцільною у використанні на уроці будь-якого класу.

За аналогією до попереднього написані збірники для 11 класу [10], звідки учні можуть розв'язувати завдання різних типів по темі «Показникова та логарифмічна функції».

Використовуючи вище зазначений теоретичний матеріал розв'язують вправи на обчислення значень виразів.

Вивчення даних тем є невід'ємною частиною курсу алгебри і початків аналізу старшої школи. Тому існує досить багато начальних посібників та підручників в яких розглянуто відповідний матеріал. Варто відмітити роботи З.І. Слєпкань З.І. [31], [33], в яких в повній мірі висвітлюють матеріал з даної теми.

## 1.6. Класифікація задач, призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу алгебри і початків аналізу старшої школи

В курсі алгебри та початків аналізу старшої школи значною мірою набуває розвитку змістова лінія «Вирази». Під час вивчення алгебри та початків аналізу в старшій школі відбувається класифікація завдань за видами виразів: алгебраїчні, показникові, тригонометричні, логарифмічні, учні розглядають завдання на обчислення, оцінювання та порівняння значень тригонометричних, степеневих, показникових та логарифмічних виразів. Також певне місце займають тотожні перетворення тригонометричних, степеневих та логарифмічних виразів. Також можна здійснити класифікацію залежно від вимоги завдання: спростити вираз, обчислити значення виразу, довести тотожність.

Розглянемо класифікацію задач, які призначені для навчання змістової лінії «Вирази» в курсі алгебри та початків аналізу старшої школи.

Під час вивчення теми «Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня, його властивості» учні розв'язують наступні завдання на знаходження значень виразів:

*Приклад* 1: Знайдіть значень виразу: 1) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{8}$;

Використовуючи властивості кореня n-го степеня врахуємо, що кожну формулу, яка виражає ці властивості, можна застосувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання завдання 1 скористаємося формулою $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$, а для розв'язування завдання 2 – цією самою формулою, але записаною справа наліво, тобто $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (при $a > 0, b > 0$).

1) ) $\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27}\ \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$;

2) $\sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{8} = \sqrt[2]{2 \cdot 8} = \sqrt[2]{16} = 2$;

У 10 класі при вивченні тригонометричних виразів учні виконують завдання на спрощення, доведення тотожностей та знаходження значень виразів, що розглядаються в темах «Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента; формули додавання та наслідки з них; формули зведення) та відбувається використання відповідних формул даних тем. Учні розв'язують завдання на спрощення виразів, використовуючи співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента, спрощують вирази та знаходять їх значення, розв'язують приклади на обчислення за використанням формул додавання, а саме (косинус різниці і суми, синус суми і різниці, тангенс суми і різниці, формул пониження степеня), які більш детально будуть розглянуть в другому розділі. Ці завдання також відіграють важливу роль при перетвореннях різноманітних виразів. Частіше за все такі завдання ставлять перед собою мету засвоїти певний блок формул, щоб в подальшому використовувати їх в повній мірі.

Для прикладу візьмемо завдання на обчислення при перетворенні тригонометричних виразів на уроках алгебри і початків аналізу в 10-х класах.

*Приклад* 2: Обчислити:

1) $\sin^2 17° + \cos^2 17°$; 2) $\sin 15° \cos 15°$.

Розглядаючи дані вирази для першого учні зможуть використати основну тригонометричну тотожність

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Таким чином відповідь у першому одразу 1.

Стосовно іншого прикладу, то аналізуючи формули, які наведені в підручнику, учнів зможуть розгледіти формулу синуса подвійного кута. Таким чином це буде $\sin 30°$, а за таблицею значень це 0,5.

Другу групу задач становлять вирази, для яких поставлення задача спрощення виразів. Оскільки при вивченні показникових і логарифмічних виразів, тригонометричних виразів є певна низка закономірностей та правил, якими учні повинні керуватися на уроках, тому для того, щоб краще їх засвоїти необхідно на уроках алгебри і початків аналізу приділити належну увагу виразам на спрощення. Це можуть бути неважкі завдання на застосування формул, властивостей логарифмів та степенів з раціональним показником.

Наступною категорією задач у змістовій лінії виразів є тотожні перетворення різноманітних виразів у відповідності до виду виразу (тригонометричні, логарифмічні). Такі вирази супроводжуються використанням двох або більше формул та правил, таким чином учням поступово треба проводити аналіз, порівнювати одержані результати з формули і використовувати нові правила. Детальніше це питання буде розглянуто в другому розділі.

# РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНИХ ТА СПЕЦИФІЧНИХ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ВИРАЗИ» КУРСУ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ

## 2.1 Технологія реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення теоретичного матеріалу змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи.

Для більшості стандартних задач шкільного курсу можна сформулювати алгоритми їх розв'язання. Для розв'язування нестандартних задач необхідно оволодіти евристичними прийомами розумової діяльності [40, с.27 - 30].

Успіх евристичної діяльності школярів значною мірою визначається сформованістю таких загальних розумових дій, як аналіз (аналіз формування задачі), синтез (співставлення умов і вимог), аналіз через синтез (уміння переосмислити елементи задачі в плані різних понять), абстрагування, узагальнення, а також специфічних розумових дій: підведення під поняття, розгортання умов, встановлення суттєвих зв'язків.

До складу розумової діяльності з розв'язування будь-яких задач крім загальних розумових дій та специфічних розумових дій, характерних для розв'язування певних видів задач, входять і логіко-математичні дії та операції, за допомогою яких учні логічно перетворюють математичний матеріал.

При цьому учні виконують умовисновки індуктивного та дедуктивного характеру, за аналогією, за інтуїцією з наступним обґрунтуванням чи спростуванням. Першочергове завдання розвивального навчання – прямим чи непрямим шляхом формувати в процесі розв'язування задач уміння виконувати дії та прийоми розумової діяльності, що становлять механізм розв'язування задачі.

Давайте ще раз пригадаємо з загальної методики викладання математики, основні теоретичні положення, які допоможуть розв'зувати різноманітні вирази певних тем старшої школи.

Тема «Корінь n – го степеня та його властивості». Вводиться поняття кореня n – го степеня: коренем n – го степеня з числа a називають таке число b , n –й степінь якого дорівнює a. Якщо a = $b^n$ (n ϵ N, n ≠ 1), то b - корінь n – го степеня з числа a. Арифметичний корінь n-го степеня з числа a називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a. При a ≥ 0: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ – позначення арифметичного кореня.

Область допустимих значень залежить від показника степеня кореня, у випадку коли показник – число парне $\sqrt[2k]{a}$, то корінь існує тільки при a ≥ 0 (k ϵ N), коли показник кореня число непарне - $\sqrt[2k+1]{a}$, то корінь існує при буд-яких значеннях a.

*Властивості кореня* n *– го степеня:*

Для n = $2k+1$ - непарне число:

1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$;

2) $\sqrt[n]{a^n}$ = $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ = a;

Для n = $2k$ - парне число:

$\sqrt[n]{a^n}$ = $\sqrt[2k]{a^{2k}}$ = $|a|$;

Наслідок для n = $2k$:

При a ≥ 0 , b ≥ 0 a$\sqrt[n]{b}$ = $\sqrt[n]{a^n b}$ - внесення спільного множника з-під знака кореня;

Для довільних значень n і k (n ϵ N, n ≠ 1, k ϵ N ):

3) При a ≥ 0 $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ = $\sqrt[nk]{a}$;

4) При a ≥ 0 $(\sqrt[n]{a})^k$ = $\sqrt[n]{a^k}$;

5) При a ≥ 0 $\sqrt[n]{ab}$ = $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

Наслідок для n = $2k+1$:

При a ≥ 0 , b ≥ 0 $\sqrt[n]{a^n b}$ = a$\sqrt[n]{b}$ – винесення спільного множника з-під знака кореня;

*Приклад 3*: $\sqrt[6]{3^4 5^2} \cdot \sqrt[6]{3^8 5^4} = \sqrt[6]{3^4 5^2 \cdot 3^8 5^4} = \sqrt[6]{3^{12} 5^6} = \sqrt[6]{(3^2)^6 5^6} = 9 \cdot 5 = 45$;

При a ≥ 0, b > 0: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

7) При a ≥ 0 $\sqrt[n]{a^m}$ = $\sqrt[nk]{a^{mk}}$ – основна властивість кореня. Значення кореня зі степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник

степеня підкореневого виразу помножити(поділити) на одне й те саме натуральне число.

