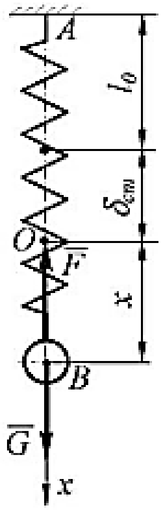
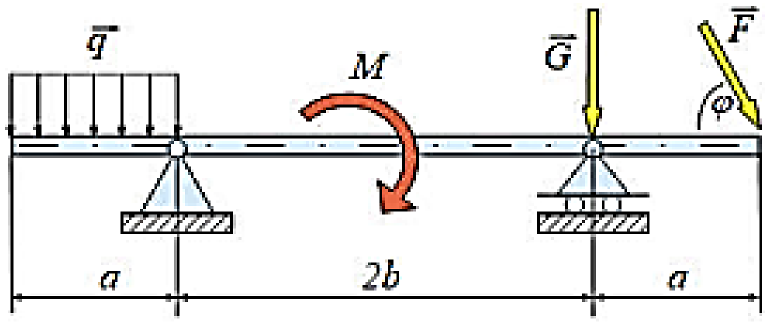
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ»
імені Т.Г.ШЕВЧЕНКА

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»





Чернігів НУЧК 2023

УДК 531(075.8)
І73

Укладач:
Бакалов Валерій Григорович, кандидат технічних наук, доцент кафедри хімії, технологій та фармації Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка

Бакалов В.Г.

І73 Теоретична механіка. Методичні вказівки до практичних робіт і самостійної роботи з дисципліни “Теоретична механіка” / укладач: Бакалов В.Г. Чернігів: НУЧК, 2023, 49 с.

Затверджено вченою радою природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, протокол №6 від 29.12.2023 р.

Рецензенти:

кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри математики та економіки Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, доцент **Філон Лідія Григорівна**

кандидат технічних наук, професор кафедри технологій зварювання та будівництва Національного університету «Чернігівська політехніка», професор **Кайдаш Михайло Дмитрович**

Методичні рекомендації складено для здобувачів освіти, які навчаються за освітньо-професійною програмою Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Наведено короткі теоретичні відомості, методику та приклади розв’язання задач, задачі для самостійного розв’язування.

Завдання до практичних робіт запропоновані відповідно до змісту ОП Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, що дозволить забезпечити організацію ефективної індивідуальної роботи студентів.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в університетській програмі фундаментальної підготовки фахівців. Вона вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних та якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Теоретична механіка широко застосовує методи абстракції, узагальнення, математичні методи, методи формальної логіки. Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона. Згідно характеру задач теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку. В статиці розглядається вчення про сили і про умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. В кінематиці розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл. В динаміці вивчається рух матеріальних тіл під дією сил.

Необхідною умовою успішного оволодіння дисципліною є виконання завдань, які виконуються на практичних заняттях і самостійно. У методичних вказівках сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв'язування.

Методичні вказівки складені на базі методичних матеріалів наведених в списку використаних джерел.

Кожний параграф має коротку теоретичну частину по темі занять, далі наведені приклади і завдання.

На практичних заняттях спочатку вивчається теоретична частина і студенти відповідають на питання викладача. Далі на заняттях вивчаються наведені приклади і тільки після того студенти приступають до вирішення індивідуальних задач. Студенти, які не встигли виконати індивідуальну задачу під час занять, виконують її дома самостійно і здають звіти рішень задач викладачу на наступному занятті.

Методичні вказівки відповідають діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для здобувачів освіти, які навчаються за освітньо-професійною програмою Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

РОЗДІЛ 1. СТАТІКА

1 ЗНАХОДЖЕННЯ ОБ'ЄКТУ РІВНОВАГИ ТА РОЗСТАНОВКА СИЛ

Мета заняття: навчитися визначати та описувати всі сили і реакції сил під дією яких знаходиться у рівновазі вказаний об'єкт.

Хід роботи

1. Вказати об'єкт рівноваги.
2. На схемі проставити всі сили та реакції які діють на об'єкт рівноваги.
3. Вказати зовнішні (активні сили), які прикладені до об'єкту рівноваги.
4. Вказати реакції опор, які діють на об'єкт рівноваги.
5. Зробити висновки (вказати всі сили і реакції сил під дією яких знаходиться у рівновазі вказаний об'єкт).

Короткі теоретичні відомості

Під рівновагою розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, пружним, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статиці розв'язуються такі основні задачі:

1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду;

2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

Ці задачі статики можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила – величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма, уздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили. Основною одиницею сили є 1ньютон (Н).

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке находиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається реакцією в'язі. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати активними силами. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1

Невагома стріла AB, яка шарнірно закріплена до стіни в точці A, утримується в рівновазі тросом BC. До шарніра B прикріплено перекинутий через нерухомий блок D трос BD, до вільного кінця якого прикріплено вантаж вагою G (рис. 1.1). ***Розглянути об’єкт рівноваги – шарнір B***.

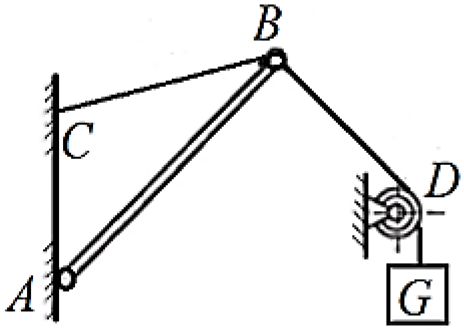
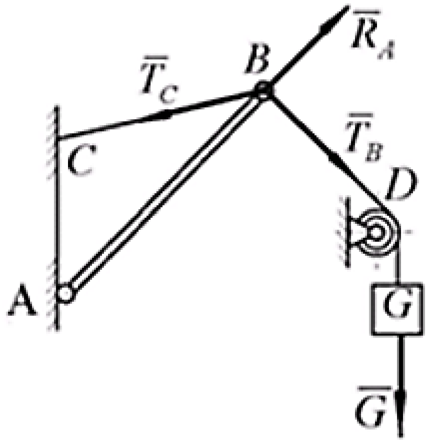


Рис. 1.1 – Схема до прикладу 1

Розв’язок

1. Об’єкт рівноваги – шарнір B.
2. На схемі (рис.1.2) проставлено сили та реакції сил: $\vec{G}$, $\overrightarrow{R_A}$, $\overrightarrow{T_C}$, $\overrightarrow{T_B}$



3. Место для уравнения.

Рис. 1.2 – Схема з силами та реакціями сил до прикладу 1

3. Активна сила - $\vec{G}$ (сила тяжіння).

4. Реакція в’язей - $\overrightarrow{T_C}$, $\overrightarrow{T_B}$ (реакція гнучкої в’язі), $\overrightarrow{R_A}$ – (реакція ідеального стержня).

Висновки: Шарнір B знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння вантажу G; натягу $\overrightarrow{T_B}$ троса BD; натягу $\overrightarrow{T_C}$ троса BC; реакції $\overrightarrow{R_A}$ стріли AB.

Приклад 2

Балка AB вагою P закріплена циліндрічно-нерухомую опорою в точці A і утримується в рівновазі тросом DE (рис.1.3). До точки B балки прикріплено перекинутий через нерухомий блок трос BK, який навантажено тілом вагою G.

Розглянути об'єкт рівноваги – балку AB.

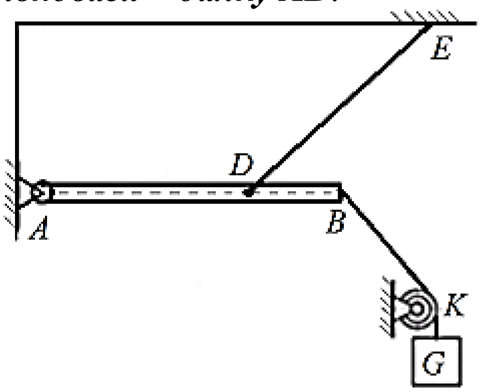


Рис. 1.3 - Схема до прикладу 2

Розв'язок

1. Об'єкт рівноваги – балка AB
2. На схемі (рис.1.4) проставлено сили та реакції сил: $\vec{G}$, $\overrightarrow{R_{Ay}}$, $\overrightarrow{R_{Ax}}$, $\overrightarrow{T_D}$, $\overrightarrow{T_B}$, $\vec{P}$.

