Національний університет «Чернігівський колегіум»
імені Т.Г. Шевченка
Природничо-математичний факультет
Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

Координатно-векторна складова систематичного курсу стереометрії профільної школи

Студента 6 курсу 61 групи
Галузі знань 0402
Фізико-математичної науки
Напряму підготовки 6.040201 Математика
Малая С.О.
Керівник: Філон Л.Г.
Національна шкала _______________
Кількість балів: _____ Оцінка ECTS ______

Члени комісії ____________ _____________________
____________ _____________________
____________ _____________________

Чернігів - 2019 рік

Роботу подано до розгляду «_____» ____________________ 20__ року.

Студент (ка) ____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _______________ ________________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент ____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри ____

протокол №____ від «_____» ____________________ 20__ року
Студент (ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії

Завідувач кафедри ____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Сучасні потреби суспільства вимагають переходу на нову, більш гнучку стратегію математичної освіти, ніж нинішня. Навчання математики на всіх ступенях повинно мати розвиваючий характер і прикладну спрямованість: розвиток інтелекту, алгоритмічної культури, математичної інтуїції, вміння і бажання вчитися і застосовувати свої знання для розв'язування практичних і прикладних задач.

В геометрії застосовуються різні методи розв'язування завдань - це синтетичний (чисто геометричний) метод, метод перетворень, векторний метод, метод координат і інші. Вони займають різне положення в школі. Основним методом уважається синтетичний, а з інших найбільш високе положення займає метод векторний тому, що він тісно пов'язаний з лінійною алгеброю, аналітичною та диференціальною геометрією, вивчення векторів тісно пов'язані міжпредметними зв'язками з вивченням курсу фізики.

Якщо в геометрії доводиться, як правило, шукати для кожної задачі особливий шлях розв'язання, то в алгебрі та аналітичної геометрії розв'язання проводяться за загальним для всіх задач планом, який пристосовується до будь-якої задачі. Перенесення в геометрію властиву алгебрі алгоритмізованість завдань становить головну цінність координатно-векторного методу. Значимість координатного, векторного та координатно-векторного методів полягає в тому, що їх застосування позбавляє від необхідності вдаватися до наочного уявлення складних просторових зображень, що спрощує розв'язання задач.

Проблемою координатно-векторного розв'язування задач займалася досить велика когорта вчених. Г.Б. Лудіна [17] вважає, що використовувати координатну площину вже слід з п'ятого класу вивчення математики, що «сприяє реалізації внутріпредметних зв'язків між алгеброю і геометрією, дозволяє зводити побудови до обчислень, що інколи більш коротким шляхом приводить до мети» [17, с. 43].

Однак С. Смогоржевский в своїй праці «Метод координат» застерігає нас, що розв'язання задач даним методом не завжди є простіше та гарніше тих, що може запропонувати елементарна геометрія [27].

Питанням використання векторного та координатного методу при розв'язанні задач займалися Кушнір І.А.[16], Скопец З.А., Готман Е.Г. [14], Крайзман М.Л.[15], Потоскуев Е. [24], Глаголева Е.Г., Нирилов А.А., Гельфанд І.М. [11].

У школі за допомогою векторного та координатного методів розв'язується багато різноманітних задач, які не мають іншого способу розв'язання.

Координатно-векторний метод розв'язання задач, порівняно з іншими методами, дуже часто дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв'язання багатьох геометричних задач і доведення теорем. Він зручний також тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак і властивостей фігур. Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії застосовується досить рідко, хоч і є досить зручним.

Сутність координатного методу, як і векторного, полягає в тому, що геометрична задача перекладається на мову алгебри, і її розв'язання зводиться до розв'язання рівнянь, нерівностей чи їх систем.

Деякі попередні результати були нами представлені на Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» 27 листопада 2019 року [18].

Об'єкт дослідження - процес навчання стереометрії учнів старшої профільної школи.

Предметом дослідження є методика вивчення координатного, векторного та координатно-векторного методів у курсі стереометрії старшої школи.

Мета роботи – описати методичні особливості вивчення й використання координатного, векторного та координатно-векторного методів в курсі стереометрії.

Гіпотеза: вивчення координатного та векторного методів у школі буде більш ефективно, якщо:

- у системному курсі планіметрії учні знайомляться зі структурою цих методів;

- використовується продумана система завдань для формування окремих компонентів методів.

Предмет, мета і гіпотеза дослідження визначають наступні завдання:

1. Проаналізувати понятійний апарат координатного методу.

2. Розглянути різні трактування поняття «вектор».

3. Описати види задач, які розв'язуються координатним та векторним методами.

4. Проаналізувати чинні програми щодо вивчення координатно-векторного методу.

5. Розглянути чинні різнорівневі підручники з математики для профільної школи на предмет дослідження.

6. Дослідити методичні особливості вивчення декартових координат у курсі стереометрії.

7. Дослідити методичні особливості вивчення векторів у курсі стереометрії.

8. Розробити систему задач.

9. Провести емпіричне дослідження щодо рівня володіння координатно-векторним методом.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається із вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи складає 68 сторінок. Робота містить 2 таблиці, 22 рисунки, 28 джерел використаної літератури. В кваліфікаційній роботі розглянуто 25 задач.

Розділ 1. Теоретичні засади дослідження

1.1.Понятійний апарат координатного методу. Основні співвідношення між координатами у просторі

Декартова прямокутна система координат в просторі визначається заданням трьох взаємно перпендикулярних осей із спільним масштабом, занумерованих в будь-якому порядку.

Точка перетину осей називається початком координат, а самі осі — координатними осями, причому перша з них називається віссю абсцис, друга — віссю ординат, третя — віссю аплікат. Початок координат позначають літерою О, вісь абсцис — Ox, вісь ординат — Oy, вісь аплікат — Oz.

Нехай М — довільна точка простору; M_x, M_y, M_z — основи перпендикулярів, що опущені з точки М на осі Ox, Oy, Oz, відповідно (рис. 1.1).

Координатами точки М в заданій системі називаються числа $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, де OM_x — величина напрямленого відрізка OM_x осі абсцис; OM_y — величина напрямленого відрізка OM_y осі ординат і OM_z — величина напрямленого відрізка OM_z осі аплікат. Число x називається першою координатою, або абсцисою точки М, y — другою координатою, або ординатою точки М, z —третьою координатою, або аплікатою точки М. Запис М(x, y, z) означає, що точка М має абсцису x, ординату y та аплікату z.

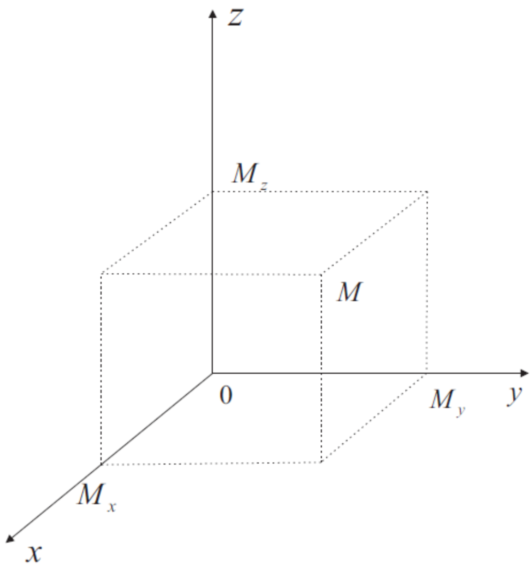


Рис. 1.1 – Координати точки М

Якщо задана система декартових прямокутних координат, то кожна точка простору в цій системі має одну цілком визначену впорядковану трійку координат *(x, y, z)*. Навпаки, які б не були три дійсні числа *x, y, z,* у просторі знайдеться одна цілком визначена точка, абсцисою якої є *x,* ординатою — *y,* аплікатою — *z*. Щоб побудувати точку *M* за її координатами *(x, y, z),* потрібно на осі абсцис відкласти від початку координат напрямлений відрізок OM_x, величина якого дорівнює *x,* на осі ординат — відрізок OM_y, величина якого дорівнює *y,* на осі аплікат — відрізок OM_z, величина якого дорівнює *z,* провести через M_x площину, що перпендикулярна до осі *Ox,* через M_y — площину, що перпендикулярна до осі *Oy,* через M_z — площину, що перпендикулярна до осі *Oz*, і знайти точку *M* як точку перетину проведених площин.

Площина, що проходить через прямі *Ox, Oy,* називається координатною площиною *xy*. Дві інші площини, що проходять через осі координат, називаються координатними площинами *xz* та *yz*. Три площини *xy, xz, yz* разом поділяють простір на вісім частин, які називаються координатними *октантами*.

Відстань між двома точками простору у декартовій системі координат. Нехай задано дві точки M_1 (x_1, y_1, z_1) та M_2 (x_2, y_2, z_2). Тоді відстань між цими точками M_1 та M_2 у просторі дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

Як відомо, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ буде мати координати (x_2–, x_1, y_2–y_1, z_2–z_1).

Отже відстань між двома точками визначається за формулою:

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \; .$$

Поділ відрізка в заданому відношенні в декартовій системі координат.

Нехай заданий відрізок M_1M_2, який з’єднує точки M_1 (x_1, y_1, z_1) та M_2 (x_2, y_2, z_2) потрібно поділити у відношенні $\lambda>0$. Це означає, що потрібно знайти координати точки M (x, y, z) відрізка M_1M_2, такої, що

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$$

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$. Відомо, що точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ. Це означає, що $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\cdot\overrightarrow{MM_2}$.

Оскільки $\overrightarrow{M_1M}$ = (x–x_1, y–y_1, z–z_1)= (x–x_1)$\cdot\vec{i}$ +(y–y_1)$\cdot\vec{j}$ +(z–z_1)$\cdot\vec{k}$

$\overrightarrow{MM_2}$ = (x_2–x, y_2–y, z_2–z) = (x_2–x)$\cdot\vec{i}$ +(y_2–y)$\cdot\vec{j}$ +(z_2–z)$\cdot\vec{k}$, то

(x–x_1)$\cdot\vec{i}$ +(y–y_1)$\cdot\vec{j}$ +(z–z_1)$\cdot\vec{k}$ = λ·(x_2–x)$\cdot\vec{i}$ + λ· (y_2–y)$\cdot\vec{j}$ + λ· (z_2–z)$\cdot\vec{k}$.

Отже,

(x–x_1) = λ·(x_2–x), (y–y_1) = λ· (y_2–y), (z–z_1) = λ· (z_2–z).

Тоді

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.1)$$

Формули (1.1) називаються формулами поділу відрізка у заданому відношенні.

Якщо λ = 1, то $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{MM_2}$, тобто точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то маємо:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (1.2)$$

Для знаходження кута між прямою і площиною використовують формулу:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{p}\right|},$$

де $\vec{n}$ - вектор нормалі до даної площини, $\vec{p}$ - напрямний вектор прямої.

Щоб використовувати метод координат до розв'язання задач, потрібно вміти задавати фігури рівняннями, зокрема, площини і прямі.

Розглянемо рівняння площини, що проходить через дану точку і перпендикулярна даному вектору.

Ненульовий вектор $\vec{n}$, перпендикулярний площині, називають її нормальним вектором. Якщо дано точку M_0 (x_0, y_0, z_0) і нормальний вектор $\vec{n}(A,B,C)$, то рівняння площини має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

рівняння площини, що проходить через три точки. Якщо задано три точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3 (x_3, y_3, z_3), які не лежать на одній прямій, то рівняння площини, яка проходить через ці точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Для опанування навички складати рівняння прямої, учні профільних класів мають усвідомити різні способи задання прямої у просторі.

Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як ГМТ, що лежать одночасно на двох поверхнях. Будь-яку пряму можна задати як перетин двох площин, і навпаки, будь-яка система двох незалежних рівнянь – рівняння деякої прямої

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Це рівняння прямої як перетин двох площин (площини не паралельні).

Нехай M_0 (x_0; y_0; z_0) – фіксована точка даної прямої, M (x; y; z) – довільна точка даної прямої, $\vec{s}=(k,l,m)$ – вектор паралельний прямій.

Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ (колінеарні), а це значить, що координати їх пропорційні,

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$$

тому отримуємо

$\dfrac{x-x_0}{k}=\dfrac{y-y_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{m}$ – <u>канонічні рівняння прямої.</u>

Це рівняння приймають як умову колінеарності векторів

Якщо рівняння прямої задано так:

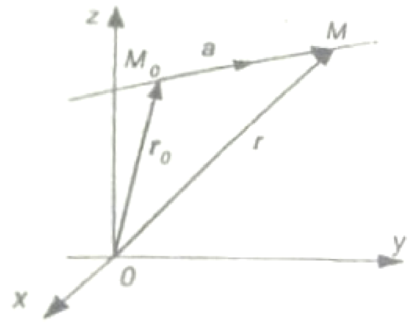
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=o \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=o \end{cases},$$

то канонічне рівняння прямої запишеться так:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Прирівнюючи кожний з дробів в <u>канонічному рівнянні прямої</u> до параметра t, запишемо параметричні рівняння прямої (тобто кожній точці прямої відповідає певне значення параметра і навпаки, кожному значенню параметра t відповідає певний радіус-вектор на прямій):

Параметричне рівняння прямої



Нехай задано прямокутну систему координат Oxyz. Пряму L задають точкою M_0 (x_0; y_0; z_0) і напрямний вектором $\vec{a}$ (k; l; m). M (x; y; z) – точка даної прямої. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0} = \vec{r_a} = t\vec{a}$, де t – будь-яке дійсне число

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ - векторне параметричне рівняння прямої.