8) При a ≥ 0 , b ≥ 0, якщо a > b, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; [22]

Застосування властивостей степеня з раціональним показником:

Спочатку доцільним є пригадати означення та властивості степеня з натуральним та цілим показником, які учні вивчали в 7 класі на уроках алгебри, а саме:

1) $a^x a^y = a^{x+y}$;

2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;

3) $(a^x)^{\ y} = a^{xy}$;

4) $(ab)^x = a^x b^x$;

5) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) $)(\frac{a}{b})^{-x} = (\frac{b}{a})^x$

Формули степеня з натуральним і цілим показником та степінь з дробовим показником:

$a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$ $(a\ \neq 0,$ y ϵ N) ; $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$ (a $\geq\ 0)$ ;

$a^{\frac{y}{x}} = \sqrt[x]{a^y}$( a > 0, x ϵ N, (n ≥ 2), m ϵ Z )

*Приклад 4*: Обчислити значення виразу : $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;

1) Перш за все, проаналізуємо з учнями вираз, заданий в умові завдання.

Бачимо, що це степінь числа 3 з дійсним показником. Отже, можемо застосовувати відомі учням властивості.

В курсі алгебри і початків аналізу відбувається узагальнення вищезазначених властивостей та вводиться степінь з раціональним показником [22, с. 60]. Степенем числа a > 0 з раціональним показником r = $\frac{m}{n}$, де $m$ – ціле число, а $n$ – натуральне число ($n > 1$) називається число $\sqrt[n]{a^m}$. Щодо властивостей, то слід зазначити, що вони аналогічні і є правильними тільки для додатних основ [22, с. 60].

Наступна тема, котра потребує значної уваги учнів в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи: «Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента, формули додавання та наслідки з них, формули зведення», під час розв'язання тригонометричних виразів, доведення тотожностей.

**Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента:** Координати будь-якої точки *P(x;y)* одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки x = cos α, y = sin α, де α - кут повороту, у результаті якого з точки $P_0$ (1; 0) було отримано точку $P$, то $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (1).

Звернемо увагу на те, що точку обрано довільно. Тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю.**

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом. Припустивши, що cos α ≠ 0, поділимо обидві частини рівності (1) на $cos^2\alpha$:

$\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$, після чого поділимо почленно ліву частину і отримаємо: $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$. Ця тотожність є правильною для всіх α.

Припустивши, що sin α ≠ 0, поділимо обидві частини рівності (1) на $sin^2\alpha$, отримаємо $\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha,}$ звідси $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha,}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою означень цих функцій. Отримаємо: $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$.

*Приклад 5:* Дано, що косинус кута дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть синус цього кута, якщо кут знаходиться в першій координатній чверті.

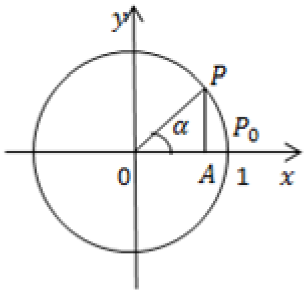



Рис. 2.1

На уроках алгебри в 10 класі такі завдання розв'язуються за допомогою використання основної тригонометричної тотожності. Але даний приклад можна розв'язати і з геометричної точки зору, використовуючи знання про прямокутний трикутник.

Виконаємо поворот точки $P_0$ на кут $\alpha$, одержимо точку $P$ (рис.2.1). Розглянемо трикутник $APO$. В ньому відомо косинус кута $\alpha$. З геометрії учням відомо, що косинус кута – це відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Тому $\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{4}{5}$. Отже, $OA = 4$, $OP = 5$. Тоді $APO$ - єгипетський і $AP = 3$. Учні знають, що синус – це відношення протилежного катета до гіпотенузи, тому $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Відповідь. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

**Формули додавання, зведення, подвійного, потрійного і половинного аргументів**

Формулами додавання називають формули які виражають cos $(\alpha\pm\beta)$,sin $(\alpha\pm\beta)$ , tg $(\alpha\pm\beta)$ через тригонометричні функції кутів $\alpha$ і $\beta$.

**Косинус різниці двох кутів дорівнює сумі добутків косинусів та синусів цих кутів** $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Як наслідок, отримуємо формулу косинуса суми кутів:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$.

З урахуванням парності косинуса і непарності синуса, одержимо:

**Косинус суми двох кутів дорівнює різниці добутків косинусів та синусів цих кутів.** $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Виведемо тепер формули синуса суми двох кутів. Скориставшись формулами зведення і косинуса різниці двох кутів, матимемо:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

**Синус суми двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого плюс добуток косинуса першого кута на синус другого**.

Для синуса різниці маємо:

*sin* $(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

Таким чином, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

**Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого мінус добуток косинуса першого кута на синус другого.**

Використовуючи одержані формули синуса і косинуса суми двох аргументів можна вивести формули додавання для тангенса:

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$, $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1\mp tg\alpha\, tg\beta}$,

**Формули подвійного аргументу** Формули які виражають тригонометричні функції аргументу 2α, називають формулами подвійного аргументу. У формулах $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ і $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, покладемо β = α.

Отримаємо:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

Ці формули відповідно називаються формулами косинуса, синуса, тангенса подвійного аргументу. Оскільки $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha, = 1 - \cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ отримаємо ще дві формули:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Інколи ці формули зручно використовувати і такому вигляді:

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, або в такому вигляді

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

Дві останні формули називаються формулами пониження степеня.

**Формули потрійного аргументу**

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$tg\, 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$; $ctg\, 3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha}$;

**Методика виведення і вивчення формул для перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток та добутку в суму**

У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють перетворити *суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.*

Запишемо формули додавання для синуса : $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ *(1)*,

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ *(2)*.

Додаючи почленно ліві і праві частини цих рівностей маємо:

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ *(3)*. Введемо позначення: $x+y = \alpha$, $x-y = \beta$.

*Звідси* $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень. Тоді рівність (3) можна переписати **$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.**

Цю тотожність називають **формулою суми синусів.**

Віднімемо почленно (1), (2 ) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$, якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо рівність, яку називають **формулою різниці синусів: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.**

Аналогічно записавши формули додавання для косинуса, а потім почленно додаючи і віднімаючи їх отримаємо **формули суми і різниці косинусів:** **$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,**

**$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.**

В останньому пункті курсової роботи ми розглянемо формули перетворення *добутку тригонометричних функцій у суму:*

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ ; $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$

Перепишемо їх так(**формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму) $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+-y))$ ;**

**$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+-y))$;**

**$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+-y))$;**

Вважаємо, що до специфічних прийомів можна також віднести використання геометричного підходу в алгебрі чи навпаки, абстрактно-теоретичні міркування при розв’язанні геометричних задач.