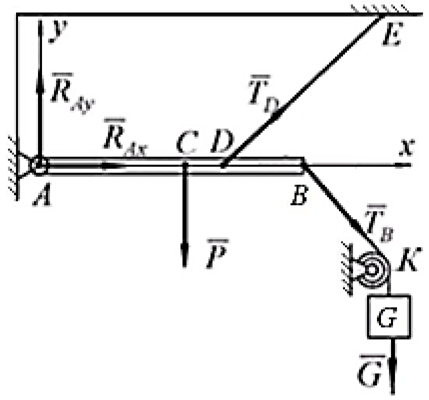


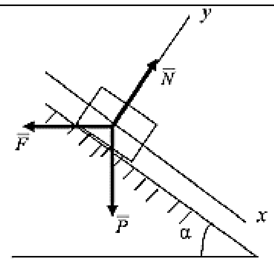
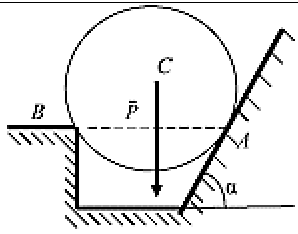
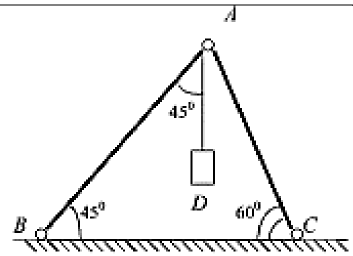
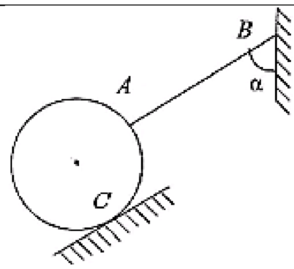
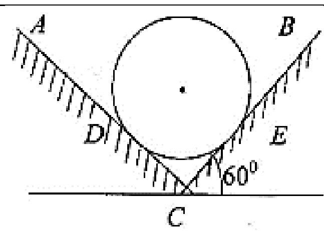
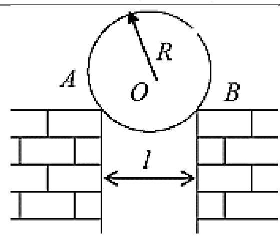
Рис. 1.4 - Схема з силами та реакціями сил до прикладу 2

3. Активні сили - $\vec{G}$, $\vec{P}$ (сила тяжіння).
4. Реакція в'язей - $\overrightarrow{T_D}$, $\overrightarrow{T_B}$ (реакція гнучкої в'язі), $\overrightarrow{R_{Ay}}$, $\overrightarrow{R_{Ax}}$ – (реакція циліндрично-нерухомого шарніру).

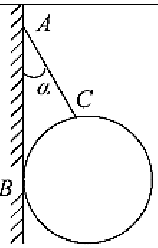
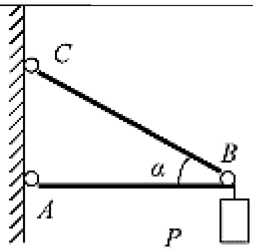
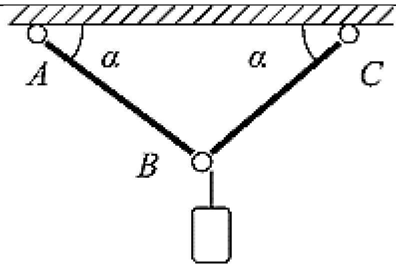
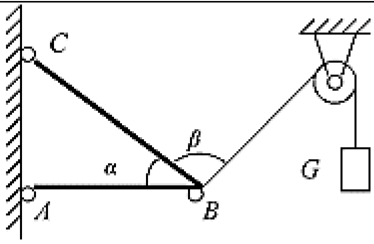
Висновки: Балка AB знаходиться в рівновазі під дією сил тяжіння P балки AB та вантажу G; натягу $\overrightarrow{T_B}$ троса BK; натягу $\overrightarrow{T_D}$ троса DE; реакції циліндрично-нерухомого шарніру A, яка розкладена за осями обраної системи координат (вісь A*x* збігається з віссю балки AB, а вісь A*y* – перпендикулярна до балки).

Варіанти для індивідуальних завдань

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**)

Варіант	Задача	Рисунок
1	2	3
1.	Тіло вагою P лежить на гладенькій похилій площині. До тіла прикладена зовнішня сила F. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – тіло A.	
2.	Однорідна куля вагою P спирається в точці A на гладеньку похилу площину, а в точці B на виступ. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – однорідну кулю.	
3.	Два невагомі стержня AB і AC з'єднані шарніром у точці A і прикріплені до підлоги циліндричними шарнірами B і C. До шарніру A підвішений на нитці вантаж D, вага якого P. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – шарнір A.	
4.	Однорідна куля вагою P утримується на гладенькій похилій площині канатом AB, який жорстко закріплений у точці B. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – кулю.	
5.	На двох взаємно перпендикулярних похилих площинах AB і BC лежить однорідна куля вагою P. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – кулю	
6.	Циліндрична труба вагою P лежить на виступах цегляної кладки. ***Розглянути об'єкт рівноваги*** – трубу.	

Продовження таблиці

1	2	3
7.	До вертикальної гладкої поверхні АВ підвішена на тросі АС однорідна куля вагою Р. ***Розглянути об’єкт рівноваги*** – кулю.	
8.	Тіло вагою Р повішено на тросі до шарніру В, який з’єднує два стержня ВС і ВА. Вага стержнів Р1 і Р2 відповідно. Стержні прикріплені до стіни циліндричними шарнірно-нерухомими опорами. ***Розглянути об’єкт рівноваги*** – шарнір В.	
9.	Невагомі стержні АВ і ВС з’єднані між собою шарніром В, а зі стелею циліндричними шарнірно-нерухомими опорами. До шарніра В прикріплено за допомогою нерозтяжного тросу вантаж вагою Р. ***Розглянути об’єкт рівноваги*** – шарнір В.	
10.	До шарніра В, який з’єднує два невагомих стержня АВ і ВС, прикріплений трос, перекинутий через блок. До другого кінця тросу підвішений вантаж вагою Р. Стержні АВ і ВС закріплені циліндричними шарнірно-нерухомими опорами. ***Розглянути об’єкт рівноваги*** – шарнір В	

2 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ ОПОР КОНСТРУКЦІЙ. УМОВИ РІВНОВАГИ БАЛОК І СТЕРЖНІВ ПІД ДІЄЮ СИСТЕМИ ЗБІЖНИХ СИЛ НА ПЛОЩІ

Мета заняття: навчитися застосовувати різні методи при розв’язання задач статики.

Хід роботи

1. Виділити об’єкт, який буде розглядатися в рівновазі.
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З’ясувати характер в’язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Використати геометричний метод для розв’язку поставленої задачі.

5. Використати аналітичний метод для розв'язку поставленої задачі.
6. Порівняти результати.

Короткі теоретичні відомості

Система збіжних сил - це система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці - точці збігу сил (О) . Така система є найпростішою. Система збіжних сил буває двох видів – плоскою (рис. 2.1,а) або просторовою (рис. 2.1,в)

Якщо перенести всі сили вздовж лінії їх дії в точку збігу сил (рис 2.1, а), дістанемо еквівалентну систему сил, що прикладена до однієї точки.

Рівнодіюча даної системи сил, які проходять через точку О, прикладена до цієї ж точки і зображується замикаючою стороною силового многокутника, який побудовано (рис.2.1,б) на силах, що додаються, тобто рівнодіюча дорівнює векторній сумі сил, що додаються:

$$\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\ldots+\overline{F_n}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}$$

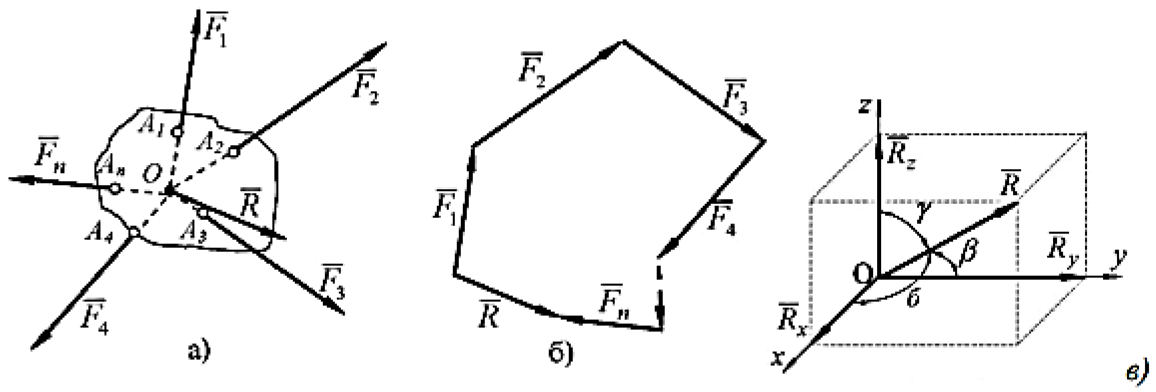


Рис. 2.1 – Система збіжних сил

Геометричний метод розв'язування задач

Задачі про рівновагу зустрічаються не лише в теоретичній механіці, ай в багатьох технічних дисциплінах. Для їх розв'язання використовують різноманітні методи: аналітичний, який базується на рівняннях рівноваги; графічний або графоаналітичний, які базуються на застосуванні геометричної умови рівноваги.

Використання геометричної умови рівноваги доцільне для збіжної системи трьох сил, бо в цьому випадку розв'язання просте, не потребує великих обчислень, але до деякої міри і неточне: точність розв'язання залежить від зроблених креслень.

Безпосереднє використання багатокутника сил при розв'язуванні задач статики приводить до геометричних побудов з наступним визначенням невідомих елементів за допомогою, наприклад, формул тригонометрії.