Тоді в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}, t \in R$$

$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$ - рівняння прямої в параметричній формі.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай напрямний вектор прямої проходить через дві різні точки M_1 (x_1; y_1; z_1) та M_2 (x_2; y_2; z_2) і M (x; y; z) належить даній прямій, тоді

$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{MM_1} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$.

З колінеарності векторів отримаємо:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - рівняння прямої, що проходить через 2 задані точки

Нехай точка M_0 (x_0; y_0; z_0) точка через яку проходить пряма, а вектор $\vec{s}=(k,l,m)$ - напрямний вектор, напрямні коефіцієнти якого є проекціями на координатні осі, то

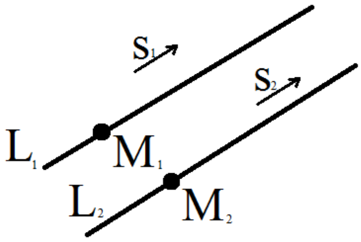
$\cos\alpha=\pm\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$; $\cos\beta=\pm\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$; $\cos\gamma=\pm\frac{m}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$ - напрямні косинуси прямої.

Напрямні коефіцієнти k, l, m можна розглядати як проекції на координатні осі вектора паралельного прямій (причому одночасно дорівнювати нулю вони не можуть).

Канонічне рівняння прямої з направляючими коефіцієнтами:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m};\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

Взаємне розташування прямих у просторі



Прямі L_1 і L_2 називають паралельними, якщо їх напрямні вектори колінеарні.

$\vec{s_1}\parallel\vec{s_2}$. Точки M_1 (x_1; y_1; z_1) $\in L_1$ та M_2 (x_2; y_2; z_2) $\in L_2$. Тоді

$\vec{s_1}\parallel\vec{s_2}\nparallel\overrightarrow{M_1M_2}$

Якщо паралельні прямі мають хоча б 1 спільну точку, то вони збігаються ($\vec{s_1}\parallel\vec{s_2}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$)

Різні паралельні прямі спільних точок не мають (не перетинаються). Через кожну точку простору проходить одна й лише одна пряма, паралельна заданій прямій.

Умова паралельності двох прямих у просторі $L_1(M_1,\vec{s_1})$ та $L_2(M_2,\vec{s_2})$ б якщо вони задані в канонічній формі

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}\ .$$

Дві непаралельні прямі не можуть мати більше ніж одну спільну точку

Прямі перетинаються: $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) = 0, \vec{s_1} \nparallel \vec{s_2}$

Непаралельні прямі без спільних точок називаються мимобіжними $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) \neq 0$

Якщо рівняння прямих задані в канонічній формі і їх напрямні вектори перпендикулярні $\vec{s_1} \perp \vec{s_2}$, то умова перпендикулярності двох прямих

$k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Нехай рівняння прямої задані в параметричній формі, складемо визначник з коефіцієнтів, що входять в ці формули:

$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - необхідна і достатня умова належності двох прямих одній площині.

Якщо

1) в цьому визначнику всі рядки пропорційні, прямі – співпадають;

2) у визначнику тільки перші два рядки пропорційні, прямі – паралельні;

3) визначник дорівнює 0, прямі – перетинаються.

Кут між двома прямими

Кутом між двома прямими $L_1(M_1, \vec{s_1})$ та $L_2(M_2, \vec{s_2})$ називають кут між їхніми напрямними векторами, Отже,

$$\cos(L_1, L_2) = \cos(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \frac{(\vec{s_1}, \vec{s_2})}{|\vec{s_1}|, |\vec{s_2}|}$$

Косинус кута між прямими, що задані рівняннями в параметричній формі, визначається формулою:

$$\cos\alpha = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2}\sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}$$

Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими

Нехай M_1 (x_1; y_1; z_1) $\in L$ та $\vec{a}$ (k_1; l_1; m_1) – напрямний вектор.

M_0 (x_0; y_0; z_0) $\not\in L$ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радіус-вектори відповідних точок. Тоді відстань від точки M_0 до прямої L обчислюється:

1) у векторній формі: $d = \dfrac{\sqrt{\left[\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\vec{a}\right]^2}}{\sqrt{\vec{a}^2}}$

2) у координатній формі:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ k_1 & m_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2}}$$

Нехай M_1 (x_1; y_1; z_1) $\in L_1$ та $\vec{a}_1$ (k_1; l_1; m_1) – напрямний вектор прямої L_1

M_2(x_2; y_2; z_2) $\in L_2$ та $\vec{a}_2$ (k_1; l_1; m_1) – напрямний вектор прямої L_2

Найкоротша відстань між прямими

1) у векторній формі: $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{a_1}t$, $\vec{r} = \vec{r_2} + \vec{a_2}t$ $d = \dfrac{\left|\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\vec{a_1}\vec{a_2}\right|}{\left|\left[\vec{a_1}\vec{a_2}\right]\right|}$

2) у координатній формі:

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 & m_1 \\ k_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ k_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Для знаходження кута між двома площинами, рівняння яких мають вигляд: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, використовують формулу:

$$\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}$$

або $\cos\angle(\alpha, \beta) = \dfrac{\left|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

1.2. Алгоритм координатного методу розв'язування геометричних задач. Види задач, що доцільно розв’язувати координатним методом

Вважають, що координатний метод розв'язування геометричних задач – це прийом алгебризації геометрії.

Виділимо основні етапи координатного методу:

- вдалий вибір системи координат (оскільки від того, як обрана система координат залежить складність розв’язання задачі);
- знаходження координат основних точок в обраній системі координат;
- розв’язування задачі в координатній формі з використанням відповідних співвідношень;
- переклад отриманого результату на мову геометрії.

Починати розв’язування задачі координатним методом доцільно з побудови прямокутної системи координат. В цій системі потрібно буде знайти координати відповідних точок, векторів і на їх основі складати рівняння прямих, площин, знаходити відстані між точками чи величину кутів. Вважаємо, що потрібно звернути увагу учнів на те, що результат розв’язування задачі не залежить від вибору системи координат. Але від доцільного вибору системи координат залежить раціональний шлях розв’язання задачі, швидкість і складність отримання результату. Тому перед тим, як обрати систему координат, потрібно проаналізувати умову задачі, встановити, координати яких точок потрібно буде визначити, які рівняння скласти за умовою задачі, які залежності використати (формули відстані між двома точками, координати середини відрізка, формули кута між двома прямими і т. ін) та проаналізувати, в якій з обраних систем координат все це можна зробити якнайкраще. Причому, загального правила для того щоб вдало обрати систему координат немає, кожна із задач вимагає індивідуального підходу.

Перед застосуванням координатного методу потрібно звернути увагу на формування таких вмінь:

- побудова точки за її координатами;
- знаходження координат точок, які задані умовою задачі;

- обчислення відстані між двома точками, які задані координатами;

- оптимальний вибір системи координат;

- складання рівняння заданих фігур (прямих, площин);

- визначення фігури за її рівнянням.

До типових задач, які розв’язують координатним методам відносять:

1) знаходження відстані між двома точками;

2) знаходження координат середини відрізка (чи координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні);

3) знаходження кута між прямими (векторами);

4) знаходження кута між прямою і площиною;

5) знаходження кута між площинами;

6) знаходження відстані від довільної точки до даної площини.

Як правило, в задачах в яких потрібно знайти кут між двома прямими, використовують координатно-векторний метод і шукають кут між двома векторами. При цьому використовують формулу, наведену в пункті 1.3.

Задача 1. В одиничному кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.2) знайдіть кут між площинами AD_1E та D_1FC, де E і F – середини ребер A_1B_1 та B_1C_1 відповідно.

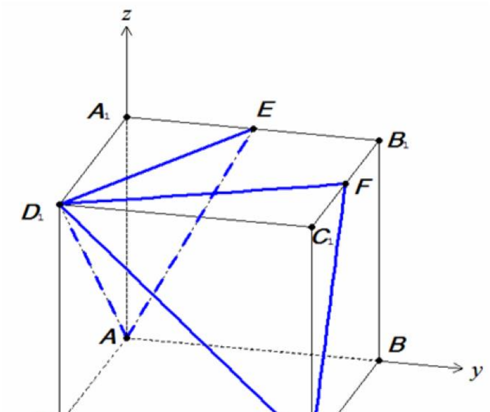


Рисунок 1.2

Розв’язання

Виберемо прямокутну систему координат з початком в точці A(0; 0; 0).

Знаходимо координати потрібних точок. Оскільки ребро куба дорівнює одиниці, то $D_1(1; 0; 1)$, E (0; 0,5; 1), C (1; 1; 0), F (0,5; 1; 1)

Складемо рівняння площини (AD_1E), використовуючи рівняння

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Для цього підставимо координати всіх трьох точок в це рівняння і отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0{,}5 + C\cdot 1 + D = 0; \end{cases}$$

Отримаємо, що A = -C, B = -2C, D=0.

таким чином рівняння має вигляд:

$x + 2y - z = 0$,

отже $A_1 = 1$; $B_1 = 2$; $C_1 = -1$.

Складемо рівняння площини (D_1FC), використовуючи рівняння

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Для цього підставимо координати всіх трьох точок в це рівняння і отримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot 0{,}5 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D = 0; \end{cases}$$

Отримаємо, що B =-C, A = 2C, D=-3C.

таким чином рівняння має вигляд:

$2x + y + z - 3 = 0$,

отже $A_2 = 2$; $B_2 = 1$; $C_2 = 1$.

За формулою кута між двома площинами:

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

Отже, кут між площинами (AD_1E) та (D_1FC) дорівнює 60°.

Відповідь: 60°.

Задача 2. В одиничному кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис 1.3) знайдіть відстань від точки A до площини BDA_1.

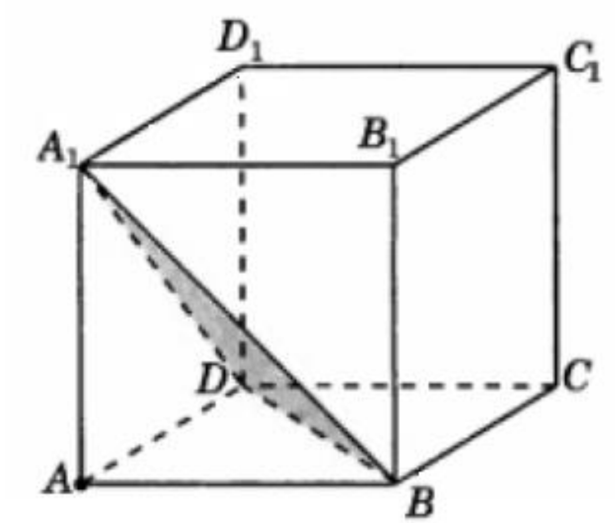


Рисунок 1. 3

Розв’язання

Виберемо прямокутну систему координат з початком в точці A(0; 0; 0), так щоб осі координат були розташовані вздовж ребер AA_l, AB, AD.

Знаходимо координати потрібних точок. Оскільки ребро куба дорівнює одиниці, то B (1, 0, 0), D (0, 1, 0) A_l (0, 0, 1).

Складемо рівняння площини BDA_1.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рівняння площини буде мати вигляд: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + (\mathbf{z} - 1) = 0$, або: $x + y + z - 1 = 0$. Отже координати вектора нормалі $\vec{n}(1,1,1)$

Знайдемо відстань від точки A до площини BDA_1, використовуючи формулу відстані від точки до площини

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.3. Різні трактування поняття «вектор». Дії над векторами у просторі.

Найчастіше в шкільному курсі математики використовують так звані скалярні величини, тобто величини, які визначаються повністю своїм численним значенням. Але зустрічаються величини, які визначаються не тільки чисельним значенням, а і напрямом Такі величини називаються векторами.

Існують багато означень поняття «вектор». У фізиці розрізняють зв'язані і ковзні вектори.

Зв'язані вектори звуться рівними, якщо вони мають не тільки рівні модулі й однакові напрями, а й спільну точку прикладання.

Клас рівних між собою векторів, розміщених на одній прямій, називають ковзними векторами. Отже, ковзний вектор визначається трьома елементами: прямою, напрямом і довжиною.

Поняття вектора розглядають таким чином:

1) напрямлений відрізок прямої евклідового простору, в якого один кінець (точка А) називається початком вектора, а другий кінець (точка В) - кінцем вектора;

2) впорядкована пара точок;

3) клас еквівалентних напрямлених відрізків;

4) паралельне перенесення;

5) впорядкована пара, трійка, ..., n- чисел.

Множини об'єктів, що відповідають цим трактуванням, ізоморфні одна одній. Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора, означення якого формулюється в теоретичних курсах геометрії: будь-яку множину об'єктів, що задовольняє перші вісім аксіом системи Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елемент цієї множини - вектором. У школі з дидактичних міркувань звичайно розглядають одну з інтерпретацій.

Отже, вектор – це напрямлений відрізок, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрямок.

Нехай точка А – початок вектора, а точка В – кінець вектора, тоді цей вектор позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називаються протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$ (його початок знаходиться в точці В, а кінець – в точці А).

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$ позначають $-\vec{a}$.