Геометричний підхід використовується для виведення формул зведення:

$\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$ $\qquad\qquad\qquad$ $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = \sin t$

Для цього використовують одиничне коло (рис. 2.2) та ознаки рівності трикутників, відомі учням з курсу планіметрії.

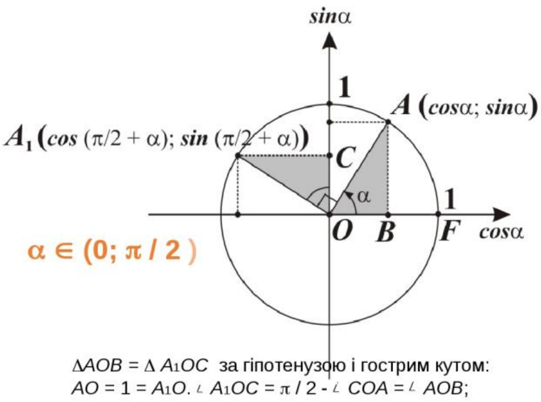



Рисунок 2.2

Шкільна практика показує, що для більш якісного та раціонального запам'ятовування тригонометричних формул доцільні спеціальні прийоми запам'ятовування: логічні та образні. Їх використання дає можливість підвищити швидкість, точність та міцність запам'ятовування, врахувати індивідуальні відмінності мнемонічної діяльності учнів.

Логічні прийоми ґрунтуються на здатності учня логічно міркувати (прийом виведення формули, акцентування уваги на незалежності основних тригонометричних формул, ідентифікація тригонометричної формули та інші). Образні прийоми передбачають звертання до візуальної та слухової культури, наочно-образного мислення учня (прийом «озвучування формули», застосування мнемонічних правил, завершення сполуки «зміст-форма»).

Наприклад, учитель для кращого засвоєння тригонометричних формул зведення використовує одиничне коло, на якому пояснює правило, що застосовується при використання формул зведення.

При вивченні формул додавання для тригонометричних функцій та наслідків з них, учитель спирається на формули, які вже відомі учням (формули зведення).

Сутність процесу підведення під поняття складається в тому, що ми перевіряємо наявність у предмета певної системи властивостей (ознак) й на їх основі робимо висновок про належність (або неналежність) об"акта даному поняттю.

При використанні цього специфічного методу ми разом з учнями вибираємо зручне означення або вже відому учням необхідну і достатню умову.

Наприклад, якщо завдання знайти відповідь рівняння $10^x = 100$. Це дуже легко, потрібно підібрати таку степінь, підносячи до якої число десять, ми отримаємо 100. Це, звичайно ж, друга степінь, бо $10^2 = 100$. Розглядаючи обернену задачу, отримаємо $\log_{10} 100 = 2$.

При розв’язуванні логарифмів всі дії практично сходяться до того, щоб знайти ту степінь, в яку необхідно ввести основу логарифма, щоб отримати задане число.

Але навіть розв’язуючі такі найпростіші приклади, деяким учням буває складно. Для знаходження значень логарифмічних виразів, учитель може запропонувати наступну таблицю:

| Десятки | Одиниці | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

Вводиться поняття логарифма: логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого треба піднести число a, щоб отримати число b. Логарифм числа b з основою a позначають $log_a b$ [9,с. 21].

Перед розв'язування завдань, що містять логарифми, доцільно повторити властивості логарифмічних виразів. А саме:

1) З означення логарифма випливає, що при a > 0, a ≠ 1 і b > 0 виконується рівність: $a^{log_a b}$ = b – основна логарифмічна тотожність;

2) Також з означення логарифма випливає, що якщо a > 0, a ≠ 1:

$log_a 1 = 0$ $\qquad$ $log_a a = 1$;

3) Теорема (логарифм добутку): Якщо $x > 0$, $y > 0$, a > 0, a ≠ 1, то виконується рівність: $log_a\, xy = log_a\, x + log_a\, y$;

4) Теорема (логарифм частки): Якщо $x > 0$, $y > 0$, a > 0, a ≠ 1, то виконується рівність: $log_a \frac{x}{y} = log_a\, x - log_a\, y$;

Коротко формулюють: логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.

5) Теорема ( логарифм степеня ): $x > 0$, a > 0, a ≠ 1, то для будь-якого β ϵ R виконується рівність: $log_a x^{\beta} = \beta log_a\, x$;

6) Теорема ( перехід від однієї основи логарифма до іншої): Якщо a > 0, a ≠ 1, b > 0, c > 0, c ≠ 1, то виконується рівність: $log_a\, b = \frac{log_c\, b}{log_c\, a}$;

Наслідок 1: Якщо a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 1, то виконується рівність: $log_a\, b = \frac{1}{log_b\, a}$;

Наслідок 2: Якщо a > 0, a ≠ 1, b > 0, та для будь-якого β ϵ R, то виконується рівність: $log_{a^{\beta}}\, b = \frac{1}{\beta} log_a\, b$;

## 2.2 Формування загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час спрощення виразів.

Перед тим, як розглядати завдання на обчислення виразів, доцільно разом з учнями пригадати властивості степенів, що вивчають в сьомому класі а потім повторюють в 9 (пункт 2.1).

Багато властивостей степеня з раціональним показником зберігаються і для властивостей степеню з дійсним показником:

Розглянемо методику спрощення виразів, що містять степінь з раціональним показником.

*Приклад 6:* Спростіть вираз: $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

Оскільки задані приклади вже містять вирази $a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}$, то a $\geq 0$, b $\geq 0$,. Тоді в завданні невід'ємні числа a і b можна подати як квадрати: a = $(a^{\frac{1}{2}})^2$ і b = $(b^{\frac{1}{2}})^2$ використати формулу різниці квадратів $x^2$ - $y^2$ = (x-y)(x+y)

Розв'язання: $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$

Наведемо приклад.

*Приклад 7:* Спростіть вираз: $2^{\log_2 5}$.

Для спрощення цього виразу необхідно знати основну логарифмічну тотожність:

$a^{\log_a b} = b.$

Тому відповідь буде 5.

Наступну групу виразів змістової лінії становлять завдання на обчислення кореня, арифметичного кореня n-го степеня, його властивостей.

*Приклад 8:* Знайдіть значення виразу:

$\sqrt[4]{625}$ = 5, оскільки $5^4$ = 625;

$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ = - $\frac{1}{3}$, оскільки $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$;

$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$, оскільки $(\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243}$;

Дані приклади розв'язуються за допомогою використання означення кореня n-го степеня. Запис $\sqrt[n]{a}$ = b означає. що $b^n$ = a

*Приклад 9:* Спростіть вираз:

$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$

Перед розв’язуванням цього прикладу, вважаємо доцільним повторити з учнями формули скороченого множення. Аналізуючи вирази в чисельнику та знаменнику, учні мають побачити, що в чисельнику формули скороченого множення відразу використовувати не вийде, а у знаменнику – це недоречно робити. Перший крок – в чисельнику винести спільний множник за дужки, а потім застосувати формулу різниці квадратів двох виразів у зворотному вигляду (тобто потрібно навпаки «згорнути» цю формулу)

Розв’язання:

Маємо : $\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{\sqrt{7}}-1)\, a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{(\,a^{2\sqrt{7}}-1)\, a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$ = 1.