При розв'язуванні задач на рівновагу твердого тіла геометричним методом рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити об'єкт, який буде розглядатися в рівновазі. 10
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З'ясувати характер в'язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Побудувати замкнений силовий багатокутник (побудову треба починати з сил, відомих за модулем і за напрямом).

5. З силового багатокутника визначити невідомі сили.

Аналітичний метод розв’язування задач

Якщо сил більше трьох, то раціонально використовувати аналітичний метод, який є універсальним не тільки для збіжної системи сил, а й при розв'язанні будь-якої задачі статики про рівновагу; при цьому дотримуються наступної послідовності:

- необхідно вибрати тіло (або точку), рівновагу якого (якої) будемо розглядати;

- прикласти до нього (неї) активні сили; - відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей;

- визначити, яка система сил діє на тіло (точку) та вибрати раціонально систему координат;

- скласти необхідну кількість рівнянь рівноваги і розв'язати їх відносно невідомих;

- провести аналіз отриманих результатів.

Вибір напряму координатних осей, на які проектуються сили, не має принципового значення, але під час розв'язання задач доцільно осі напрямляти перпендикулярно невідомим силам: отримуємо більш прості рівняння, які легше розв'язати з точки зору математики. В цьому і полягає раціональність вибору осей координат.

Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил - необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх цих сил на кожну з координатних осей дорівнювали нулю:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = 0$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = 0$$

Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил виражаються трьома рівняннями:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = 0 \\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = 0 \\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz} = 0 \end{cases}$$

При розв'язанні задач статики про рівновагу кількість невідомих не повинна перевищувати кількості рівнянь рівноваги - це означає, що задача має бути статично означеною. Якщо ж невідомих більше кількості рівнянь рівноваги, то таку статично неозначену задачу неможливо розв'язати методами теоретичної механіки: ці задачі розв'язують методами опору матеріалів, додаючи до рівнянь рівноваги зі статики рівняння деформацій.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1

Ідеальний стержень АВ утримується у рівновазі нерозтяжною ниткою ВС (рис.2.2). До шарніра В стержня на нитці підвішене тіло вагою G. Визначити натяг нитки ВС і реакцію стержня АВ, якщо α=450 ( ); β=1050 ( ); G=500Н

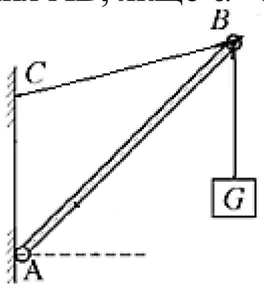


Рис. 2.2 – Схема до прикладу 1

Розв’язок:

1. Об’єкт рівноваги – ідеальний стержень АВ (рис.2.3);

2. Активні сили – $\vec{G}$ (сила тяжіння);

3. Реакції в’язей - $\vec{T}$ (реакції гнучкої в’язі); - $\vec{S}$ (реакція ідеального стержня).

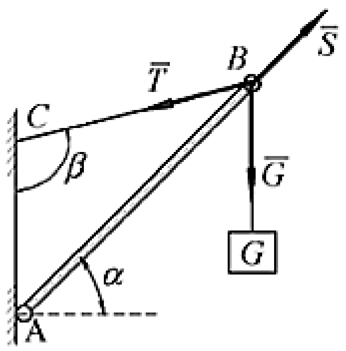


Рис. 2.3 - Схема з силами та реакціями сил до прикладу 1

Висновки: Вузол В знаходиться у рівновазі під дією трьох сил $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{S}$, які лежать в одній площині і мають одну й ту ж точку.

<u>*Геометричний метод*</u>

Величину і напрям зусилля $\vec{S}$ та величину натягу нитки $\vec{T}$ визначимо геометричним методом, скориставшись геометричною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил. Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на точку В:

$$\sum \overrightarrow{F_k} = \vec{T} + \vec{G} + \vec{S} = 0$$

Згідно з записаним векторним рівнянням побудуємо силовий трикутник.

Для цього з довільної точки ***a*** (рис. 2.4) відкладаємо в деякому масштабі вектор $\vec{G}$. З точки «***a***» початку вектору $\vec{G}$ проведемо пряму, паралельну до лінії дії реакції $\vec{T}$, а з точки «***b***» кінця вектору $\vec{G}$ - пряму, паралельну до лінії дії реакції

$\vec{S}$. Проведені прямі перетнуться в точці ***c***, утворивши трикутник ***abc***. Покажемо напрям сил, керуючись тим, що при додаванні векторів початок кожного наступного вектору повинен виходити з кінця попереднього.

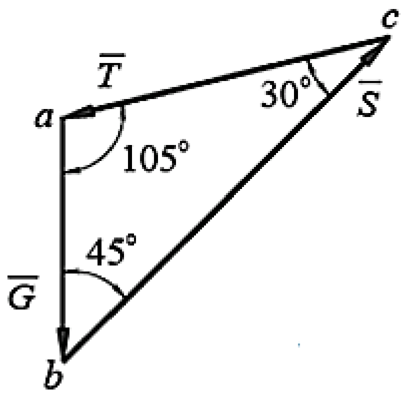


Рис. 2.4 – Силовий трикутник до прикладу 1

Знайти невідомі величини можна за відомими кутами трикутника з теореми синусів:

$$\frac{G}{sin30^0} = \frac{T}{sin45^0} = \frac{S}{sin105^0}$$

Звідки:

$$T = G\frac{sin45^0}{sin30^0} = 500\frac{0.707}{0.5} = 707\text{Н}$$

$$S = G\frac{sin105^0}{sin30^0} = G\frac{sin75^0}{sin30^0} = 500\frac{0.969}{0.5} = 966\text{Н}$$

Аналітичний метод

Складемо рівняння рівноваги. Для цього візьмемо систему координат ***Oxy***, з початком в точці ***O*** (рис. 2.5), спроектуємо сили на осі і складемо рівняння рівноваги. Для проекції на вісь ***Ox*** достанемо:

$$\sum F_{kx} = S \cdot cos45^0 - T \cdot cos15^0 = 0$$

Знак проекції $\vec{S}$ - плюс, оскільки вона направлена за додатним напрямком осі ***Ox***. Знак проекції $\vec{T}$ мінус, оскільки вона направлена за від'ємним напрямом осі ***Ox***. Проекція сили $\vec{G}$ на вісь дорівнює нулю.

Для проекції на вісь ***Oy*** достанемо:

$$\sum F_{ky} = S \cdot sin45^0 - T \cdot cos75^0 - G = 0$$

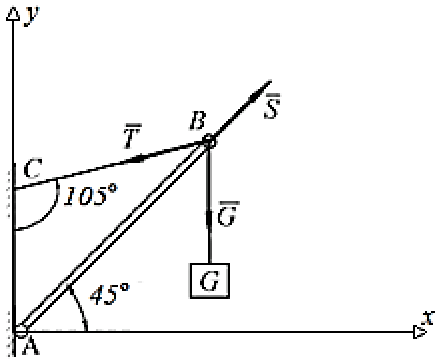


Рис. 2.5 – Система координат для прикладу 1

Проекції сил $\vec{T}, \vec{G}$ мають знак мінус, оскільки направлені за від'ємним напрямом осі ***Oy***. Проекція сили $\vec{S}$ має знак плюс, оскільки направлена за додатним напрямом осі ***Oy***.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини G, рівняння набудуть вигляду:

$$0.707 \cdot S - 0.966 \cdot T = 0;$$

$$0.707 \cdot S - 0.259 \cdot T - 500 = 0.$$

Знайшовши з першого рівняння:

$$T = \frac{0.707 \cdot S}{0.966} = 0.73 \cdot S,$$

і підставивши в друге рівняння, отримуємо:

$$0.707 \cdot S - 0.259 \cdot 0.73 \cdot S - 500 = 0;$$

$$S = 966 \text{ Н};$$

$$T = 707 \text{ Н}.$$

Відповідь: $T = 707$ Н; $S = 966$ Н.

Приклад 2

Нитка з двома тілами на кінцях ***P*** і ***Q*** перекинута через балки блоки ***A*** і ***B*** (рис.2.6). В точці ***O*** до нитки, що знаходиться між блоками, прикріпили вантаж ***G*** = 27.3Н. При рівновазі системи нитка ***OA*** утворила з горизонталлю кут 60^0, а нитка ***OB*** - 45^0 .

Визначити вагу тіл ***P*** і ***Q***. Силами тертя в блоках знехтувати

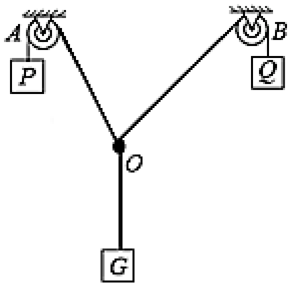


Рис. 2.6 - Схема до прикладу 2

Розв'язок:

З'ясуємо рівновагу якого об'єкта треба розглянути у задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіла ***P*** та вагу тіла ***Q***, які прикладені до центрів мас тіл і направлені вертикально донизу. Кожне тіло натягує нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блок змінює напрям нитки, а відповідно, і напрям сили натягу нитки. Сили $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1}}$ і $\overrightarrow{\boldsymbol{Q_1}}$ (рис. 2.7), за модулем, дорівнюють ***P*** і ***Q***, але направлені уздовж ***OA*** і ***OB***.