Довжиною (або модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка від точки А до точки В. Позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається нульовим вектором (або нуль-вектором). Позначають $\vec{0}$. Приймають, що нульовий вектор напряму не має.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором. Позначають $\vec{e}$.

Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, називають ортом вектора $\vec{a}$ і позначають $\overrightarrow{a^0}$

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначення: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Якщо колінеарні вектори мають один напрям, то їх називають *співнаправленими* і позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; якщо колінеарні вектори мають протилежні напрями, то їх називають *протилежно направленими* і позначають $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор прийнято вважати колінеарним будь-якому вектору.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *рівними,* якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакові довжини. Позначають $\vec{a} = \vec{b}$.

Три вектори в просторі називаються *компланарними,* якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Якщо серед трьох векторів є один нульовий вектор або два вектори колінеарні, то такі три вектори компланарні.

Лінійні операції над векторами в геометричній формі

Під лінійними операціями над векторами мають на увазі операцію множення вектора на число й операцію додавання векторів.

Означення. *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ з довжиною $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ і напрямом, який збігається з напрямком вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, і протилежний за напрямком до $\vec{a}$ при $\lambda < 0$.

Властивості операції множення вектора на число

1) $(\lambda+\beta)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивна властивість);

2) $\lambda(\beta\vec{a}) = (\lambda\beta)a$ (асоціативна властивість).

Як і в планіметрії для операцій додавання двох векторів використовують правило трикутника та правило паралелограма.

Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів (правило многокутника(рис. 1.6)).

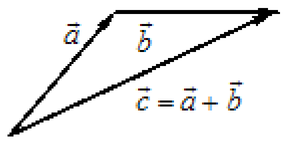


Рисунок 1.4 — Додавання двох векторів за правилом трикутника

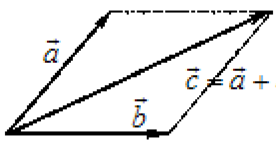


Рисунок 1.5 — Додавання двох векторів за правилом паралелограма

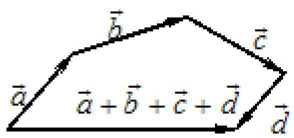


Рисунок 1.6 — Додавання кількох векторів (правило многокутника)

Суму трьох некомпланарних векторів можна знаходити за правилом паралелепіпеда: якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - паралелепіпед, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$

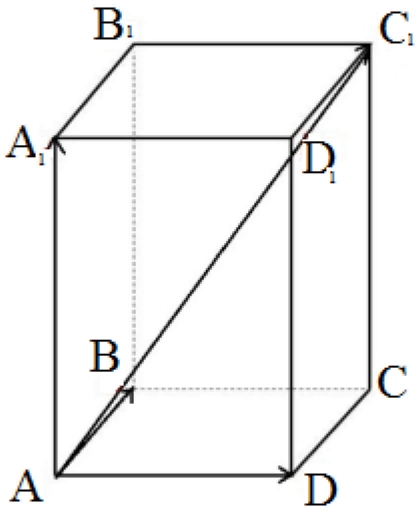


Рис. 1.7 Правило паралелепіпеда додавання векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

З цього означення випливає, що завжди $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

Властивості операції додавання векторів

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+a$ (комутативна властивість);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативна властивість);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат Oxyz. На координатних осях Ox, Oy, Oz виділимо орти (одиничні вектори), які позначаються $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Заданий довільний вектор простору $\vec{a}$ перенесемо у початок координат, тобто $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$.

Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Проведемо через кінець вектора $\overrightarrow{OM}$ (тобто через точку M) площини, які паралельні координатним площинам (рис 1.8). Позначимо M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) та M_3 (x_3, y_3, z_3) – точки перетину з координатними осями цих площин.

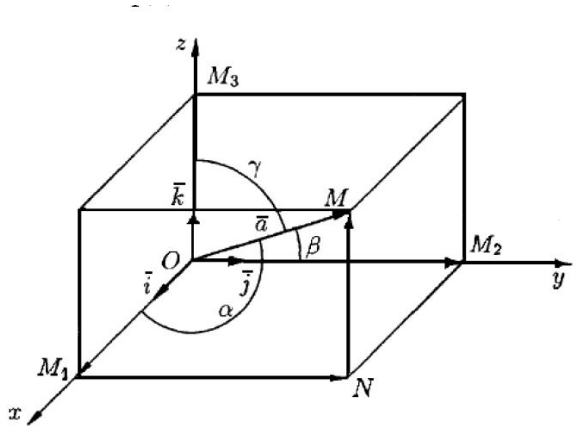


Рисунок 1.8.

Отримали прямокутний паралелепіпед, де вектор $\overrightarrow{OM}$ - діагональ цього паралелепіпеда. Тоді проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ох дорівнює $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Оу дорівнює $\left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Oz дорівнює $\left|\overrightarrow{OM_3}\right|$.

$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

Оскільки $\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}$.

Якщо позначити $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$, то

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ - розклад вектора $\vec{a}$ по ортах координатних осей.

Числа a_x, a_y, a_z називають координатами вектора $\vec{a}$.

Отже, координати вектора – це його проекції на відповідні координатні осі.

Часто записують в такій формі: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Оскільки вектор $\vec{a}$ - діагональ прямокутного паралелепіпеда, то

$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$,

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|a_x\right|^2 + \left|a_y\right|^2 + \left|a_z\right|^2}$

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тобто

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями, тобто

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\,\vec{i} + (a_y \pm by)\,\vec{j} + (a_z \pm b_z)\,\vec{k}$; $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm by, a_z \pm b_z)$

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda a_x\,\vec{i} + \lambda a_y\,\vec{j} + \lambda a_z\,\vec{k}$ або скорочено $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Рівність векторів. Два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні тоді і тільки тоді, коли $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Умова колінеарності векторів. Оскільки $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то існує деяке число λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тобто

$a_x\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} = \lambda b_x\,\vec{i} + \lambda b_y\,\vec{j} + \lambda b_z\,\vec{k}$.

Звідси отримаємо, що $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$, а отже

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

Таким чином, проекції колінеарних векторів пропорційні. Обернене твердження також справджується: якщо вектори мають пропорційні координати, то вони колінеарні.

Розглянемо у просторі прямокутну систему координат *Oxyz*. Для будь-якої точки *M* простору координати вектора $\overrightarrow{OM}$ називаються координатами точки *M*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається радіус-вектором точки *M* та позначається $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Таким чином, координати точки — це координати її радіус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$:

Координати точки *M* записуються у вигляді: $M(x, y, z)$.

Знайдемо тепер координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1,y_1,z_1)$ та $B(x_2,y_2,z_2)$. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}\right) - \left(x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}\right) =$$
$$= (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} =$$

Отже, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця та початку:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначають а · b або (а , b)), тобто

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, де φ кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$

З означення проеції вектора на вісь випливає, що скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на вісь, співнаправлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність скалярного добутку).

Доведення. Дійсно, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (асоціативність скалярного добутку відносно числового множника).

Доведення. $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\lambda|\vec{a}|\right)\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивність скалярного добутку).

Доведення. Дійсно,

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot np_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}+\vec{a}\cdot np_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$

Доведення. Дійсно, $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2$

З цієї властивості випливає, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ скалярний добуток $\vec{a}$ · $\vec{a}$ > 0. При цьому, $\vec{a}$ · $\vec{a}$ = 0 тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$

З цих міркувань можемо зробити висновок, що $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$.

5. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Доведення. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що вектори не нульові.

Доведемо необхідність. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{2}=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot 0=0$$

Доведемо достатність. Нехай $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Оскільки $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, і $\left|\vec{b}\right|\neq 0$, то косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 0. Звідси φ = π/2 або (φ = 3π/2), тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні.

Зокрема, з цієї властивості випливає, що $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

6. $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ (нерівність Коші-Буняковського для скалярного добутку).

Доведення. Очевидно випливає з означення скалярного добутку.

Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами у просторі, тобто

$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$

Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=$$
$$=a_x\cdot b_x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+a_y\cdot b_y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}+a_z\cdot b_z\cdot\vec{k}\cdot\vec{k}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

тобто скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх координат.

Деякі застосування скалярного добутку векторів

1) Кут між векторами. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами у просторі, тобто $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$ — два ненульових вектора. Тоді кут φ між цими векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{\left|a_x\right|^2+\left|a_y\right|^2+\left|a_z\right|^2}\cdot\sqrt{\left|b_x\right|^2+\left|b_y\right|^2+\left|b_z\right|^2}}$$

Зокрема, звідси випливає, що

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b=0$$

2) Проекція вектора на вектор. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{|b_x|^2+|b_y|^2+|b_z|^2}}.$$

1.4. Алгоритм векторного методу розв'язування геометричних задач Види задач, що доцільно розв’язувати векторним методом

Перед застосуванням векторного методу вчителю потрібно звернути увагу, щоб учні оволоділи понятійним апаратом цього методу. Після цього потрібно мотивувати учнів до вивчення цього методу – тобто показати необхідність його застосування в стереометрії. І тільки після такої попередньої роботи, розпочинати пояснення суті методу та на прикладі конкретної задачі формувати етапи розв’язання задач векторним методом.

При цьому з векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах двох тверджень, які учні вміють доводити і без застосування векторів.

Виділяють наступні етапи **векторного методу розв’язання задач:**

1) переклад умови задачі на векторну мову, тобто вибір векторів, при необхідності вибір системи координат, обрання базисних векторів, розклад обраних векторів за базисними;

2) складання системи векторних залежностей в залежності від умови задачі;

3) спрощення векторних рівностей;

4) перехід від векторних залежностей до алгебраїчних рівнянь і їх розв’язання;

5) обґрунтування геометричного змісту одержаного розв’язку.

Перш ніж розглядати цю тему в стереометрії, потрібно запропонувати учням повторити за підручником навчальний матеріал стосовно векторів на площині, зокрема пригадати: означення вектора, його модуля, рівних векторів, координат вектора, властивість рівних векторів, заданих координатами, правила знаходження вектора-суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число, формулювання векторної рівності, означення скалярного добутку і його властивість через добуток модулів і кут між ними.

Для визначення змісту вправ, які формують вміння застосовувати вектори необхідно виділити дії, адекватні цій діяльності.

Геометричні задачі, які доцільно розв'язувати методом векторів [25]:

1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;

2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;

3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;

4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;

5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;

6) задачі на знаходження величини кута.

Мета вивчення векторного методу в середній школі:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і тим самим забезпечити зв'язок шкільного курсу стереометрії з іншими предметами;
- використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формувати в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- формування у учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність і ін.

Розглянемо приклади задач, які розв'язуються векторним методом.

Задача 3. Дано вектори $\vec{a} = \overline{(-1;\ 3;\ 7)}$і $\vec{b} = \overline{(6;\ 2;\ -8)}$. Знайдіть координати вектора:

а)$2\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ в) $0{,}5\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$.

а) $2\vec{a} + 3\vec{b} = \left(\overline{-2+18; 2\cdot 3+3; 2\cdot 7+3\cdot(-8)}\right) = (\overline{16; 12;\ -10})$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} = \left(\overline{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}}\right) - \left(\overline{\frac{6}{4}; \frac{2}{4}; -\frac{8}{4}}\right) = \overline{(-0{,}5;\ 1{,}5;\ 3{,}5)} - \overline{(1{,}5;\ 0{,}5;\ -2)} = \overline{(-2;\ 1;\ 5{,}5)}$;

в) $0{,}5\vec{a} - 1{,}5\vec{b} = \overline{(-0{,}5;\ 1{,}5;\ 3{,}5)} - \overline{(9;\ 3;\ -12)} = \overline{(-9{,}5;\ -1{,}5;\ 15{,}5)}$.

Задача 4. Помножте вектор $\vec{a}$ = (3; -4; 2) на: 3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 0.

$\bar{a} = \overline{(3;\ -4;\ 2)}$;

$3 \cdot \bar{a} = \overline{(3 \cdot 3;\ 3 \cdot (-4);\ 3 \cdot 2)} = \overline{(9;\ -12;\ 6)};$

$\frac{1}{2} \cdot \bar{a} = \overline{(\frac{1}{2} \cdot 3;\ \frac{1}{2} \cdot (-4);\ \frac{1}{2} \cdot 2)} = \overline{(1{,}5;\ -2;\ 1)};$

$-\frac{3}{4} \cdot \bar{a} = \overline{(-\frac{3}{4} \cdot 3;\ \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-4);\ \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2)} = \overline{(-\frac{9}{4};\ -3;\ -\frac{6}{4})};$

$0 \cdot \bar{a} = \bar{0}\overline{(0;\ 0;\ 0)};$

Задача 5. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{3}$ і він перпендикулярний до векторів $\vec{m}$ = (1; -2; 1) $\vec{n}$ = (2; 1; -3).

Розв'язання

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати (x; y; z). Тоді

$x^2 + y^2 + z^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$, x – 2y + z = 0; 2x + y – 3z = 0.

Маємо систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ x - 2y + z = 0; \\ 2x + y - 3z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ x - 2y + z = 0; \\ 4x + 2y - 6z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ x - 2y + z = 0; \\ 5x - 5z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ x - 2y + z = 0; \\ x = z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12; \\ z = y; \\ x = z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z^2 = 12; \\ z = y; \\ x = z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 4; \\ z = y; \\ x = z; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 2; \\ x = 2; \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} z = -2; \\ x = -2; \\ y = -2; \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, $\vec{a}$ (2; 2; 2) або $\vec{a}$ (-2; -2; -2).