Серед задач на тотожні перетворення тригонометричних виразів зустрічаються задачі, в яких вимагається:

1) обчислити значення виразу;

2) спростити вираз;

3) довести тотожність, зокрема умовну;

4) використовуючи відоме значення одного виразу, знати значення іншого виразу;

5) виразити один тригонометричний вираз через інший;

6) знайти найбільше і найменше значення виразу;

7) обчислити суму;

*Приклад 10:* Спростіть вираз : $sin^2\alpha\, cos^2\alpha\, (tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2)$

Вивчивши усі тригонометричні формули, учні оцінюють приклад з точки зору порівняння якихось складових виразу з хочу б однією тригонометричною формулою і помічають, що при розкладані двійки на дві окремі одиниці зможуть застосувати формули 1 + $tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ *та* $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$.

Розв'язання: $sin^2\alpha\, cos^2\alpha\,(tg^2\alpha +\ ctg^2\alpha\ + 2) = sin^2\alpha\, cos^2\alpha\,(tg^2\alpha + 1 + ctg^2\alpha + 1) =\ sin^2\alpha\, cos^2\alpha\,(\frac{1}{cos^2\alpha}+\frac{1}{sin^2\alpha}) =\ \ sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

Представимо приклади задач, які є актуальними при роботі з учнями старшої школи. [40, с.28]

*Приклад 11:* Знайти $sin^3$ α + $cos^3$α і $sin^4$ α + $cos^4$α, якщо sin $\alpha$ + cos α = $\frac{1}{2}$.

У цій задачі вимагається за відомим значенням одного виразу знайти значення інших виразів.

Для її розв'язання слід використати загальні розумові дії, а саме аналіз (аналіз формування задачі), синтез (співставлення умов і вимог).

Розв'язання . 1) Оскільки слід знайти суму $sin^3$ α + $cos^3$α, яка дорівнює

(sin $\alpha$ + cos α)($sin^2$ α - sin $\alpha$ cos α + $cos^2$α) = (sin $\alpha$ + cos α)(1- sin $\alpha$ cos α) = $\frac{1}{2}$ (1- sin $\alpha$ cos α),то залишається визначити,чому дорівнює добуток sin$\alpha$cos α.

Проаналізувавши рівність sin $\alpha$ + cos α = $\frac{1}{2}$, учні роблять висновок, що після піднесення її до квадрату і виконання відповідних тотожних перетворень , можна визначити, що загальний добуток - $\frac{3}{8}$.

Скориставшись одержаним результатом обчислюємо:

$sin^3$ α + $cos^3$α = $\frac{1}{2}$ (1+ $\frac{3}{8}$) = $\frac{11}{16}$.

2) Для знаходження суми $sin^4$ α + $cos^4$α слід проаналізувати, яку відому тригонометричну тотожність слід піднести до квадрату, щоб з'явились $sin^4$ α і $cos^4$α.

Нескладно здогадатись, що такою тотожність є основна тригонометрична тотожність. Використовуючи її одержимо:

1= ($sin^2$ α + $cos^2$α)$^2$ = $sin^4$ α +2+ $cos^4$α .

Звідси $sin^4$ α + $cos^4$α = 1 - 2(sin $\alpha$ cos α)$^2$. Скориставшись знайденим у першій задачі значенням добутку, обчислюють, що

$sin^4$ α + $cos^4$α = 1 - 2$\frac{9}{64}$ = $\frac{23}{32}$. Відповідь : 1) $\frac{11}{16}$ ; 2) $\frac{23}{32}$;

*Приклад 12:*[40, с.29] Обчислити без таблиць добуток Р - $cos\frac{\pi}{9}\ cos\frac{2\pi}{9}\ cos\frac{4\pi}{9}$.

Розв'язання. Виконуючи аналіз формування задачі, абстрагуючись від конкретних числових аргументів $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$, учні помічають, що вони поступово збільшуються удвічі.

Тому, виникає думка, про використання формули подвійного аргументу. Виявляється, що такою формулою є формула синуса подвійного кута.

Для обчислення значення виразу слід скористатись специфічною розумовою дією підведення під поняття, а саме ця формула повинна з'явитись у виразі. Тому помноживши і розділивши Р на $8\,sin\frac{\pi}{9}$ і застосувавши тричі формулу синуса подвійного кута, учні одержать Р·8 $sin\frac{\pi}{9}$ = 2 $sin\frac{\pi}{9}\ cos\frac{\pi}{9}$ 4 $cos\frac{2\pi}{9}$ $cos\frac{4\pi}{9}$ = 2 $sin\frac{2\pi}{9}\ cos\frac{2\pi}{9}$ 2 $cos\frac{4\pi}{9}$ = 2 $sin\frac{4\pi}{9}\ cos\frac{4\pi}{9}$ = $sin\frac{8\pi}{9}$.

Оскільки, $sin\frac{8\pi}{9}$ = $sin$ (π - $\frac{\pi}{9}$) = $sin\frac{\pi}{9}$, то Р·8 $sin\frac{\pi}{9}$ = $sin\frac{\pi}{9}$ звідки Р = $\frac{1}{8}$

Відповідь. $\frac{1}{8}$.

*Приклад 13:* Спростіть вираз: $\frac{cos\,\beta}{1-\sin\beta} + \frac{1-\sin\beta}{cos\,\beta}$

Даний приклад запропонований для розгляду учням з метою аналізу виразів, котрі розташовані в чисельниках та знаменниках даних дробів. Помічаємо, що поки що жодної тригонометричної формули використати не можемо. Єдине, що може якось спростити наш вираз є зведення до спільного знаменника обох дробів, далі аналогічно до алгебраїчних виразі, котрі вивчали у 8 класі учні шукають допоміжні множники та спрощують значення чисельника, виносять спільний множник двійку, що утворилася та скорочують дріб, отримують максимально спрощений результат:

$$\frac{cos\,\beta}{1-\sin\beta} + \frac{1-\sin\beta}{cos\,\beta} = \frac{cos\,\beta cos\,\beta+(1-\sin\beta)(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)cos\,\beta} = \frac{cos^2\beta+1-2\sin\beta+sin^2\beta}{(1-\sin\beta)cos\,\beta} = \frac{1+1-2\sin\beta}{(1-\sin\beta)cos\,\beta} = \frac{2-2\sin\beta}{(1-\sin\beta)cos\,\beta} = \frac{2(1-\sin\beta)}{(1-\sin\beta)cos\,\beta} = \frac{2}{cos\,\beta}.$$

*Приклад 14:* Спростіть вираз: $cos^4\alpha + \ sin^2\alpha\, cos^2\alpha - cos^2\alpha - 1$

Аналізуючи приклад учні помічають, що з перших двох доданків можна винести спільний множник за дужки, в результаті в дужках сума двох доданків складе основну тригонометричну тотожність, тобто одиницю і в даному виразі залишиться лише звести подібні доданки.

Розв'язання: $cos^4\alpha + \ sin^2\alpha\, cos^2\alpha - cos^2\alpha - 1 = cos^2\alpha(sin^2\alpha + cos^2\alpha) - cos^2\alpha - 1 = cos^2\alpha \cdot 1 - cos^2\alpha - 1 = -1$.

*Приклад 15:* Спростіть вираз: $\frac{1-cos^2\alpha}{tg^2\alpha}$

Для того щоб перетворити чисельник даного виразу, з основної тригонометричної тотожності знайдемо чому дорівнює $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$. Потім використаємо означення тангенса: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і спрощуємо одержаний дріб.

Розв'язання: $\frac{1-cos^2\alpha}{tg^2\alpha} = \frac{sin^2\alpha}{\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = cos^2\alpha$;

Розглянемо приклад на спрощення виразів під час вивчення теми логарифмічної функції.