Оскільки прямі ***OA*** і ***OB*** перетинаються у точці ***O***, до якої можна прикласти і задану силу ***G***, то при розв'язуванні задачі треба розглянути рівновагу точки ***O***.

Таким чином, на об'єкт рівноваги, точку ***O***, діють сили натягу $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1}}$ нитки ***OA***; натягу $\overrightarrow{\boldsymbol{Q_1}}$ нитки ***OB***; вага тіла ***G***. (Вагу тіл ***P*** і ***Q*** враховувати не треба, оскільки вони прикладені не до об'єкту рівноваги точки ***O***).

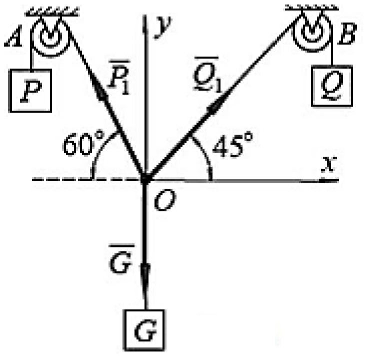


Рис. 2.7 - Схема з силами та реакціями сил до прикладу 2

<u>Аналітичний метод</u>

Складемо рівняння рівноваги. Для цього візьмемо систему координат ***Oxy***, з початком в точці ***O***, спроектуємо сили на осі і складемо рівняння рівноваги.

Сума проекцій усіх сил на вісь ***Ox*** дорівнює

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cdot cos45^0 - P_1 \cdot cos60^0 = 0$$

Сума проекцій усіх сил на вісь ***Oy*** дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \cdot sin45^0 - P_1 \cdot sin60^0 - G = 0$$

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини ***G***, рівняння набудуть вигляду:

$$0.707 \cdot Q_1 - 0.5 \cdot P_1 = 0$$

$$0.707 \cdot Q_1 + 0.866 \cdot P_1 - 27.5 = 0$$

Визначивши з першого рівняння:

$$P_1 = \frac{0.707 \cdot Q_1}{0.5} = 1.41 \cdot Q_1$$

і підставивши в друге, отримуємо:

$$0.707 \cdot Q_1 + 0.866 \cdot 1.41 \cdot Q_1 - 27.5 = 0$$

$$Q_1 = 14.1\text{Н};\quad P_1 = 20\text{Н}.$$

<u>Геометричний метод</u>

Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на точку ***O***:

$$\sum \overrightarrow{F_k} = \vec{G} + \overrightarrow{Q_1} + \overrightarrow{P_1}$$

Згідно з записаним векторним рівнянням побудуємо силовий трикутник (рис. 2.8).

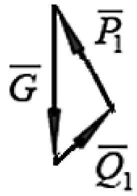


Рис. 2.8 - Силовий трикутник до прикладу 2

Позначимо та визначимо кути в отриманому трикутнику: кут α=45^0 (кут між силами $\vec{G}$ та $\overrightarrow{Q_1}$); кут β=30^0 (кут між силами $\vec{G}$та $\overrightarrow{P_1}$); кут γ=180^0 - (45^0 +30^0)=105^0 (кут між силами $\overrightarrow{Q_1}$ та $\overrightarrow{P_1}$).

Знайти невідомі величини можна за відомими кутами трикутника з теореми синусів:

$$\frac{G}{sin31} = \frac{P}{sin45^0} = \frac{Q}{sin75^0}$$

Звідки:

$$P = G\frac{sin45^0}{sin105^0} = G\frac{sin45^0}{sin75^0} = 27.3\frac{0.707}{0.966} = 20\text{Н}$$

$$Q = G\frac{sin30^0}{sin105^0} = G\frac{sin30^0}{sin75^0} = 23.3\frac{0.5}{0.966} = 14.1\text{Н}$$

Відповідь: P = 20Н; Q = 14.1Н.

Варіанти для індивідуальних завдань

На схемах (рис. 2.9) наведено варіанти підвісу ліхтаря вагою ***Q***. Знайти зусилля у тросі та стержнях ***AB*** і ***BC***. Дані для розрахунку наведені в таблиці.

Задачу розв'язати двома способами – графічним та аналітичним. Результати порівняти та зробити висновки.

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**)

Таблиця

Варіант	***Q***,Н	**α**, град	**β**, град	**γ**, град
1.	50	30	45	30
2.	40	30	60	45
3.	60	60	30	60
4.	30	30	120	75
5.	45	30	60	15
6.	60	30	60	30
7.	70	60	30	45
8.	30	60	45	60
9.	80	30	60	75
10.	150	30	30	45

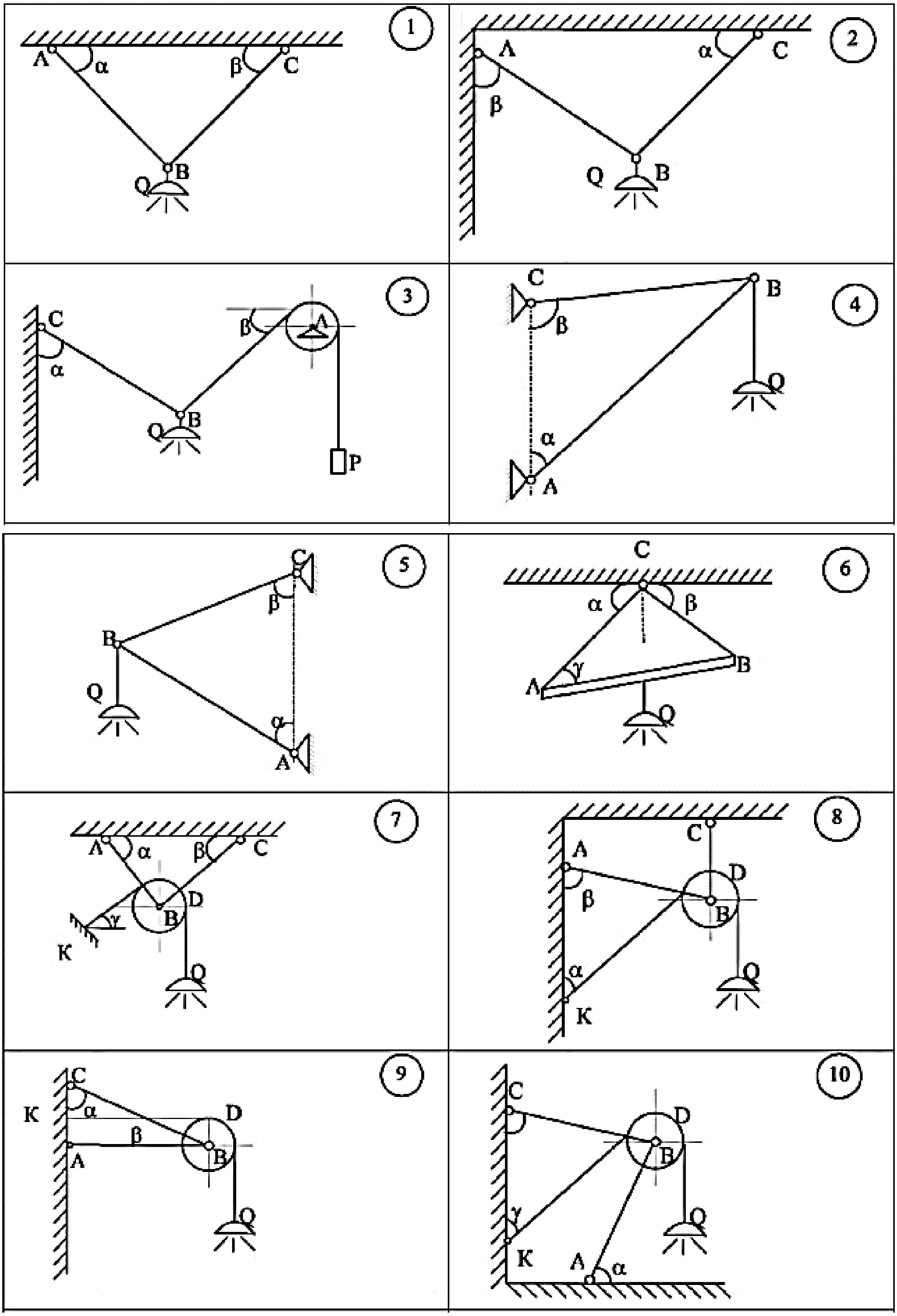


Рис. 2.9 - Варіанти підвісу ліхтаря

3 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ ОПОР КОНСТРУКЦІЙ. УМОВИ РІВНОВАГИ БАЛОК І СТЕРЖНІВ ПІД ДІЄЮ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНИХ СИЛ НА ПЛОЩІ

Мета заняття: навчитися розв’язувати задач на рівновагу довільної плоскої системи сил.