Задача 6. ABCD - тетраедр, К,Р, Т- середини його ребер АВ, АС і AD. Чи компланарні вектори:

а) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{KP}$?;

б) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KT}$ і $\overrightarrow{CB}$?

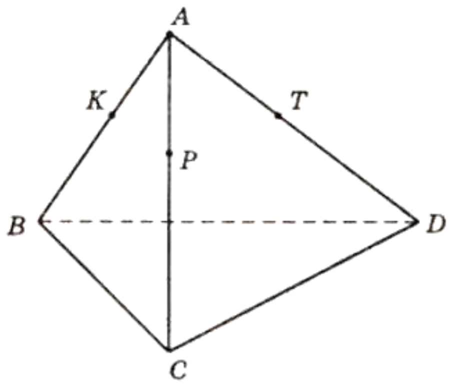


Рисунок 1.9.

а) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{KP}$ не компланарні, оскільки прямі AD і BC мимобіжні.

б) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KT}$ і $\overrightarrow{CB}$ компланарні, оскільки $\overrightarrow{CB}$ і$\overrightarrow{CD}$, лежать в одній площині (BCD), а вектор KT лежить в площині (KTP), яка паралельна площині (BCD).

Розділ 2. Методичні особливості вивчення декартових координат та векторів у систематичному курсі стереометрії

2.1. Аналіз чинної програми з математики на предмет дослідження

У програмі [20] зазначено, що розгляд теми «Координати і вектори» дозволить повторити навчальний матеріал із стереометрії і застосувати новий підхід до вивчення прямих і площин у просторі. Окремим завданням вивчення теми «Координати і вектори» є узагальнення векторного і координатного методів у випадку простору. На розгляд теми «Вектори і координати» в 10 класі відведено 10 годин.

Згідно з вимогами цієї програми, передбачено, що учень користується аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі; усвідомлює важливість векторно-координатного методу в математиці; виконує операції над векторами; застосовує вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; знаходить відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; використовує координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.

У навчальних програмах з математики (профільний та поглиблений рівні) для 10-11 класів [21, 22] вивчення розділу «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі» (22 години) передбачено в 10 класі.

Розглядають теми: Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні. Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач.

Навчальні досягнення учня: розрізняє векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори; пояснює та записує зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими; класифікує взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі; зображає на рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число; знаходить на рисунку та зображає напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини; аналізує та досліджує координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення; обґрунтовує перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток векторів; ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; характеризує найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач; застосовує формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв’язування задач; розв’язує вправи, що передбачають: знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.

2.2. Пропедевтика вивчення координат і векторів у базовій середній школі

Координатно-векторний метод – досить ефективний і універсальний спосіб знаходження будь-яких кутів та відстані між стереометричними об’єктами в просторі.

Даний метод розв’язування полягає у введенні (прив’язування до досліджуваних фігур) декартової системи координат, а потім - обчислення векторів, що утворилися (їх довжин та кутів між ними).

У 5-6 класах вводиться основний понятійний апарат. На першому етапі учні знайомляться з координатним променем (при вивченні від’ємних чисел у 6 класі доповнюється до координатної прямої, після введення раціональних чисел – до координатної площини). На другому етапі учнів знайомлять з рівняння прямої та кола.

У курсі алгебри 7 класу шляхом побудови ряду точок, координати яких обчислюються за аналітичним завданням функції, вводяться графіки основних функцій. У геометрії – рівняння прямої та кола вводяться на основі геометричних властивостей.

У курсі геометрії 9 класу учні починають застосовувати сам метод координат для розв’язання завдань. При розв’язанні завдань координатним методом необхідні навички алгебраїчних обчислень.

У шкільній програмі з математики методу координат приділяється мало уваги.

Програма не передбачає вивчення методу координат як методу вирішення завдань і ставить метою вміння використовувати координати для розв’язування нескладних задач, а не вміння застосовувати метод координат для доведення теорем та розв'язання нестандартних і досить складних завдань.

2.3. Аналіз чинних різнорівневих підручників з математики для профільної школи на предмет дослідження

Програмі [21, 22] відповідає підручник [13]. У підручнику [13] дана тема розглядається в розділі 4. Одна з особливостей цього підручника полягає в тому, що він створений для українських старшокласників.

В цьому підручнику окрім теоретичного матеріалу, передбаченого програмою, для вивчення в 10 класі профільного рівня, в розділі «Для допитливих» вміщено також теоретичні відомості про рівняння площини, рівняння прямої у просторі, подані означення косого та векторного добутку двох векторів. У підручнику § 20 «Застосування координат» і § 24 «Застосування векторів», на нашу думку це сприяє формуванню в учнів інтересу до розділу «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі».

Цікавим в цьому підручнику є завдання на застосування векторів в алгебрі. А саме, № 1046: Знайдіть найбільше значення виразу

а) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$;

б) $y=3x+4\sqrt{1-x^2}+5$.

№ 1134: Згадайте байку Л.Глібова «Лебідь, щука і рак». Змоделюйте ситуацію, що розглядається в ній, за допомогою векторів. Які можливі варіанти розташування цих векторів і співвідношень між ними? Зробіть висновки. Ми вважаємо, що ця задача дозволяє реалізувати міжпредметні зв’язки між стереометрією та літературою.

У підручнику [12] представлені задачі практичного змісту, які дозволяють поєднати вивчення стереометрії з фізикою. Наприклад, № 19.23 (розділ «Виявіть свою компетентність): Моторний човен рухається перпендикулярно до берега річки із власною швидкістю 2 м/с. Швидкість течії річки 1 м/с. Визначте час руху човна до протилежного берега, якщо ширина річки становить 90 м.

Цікавим у цьому підручнику, на нашу думку, є те, що перед вивченням розділу вміщено таблицю «Декартові координати», в якій проаналізовано аналогію між координатами на площині та у просторі.

Авторський колектив підручника [12] під час вивчення цього розділу, пропонує учням обрати такі теми навчальних проектів:

1. Різні системи координат в математиці.
2. Що можна назвати вектором в математиці?
3. Вектори і їх застосування в геометрії і фізиці.
4. Симетрія в природі, техніці й архітектурі.
5. Геометрія в орнаменті
6. Кругові орнаменти в архітектурі

В підручнику [19] даній темі відповідає §4 «Координати та вектори в просторі». В цьому параграфі розглядаються також підпункти «Геометричне місце точок простору. Рівняння сфери», «Рівняння площини». У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал, тобто є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні. Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно, це на нашу думку зручно для вчителя і для учнів.

Вважаємо, що опанувавши векторно-координатний метод розв'язування задач, згідно навчальної програми [13] 2018 року, учні краще засвоять навчальний матеріал цієї теми, а також зможуть розв'язувати прикладні задачі, а саме задачі із фізики, астрономії, географії, до розв'язання яких можна застосувати цей метод.

У підручниках, які відповідають програмі [21] більше уваги приділено прикладним задачам з різних сфер, на які у математиці традиційно менше звертали уваги раніше. Також пропонується ряд прикладних задач (наприклад, виготовити модель) та учнівських проектів, виконавши які учні краще усвідомлять цей метод.

2.4 Методичні особливості вивчення декартових координат у курсі стереометрії

Особливість вивчення декартових координат у сучасній школі пов'язана з профілізацією старшої школи і введенням до профільної підготовки в основну школу. У класах з поглибленим вивченням математики для цієї тему відводиться більше годин, ніж у звичайних, розглядається більший обсяг питань, а також визначено більше вимог до її засвоєння учнями.

З поняттям координат на площині учнів уже знайомі з курсу основної школи. Тому більшість авторів підручників, розглядаючи декартові координати в просторі, використовують аналогію. Цікавим є підхід авторів [19]. В цьому підручнику вміщено наступне означення: «**Прямокутною (декартовою) системою координат у просторі** називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис.2.1)

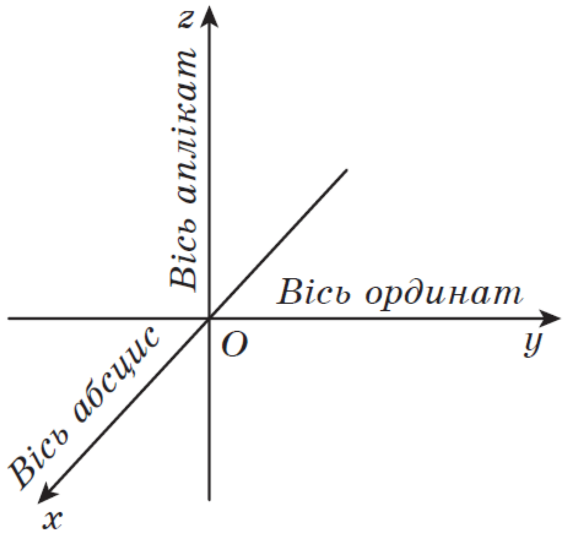


Рисунок 2.1

Аналогічне означена подають автори підручника [12]: «Прямокутною системою координат у просторі **називають трійку попарно перпендикулярних координатних осей зі спільним початком координат.**»

Вважаємо, що такі означення сприяють науковому підходу до вивчення нового матеріалу та сприяють формуванню наукового світогляду в учнів.

Зазначимо, що координатний метод розв'язування стереометричних задач зручно використовувати в тих випадках, коли в заданій конфігурації можна ввести прямокутну систему координат у просторі. Також для розв'язування деяких геометричних задач буває зручно поєднувати координатний і векторний методи (використовуючи координати відповідних векторів), а на деяких етапах розв'язування — застосовувати відомі геометричні співвідношення.

Далі за аналогією з планіметрії вводять поняття координат точки у просторі.

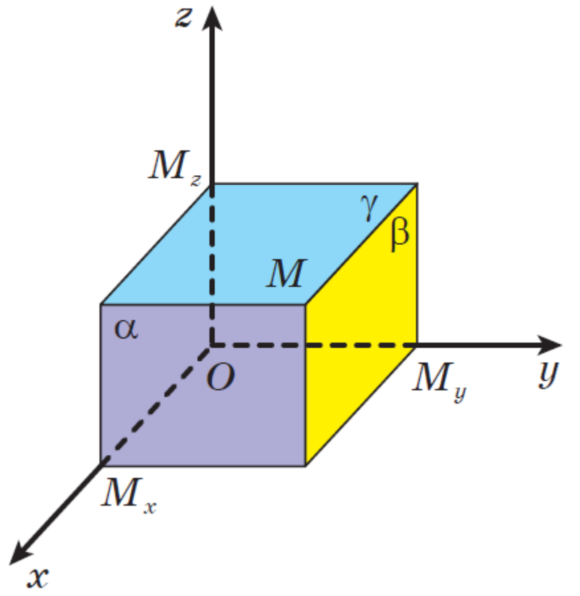


Рисунок 2.2

кожній точці *M* координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел (x; y; z), яку визначають таким чином. Проведемо через точку *M* три площини a, b і g перпендикулярно до осей *x*, *y* і *z* відповідно. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_x, M_y і M_z (рис. 2.2).

Координату точки M_x на осі *x* називають **абсцисою** точки *M* і позначають буквою *x*. Координату точки M_y на осі *y* називають **ординатою** точки *M* і позначають буквою *y*. Координату точки M_z на осі *z* називають **аплікатою** точки *M* і позначають буквою *z*. Отриману таким чином упорядковану трійку чисел (x; y; z) називають **координатами точки** *M* у просторі.

У підручнику [19] формули відстані між двома точками в просторі та поділу відрізка навпіл подають у вигляді відповідних теорем. Потім зауважують, що формулу для знаходження координат середини відрізка можна узагальнити на випадок поділу відрізка у заданому відношенні.

2.5 Методичні особливості вивчення векторів у курсі стереометрії

Розв'язування геометричних задач векторним методом зазвичай містить такі етапи: переклад умови задачі на векторну мову; розв'язування задачі за допомогою векторів; переклад результату на геометричну мову. Слід враховувати, що запис умови задачі у векторній формі найчастіше не є однозначним.

Наприклад, навіть таке просте твердження: «Точка C — середина відрізка AB», може бути записане у векторній формі одним із таких способів: 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$;
4) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$; 7) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, де O — довільна точка.

Це призводить до того, що під час запису умови геометричної задачі у векторній формі важко зорієнтуватися, яке саме векторне співвідношення доведеться використати, щоб задовольнити вимогу задачі. До того ж запропонувати будь-який певний метод дослідження векторних співвідношень, отримуваних під час запису умови векторною мовою, практично неможливо. Тому доцільно спочатку записати векторною мовою тільки вимогу задачі, а потім, проаналізувавши умови (за кресленням), виявити, за допомогою яких векторів можна отримати необхідне співвідношення (в простих задачах) або які вектори доцільно вибрати як базисні (або як зручно ввести систему координат) для складніших задач. Лише потім у міру потреби можна перекладати умову на векторну мову, а на деяких етапах скористатися відомими учням геометричними співвідношеннями.

Слід враховувати, що вектори доцільно застосовувати для розв'язування геометричних задач на доведення паралельності, належності трьох і більше точок одній прямій, перпендикулярності, на обчислення довжин відрізків і величин кутів, тому бажано вміти перекладати на векторну мову вимоги саме цих задач, а також здійснювати зворотний переклад отриманих векторних співвідношень на геометричну мову.