*Приклад 16:* Спростіть вираз: $log_3 2 \cdot log_4 3 \cdot log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9$

Використовуючи формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої маємо: $log_3 2 \cdot log_4 3 \cdot log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \frac{\lg 2}{\lg 10} = \lg 2$;

Під час вивчення теми «Показникова функція та її властивості» до розв'язування учням пропонуються наступні завдання:

*Приклад 17:* Спростіть вираз: $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$

Використовуючи формулу скороченого множення – різниця квадратів, учні проводять аналогію і помічають, що перші два множники можна згорнути у формулу, другий доданок можемо розгорнути за формулою скороченого множення, а саме квадрат суми двох чисел. Наступним кроком є піднесення доданків до степеня та зведення подібних, процес взаємознищення та записання результатів спрощення.

Розв’язання: ($a^{\sqrt{5}}$ + 2)( $a^{\sqrt{5}}$ - 2) - $(a^{\sqrt{5}} + 3)^2$ = $(a^{\sqrt{5}})^2$ – 4 – ( $a^{\sqrt{5}})^2$ - 6$a^{\sqrt{5}}$ – 9= - 6$a^{\sqrt{5}}$ – 13.

*Приклад 18:* Спростіть вираз: 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}}$ + 1

За аналогію до попереднього прикладу використовуючи формули скороченого множення учні мають змогу перетворити чисельник, наступним кроком є скорочення , зведення до спільного знаменника та записування результату спрощення виразу.

Розв’язання: $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{3}})^2 - (b^{\sqrt{2}})^2}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{2}})(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{2}})}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2}$ + 1 = $\frac{a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{2}} + a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}} = \frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}}$;

*Приклад 19:* Спростіть вираз: $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$

В чисельнику і знаменнику даного дробу мі можемо побачити спільний множник, що винесемо за дужки, в результаті в дужках отримаємо однакові значення, які скоротимо, а далі застосуємо властивості степенів і віднімемо їх, так як основа одна й та сама.

Розв’язання: $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}} = \frac{a^{\sqrt{7}}(a^{\sqrt{7}} - 1)}{a^{3\sqrt{7}}(a^{\sqrt{7}} - 1)} = \frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$;

### 2.3 Формування загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час розв'язування задач на обчислення значень виразів.

Тема «Вирази» є актуальною темою на уроках математики не лише в основній школі, а і у старшій школі. Розглянемо приклади на обчислення значень виразів, що зустрічаємо у старшій школі під час вивчення вище зазначених тем.

*Приклад 20:* Обчисліть значення виразу: $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$

Абстрагуючись, учні в діленому помічають показник степеня, що містить повний квадрат. Наступним кроком є проведення аналогії між властивостями степенів та даним прикладом. Діти пригадують, що при діленні степенів з однаковими основами, показники віднімаються, така практична дія дає змогу звести подібні додатки в показнику степеня та отримаємо відповідь.

Розв'язання:

$3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}} = 3^3 = 27;$

*Приклад 21:* Обчисліть значення виразу: $\left(3\sqrt[3]{7}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

За аналогією до попереднього прикладу, учні застосовують властивість степеня – при піднесенні степеня до степеня, показники перемножуємо, і залишається лише піднести добуток до третього степеня, що робиться почленно.

Розв'язання: $(3\sqrt[3]{7}^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = (3\sqrt[3]{7})^{\,3} = 189;$

*Приклад 22:* Обчисліть значення виразу : $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$

Під коренем третього степеня множаться числа з різними основами на показниками степенів. Учні помічають, що доцільно звести обидва множники до однієї основи, що є можливим та покращить хід наступних дій при обчисленні виразу. Провівши певні алгебраїчні перетворення можемо винести спільник множник з під знака кореня, отримаємо:

Розв'язання: $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot (6^2)^{-\sqrt{5}}} =$ $\sqrt[3]{6^6} = \sqrt[3]{(6^2)^3} = 6^2 = 36;$

*Приклад 23:* Обчисліть значення виразу : $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-\ 10}$

Порівнюючи загальних вигляд даного виразу з властивостями кореня n-го степеня, розуміємо, що можемо застосувати властивість №5 справа наліво:

Розв'язання:

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-\ 10} = \sqrt[3]{(6\sqrt{3})^2 - 100} = \sqrt[3]{108-100} = \sqrt[3]{8} = 2;$$

*Приклад 24:* Обчисліть значення виразу : cos 75$^{\circ}$

Аналізуючи даний приклад учні роблять висновок, що cos 75$^{\circ}$ значення не табличне і використовуючи підведення під поняття, не без допомоги вчителя їм спадає на думку , що число 75 дорівнює сумі двох чисел ( 45+30), замінивши, маємо формулу косинусу суми двох чисел, розгортаючи яку маємо табличні значення підставивши котрі значення виразу стає раціональним числом.

Розв'язання cos 75$^{\circ}$ = cos (45$^{\circ}$ + 30$^{\circ}$) = cos 45$^{\circ}$ cos 30$^{\circ}$ - sin 45$^{\circ}$ sin 30$^{\circ}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2};$

*Приклад 25:* Обчисліть значення виразу :

Дано: $sin\ \alpha + cos\ \alpha = b$. Знайдіть: 1) $sin\ \alpha\ \ cos\ \alpha;$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату, та пригадавши основну тригонометричну тотожність матимемо:

$sin^2\alpha + 2\, sin\ \alpha\ \ cos\ \alpha + \ cos^2\alpha = b^2;$

$sin\ \alpha\ \ cos\ \alpha = \frac{b^2-1}{2}.$

*Приклад 26*: Обчисліть значення виразів: 2 sin $\frac{3\pi}{8}$cos$\frac{3\pi}{8}$;

Розв’язання: Використовуючи формулу синуса подвійного аргументу:

2 sin $\frac{3\pi}{8}$cos$\frac{3\pi}{8}$ = $sin^2\frac{3\pi}{4}$

*Приклад 27*: Обчисліть значення виразів*:*

1) $10^{2+2lg7}$; 2) $9^{log_3 4-0.5}$; 3) $log_2 20$ + $log_2 12$ - $log_2 15$;

Розв’язання:

1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо: $10^{2+2lg7}$ = $10^2$ · $10^{2lg7}$ = 100 · $7^2$ = 4900.

2) Маємо: $9^{log_3 4-0.5}$ = $(3^2)^{log_3 4-0.5}$ = $(3^2)^{log_3 4}$: $(3^2)^{0.5}$ = $(3^{log_3 4})^2$:3 = 16:3 = $\frac{16}{3}$

3) Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримаємо: $log_2 20$ + $log_2 12$ - $log_2 15$ = $log_2(20 \cdot 12)$ - $log_2 15$ = $log_2\frac{20\cdot 12}{15}$ =$log_2 16$ = 4.

*4)* lg + lg 12,5 = lg 8·12,5 = lg100 = 10.

Використаємо теорему (логарифм добутку)

5) $log_3 162$ - $log_3 2$ = $log_3\frac{162}{2}$ = $log_3 81 = 4$.

Використаємо теорему (логарифм частки).

**2.4 Формування загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час доведення тотожностей.**

Розглянемо на практиці застосування розумових дій під час доведення тотожностей різних видів курсу алгебри і початків аналізу старшої школи, а саме тригонометричних: [25, с.53]

В класах профільного рівня варто запропонувати учням для доведення даної тотожності використати геометричну інтерпретацію.

Нехай $AD = 1$ (рис.2.3). З трикутника $ADK$, у якому $DK$ –висота: $AK = \cos\frac{\pi}{5}$, тоді $AB = 2\cos\frac{\pi}{5}$.