Хід роботи

1. Встановити, рівновагу якого тіла треба розглянути.
2. Встановити і позначити на кресленні активні сили, що діють на тіло, та їх напрями. 18
3. З’ясувати характер в’язей та можливі напрями їх реакцій.
4. Скласти відповідні рівняння рівноваги. При цьому рекомендується: при складанні рівнянь проекцій одну з координатних осей направити перпендикулярно до однієї з невідомих реакцій; при складанні рівняння моментів, за центр моментів обрати таку точку, в якій перетинаються максимальна кількість ліній дії невідомих сил.
5. Розв’язавши систему рівнянь рівноваги, визначити невідомі величини.

Короткі теоретичні відомості

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається добуток величини сили на довжину перпендикуляра, що опущений з точки, відносно якої визначається момент, на лінію дії сили:

$$m_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h$$

Точка ***O***, відносно якої записується момент, називається центром моменту.

Перпендикуляр $\boldsymbol{h}$, який опущений з точки ***O*** на лінію дії сили, називається плечем сили відносно точки ***O*** (рис.3.1).

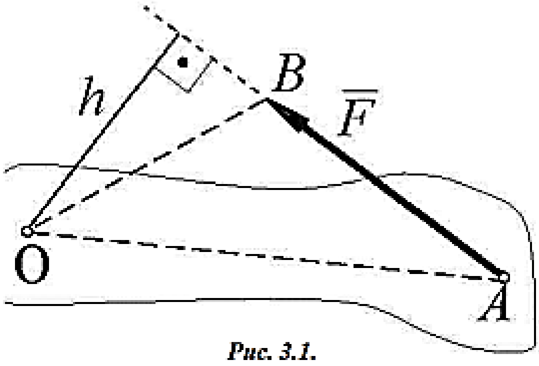


Рис. 3.1 – Схема дії сил

Момент вважається *додатнім*, коли сила намагається повернути площину креслення навколо центра моменту *проти ходу годинникової стрілки* і *від’ємним*, коли сила намагається повернути площину креслення навколо центра моменту *за ходом годинникової стрілки*.

Розмірність моменту сили в системі одиниць СІ – Н·м = Дж (Джоуль), в технічній системі одиниць – кГм (1кГм = 9.81 Дж).

Парою сил називається система двох паралельних сил, які рівні за модулем, направлені в протилежні боки і не лежать на одній прямій (рис. 3.2).

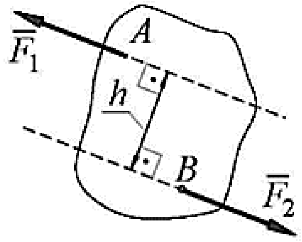


Рис. 3.2 – Пара сил

Найкоротша відстань $\boldsymbol{h}$ між лініями дії цих сил називається *плечем пари*.

Оскільки дві сили, що складають пару рівні за модулем, направлені в протилежні боки і не лежать на одній лінії дії, то тверде тіло, до якого прикладена пара сил, не знаходиться в рівновазі. Пара сил намагається повернути тверде тіло, до якого вона прикладена.

Мірою дії пари сил є алгебраїчна величина, яку називають *моментом пари*. Момент пари за модулем

$$m(\overline{F_1} \cdot \overline{F_1'}) = \pm F_1 \cdot h$$

Якщо пара сил обертає площину креслення (рис. 3.3) проти ходу годинникової стрілки, $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_1'}$ то момент пари додатній, а якщо за ходом, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_2'}$, - то від'ємний.

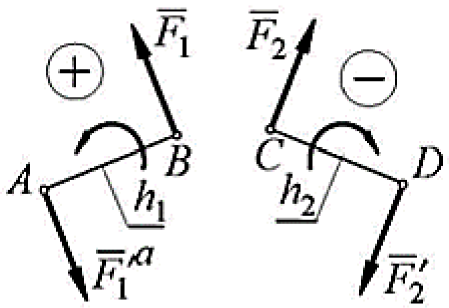


Рис. 3.3 – Знак пари сил

Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил виражаються трьома залежностями (основна форма):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_{kx}} = \boldsymbol{0} \\ \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_{ky}} = \boldsymbol{0} \\ \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m_0}(\overline{\boldsymbol{F_k}}) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Довільна плоска система сил знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчні суми проекцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дії сил дорівнюють нулю.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Однорідна балка ***AB*** вагою 20 кН спирається на гладку горизонтальну підлогу в точці ***B*** під кутом 60° і, крім того, підтримується двома опорами в точках ***C*** та ***D*** (рис. 3.4).

Визначити реакції опор в точках ***B, C*** і ***D***, якщо ***AB***=3м, ***BC***=0.5м, ***BD***=1 м.

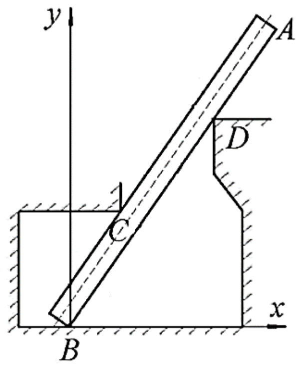


Рис. 3.4 – Схема до прикладу 1

Розв'язок:

1. За об'єкт рівноваги оберемо балку ***AB***, оскільки на неї діють всі відомі і невідомі сили (рис. 3.5).

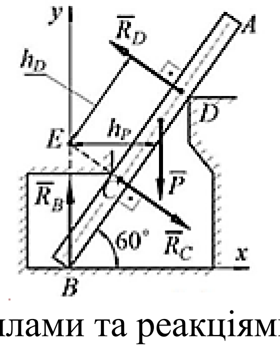


Рис. 3.5 - Схема з силами та реакціями сил до прикладу 1

2. До балки прикладена активна сила – власна вага балки $\vec{P}$.

3. До балки прикладені реакції опор: реакція підлоги (гладенька поверхня) $\overrightarrow{R_B}$, яка направлена перпендикулярно до поверхні підлоги; реакція опор $\overrightarrow{R_B}$ і $\overrightarrow{R_D}$ (гладенька поверхня - опора кутом), які направленні перпендикулярно до балки ***AB***.

4. Балка ***AB*** знаходиться в рівновазі під дією плоскої системи сил, для рівноваги якої необхідно:

$$\sum F_x = 0; \;\; \sum F_y = 0; \; \sum M_E = 0.$$

Складемо рівняння рівноваги для проекцій сил:

$$\sum F_x = R_C \cdot cos30^0 - R_D \cdot cos30^0 = 0;$$

$$\sum F_y = -R_C \cdot sin30^0 + R_D \cdot sin30^0 + R_B - P = 0.$$

Для запису рівняння моментів треба обрати центр моментів $\boldsymbol{E}$. За центр моментів зручно обирати точку, в якій перетинаються лінії дії невідомих за величиною реакцій, оскільки момент від цих сил буде дорівнювати нулю.

В нашому випадку зручно обрати точку ($\boldsymbol{E}$), в якій перетинаються лінії дії невідомих реакцій $\overrightarrow{R_B}$ і $\overrightarrow{R_C}$.

Рівняння моментів в загальному виді:

$$\sum M_E = R_B \cdot h_B + R_C \cdot h_C + R_D \cdot h_D - P \cdot h_P = 0.$$

Враховуючи, що моменти сил та дорівнюють нулю, рівняння моментів буде виглядати:

$$\sum M_E = R_D \cdot h_D - P \cdot h_P = 0.$$

Для визначення плеча реакції $\overrightarrow{R_D}$, опустимо перпендикуляр h_D з центра моментіва на лінію дії цієї реакції. З рис. 3.5 видно, що h_D = ***CD*** = ***BD*** – ***BC*** =
= 1 - 0.5м.

Для визначення плеча сили тяжіння $\vec{P}$. опустимо з точки ***E*** перпендикуляр h_P на лінію дії цієї сили:

$$h_P = \frac{AB}{2} cos60^0 = \frac{3}{2} 0.5 = 0.75\text{м}.$$

5. Підставивши числові значення отримаємо:

$$\sum F_x = 0.866 \cdot R_C - 0.866 \cdot R_D = 0$$

$$\sum F_y = -0.5 \cdot R_C + 0.5 \cdot R_D + R_B - 20 = 0$$

$$\sum M_E = 0.5 \cdot R_D - 20 \cdot 0.75 = 0$$

З останнього рівняння знайдемо величину реакції $\overrightarrow{R_D}$:

$$R_D = \frac{20 \cdot 0.75}{0.5} = 30\text{кН}.$$

З першого рівняння випливає, що $R_C = R_D$=30кН, а з другого:

$$R_B = 20 + 0.5 \cdot R_C - 0.5\, R_D = 20 + 0.5 \cdot 30 - 0.5 \cdot 30 = 20\text{кН}.$$

Відповідь: R_B=20кН; R_C= 30кН; R_D=30кН

Приклад 2

На балку ***AC*** діють дві зосереджені сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $\vec{q}$ (рис.3.6).