З метою успішного засвоєння учнями такої розумової дії як переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови та навпаки, доцільно запропонувати учням таблицю основних відношень між векторами і провести аналогію з відомими фактами про вектори з планіметрії (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Переклад геометричних фактів на векторну мову

Що потрібно довести (на мові геометрії)	Що достатньо довести (на мові векторів)
1) a‖b	$\overline{AB}$= $k\overline{CD}$, де відрізки AB і CD належать відповідно прямим a і b, k – число. В залежності від вибору AB і CD виникають різні векторні співвідношення
2) Точки A, B і C належать прямій a	а) встановити справедливість однієї з наступних рівностей: $\overline{AB}$= $k\overline{BC}$ або $\overline{AC}$= $k\overline{AB}$; б) довести рівність $\overline{QC}$= $p\overline{QA}$+ $q\overline{QB}$, де p + q = 1 і Q – довільна точка; в) довести рівність $\alpha\overline{QA}$+ $\beta\overline{QB}$+ $\gamma\overline{QC}$= 0, де α + β + γ = 0 і Q – довільна точка
3) Точка C належить відрізку AB, де AC:AB = m:n (ділення відрізка в даному відношенні)	$\overline{AC}$= $\frac{m}{n}\overline{CB}$ або $\overline{QC}$=$\frac{n}{m+n}\overline{QA}$+ $\frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для деякої точки Q.

4) a⊥b	$\overline{AB}\cdot\overline{CD}$= 0, де точки A і B належать прямій a, а точки C і D – прямій b.
5) Обчислити довжину відрізка	а) вибрати два неколінеарних базисних вектори (або три некомпланарних), у яких відомі довжини і кут між ними; б) розкласти за ними вектор, довжина якого обчислюється; в) знайти скалярний квадрат цього вектора, використовуючи формулу $\bar{a}^2 = \|\bar{a}\|^2$
6) Обчислити величину кута	а) вибрати два неколінеарних базисних вектори, для яких відомі відношення довжин і кут між ними; б) вибрати вектори, що задають шуканий кут, і розкласти їх по базисним векторам; в) обчислити cos $\angle\left(\bar{a},\bar{b}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|}$

2.6. Застосування координатного та векторного методів до розв'язування стереометричних задач

При вивчені теми «Прямокутна система координат» пропонуємо розглянути таку задачу

Задача 7. Установіть вид чотирикутника *MNPK* і знайдіть його площу, якщо: *M*(0; –2; 0), *N*(4; 1; 0), *P*(4; 1; 5), *K*(0; –2; 5);

Розв'язання

Перед розв'язуванням цієї задачі доцільно повторити види чотирикутників та їх властивості.

Один із найперших чотирикутників, які вивчають учні в курсі планіметрії – паралелограм. Учням відомо, що діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

Знайдемо середини MP та NK.

$\left(\frac{0+4}{2};\frac{-2+1}{2};\frac{0+5}{2}\right)$, $\left(2;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$ середина MP

$\left(\frac{4+0}{2};\frac{1-2}{2};\frac{0+5}{2}\right)$, $\left(2;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$ середина NK.

MP та NK – діагоналі чотирикутника *MNPK. Вони перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Отже, MNPK* – паралелограм.

Доцільно поставити питання учням: чи ми остаточно знайшли вигляд чотирикутника?

Обчислимо довжини діагоналей паралелограма *MNPK.*

$$MP=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\ ;$$

$$NK=\sqrt{(0-4)^2+(-2-1)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

У паралелограмі *MNPK* діагоналі MP та NK рівні: MP = NK, отже *MNPK* – прямокутник.

Обчислимо довжини суміжних сторін MN та MK.

$$MN=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}=5\,;$$

$$MK=\sqrt{(0-0)^2+(-2+2)^2+(0+5)^2}=\sqrt{25}=5\,.$$

MN = MK, отже MNPK – квадрат.

При вивчені теми «Поділ відрізка в заданому відношенні» пропонуємо розглянути задачу № 8.

Задача 8. Знайдіть координати точки перетину медіан ΔMNP, якщо M(3; 2; 4) N(1; 3; 2), P(–3; 4; 3).

Розв’язання

Перед розв’язуванням задачі вважаємо за доцільне повторити з учнями означення трикутника, означення медіани та властивості медіан трикутника.

Розглянемо ΔMNP. Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини. Нехай ML – медіана, тоді точка L – середина сторони NP. Знайдемо її координати.

$$x_L=\frac{1-3}{2}=-1;\qquad y_L=\frac{3+4}{2}=3{,}5\ ;\qquad z_L=\frac{2+3}{2}=2{,}5$$

Нехай точка O – точка перетину медіан ΔMNP. Тоді MO:OL=2:1.

Знайдемо координати точки O

$x_O = \frac{1}{3}(3+2\cdot(-1)) = \frac{1}{3}$; $y_O = \frac{1}{3}(1\cdot 2+2\cdot 3{,}5) = 3$; $z_O = \frac{1}{3}(1\cdot 4+2\cdot 2{,}5) = 3$.

Отже $O\left(\frac{1}{3};3;3\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{3};3;3\right)$

До теми «Застосування координат» пропонуємо задачу 9.

Задача 9. В правильній трикутній піраміді DABC сторона основи дорівнює $8\sqrt{3}$ і DC=17. знайдіть тангенс кута, утвореного площиною основи і прямою AO, де O – точка перетину медіан грані ABC.

Розв’язання

Введемо систему координат з початком в точці A (рис. 2.2).

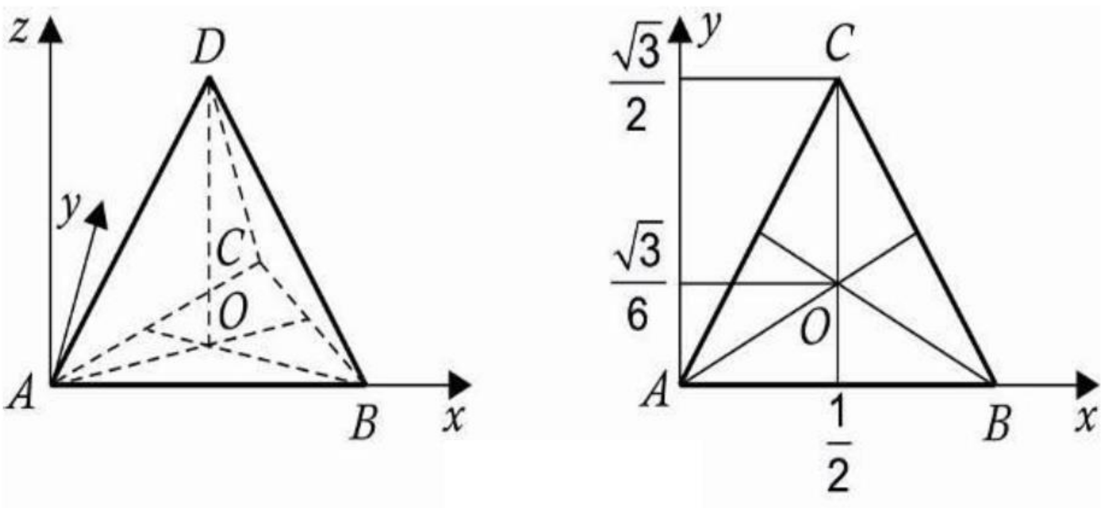


Рисунок 2.3

Пригадуємо з учнями, що в основі правильної трикутної піраміди лежить правильний трикутник.

Знайдемо координати точок B, A, C, O.

Для того, щоб учням легше було знайти координати точок основи, доцільно разом з учнями зробити додатковий планіметричний рисунок площини xOy (рис. 2.3).

$B(8\sqrt{3};0;0)$, A(0;0;0), $C(4\sqrt{3};12;0)$, $O(4\sqrt{3};4;15)$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AO}(4\sqrt{3};4;15)$.

Складемо рівняння площини основи (ABC)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8\sqrt{3}-0 & 0-0 & 0-0 \\ 4\sqrt{3}-0 & 12-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$96\sqrt{3}z = 0$.

Кут між прямою і площиною знаходимо за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|};$$

$$\sin\varphi = \frac{\left|0\cdot 4\sqrt{3} - 0\cdot 4 + 96\sqrt{3}\cdot 15\right|}{\sqrt{48+16+225}\cdot\sqrt{0+0+\left(96\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{96\sqrt{3}\cdot 15}{96\sqrt{3}\cdot 17} = \frac{15}{17}$$

Тоді $\cos\varphi = \frac{8}{17}$.

$tg\varphi = \frac{15}{8}$.

Відповідь: $\frac{15}{8}$.

До теми «Застосування координат та векторів» пропонуємо задачу 10.

Задача 10. В одиничному кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M і N – середини ребер A_1D_1 та BB_1 відповідно. Знайдіть кут між прямою MN і діагоналлю BD_1.

Розв'язання

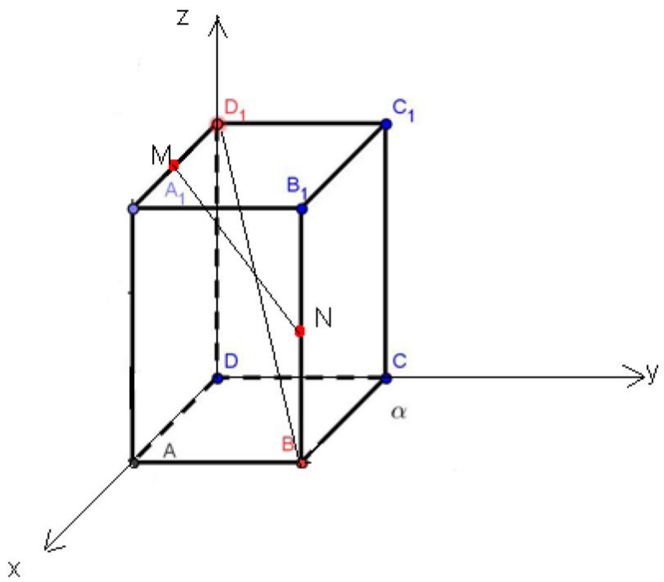


Рисунок 2.4

Введемо систему координат з початком в точці D так, щоб осі Ox, Oy, Oz були направлені вздовж ребер DA, DC, DD_1 (рис. 2.4)

Знайдемо координати точок B, D_1, M, N.

B(1; 1; 0), D_1(0; 0; 1), M(0,5; 0; 1), N(1; 1; 0,5).

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BD_1}$ та $\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{BD_1}(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{MN}(0,5;1;-0,5)$

Кут між прямою MN і діагоналлю BD_1 знайдемо, як кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ та $\overrightarrow{MN}$.

$$\cos\alpha = \frac{|(-1)\cdot 0,5 - 1\cdot 1 + 1\cdot(-0,5)|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0,25+1+0,25}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Отже, $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь: $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

При вивчені теми «Колінеарність векторів» (10 клас) пропонуємо наступну задачу 11.

Задача 11. Знайдіть усі значення a, при яких вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ колінеарні, якщо:

а) $\vec{m}$ = (-1; 4; -2), $\vec{n}$ = (2; a; 4);

б) $\vec{m} = (a+1; 2; a)$, $\vec{n}$ = (1; a; 2);

в)) $\vec{m} = (3; 5-a; a)$, $\vec{n}$ = (5+a; 7a+1; 2);

Розв’язання

Перед розв’язуванням цієї задачі, доцільно повторити з учнями поняття колінеарності та властивості колінеарних векторів.

а) $\vec{m}$ = (-1; 4; -2), $\vec{n}$ = (2; a; 4);

$\frac{-1}{2} = \frac{4}{a} = \frac{-2}{4}$, звідси $\frac{4}{a} = \frac{-1}{2}$; a = -8.

б) $\vec{m} = (a+1; 2; a)$, $\vec{n}$ = (1; a; 2);

$\frac{a+1}{1} = \frac{2}{a} = \frac{a}{2}$; $a^2 = 4$; a = 2 або a = –2.

Але a = 2 не задовольняє умові $\frac{a+1}{1} = \frac{2}{a}$, тому a = 2 не є розв’язкам.

Дана умова виконується при а = –2. Отже, а = –2.

в) $\vec{m} = (3; 5 - a; a), \vec{n}$ = (5+а; 7а+1; 2);

$\frac{5+a}{3} = \frac{7a+1}{5-a} = \frac{2}{a}$; $\frac{5+a}{3} = \frac{7a+1}{5-a}$; $a^2 + 5a - 6 = 0$; а = - 6 або а = 1.

Але а = - 6 не задовольняє умові $\frac{5+a}{3} = \frac{7a+1}{5-a}$, тому а = - 6 не є розв’язкам. Отже, а = 1

Задача 12. Доведіть, що якщо точки A, B, C і D не лежать на одній прямій, і ненульові вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні, то ці точки є вершинами паралелограма.

Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ненульові, то точки A і B та C і D не збігаються. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то відрізки AB і CD рівні і паралельні.

Оскільки точки не лежать на одній прямій, то вони є вершинами паралелограма.

Задачу 13 на доведення можна використати при повторенні ознаки перпендикулярності прямої і площини, оскільки відповідна теорема вивчається раніше, ніж векторний метод.

Задача 13. Доведіть, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перетинає площину і перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині і проходять через точку перетину даної прямої з площиною.

Йдеться, звичайно, про векторне доведення відомої ознаки перпендикулярності прямої і площини.