З трикутника $BDN$ ( $DN$ –висота):

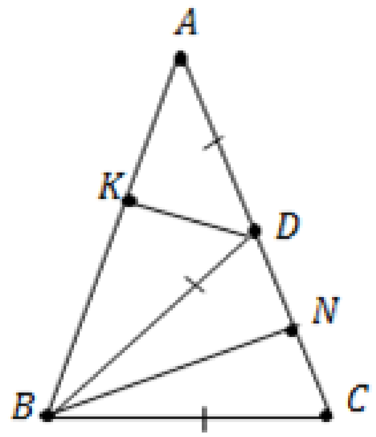



Рис. 2.3

$DN = \cos\frac{2\pi}{5}$ тоді $DC = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

Оскільки $AD = AC - CD$, то $AB - CD = AD$

Тому $2\cos\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{2\pi}{5} = 1.$.

Звідси і випливає необхідна тотожність $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

*Приклад 28*: Доведіть тотожність: $(1 + tg\alpha)^2 + (1 - tg\alpha)^2 = \frac{2}{cos^2\alpha}$.

Доведення :

1+2tgα + $tg^2\alpha$ + 1 - 2tgα + $tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} + \frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{2}{cos^2\alpha}$;

*Приклад 29*: Доведіть тотожність: $\frac{1 - sin^4\alpha - cos^4\alpha}{cos^4\alpha} = 2tg^2\alpha$ ;

Доведення: $\frac{1-sin^4\alpha - cos^4\alpha}{cos^4\alpha} = \frac{(1-sin^2\alpha)(1+sin^2\alpha)-cos^4\alpha}{cos^4\alpha} = \frac{cos^2\alpha(1+sin^2\alpha)- cos^4\alpha}{cos^4\alpha} =$
$\frac{cos^2\alpha(1+sin^2\alpha- cos^2\alpha)}{cos^4\alpha} = \frac{sin^2\alpha+sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{2sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = 2tg^2\alpha$;

*Приклад 30*: Доведіть тотожність: $\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha} = \frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$;

Проаналізувавши, учні розуміють, що доцільно буде перенести весь виразу вліво та прирівняти до нуля, далі звести до спільного знаменника, знайти допоміжні множники та максимально спростити рівняння, після чого можемо дійти правильної рівності та довести тотожність.

Доведення:

$\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$ - $\frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta} = \frac{(\sin\alpha-\cos\beta)(\sin\alpha+\cos\beta)-(\sin\beta-\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\alpha)}{(\sin\beta+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\beta)} =$
$\frac{sin^2\alpha - cos^2\beta - sin^2\beta + cos^2\alpha}{(\sin\beta+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\beta)} = \frac{1-1}{(\sin\beta+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\beta)} = 0$, отже, $\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha} = \frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$;

*Приклад 31:* Доведіть тотожність : $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2tg^2\alpha$.

Абстрагуючись від формул тригонометрії учні помічають, що в чисельнику дробу можемо відкрити формулу скороченого множення, а в знаменнику представити тангенс, як відношення відповідних тригонометричних функцій та звести знаменник до спільного знаменника, далі виконавши певні алгебраїчні перетворення отримаємо відповідь.

Доведення: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + cos^2\alpha - 1}{\frac{\cos\alpha}{sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\,sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - sin^2\alpha\cos\alpha}$
$= \frac{2\,sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1- sin^2\alpha)} = \frac{2\,sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = 2tg^2\alpha.$, отже $2tg^2\alpha. = 2tg^2\alpha$, тотожність доведено.

## 2.5 Конспект уроку на тему: «Арифметичний корінь n – го степеня, його властивості » курсу математики старшої школи».

***Тема уроку:*** Корінь *n*-го степеня. Арифметичний корінь *n*-го степеня і його властивості.

***Мета уроку:*** Повторити відомості про квадратний корінь. Сформувати поняття корінь *n*-го степеня і арифметичний корінь *n*-го степеня. Вивчити властивості коренів *n*-го степеня. Навчити самостійно знаходити потрібну інформацію, застосовувати її на практиці. Розвивати навички роботи з інформаційними ресурсами, навички роботи в групі, навички відповідних обчислень, логічне мислення , математичну мову. Розвивати життєві, предметні, інформаційні, комутативні, здоров'язбережувальні компетентності. Виховувати охайність на письмі, інтерес до предмету, самостійність, відповідальність, дисципліну.

**Повторення відомостей про квадратний корінь.**

Повторити відомості про квадратний корінь можна у вигляді фронтальної бесіди з використанням таблиці 13.

Питання до класу:

1. Що називається квадратним коренем з числа?

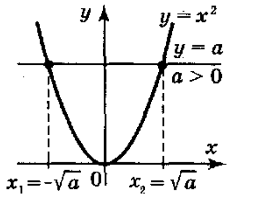
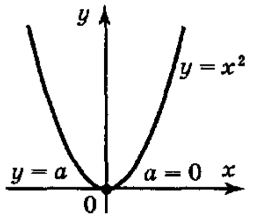
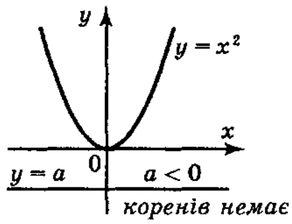
2. Чому дорівнює квадратний корінь з чисел:

а) 25; б)16; в) 100; г) 0; д) -10?

3. Чому квадратний корінь з від'ємного числа не існує?

4. Що називається арифметичним квадратним коренем з числа а?

| Квадратні корені | |
|---|---|
| ***Означення*** квадратного кореня | ***Означення*** арифметичного |
| число, квадрат якого дорівнює *a*. | $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **Корінь рівняння:**<br>$x^2 = a.$<br><br><br><br><br><br> | Тотожності<br>$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a > 0.$<br>$\sqrt{a^2} = \mid a \mid, a \in \mathrm{R}.$<br>Основні властивості<br>$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0.$<br>$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geq 0,\ b > 0.$<br>$\sqrt{a^{2k}} = a^k,\ a \geq 0, k \in \mathrm{N}.$ |

**Сприймання і усвідомлення нового матеріалу**

$\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p} \quad a \geq 0$

Коренем $n$-го степеня із дійсного числа $a$ називається число, $n$-й степінь якого дорівнює $a$.

*Наприклад:* корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

Згідно даного означення, корінь $n$-го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Число коренів цього рівняння залежить від $n$ і $a$.

Якщо $n$ — парне, тобто $n = 2k$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

Якщо $n$ — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

**Корінь *n*-го степеня**

***Означення*** кореня *n*-го

степеня з числа *a*:

число, *n* -й степінь якого дорівнює *a*.

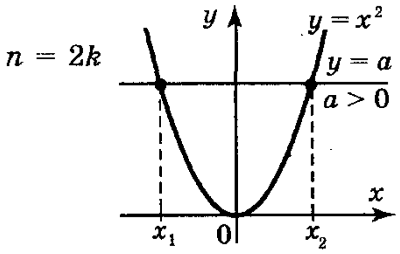
**Корінь рівняння:**

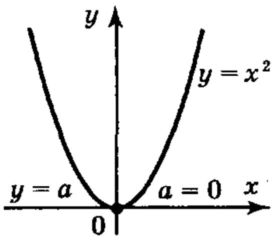
$x^2 = a$

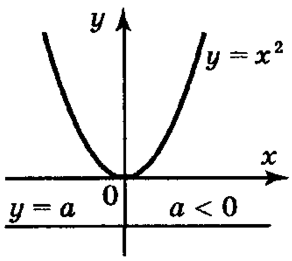
***Означення*** арифметичного кореня

*n*-го степеня з числа *a:*

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{a}=b\\ a\geq 0\\ n\in N, n\geq 2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 0\\ b^n=a\end{cases}$$




$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$,…, $\sqrt[2k+1]{a}$ - існують для $a \in R$.