Визначити реакції опор ***A*** і ***B***, якщо $\boldsymbol{F_1}$ = 6кН; $\boldsymbol{F_2}$ = 8кН; $\boldsymbol{q}$ = 3кН/м

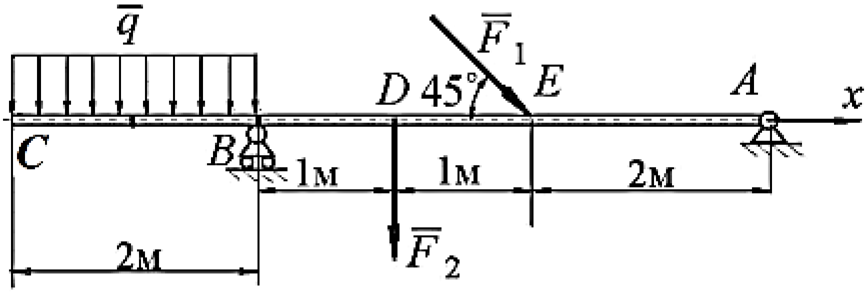


Рис. 3.6 - Схема до прикладу 2

Розв'язок:

1. Розглянемо рівновагу балки ***AC*** (рис. 3.7).

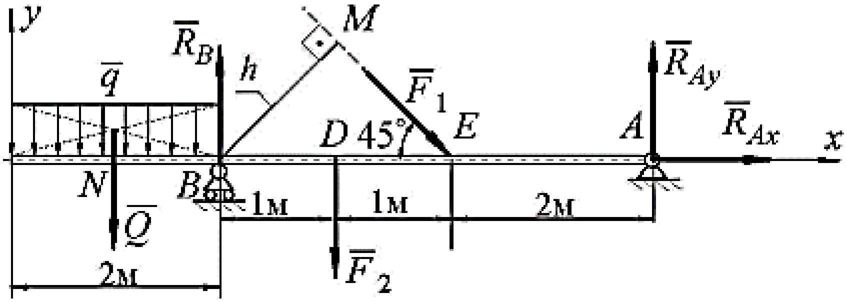


Рис. 3.7 - Схема з силами та реакціями сил до прикладу 2

2. На балку ***AC*** діють зосереджені сили $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ та рівномірно розподілене навантаження $\vec{q}$.

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю замінимо рівнодіючою, яку прикладемо посередині ***CB*** (рис. 3.7):

$$Q = q\ \cdot (CB) = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}.$$

3. На балку ***AC*** діють реакції опор: реакція циліндричне шарнірно нерухомої опори - $\overrightarrow{R_A}$ ($\overrightarrow{R_{Ax}}, \overrightarrow{R_{Ay}}$) та реакція циліндричне шарнірно рухомої опори - $\overrightarrow{R_B}$.

4. Балка ***AB*** знаходиться в рівновазі під дією плоскої системи сил, для рівноваги якої необхідно:

$$\sum F_x = 0;\ \ \sum F_y = 0;\ \sum M_B = 0.$$

Складемо рівняння рівноваги, обравши за центр моментів точку ***B***:

$$\sum F_x = F_1 cos45^0 + R_{Ax} = 0;$$
$$\sum F_y = -Q + R_B - F_2 - F_1 sin45^0 + R_{Ay} = 0;$$
$$\sum M_E = Q \cdot h_Q - F_2 \cdot h_{F2} - F_1 \cdot h_{F1} + R_{Ay} \cdot h_{Ay} = 0.$$

де h_Q, h_{F2}, h_{F1}, h_{Ay} - плечі відповідних сил відносно точки ***B***;

$$h_Q = (NB) = 1\text{м};\ \ h_{F2} = (BD) = 1 \text{ м};\ \ h_{Ay} = (BA) = 4 \text{ м};$$

$$h_{F1} = (\text{BE})\cdot\sin45^0 = 2\cdot0.707 = 1.41\text{м}.$$

5. З урахуванням числових значень рівняння рівноваги набудуть вигляду:

1. $\sum F_x = 6 \cdot 0.707 + R_{Ax} = 0$
2. $\sum F_y = -6 + R_B - 8 - 6 \cdot 0.707 + R_{Ay} = 0$
3. $\sum M_E = 6 \cdot 1 - 8 \cdot 1 - 6 \cdot 1.41 + 4 \cdot h_{Ay} = 0.$

З рівняння 1 і 3 отримаємо:

$$R_{Ax} = -6 \cdot 0.707 = -4.24\text{кН};$$
$$R_{Ay} = \frac{-6\cdot1+8\cdot1+6\cdot1.41}{4} = 2.62\text{кН}.$$

Підставивши R_{Ay} у рівняння 2, знайдемо:

$$R_B = 6 + 8 + 6\cdot0.707 - R_{Ay} = 15.62 \text{ кН}.$$

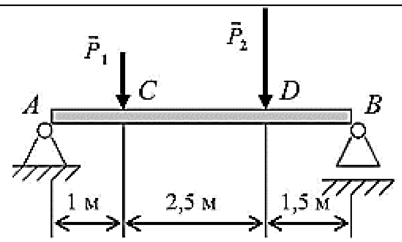
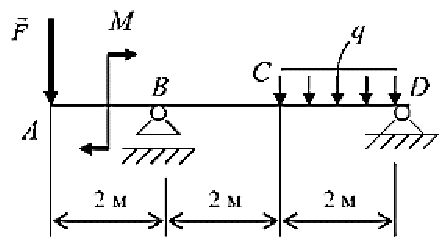
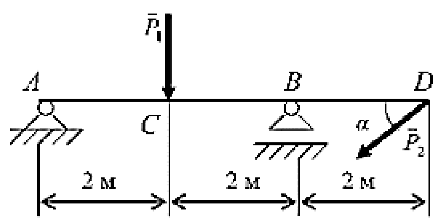
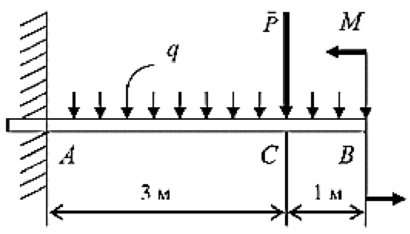
Таким чином, реакції $\overrightarrow{R_{Ay}}$ і $\overrightarrow{R_B}$ направленні так, як показано на рис. 3.7, а реакція $\overrightarrow{R_{Ax}}$ напрямлена в протилежний бік від попередньо обраного напрямку. Величина реакції $\overrightarrow{R_A}$ дорівнює:

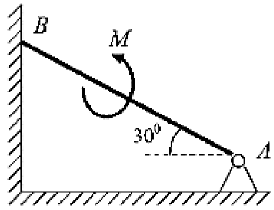
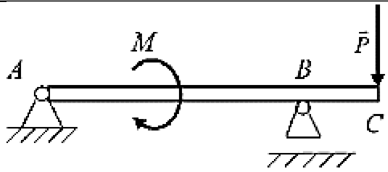
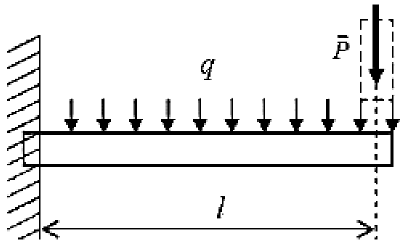
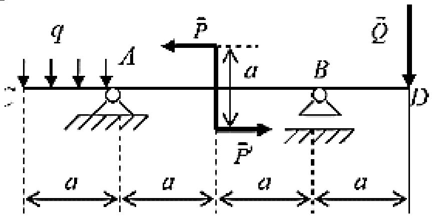
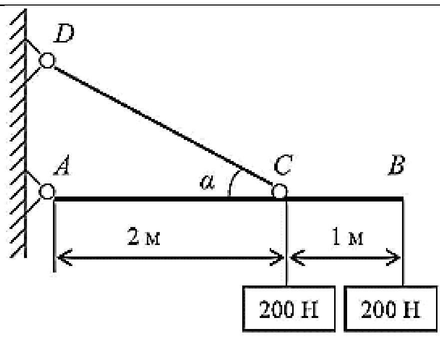
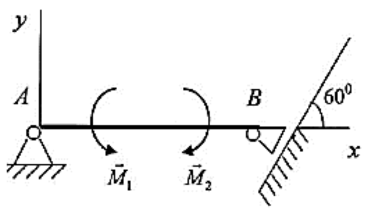
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-4.24)^2 + (2.62)^2} = 4.98\text{кН}.$$

Відповідь: R_A =4.98 кН; R_B =15.62 кН.

Варіанти для індивідуальних завдань

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**)

Варіант	Задача	Рисунок
1	2	3
1.	На горизонтальну балку ***AB***, лівий кінець якої має шарнірно-нерухому опору, а правий - шарнірно-рухому, в точках ***C*** і ***D*** діють дві сили: P_1=10кН, P_2=20кН. ***Визначити*** реакції опор балки.	
2.	Консольна балка ***AD*** вагою ***P***=4кН має шарнірно-рухому опору ***B*** і шарнірно-нерухому опору ***D***. До кінця ***A*** балки прикладена вертикальна зосереджена сила *F*=8кН. На ділянці ***CD*** на балку діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності ***q***=0.5кН/м. На ділянці ***AB*** до балки прикладена пара сил із моментом *M*=6кНм. ***Визначити*** реакції опор	
3.	Консольна балка має в точці ***A*** шарнірно-нерухому, а в точці ***B*** шарнірнорухому опори. У точці ***C*** до балки прикладена вертикальна сила P_1=18кН. На правий кінець балки діє сила P_2 =50кН, яка утворює з віссю балки кут α=40^0 . ***Визначити*** реакції опор балки.	
4.	Консольна балка ***AB*** жорстко закріплена на лівому кінці. В точці ***C*** до балки прикладена зосереджена сила *P*=12кН. На балку діють також рівномірно розподілене навантаження інтенсивності *q*=5кН/м і пара сил із моментом *M*=20кНм. ***Визначити*** реакцію жорсткого кріплення.	