Оскільки воно значно простіше від вивченого раніше, то має справити на учнів враження, переконати у доцільності застосування векторів у геометрії, потужності й універсальності векторного методу.

Тому задачу бажано розібрати в класі та обговорити. Звернемось до розв'язання.

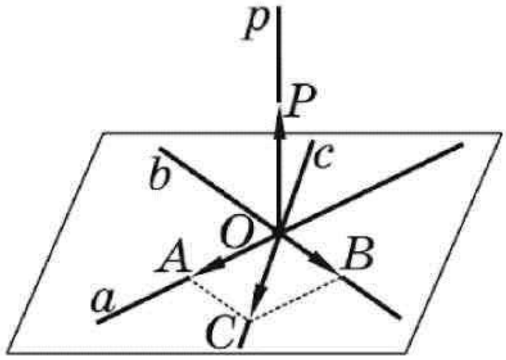


Рис. 2.5

Нехай прямі a і b лежать у площині α і перетинаються в точці O (рис. 2.5). Пряма p перетинає площину в точці O і p⊥a і p⊥b. Покажемо, що p⊥c, де пряма c теж лежить у площині α і проходить через точку O.

Якщо точка C лежить на прямій c, то вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ можна подати у такому вигляді: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, точки A і B лежать на прямих a і b.

Якщо точка P лежить на прямій p і $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$,

то $\vec{p}\cdot\vec{c} = \vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{p}\cdot\vec{a} + \vec{p}\cdot\vec{b} = 0+0=0$. Отже, $\vec{p} \perp \vec{c}$.

Тому $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OC}$, тобто p ⊥ c.

Для розв'язування геометричних задач векторним методом учні повинні навчитися виражати вектор площини через два неколінеарних вектори та вектор простору через три некомпланарних вектори. З цією метою учні використовують геометричні побудови для знаходження суми векторів (правило трикутника, многокутника, паралелограма або паралелепіпеда) та множення вектора на число.

Задача 14. Довести, що коли в тетраедрі дві пари протилежних ребер взаємно перпендикулярні, то і третя пара ребер теж взаємно перпендикулярна.

Розв’язання

Дано тетраедр ABCD (рис. 2.6). За умовою задачі нехай AB ⊥ CD і AD⊥ BC. Доведемо, що BD ⊥ AC.

Застосуємо векторний метод. Візьмемо довільно точку O і побудуємо вектори на кожному ребрі тетраедра і $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

Запишемо векторні рівняння: AB ⊥ CD, якщо $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ або

$$(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0 \qquad (2.1)$$

якщо AD ⊥ BC , то $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ або

$$(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0 \qquad (2.2)$$

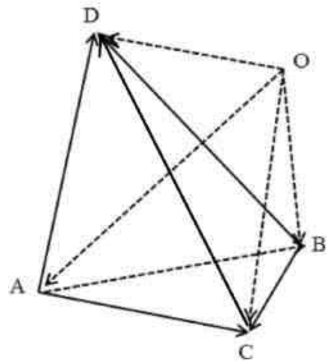


Рис. 2.6

Додамо почленно рівняння (2.1) і (2.2). Після елементарних перетворень одержимо: $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = 0$ або $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Звідси слідує, що AC ⊥BD, тобто пара протилежних ребер AC і BD, даного тетраедра, взаємно перпендикулярні. Твердження задачі доведено.

Задача 15. Із вершини A трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайти кут φ між відрізками BC та BD, якщо кут ABD дорівнює α , а кут ABC дорівнює β . Обчислити міру кута φ, якщо $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Сформулюємо вимогу задачі мовою векторів: знайти кут між векторами $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{BD}$. Позначимо кут між ними через φ . Тоді кут між векторами можна знайти за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \qquad (2.3)$$

Позначимо вектори на трьох інших відрізках, кути між якими відомі: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Виразимо через них вектори, кут φ між якими треба знайти:

$\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, Підставимо в чисельник формули (2.3) замість векторів відповідні вирази і виконаємо можливі перетворення:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{b})}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\,\vec{c}-\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\vec{b}\,(\vec{b}-\vec{c})}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} =$$

$$= \frac{\vec{b}\,|\vec{b}-\vec{c}|\cdot\cos\beta}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$$

Оскільки $\vec{a}\vec{c} = 0,\ \vec{a}\vec{b} = 0.$

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\,|\vec{b}-\vec{c}|\cdot\cos\beta}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} \qquad (2.4)$$

Замінимо у рівності (2.4) модулі векторів відповідними відрізками, отримаємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\,|\vec{b}-\vec{c}|\cdot\cos\beta}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{AB\cdot CB\cdot\cos\beta}{BD\cdot BC} = \cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

оскільки $\frac{AB}{BD} = \cos\alpha, \quad \frac{CB}{BC} = 1$

Якщо $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, то матимемо:

$\text{os}\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos 30°\cdot\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4325;$

$\varphi = \arccos 0{,}4325.$

Задача 16. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти кут між стороною основи і діагоналлю бічної грані, що не перетинає цю сторону.

Розв'язання

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана правильна трикутна призма (рис. 2.7) Тоді трикутник ABC – правильний: AB=BC=AC, $\angle A=\angle B=\angle C=60^o$.

$AA_1 \perp (ABC)$. За умовою $AA_1=AB$. Нехай $AA_1=AB=a$. Проведемо діагональ AC_1 бічної грані AA_1C_1C.

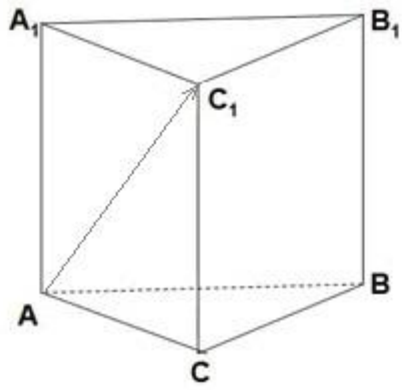


Рис. 2.7

Потрібно знайти кут між діагоналлю AC_1 і стороною основи BC.

Введемо вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{k}$. З умови $|\vec{m}|=|\vec{n}|=|\vec{k}|=a$ (оскільки довжина всіх ребер призми однакова і за припущенням дорівнює a).

Тоді $\overrightarrow{AC_1}=\vec{m}+\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{m}-\vec{n}$.

Знайдемо абсолютну величину цих векторів

$$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\left(\vec{m}+\vec{k}\right)^2}=\sqrt{\vec{m}^2+2\vec{m}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}=\sqrt{\vec{m}^2+2\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{k}|cos\alpha+\vec{k}^2}$$

де α – кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{k}$.

За введеним $\overrightarrow{AC}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{k}$.

Оскільки $AA_1\perp(ABC)$, AC лежить у площині (ABC) і $AA_1\cap AC=A$, то за означенням перпендикулярності прямої і площини $AA_1\perp AC$, тобто $\alpha=90^\circ$.

Аналогічно $AA_1\perp AB$.

Отже,

$$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\vec{m}^2+\vec{k}^2}=a\sqrt{2}.$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(\vec{m}-\vec{n})^2}=\sqrt{\vec{m}^2-2\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2}=\sqrt{\vec{m}^2-2\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|cos60^\circ+\vec{n}^2}=a$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{m}+\vec{k}\right)\cdot(\vec{m}-\vec{n})=\vec{m}^2+\vec{k}\cdot\vec{m}-\vec{m}\cdot\vec{n}-\vec{k}\cdot\vec{n}=$$

$$=|\vec{m}|^2+|\vec{k}|\cdot|\vec{m}|\cdot cos90^\circ-|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot cos60^\circ-|\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot cos90^\circ=$$

$$=|\vec{m}|^2-|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\frac{1}{2}=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

З іншого боку, $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot cos\varphi$, де φ – кут між $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Тоді

$$cos\varphi = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{4};\ \varphi = arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Кут між векторами дорівнює куту між прямими, що їх містять.

Відповідь: $arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 17. Довжини всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють одиниці, $AA \perp (ABC)$, а кут BAD дорівнює $60°$. Обчисліть довжину діагоналі AC_1 і кут між діагоналями AC_1 і DB_1

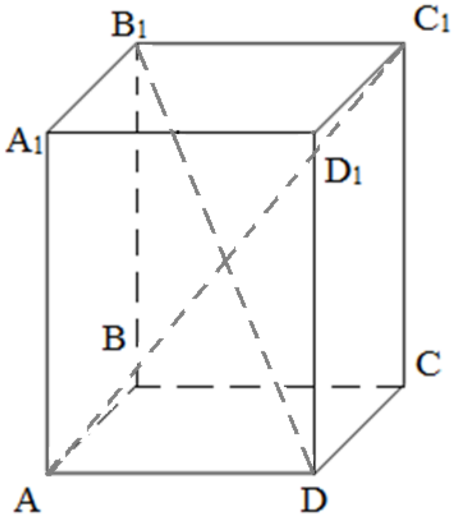


Рис.2.8

Розв'язання

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1},\quad \left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2} =$$

$$= \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}} =$$

$$= \sqrt{1+1+1+2\cos 60° + 2\cdot 0 + 2\cdot 0} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} -$$

$$-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2 = 1 + \cos 60° + 0 -$$

$$-\cos 60° - 1 - 0 + 0 + 0 + 1 = 1.$$

Якщо φ — кут між векторами $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{DB_1}$ то

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB_1}\right|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Кут між діагоналями AC_1 і DB_1 збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{DB_1}$. Тому він дорівнює $\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Відповідь: $\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Задачі 16-17 можна використати при вивченні розділу «Многогранники», а саме теми «Призма. Пряма і правильна призми».

Задача 18. У трикутній піраміді DABC плоскі кути при вершині D рівні по 90°. Бічні ребра AD=6, DB=8; DC=24. Точка M рівновіддалена від всіх вершин піраміди. Знайти відстань DM.

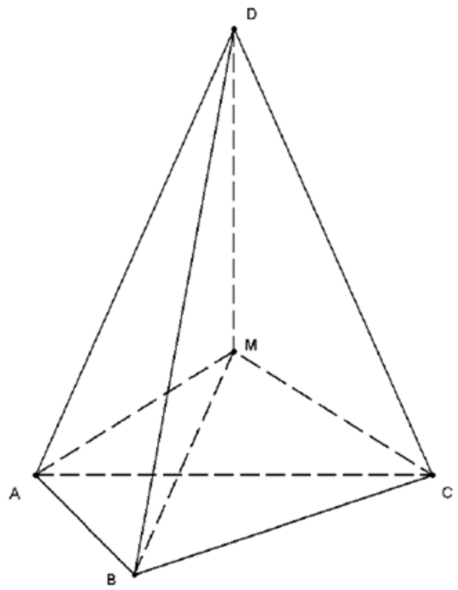


Рис. 2.9.

Розв'язання

Виберемо напрямок осей прямокутної системи координат, помістивши в її початок вершину D, так (рис.2.9): точка A лежить на осі *Ox,* B - на осі *Oy,* C - *Oz*. Нехай M(*x;y;z).* Виберемо базисні вектори *i, j, k.* Тоді розкладання векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{DM}$ за базисними запишеться так:

$$\overrightarrow{AM} = (x-6)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-0)\vec{k};$$

$$\overrightarrow{BM} = (x-0)\vec{i} + (y-8)\vec{j} + (z-0)\vec{k};$$

$$\overrightarrow{CM} = (x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-24)\vec{k};$$

$$\overrightarrow{DM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Запишемо умову рівновіддаленості точки M від вершин векторною мовою: $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2$ *або:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{DM}^2, \\ \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{DM}^2, \\ \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left((x-6)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-0)\vec{k}\right)^2 = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2, \\ \left((x-0)\vec{i} + (y-8)\vec{j} + (z-0)\vec{k}\right)^2 = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2, \\ \left((x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-24)\vec{k}\right)^2 = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 + (y-8)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 + y^2 + (z-24)^2 = x^2 + y^2 + z^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6)^2 = x^2, \\ (y-8)^2 = y^2, \\ (z-24)^2 = z^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 12x = 36, \\ 16y = 64, \\ 48z = 576; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \\ z = 12; \end{cases}$$

$\overrightarrow{DM}$ (3; 4; 12).

$\overrightarrow{DM}^2$ = 9 + 16 + 144 = 169.

DM = 13.

Відповідь: 13.

Задача 19. Знайдіть найбільшу величину кута між площиною бічної грані правильної чотирикутної піраміди і бічним ребром, яке не належить цій грані.

Розв'язання

Знайдемо кут a між бічним ребром *SA* і площиною бічної грані *SDC* (рис. 2.10).

Введемо систему координат так, щоб S(0; 0; *h), D(a;* 0; 0), C(0; *a;* 0), де *OA*=*OC*=*OD* = *a*, *SO* = *h*.