Якщо $a < 0$, то

$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}$.

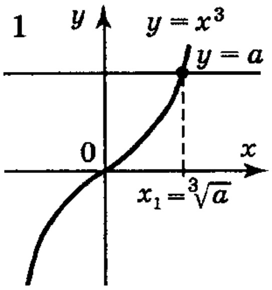
$\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, … , $\sqrt[2k]{a}$ - існують для $a \geq 0$.

Тотожності

Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ .

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $a \in$ R

$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $a \in$ R.

<table>
<tr>
<td></td>
<td rowspan="2">Основні властивості<br><br>$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \ge 0,\ b \ge 0.$<br><br>$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a \ge 0,\ b > 0.$<br><br>$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ ,<br><br>$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ,<br><br>$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ .</td>
</tr>
<tr>
<td>$n = 2k + 1$<br><br></td>
</tr>
</table>

Невід'ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем *n*-го степеня із числа *a*.

Арифметичним коренем *n*-го степеня із невід'ємного числа *a* називається таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.

Арифметичний корінь *n*-го степеня із числа *a* позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число *n* називають показником кореня, число *a* — підкореневим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають арифметичним квадратним коренем.

Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь *n*-го степеня, коротко говорять «корінь *n*-го степеня».

*Приклади.* Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{8}$;  б) $\sqrt[4]{81}$;  в) $\sqrt[5]{1}$;  г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має смисл, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Дійсно $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

*Приклад.* Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$;  б) $\sqrt[5]{-32}$;  в) $\sqrt[3]{-27}$.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in$ R і може набувати будь-яких значень.

Ми згадали властивості квадратного кореня. Аналогічні властивості мають і корені $n$-го степеня.

***Властивість 1.*** Для невід'ємних чисел $a$ і $b$ добуток коренів $n$-го степеня із чисел $a$ і $b$ дорівнює кореню $n$-го степеня із їх добутку: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

***Властивість 2.*** Для невід'ємного числа $a$ і додатного числа $b$ частка коренів $n$-го степеня із чисел $a$ і $b$. дорівнює кореню $n$-го степеня із їх частки: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

***Властивість 3.*** Будь-який цілий степінь $k$ кореня $n$-го степеня із невід'ємного числа $a$ дорівнює кореню $n$-го степеня із степеня $k$ числа $a$: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

***Властивість 4.*** Щоб добути корінь із кореня із невід'ємного числа можна перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

***Властивість 5.*** Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне і те саме натуральне число: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Властивості 1, 2 доводяться аналогічно тому, як це зроблено для квадратних коренів. Доведемо властивості 3—5:

3) Так як $a \geq 0$, то ліва і права частини формули невід'ємні. Тому для доведення цієї рівності досить впевнитися в тому, що $n$ - ий степінь лівої частини дорівнює $a^k$. Згідно з властивостями степенів з цілим показником маємо:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$$

4) При $a > 0$ ліва і права частини невід'ємні. Тоді

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$ Отже, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

5) Згідно з означенням кореня $\sqrt[np]{a^{mp}}$ — це таке невід'ємне число, $n$-й степінь якого дорівнює $a^{mp}$, тобто досить довести $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = a^{mp}$.

Маємо $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = \left(a^m\right)^p = a^{mp}$.

1. Знайдіть значення виразів:

а) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0081}$; в) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; д) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

*Відповідь:* а) 1,5; б) 1,2; в) 0,5; г) 2,5; д) $\frac{3}{2}$.

2. Обчисліть: а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; в) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

*Відповідь:* а) 10; б) 6; в) 3; г) 2.

3. Знайдіть корінь із степеня а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}\cdot 2^{15}}$; г) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot 4^{30}}$.

*Відповідь:* а) 125; б) 0,09; в) 0,72; г) 16.

4. Спростіть вирази:

а) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{25}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

*Відповідь:* а) $\sqrt[24]{25} = \sqrt[12]{5}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[6]{5}$.

**Підсумок проведення уроку.**

**Домашнє завдання.** [8] №4,4; №4,6; №4,12; №5,33

## 2.6 Експериментальна перевірка окремих результатів навчання.

Перебуваючи на посаді вчителя математики Чернігівського ЗЗСО № 13, я проводила урок в учнів 10 класу на тему: «Арифметичний корінь n – го степеня, його властивості» курсу математики старшої школи», де при поясненні матеріалу використовувала такі поняття, як аналіз, синтез, порівняння, аналогію, узагальнення та ін. Активно використовувала дидактичні та психологічні прийоми розвивального навчання, загальні та специфічні розумові дії. Для закріплення знань і вмінь учнів була запропонована самостійна робота, результати перевірки якої представлено нижче.

Самостійна робота

Завдання 1. Використовуючи означення кореня n-го степеня, знайдіть значення кореня:

1)$\sqrt[4]{0{,}0001}$;

Розв'язання: $\sqrt[4]{0{,}0001}$ = 0,1, так як $0{,}1^4$ = 0,0001;

2)$\sqrt[5]{-32}$;

Розв'язання: $\sqrt[5]{-32}$ = -2, так як $(-2)^5$ = -32;

Завдання 2. Обчисліть значення виразу:

1) $4\cdot(-\sqrt[8]{6})^8 - 0{,}8\sqrt[4]{10000} + (\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{270})^3$;

Розв'язання: $4\cdot(-\sqrt[8]{6})^8 - 0{,}8\sqrt[4]{10000} + (\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{270})^3 = 4\cdot 6 - 0{,}8\cdot 10 + \frac{1}{3}\cdot 270$ = 24 – 8 + 270 = 26;

2) $\sqrt[6]{0{,}000064} + \frac{2}{9}(-3\sqrt[4]{0{,}4})^4 + 6\sqrt[12]{0{,}3}^{12}$;

Розв'язання: $\sqrt[6]{0{,}000064} + \frac{2}{9}(-3\sqrt[4]{0{,}4})^4 + 6\sqrt[12]{0{,}3}^{12} = 0{,}2 + \frac{2}{9}\cdot 81\cdot 0{,}4 + 6\cdot 0{,}3 = 9{,}2$

Завдання 3. Використовуючи властивості кореня n-го степеня, знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 625}$;

Розв'язання : $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 625} = \sqrt[4]{0{,}0081} \cdot \sqrt[4]{625}$ = 0,3· 5 = 1,5;

2) $\sqrt[7]{0{,}3^7 \cdot 5^{14}}$;

Розв'язання: $\sqrt[7]{0{,}3^7 \cdot 5^{14}} = \sqrt[7]{0{,}3^7} \cdot \sqrt[7]{0{,}3^7 \cdot (5^{2)7}}$ = 0,3·25 = 7,5;

3) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$;

Розв'язування: $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{17}} = \sqrt[3]{(5-\sqrt{17})(5+\sqrt{17})} = \sqrt[3]{25-17} = \sqrt[3]{8} = 2$;

Завдання 4: Спростіть вираз:

1) $(\sqrt[3]{a}+2)(\sqrt[3]{a}-2) - (\sqrt[3]{a}+3)^2$

Абстрагуючись від поточної теми, учні зможуть помітити формули скороченого множення, які вивчають в курсі алгебри 7 класу та застосувавши їх виконають алгебраїчні перетворення отримають результат.

Розв'язання: $(\sqrt[3]{a}+2)(\sqrt[3]{a}-2) - (\sqrt[3]{a}+3)^2 = (\sqrt[3]{a})^2 - 4 - (\sqrt[3]{a})^2 - 6\sqrt[3]{a} - 9 =$

$= -6\sqrt[3]{a} - 9$.