1	2	3
5.	Невагомий стержень ***AB*** довжиною 6м спирається в точці ***B*** на гладку вертикальну стіну. До стержня прикладена пара сил, момент якої дорівнює M=12Нм. ***Визначити*** реакцію опори ***A***	
6.	На консольну балку діє пара сил із моментом M=6кНм, а в точці ***C*** прикладена вертикальна сила P =2кН. Враховуючи, що ***AB*** =3.5м, ***BC*** =0.5м. ***Визначити*** реакції опор.	
7.	На горизонтальну балку, що підтримує балкон, діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q=2кН/м. На балку також у вільного кінця діє навантаження P =2кН, яке передається від колони. Відстань осі колони від стіни l=1.5м. ***Визначити*** реакції жорсткого закріплення балки	
8.	На двохконсольну горизонтальну балку діє пара сил [P, P'], на ліву консоль - рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q, а в точці ***D*** правої консолі - вертикальне навантаження Q. ***Визначити*** реакції опор, якщо P=1кН, Q=2кН, q=2кН/м, a=0.8 м.	
9.	Горизонтальна балка ***AB*** прикріплена до стіни шарніром ***A*** і утримується в рівновазі невагомим стержнем ***CD***, який утворює з балкою кут а — 30^0 . У точках ***C*** і ***D*** до балки підвішені вантажі вагою 200Н кожний. ***Визначити*** зусилля S у стержні (вагу балки не враховувати).	
10.	На невагому балку ***AB*** довжиною 1м діють дві пари сил із моментами M_1=5Нм, M_2=10Нм. Визначити проекцію R_A реакції у шарнірі ***A*** при рівновазі балки.	

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

4 ЗНАХОДЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ, ШВИДКОСТІ І ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ ЗА КООРДИНАТНОГО СПОСОБУ ВИЗНАЧЕННЯ РУХУ

Мета заняття: навчитися розв'язувати задачі кінематики з визначення траєкторії руху, швидкості та прискорень точки.

Хід роботи

Розв'язування задач на визначення закону руху точки та рівняння її траєкторії виконується в такій послідовності:

1. Обирається нерухома система координат, початок якої визначають, виходячи з умов задачі.
2. За умовами задачі в обраній системі координат складають рівняння руху точки, тобто знаходять залежність координат точки від часу.
3. Із складених рівнянь руху точки можна визначити її положення в будь-який момент часу, встановити напрям її руху, знайти траєкторію і т.д.

Якщо за умовою задачі треба визначити швидкість і прискорення точки, то краще дотримуватись такої послідовності:

1. Обрати систему координат.
2. В обраній системі координат скласти рівняння руху (іноді вони задані в умовах задачі).
3. За рівняннями руху точки визначити проекції швидкості на осі системи координат, величину швидкості та її напрям.
4. Визначити проекції прискорення точки на осі системи координат, величину прискорення та його напрям.

Короткі теоретичні відомості

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування їх мас і сил, що на них діють.

Рух тіл в кінематиці розглядають по відношенню до деякої системи координат, що пов'язана з іншим тілом, наприклад, із Землею.

Основна задача кінематики полягає в тому, що за рівняннями, які визначають закон руху даного тіла, треба знайти всі кінематичні характеристики руху тіла (траєкторії різних точок, їх швидкості та прискорення).

Кінематика ділиться на *кінематику точки* і *кінематику твердого тіла*.

Розрізняють три способи означення руху точки: *координатний*; *векторний*; *природний*.

Координатний спосіб означення руху точки

Положення точки ***M*** у просторі при координатному способі означення руху визначається трьома координатами: x, y, z (рис.4.1).

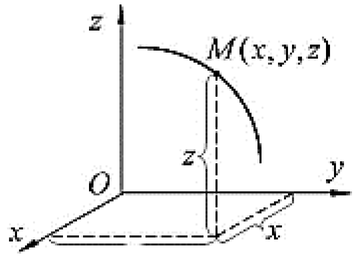


Рис. 4.1 – Визначення координат точки

Якщо точка рухається, то ці координати з часом безперервно змінюються.

Таким чином, для означення руху точки достатньо задати функціональні залежності виду:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

Рівняння (4.1) називаються *рівняннями руху* точки в прямокутних координатах. Рух точки в *площині*, наприклад *Oxy*, визначається двома рівняннями руху:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \tag{4.2}$$

Для означення *прямолінійного руху* точки, наприклад, по осі Ох, достатньо одного рівняння:

$$x = f_1(t). \tag{4.3}$$

Траєкторія – одна із основних характеристик, яка дає уявлення про рух в цілому. Першою ознакою, за якою виконується розподіл рухів на різні види, є траєкторія.

Визначення траєкторії є однією із важливих частин задач механіки.

В залежності від форми траєкторії рух відносять до *прямолінійного*, або *криволінійного руху*.

Рівняння руху точки (4.1) ÷ (4.3) можна розглядати як рівняння траєкторії в параметричній формі.

Для того, щоб отримати рівняння траєкторії в звичайній формі, треба з рівнянь руху виключити час t . Так, виключивши t з рівнянь руху (4.2), дістанемо одне рівняння виду:

$$F(x, y) = 0, \tag{4.4}$$

яке являє собою рівняння лінії на площині *Oxy*.

Якщо виключити час t з рівнянь руху (4.1), то дістанемо рівняння виду:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{4.5}$$

Кожне з рівнянь системи (4.5) є рівнянням деякої поверхні, а разом – рівнянням траєкторії, яка являє собою лінію перетину цих поверхонь.

Швидкість точки – векторна величина, яка характеризує зміну положення точки в просторі з часом.

Прискорення точки – векторна величина, яка характеризує зміну вектору швидкості з часом.

У випадку *координатного способу* означення руху точки за відомими залежностями для координат точки (4.1) спочатку визначають проекції вектору швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}, \tag{4.6}$$

а потім модуль швидкості точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{4.7}$$

Напрямок вектору швидкості *V* визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$cos\left(x_,^\wedge\overline{V}\right) = \frac{V_x}{V}; \quad cos\left(y_,^\wedge\overline{V}\right) = \frac{V_y}{V}; \quad cos\left(z_,^\wedge\overline{V}\right) = \frac{V_z}{V}. \tag{4.8}$$

Проекції вектору прискорення на координатні осі відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Напрямок вектору прискорення а також визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{4.10}$$

Модуль вектора прискорення визначається за формулою:

$$cos\left(x_,^\wedge\overline{a}\right) = \frac{a_x}{a}; \quad cos\left(y_,^\wedge\overline{a}\right) = \frac{a_y}{a}; \quad cos\left(z_,^\wedge\overline{a}\right) = \frac{a_z}{a}. \tag{4.11}$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Рух точки задано в координатній траєкторії за допомогою рівнянь

$$x = r \cdot \cos(t), \quad y = r \cdot sin(t). \tag{4.12}$$

Знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі.

Розв'язок:

Щоб визначити рівняння траєкторії точки в координатній формі, треба з двох рівнянь руху вилучити параметр *t*. Піднесемо кожне з цих рівнянь до другого ступеня, і потім просумуємо їх, дістаємо рівняння траєкторії у вигляді

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Отже, траєкторія точки є коло радіуса *r* з центром *O* на початку координат. У початковий момент часу (*t*=0) точка перебувала в положенні M_0 (рис. 4.2). Далі точка рухатиметься по колу проти руху стрілки годинника.

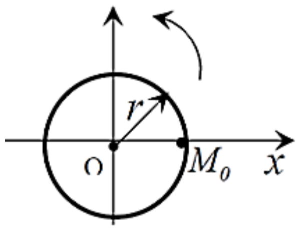


Рис. 4.2 – Схема руху точки до прикладу 1

Відповідь: рівняння траєкторії $x^2 + y^2 = r^2$

Приклад 2

Знайти рівняння руху точки *M* обіду колеса радіуса *R*, шо котиться зі швидкістю V_0 (швидкість центра колеса) без ковзання по прямій рейці (рис.4.3)

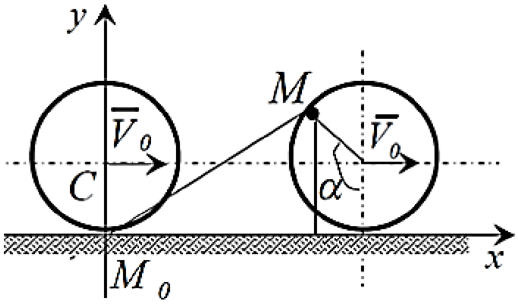


Рис. 4.3 - Схема руху точки до прикладу 2

Розв'язок:

Початок координат розмістимо в одній з нижніх положень точки *M* на рейці. З рисунку (4.3) видно, що координати точки *M* будуть:

$$\begin{cases} x = R\cdot\alpha - R\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = R(\alpha - \sin(\alpha)) \\ y = R + R\cdot\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = R(1-\cos(\alpha)) \end{cases}, \qquad (4.13)$$

де α – кут повороту колеса.