Рівняння площини *SDC* має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1$$

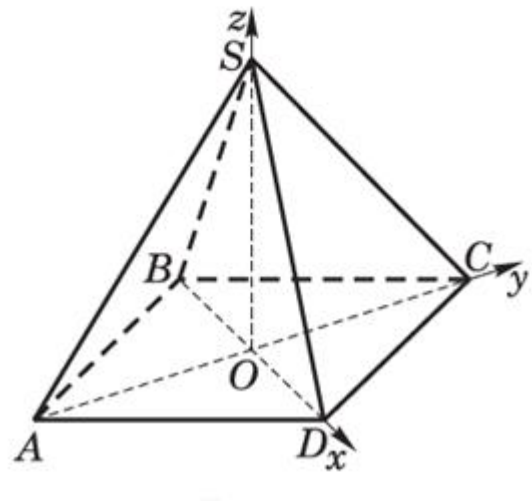


Рис. 2.10

$$\sin\alpha = \cos\angle\left(\vec{h}, \overrightarrow{AS}\right) = \frac{1+1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\cdot\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2+h^2}{a^2}+\frac{a^2+h^2}{a^2}+\frac{a^2+h^2}{h^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3+\frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2}}}$$

Кут a, а отже, і sinα набуватиме найменшого значення тоді, коли вираз $\frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2}$ набуватиме найменшого значення.

Розглянемо функцію:

$$f(h) = \frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2} = \frac{2h^2}{a^2}+a^2h^{-2}$$

З цією метою потрібно дослідити функцію.

Дому доцільно пригадати з учнями умови мінімуму та максимуму функції.

$$f'(h) = \frac{4h}{a^2}-2a^2h^{-3} = \frac{4h}{a^2}-\frac{2a^2}{h^3} = \frac{4h^4-2a^2}{a^2h^3} = 0,$$

$$4h^4-2a^2 = 0,$$

$$4h^4 = 2a^2,$$

$$h = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}.$$

Знайдемо значення sinα при $h = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$

$$\sin\alpha = \cos\angle\left(\vec{h}, \overrightarrow{AS}\right) = \frac{2}{\sqrt{3+\frac{\sqrt{2}a^2}{a^2}+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$$

Отже,

$$\alpha = \arcsin\left(2(\sqrt{2}-1)\right) \approx \arcsin 0,8284$$

Звідси $\alpha \approx 55°56'$.

Відповідь: 55°56’.

Задача 20. Доведіть, що в піраміді, все грані якої — правильні трикутники, будь-які два мимобіжних ребра перпендикулярні.

Використаємо схему розв’язання геометричних задач векторним методом.

1) Перекласти вимогу задачі векторною мовою — згадуємо, що для доведення перпендикулярності відрізків достатньо довести, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю.

2) Вибрати три некомпланарних вектори як базисні — частіше за все ці вектори вибирають такими, що виходять з однієї точки.

3) Виразити вектори, зазначені на кроці 1, через базисні.

4) Довести записане раніше співвідношення або знайти його значення і перекласти результат геометричною мовою.

Для знаходження отриманих скалярних добутків враховуємо, що скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

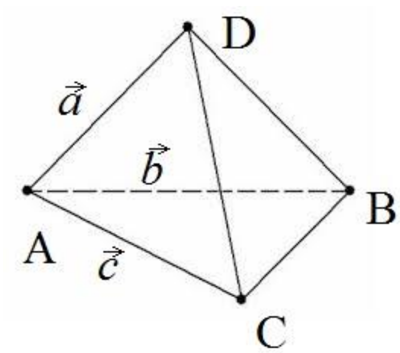


Рис. 2.11.

1) Нехай в піраміді ABCD всі грані — правильні трикутники, тобто всі ребра дорівнюють a і всі плоскі кути — 60° (рис.2.11). Щоб довести, наприклад, що мимобіжні ребра AD і BC перпендикулярні, достатньо довести, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює нулю.

2) Виберемо три некомпланарних вектори як базисні: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (довжини цих векторів дорівнюють а і кути між кожною парою векторів — 60°).

3) Виразимо вектори, вибрані в п. 1, через базисні: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$.

4) Знайдемо скалярний добуток векторів:

$AD \cdot C = \vec{a}\,(\vec{c}-\vec{b}.) = \vec{a}\,\vec{c}-\vec{a}\,\vec{b} = a{\cdot}a{\cdot}\cos 60° - a{\cdot}a{\cdot}\cos 60° = 0.$

Але якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні, отже, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, тому $AD \perp BC$.

Для того, щоб показати, як одну і ту саму задачу можна розв'язувати різними способами, пропонуємо наступну задачу.

Задачі 18 - 20 також доцільно розглянути в 11 класі при вивченні розділу «Многогранники». Зокрема при вивченні теми «Піраміда. Правильна піраміда».

Задача 21. Довжини всіх ребер паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють одиниці, $AA_1 \perp (ABC)$, а кут BAD дорівнює 60°. Обчисліть: довжину діагоналі DB_1 .

Розв'язування

Перед розв'язанням цієї задачі доцільно повторити означення паралелепіпеда та властивості чотирикутників, які відомі учням з курсу планіметрії основної школи.

І спосіб. Оскільки за умовою, всі ребра паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.2.12) дорівнюють одиниці, то основа $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелограм $ABCD$ є ромбом (за означенням ромба).

Нехай О – точка перетину діагоналей ромба ABCD.

Тоді в трикутнику BOD ($\angle O=90°$): $BO=1/2$ (як половина гіпотенузи, що лежить проти кута 30°)

$BD = 2 \cdot BO = 1$ (за властивістю діагоналі ромба)

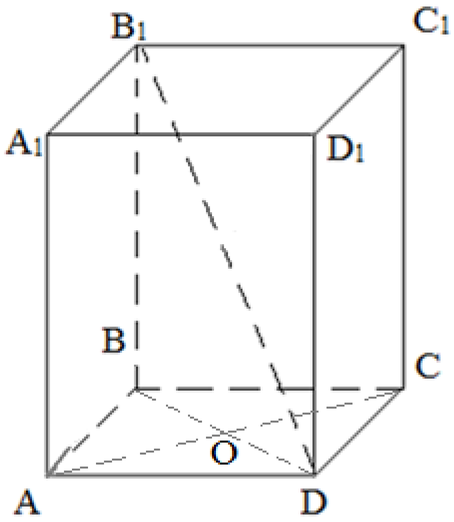


Рис.2.12

За умовою, $AA_1 \perp (ABC)$, тобто за властивістю паралельних прямих перпендикулярних до площини $BB_1 \perp (ABC)$. $BB_1 \perp BD$ (оскільки BD лежить в площині (ABC)).

ΔB_1BD ($\angle B=90°$): з теореми Піфагора

$$DB_1 = \sqrt{BD^2 + BB_1^2};$$

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

II спосіб (координатний)

Виберемо прямокутну декартову систему координат з початком в т. B.

Тоді координати т.B (0, 0, 0) Вісь ***y*** співпадає з ребром B_1B, вісь **z** співпадає з BD, вісь ***x*** перпендикулярна осям ***y*** та **z**.

Координати точок B_1 (0, 1, 0), D (0, 0, 1).

За формулою відстані між двома точками

$$DB_1 = \sqrt{\left(x_{B1} - x_D\right)^2 + \left(y_{B1} - y_D\right)^2 + \left(z_{B1} - z_D\right)^2};$$

$$DB_1 = \sqrt{2}.$$

III спосіб (векторний)

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1};$$

$$\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}\right)^2};$$

$$\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{DD_1}^2 + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DD_1} + 2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DD_1}}$$

За умовою, $\overline{DD_1} \perp \overline{DA}$ і $\overline{DD} \perp \overline{DC}$, тому їхні скалярні добутки дорівнюють 0. Оскільки у паралелограмі ABCD ∠A = 60°, то ∠D = 120°

Отже, кут між векторами $\overline{DA}$ і $\overline{DC}$ дорівнює 120° (рис.2.11).

Тому $\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{1+1+1+2\cdot1\cdot1\cdot\cos120^\circ} = \sqrt{2}$

IV спосіб (векторно-координатний метод).

Виберемо систему координат аналогічно до способу ІІ.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{BD}$

Їх координати $\overrightarrow{BB_1}(0;1;0)$ та $\overrightarrow{BD}(0;0;1)$

Знайдемо їх довжини

$\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$

$\left|\overrightarrow{BB_1}\right| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$

$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1}$

$\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1}\right)^2}$, де вектор $\overrightarrow{DB}(0;0;-1)$ протилежний до вектора $\overrightarrow{BD}(0;0;1)$.

$\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{DB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BB_1}\right| + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2}$;

$\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{1^2+2\cdot1\cdot1\cdot\cos90^\circ+1^2} = \sqrt{2}$.

Відповідь: $\sqrt{2}$

Останню задачу бажано розглянути з метою продемонструвати учням різні можливі способи розв’язання. Вважаємо, що доцільніше її буде розв’язувати при вивченні розділу «Многогранники» в 11 класі.

2.7. Методичні рекомендації навчання учнів застосувань координатного та векторного методів до розв’язування алгебраїчних задач

Аналіз сучасних підручників з геометрії свідчить про однотипність задач представлених в цих підручниках до теми «Координатно-векторний метод розв’язування задач». Автори підручника [13] зазначають, що засоби аналітичної геометрії (тобто координати, вектори, геометричні перетворення) дають змогу розв’язувати алгебраїчні задачі за допомогою геометрії, а геометричні — за допомогою алгебри. Але окрім традиційних задач та задач прикладного змісту (зокрема, пов’язаних із фізикою) не пропонують цікавих і нестандартних завдань для учнів. Розглянемо застосування векторів до доведення нерівностей та дослідження функцій.

Задача 22.

Довести, що нерівність

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a+3}+\sqrt{50-3a}\le 12$$

виконується для всіх значень ***a***, при яких визначена ліва частина вихідної нерівності.

Доведення

Розглянемо вектори $\overline{x}(1;1;1)$ і $\overline{y}(\sqrt{a+1},\sqrt{2,-3},\sqrt{50-3a})$

За нерівністю Коші-Буняковського (модуль скалярного добутку двох векторів менше або дорівнює добутку модулів) маємо:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a+3}+\sqrt{50-3a}\le$$
$$\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2a-3}\right)^2+\left(\sqrt{50-3a}\right)^2}=\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=12$$

Задача 23.

Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$$

Розв’язання

Розглянемо вектори $\overline{a}(1;2\sqrt{2})$ і $\overline{b}(\sqrt{x};\sqrt{2-x})$

і нехай α – кут між цими векторами.

Оскільки координати цих векторів невід’ємні, то $0°\le\alpha\le 90°$, $0\le\cos\alpha\le 1$.

Знайдемо довжини цих векторів

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=3$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2}=\sqrt{2}$$

З умови, $y=\bar{a}\cdot\bar{b}=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$

З іншого боку,

$y=\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=3\sqrt{2}$

Отже, $y_{\max}=3\sqrt{2}$

Це значення y досягається в тому випадку, коли $\bar{a}=\mathrm{k}\bar{b}$

$\mathrm{k}\sqrt{x}=1,$

$k\sqrt{2-x}=2\sqrt{2}$.

Тобто $x=\frac{2}{9}$

При вказаних обмеженнях для α, чим більше α, тим менше y.

Найбільше значення α досягається у випадку, коли $\bar{b}=(\sqrt{2};2)$,

звідси x=2 і $y_{\min}=y(2)=\sqrt{2}$

Отже, $y_{\max}=y(2)=3\sqrt{2}$, $y_{\min}=y(2)=\sqrt{2}$

Відповідь: найбільше значення $3\sqrt{2}$; найменше значення $\sqrt{2}$.

Задача 24.

Дослідити, яке найбільше та найменше значення може приймати вираз $5\sin x-12\cos x$.

Розв’язання

Нехай $\bar{a}=(5;-12)$ і $\bar{b}=(\sin x;\cos x)$

Тоді скалярний добуток цих векторів

$\bar{a}\cdot\bar{b}=5\sin x-12\cos x$

Оскільки $|\bar{a}\cdot\bar{b}|\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$, то

$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2\le\bar{a}^2-\bar{b}^2$.

Тобто $\left(5\sin x-12\cos x\right)^2\le13^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$.

Звідси$\left(5\sin x-12\cos x\right)^2\le13^2$;

$-13<5\sin x-12\cos x\le13$.

Таким чином, найбільше значення даного виразу дорівнює 13, найменше значення дорівнює -13.

Задача 25.

Довести нерівність

$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \le 1$

Доведення

Розглянемо вектори $\bar{a}(\sin x \sin y; \cos x \cos y)$ і $\bar{b}(\sin z; \cos z)$

Тоді

$|\bar{b}| = \sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

$|\bar{a}| = \sqrt{\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y} \le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$.

$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \le |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \le 1$.

Таким чином, $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \le 1$.

Вважаємо, що координатно-векторний метод розв'язання задач порівняно з іншими методами, дуже часто дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв'язання багатьох геометричних задач і доведення теорем. Він зручний також тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак і властивостей фігур. Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії застосовується досить рідко, хоч і є досить зручним.

2.8. Експериментальна перевірка основних положень дослідження та її результати

З метою виявлення рівня знань учнів з теми «Координатно-векторний метод» будо проведено констатувальний експеримент.

Дослідження було проведено на базі Славутицької загальноосвітньої школи I-III ступенів №1 Славутицької міської ради Київської області.

Нами було запропоновано тест, представлений в додатку А.

В тестуванні приймали участь учні 10 класів.