Обробка результатів :

Під час написання самостійної роботи в класі були присутні 24 учні, серед яких з усіма завданнями впоралися 5 учнів, на середній бал написали самостійну 15 учнів, на низький - 4 учні.

За результатами дослідження можемо сказати, що 63 % учнів ласу мають середній рівень навчальної діяльності.

# ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена методиці реалізації ідей розвивального навчання під час вивчення змістової лінії «Вирази курсу математики старшої школи. Під час розв'язування виразів, обчислення їх значень, спрощення виразів і доведення тотожностей ми використали відомі з методики навчання поняття аналогії, аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення, конкретизації, індукції та дедукції, які приводять до більш легкого усвідомлення навчального матеріалу, використовуючи формули, властивості, які вивчали в середній школі, або мали до розгляду під час вивчення поточної теми.

Під час написання кваліфікаційної роботи нами були виконані наступні завдання:

1) ознайомлення з дидактичними та психологічними принципами розвивального навчання;
2) з'ясування основних параметрів освітнього процесу у технології розвивального навчання;
3) аналіз загальних та специфічних прийомів розумової діяльності, призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи;
4) класифікація задач, призначених для навчання змістової лінії «Вирази» курсу математики старшої школи;
5) створення методики використання загальних та специфічних прийомів розумової діяльності під час навчання змістової лінії «Вирази» курсу алгебри і початків аналізу старшої школи на різних рівнях.

У другому розділі я запропонувала до розгляду конспект уроку на тему: **«Арифметичний корінь n – го степеня, його властивості» курсу математики старшої школи**, на якому намагалася доцільно та змістовно передати учням теоретичний матеріал, запропонувати логічну схему викладу навчального матеріалу, задля більш чіткого та якісного сприймання теми. Конспект уроку складений таким чином, аби в учні була змога на засвоєння теоретичного матеріалу і лише після цього на практиці вони могли застосувати одержані знання. На уроці я використовувала психологічні та дидактичні принципи розвивального навчання.

Запропоновану методику викладання змістової лінії «Вирази» старшої школи робіть ефективною систематичне використання і робота з учнями стосовно перелічених вище розумових дій. Обґрунтоване використання прийомів розумової діяльності на уроках математики дасть змогу вчителю зацікавити учнів і запевнити їх в тому, що дана тема є актуальною та використовувати на кожному уроці.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Варущик Н.П. Діалогові форми навчання математики в класах математичного профілю / Н. П. Варущик. – 2004 . – 31 с.

2. Василенко О. О. Між алгеброю і гармонією. Х.: Основа, 2009 . 112 с. (Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України»») Вип. 1(73)

3. Занков Л. В. Дидактика и жизнь. – М., - 1968.- 36 с.

4. Калмикова З. І. Развивает ли продуктивное мышление система обучения В. Ф. Шаталова // Вопросы психологии.-1987.- №2. – с. 71-80

4. Кравченко З. І. Особливості формування математичних компетентностей старшокласників / З.І.Кравченко. -2004. С. 52-53

5. Крамаренко Т. Г. Впровадження навчальних проектів як один із факторів посилення мотивації учіння математики / Т. Г. Крамаренко - 2004 С. 53

6. Калмикова З. І. «Психологические принципи развивающего обучения» - М.:Знание, 1979.

7. Ліщинський О. Л. Поглиблення мотивації вивчення математики в профільних класах загальноосвітньої школи / О. Л. Ліщинський, О. В.Школьний. - 2004 С. 62-63

8. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: рівень стандарт / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2018.- 251с.

9. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: рівень стандарт / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2019.- 204 с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра: Збірник задач і контрольних робіт 11 кл. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір.– Х.:Гімназія,2017.- 94 с.

11. Мерзляк А.Г. Алгебра: Збірник задач і контрольних робіт 10 кл./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2015.- 141 с.

12. Мерзляк А. Г., Полонский В.Б., Якір М.С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов / Под ред.. Мерзляк А.Г., Полонский В. Б., Якир М. С. – М.: Илекса, 2007, - 320 с.
13.Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2010.- 416с.
14. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2011.- 431 с.
15. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія, 2011. – Ч.1.-256 с.
16. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. З поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 415 с.
17. Москаленко О. А. Систематизація та узагальнення знань і вмінь у системі підготовки учителів математики / О. А. Москаленко, О.В. Коваленко. - 2004 172с.
18. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням 53 математики) // https: mon.gov.ua / … programi / navchalni-programi- dlya – 10- 11…2018.
19. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // https: mon.gov.ua / … programi / navchalni-programi- dlya – 10-11…2018
20.Нелін Є. Формування універсальних навчальних дій у курсі алгебри і початків аналізу в умовах компетентнісного підходу до навчання / Є. Нелін, З. Кравченко // Математика в рідній школі.-2016. -№6.- С. 7-13.

21. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. -Х: Гімназія, 2011.- 448 с.

22. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: рівень стандарт / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. -Х:Видавництво «Ранок» ,2018.-327 с.

23. Енциклопедія педагогічних технологій та інновацій/ - 2-ге вид./ Навалова Н. П. Х.:Вид.група «Основа», 2012.-176 с.

24. Ортинський В.Л. Педагогіка вищої школи: навч. посіб. (для студ. ВНЗ) / В.Л. Ортинський. – К.: Центр учбової літератури, 2009.-472 с.

25. Рогова Н. В., Філон Л. Г. // Використання геометричного підходу до вивчення тригонометричного матеріалу у профільних класах (53 -55 с).

26. Савін О. І. Навчальний посібник, що забезпечує реалізацію діяльнісного підходу навчанні / О. І. Савін. - 2004 С. 188-189

27. Семенець С. П. Елементарна математика. Навчальна програма ( розроблена на основі концепцій розвивальної освіти). – Житомир: Видавництво ЖДУ ім. І. Франка, 2008 . - 88 с.

28. Семенець С. П. Семенець Л. М. Елементарна математика. Навчально-методичний посібник. Житомир: Видавництво ЖДУ ім. І. Франка, 2009 . -244 с.

29. Сердюк З. О. Використання аналогій під час вивчення математики / З. О. Сердюк. - 2004 Ж № 5 С. 86-87.

30. Слєпкань З. І. Шкіль М. І. Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. - .: Зодіак-ЕКО, 2002 . – 272 с.

31. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей пед. навч.закл. : Вища школа, 2006 . – 582 с.

32. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004 . – 240 с.

33. Слєпкань З.І., Горохольська А. В., Волянська О. Є. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. Навч. посібник для учнів 10-11 класів загальноосв. навч. закладів. - Підрічники і посібники, 2003 . – 240 с.
34. Слепань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: Навч. посібник. – К.: Вища школа 2005 . – 239 с.
35.З.І.Слєпкань Матеріали регіональної науково практичної:конференції;«Реалізації ідей розвивального навчання в школі та ВНЗ» , присвяч. 85-річчю від народження / упор. Соколенко Л. О. – Чернігів :Десна Поліграф, 2016.-10 с.
36. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002.-128 с.
37. Черкасов Р. С., Столяр А. А. Методика викладання математики в середній школі.: Харків, Видавництво «Основа» при Харківсьому державному університеті. 1992 . – 303 с.
38. Шаталов В.Ф. Педагогическая проза: Из опыта работы в школах Донецка.- М.: Педагогика, 1987.-160с.
39. Дидактика средней школы. Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М. Н. Скаткина. – М. Просвящение, 1982. – 319 с.
40.Шибирин О. І. Соколенко Л. О. // Реалізація іде розвивального навчання в школі та ВНЗ: Методика навчання учнів використання евристик під час перетворення тригонометричних виразів (27 – 30 с).