За результатами тестування учнів 10-Б класу ми отримали результати, представлені в таблиці 2.2

Таблиця 2.2

Результати тестування учнів 10-Б класу Славутицької загальноосвітньої школи I-III ступенів №1

	Кількість учнів	%
Високий рівень	2	9,52
Достатній рівень	11	52,38
Середній рівень	8	38,10
Низький	0	0

Наочно результати тестування представлені на діаграмі (рис. 2.12)

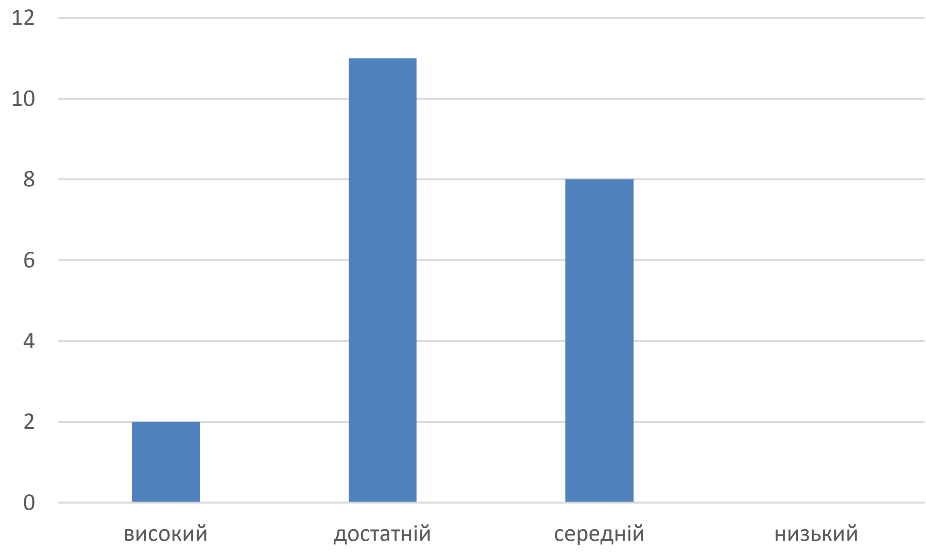


Рисунок 2. 12. Рівень знань учнів 10-Б класу Славутицької загальноосвітньої школи I-III ступенів №1 за результатами тестування з теми «Координатно-векторний метод»

Отже, рівень знань учнів цього класу з теми «Координатно-векторний метод» вище середнього. Більшість учнів класу засвоїли основні поняття. Переважна більшість помилок пояснюється неуважністю при обчисленнях.

Висновки

Метою даної роботи було дослідження особливостей формування координатно-векторної складової в курсі стереометрії старшої школи. В зв’язку з чим були виконані наступні завдання: проаналізовано зміст програми з математики по даній темі; описано координатно-векторний метод і способи його застосування на прикладі конкретних математичних задач; виділено вміння, необхідні для успішного оволодіння методом; розроблено методику викладання теми у шкільному курсі стереометрії.

Однією з головних особливостей її викладання є необхідність гармонійного поєднання повторення матеріалу про вектори і координати на площині з його узагальненням у разі простору, що рекомендується робити паралельно. З одного боку, це забезпечує природність повторення, а з іншого — створює сприятливі умови для розглядання нового матеріалу. Широке використання аналогії реально заощаджує час на вивчення нового матеріалу.

Взагалі систематичне застосування аналогії між об'єктами і відношеннями між ними на площині і у просторі є одним з головних дидактичних прийомів викладення даної теми. Природність цієї аналогії дає змогу доволі великий обсяг навчального матеріалу запропонувати учням для самостійної роботи.

Друга особливість пов'язана з необхідністю орієнтації матеріалу як нового, так і відомого з основної ніколи на потреби суміжних дисциплін і, перш за все, фізики. Можна обмежитися формуванням зазначених вище умінь і навичок у найпростіших ситуаціях як з геометричної точки зору, так і з обчислювальної. Наприклад, обмежитися розкладанням векторів на перпендикулярні складові, що цілком достатньо для внутрішніх потреб математики і застосувань у широкому колі прикладних задач.

При вивченні теми варто зробити акцент на питаннях, які стосуються розкладання векторів на складові. Вони мають і самостійні застосування у суміжних предметах і, крім цього, на них ґрунтується природний підхід до введення координат векторів. Цей підхід набуває подальшого розвитку у вищій школі при вивченні лінійних просторів.

Використання координатного і векторного методів у навчанні математики дає змогу органічно доповнити алгоритмічну складову навчання математики евристичною. Алгоритмічна складова полягає в певній алгоритмізації застосування координатного і векторного методів до розв'язування задач. Дослідження показують, що складність для учнів становить не стільки застосування правил-орієнтирів зазначених методів до розв'язування задач, а саме відбір тих задач, які варто розв'язувати за допомогою координат або векторів. Уникнути цього можна, ознайомивши учнів з ознаками геометричних задач, які раціонально розв'язувати за допомогою координат або векторів.

До ознак геометричних задач, що розв'язують координатним методом, відносять наступні: вимога задачі пов'язана з обчисленням довжин деяких відрізків і величин кутів; можна раціонально вибрати прямокутну систему координат, пов'язавши осі координат з елементами даної фігури; в умові задачі може бути заданий довільний елемент.

Геометричні задачі, що розв'язуються векторним методом, мають такі ознаки: вимога задачі істотно пов'язана із знаходженням довжин відрізків, відношенням відрізків паралельних прямих, знаходженням величин кутів, з'ясуванням взаємного розташування прямих (паралельність, перпендикулярність тощо); дані лінійні елементи і кути часто розташовані в різних площинах і зведення їх в одну площину неможливе або недоцільне.

Евристична складова вчить знаходити нестандартне розв'язання, сприяє розвитку інтелектуальних умінь та творчих здібностей учнів.

Нами було проведено експериментальне дослідження з метою виявлення рівня засвоєння даної теми учнями. Виявлено, що рівень знань учнів з предмету дослідження вище середнього.

Слід зауважити увагу школярів на те, що координатний і векторний методи доведення теорем не універсальні, векторний метод зокрема зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільність відрізка в даному відношенні для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів. При розв’язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізків і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми. Інколи для розв’язування деяких геометричних задач буває зручно поєднувати координатний і векторний методи (використовувати при цьому координати відповідних векторів), а на деяких етапах розв’язування — застосовувати відомі геометричні співвідношення.

Список використаних джерел

1. Александров А. Д. Так что же такое вектор? // Математика в школе, 1984, № 5.

2. Апостолова Г. В. Геометрія: 11: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / Г.В.Апостолова; упорядкув. завдань: Лінчевського Л.В. [та ін.] - К.: Генеза, 2011. – 304 с : іл.

3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2010. – 479 с.

4. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011. – 480 с.

5. Бевз Г. П. Об определении понятия «вектор» // Математика в школе, 1980, № 2.

6. Бевз Г.П. Методи навчання математики : навч. метод. посіб. / Г.П.Бевз. – К. : Генеза, 2010. – 117 с. : іл.

7. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімрова Н.Г., Владіміров В.Н. Геометрія: 11кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень – К.: Генеза, 2011. – 336с.

8. Біляніна О.Я. Геометрія: 10 кл.: академ. рівень: підруч. для загальноосвіт. навч. закл./ О.Я. Біляніна, Г.І. Білянін, В.О. Швець.-К.: Генеза, 2010. – 256с.

9. Бурда М.І. Геометрія. 10 клас. Академічний рівень: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл./ М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова.-К.: Зодіак-ЕКО, 2010. – 176 с.: іл.

10. Василь Тадеєв. Геометрія. 10—11 класи. Програма для ЗНЗ універсального та фізико-математичного профілю / Математика в школі. Науково методичний журнал. №6. – 2004.

11. Гельфанд И.М. Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Нириллов. — М.: Наука. — 1973. — 88 с.

12. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 240 с. : іл.

13. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 272 с. : іл.

14. Готман Э. Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Э.Г. Готман, З.А. Скопец. — М.: Просвещение. — 1979. — 128 с.

15. Крайзман М. Л. Деякі методи та прийоми розв'язування задач із математики: навч.-метод. посіб. / М. Л. Крайзман ; пер. і ред. канд. фіз.-мат. наук Т. С. Кудрика. - Львів : Чижиков І. Е. [вид.], 2015. - 238 с.

16. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. Кн для вчителя. – К., 1994. – 464 с.

17. Лудина Г.Б. К изучению перемещений на координатной плоскости / Г.Б. Лудина // Математика в школе. — 1983. — №2 — С. 43.

18. Малай С.О., Філон Л.Г. Використання координатно-векторного методу в стереометрії // //Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Регіональної науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (27 листопада 2019 р., м. Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т.Г. Шевченко, 2018. – С. 86-87

19. Мерзляк А. Г.Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 240 с. : іл.

20. Навчальна програма з математики (рівень стандарт) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406 – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень). затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406– Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

22. Навчальна програма з математики. Профільний рівень для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406– Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

23. Нелін Є. П. Геометрія : дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. і профільн. рівні / Є. П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 240 с.

24. Потоскуев Е. Векторный метод решения стереометрических задач // Математика., 2009. - № 6.

25. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця - К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. - 267 с.

26. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.,: «Зодіак-ЕКО», 2000. – 512 с.

27. Смогоржевский А.С. Метод координат / А.С. Смогоржевский. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. — 1952. — 42 с.

28. Тадеєв В.О. Геометрія. 10 клас: Підручник. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.

Додатки

Додаток А

Тест

1. Яка з точок А(6;3;0), Б(0;7;-б), С(-8;0;9) належить координатній площині *yOz?*

А Точка *A* Б Точка *B* В Точка С Г Жодна з даних точок

2. Яка із заданих точок належить осі *Oz?*

А A(3;0;0) Б B(0;0;-5) В C(0;-4;0) Г D(2;3;0)

3. Відносно якої з даних точок симетричні точки А(8;-5;3) і В(0;1;-9)?

А C(8;-4;-б) Б D(4;-3;6) В E(-8;6;-12) Г F(4;-2;-3)

4. Точка *M* — середина відрізка *AB.* Знайдіть координати точки *B,* якщо A(1;2;5), M(4;0;-3).

А B(3;-2;-8) Б B(-3;2;8) В B(-7;2;11) Г B(7;-2;-ll)

5. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо A(4;-3;1), C(8;1;3).

А 36 Б $2\sqrt{6}$ В 6 Г $4\sqrt{6}$

6. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{DC}$, якщо C(11;-7;5), D(13;2;-4).

А $\overrightarrow{DC}$ (2;9;-9) Б $\overrightarrow{DC}$ (-2;-9;9) В $\overrightarrow{DC}$ (24;-5;1) Г $\overrightarrow{DC}$ (-2;-9;1)

7. Дано точки A(2;1;4), Б(4;2;6), C(3;-2;1) і D(7;0;5). Яка з рівностей є правильною?

А $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ Б $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ В $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ Г $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

8. Знайдіть значення λ, при якому вектори $\vec{a}$ (3;2-λ;5) і $\vec{b}$ *(3;2λ+ 8;5)* рівні?

А 4 Б 2 В -2 Г -4

9. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$ (-3;7;1).

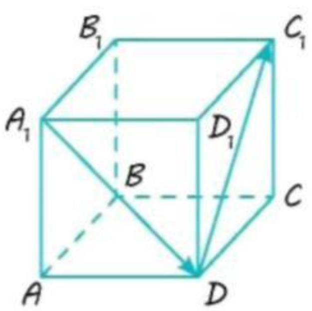
А 11 Б 59 В $\sqrt{59}$ Г 5

10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображеного на рисунку, дорівнює 4. Знайдіть довжину суми векторів $\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC_1}$.

А 4 Б $4\sqrt{2}$ В 8 Г $4\sqrt{3}$

11. Який із даних векторів колінеарний вектору $\vec{a}$ (12;-16;20)?

А $\vec{b}$(6; 8; 10) Б $\vec{c}$(24;-32;-40) В $\vec{d}$ (6;-8;10) Г $\vec{e}$ (-24; 32; 40)



12. У прямокутній системі координат у просторі задано точки O(0;0;0) і A(3;4;5). Із точки *A* на вісь *Oz* проведено перпендикуляр. Точка B — основа цього перпендикуляра. Установіть відповідність між величинами (1-4) та їхніми числовими значеннями (А-Д).

Величина	*Числове значення*
1 довжина вектора $\overrightarrow{OA}$ 2 відстань від точки *A* до площини *xOz* 3 абсциса точки *B* 4 довжина відрізка *AB*	А 0 Б $5\sqrt{2}$ В 3 Г 4 Д5

13. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу з центром у початку координат, якій належить точка A(0;0;-3). Яка з наведених точок також належить цій сфері?

А B (1;1;-1) Б B (0;1;$2\sqrt{2}$) В C (2;0;1) Г D (3;-3;0)

14. При якому значенні *m* вектори $\vec{a}$ (2;m;5) і $\vec{b}$ (-4;6;2m) перпендикулярні?

А $-\frac{1}{2}$ Б -2 В 2 Г $\frac{1}{2}$

15. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ (-2;0;2) і $\vec{b}$ (0;2; 2).

А 60° Б 120° В 45° Г 135°

16. Укажіть рівняння площини, паралельної площині *2x-5y + 3z-7 = 0.*

А 4x + 10y + 6z + 9 = 0 В 10x-25y-15z-1 = 0

Б 6x-15y + 9z + 13 = 0 Г *4x-10y + 3z-7 = 0*

17. Укажіть рівняння площини, перпендикулярної до площини 3x + 2y-4z + 5 = 0.

А 4x-3y + z + 9 = 0 В *2x-4y-5z-1 = 0*

Б *3x-5y + 2z + 13 = 0* Г *2x + 3y + 3z-7 = 0*