При коченні колеса без ковзання зі сталою швидкістю

$$R\cdot\alpha = V_0\cdot t,$$

звідки

$$\alpha = \frac{V_0}{R}t, \qquad (4.14)$$

де *t* – час руху.

Підставимо значення (4.14) у вирази (4.13). Знайдемо

$$\begin{cases} x = R\left(\frac{V_0}{R}t - sin\frac{V_0}{R}t\right) \\ y = R\left(1 - cos\frac{V_0}{R}t\right) \end{cases}$$

Це і є рівняння руху точки обіду колеса в координатній формі і водночас рівняння траєкторії точки *M* у параметричній формі. У геометрії таку криву називають циклоїдою.

Відповідь: рівняння руху точки обіду колеса

$$\begin{cases} x = R\left(\frac{V_0}{R}t - sin\frac{V_0}{R}t\right) \\ y = R\left(1 - cos\frac{V_0}{R}t\right) \end{cases}$$

Приклад 3

Кривошип ***OA*** обертається навколо точки *O* так, що кут ***BOA*** = $\omega \cdot t$ (рис. 4.4). ***Визначити закон руху*** точки *M* шатуна ***AB***, якщо довжина кривошипа ***OA*** = r, шатуна ***AB*** = $2 \cdot l$, ***AM*** = ***MB***.

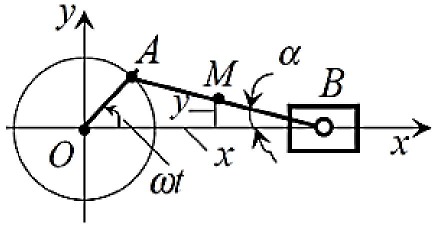


Рис. 4.4 - Схема руху механізму до прикладу 3

***Розв'язок*:**

Виберемо систему координат так, як показано на рис. 4.4. Кут ***ABO*** позначимо α. З трикутника ***AOB*** знаходимо

$$\frac{2 \cdot l}{sin(\omega \cdot t)} = \frac{OA}{\sin(\alpha)}, \sin(\alpha) = \frac{OA}{2 \cdot l}\sin(\omega \cdot t), \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{OA^2}{4 \cdot l^2}sin^2(\omega \cdot t)}. \quad (4.15)$$

Знаходимо координати точки М. З рис.4.4 видно, що будуть справедливими такі рівності:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) + l \cdot \cos(\alpha) \\ y = l \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \quad (4.16)$$

З урахуванням співвідношень (4.15) рівняння руху точки *M* (4.16) запишемо так:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) + l \cdot \sqrt{1 - \frac{OA^2}{4 \cdot l^2}sin^2(\omega \cdot t)} \\ y = l \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Повзун *B* виконуватиме коливальних рух. Рівняння його руху має вигляд

$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) + 2 \cdot l \cdot \cos(\alpha).$$

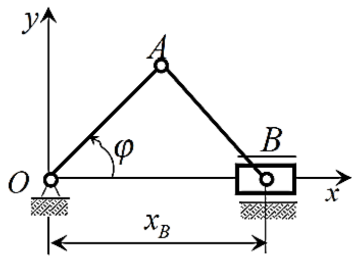
Звідки знаходимо, що $x_{max} = r + 2 \cdot l$.

Відповідь: закон руху точки *M* шатуна

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) + l \cdot \sqrt{1 - \frac{OA^2}{4 \cdot l^2}sin^2(\omega \cdot t)} \\ y = l \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Варіанти для індивідуальних завдань

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**)

Варіант	Завдання
1.	Задані рівняння руху точки $x = 1 + 2 \cdot \sin(0.1 \cdot t)$, $y = 3 \cdot t$. ***Визначите координату*** *x* точки в момент часу, коли її координата ***y***=12 м. *Відповідь*: 1.78 м.
2.	Задано рівняння руху точки $\bar{r} = 3 \cdot t \cdot \bar{i} + 4 \cdot t \cdot \bar{j}$. ***Визначити координату y*** точки в момент часу, коли *r*=5 м. *Відповідь*: 4 м.
3.	Задані рівняння руху точки $x = 3 \cdot t,\ \ y = t^2$. ***Визначити відстань*** точки від початку координат в момент часу *t*=2 с. *Відповідь*: 7.21 м.
4.	Задані рівняння руху точки $x = \cos(t)\,,\ \ y = 2 \cdot \sin(t)$. ***Визначити відстань*** від точки до початку координат в момент часу *t*=2.5 с. *Відповідь*: 1.44 м.
5.	Положення кривошипа визначається кутом (рад) φ=0.2·*t*. ***Знайти координату*** x_B повзуна в момент часу *t*= 3 с, якщо довжина ланок *OA*=*AB*=0.5 м.  *Відповідь*: 0.825 м
6.	Задані рівняння руху точки $x = 2 \cdot t,\ \ y = t$. ***Визначити час*** t, коли відстань від точки до початку координат досягне 10 м. *Відповідь*: 4.47 с.
7.	Задані рівняння руху точки $x = 2 \cdot \mathrm{t},\ \ y = 1 - 2 \cdot \sin(0.1 \cdot t)$. ***Визначити*** найближчій момент часу, коли точка перетне вісь *Ox*. *Відповідь*: 5.24 с.
8.	Задані рівняння руху точки $x = \sin(t),\ \ y = cos(t)$. ***Визначити*** найближчій момент часу, коли радіус-вектор точки, проведений із початку координат, утворює кут 45^0 з віссю *Ox*. *Відповідь*: 0.785 с.
9.	Задані рівняння руху точки $x = 2 \cdot cos(t),\ \ y = 3 \cdot sin(t)$. ***Визначити*** кут між віссю *Ox* і радіусом-вектором $\overline{OA}$ точки в момент часу *t*=1.5 с. *Відповідь*: 1.52 с.
10.	Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити її, визначити на траєкторії початкове положення точки і напрям її руху, якщо точка рухається відповідно до рівнянь $x = 2 \cdot t,\ \ y = 3 \cdot t$. *Відповідь*: 3·*x* - 2·*y* = 0, M_0(0;0)

5 ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ МИТТЄВОГО ЦЕНТРА ШВИДКОСТІ

Мета заняття: навчитися розв'язувати задачі кінематики за графоаналітичним методом та за допомогою миттєвого центру швидкості.

Хід роботи

1. ***Розв'язування графоаналітичним методом***:

- обрати за полюс ту точку тіла, швидкість якої відома за величиною і напрямом або легко визначається з умов задачі;
- знайти точку тіла, напрям швидкостей якої відомий;
- користуючись формулами плоского руху знайти швидкість цієї точки;
- визначити кутову швидкість тіла в даний момент часу;
- за відомою кутовою швидкістю і швидкістю полюса, користуючись формулами плоского руху знайти швидкість інших точок тіла.

2. ***Розв'язання за допомогою миттєвого центра швидкостей***:

- визначити положення миттєвого центра швидкостей одним з відомих способів;
- визначення значення миттєвого радіуса тієї точки тіла, швидкість якої відома, та знайти кутову швидкість тіла;
- знайти швидкості інших точок тіла.

Короткі теоретичні відомості

Існує декілька способів знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

Випадок 1.

Відома швидкість $\overline{V_A}$ однієї точки А тіла і кутова швидкість його обертання ω (рис.5.1).

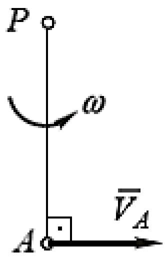


Рис.5.1 – Схема до випадку 1

Миттєвий центр швидкостей P лежить на перпендикулярі до швидкості $\overline{V_A}$ точки А, на відстані:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \tag{5.1}$$

Для знаходження напряму перпендикуляру треба повернути вектор $\overline{V_A}$ відносно точки A на кут 90^0 в бік кутової швидкості.

Випадок 2.

Відомі напрями швидкостей $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$ двох точок A і B тіла (рис.5.2).

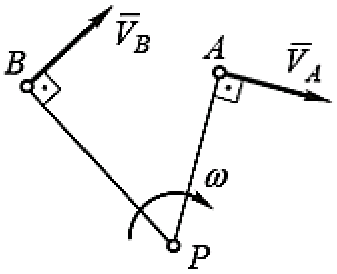


Рис. 5.2 - Схема до випадку 2

Миттєвий центр швидкостей повинен лежати як на перпендикулярі до вектора $\overline{V_A}$, так і на перпендикулярі до вектора $\overline{V_B}$, тобто миттєвий центр швидкостей P лежить в точці перетину цих перпендикулярів.

Випадок 3.

Швидкості двох точок А і В тіла паралельні між собою, а перпендикуляри до них не співпадають (рис.5.3).

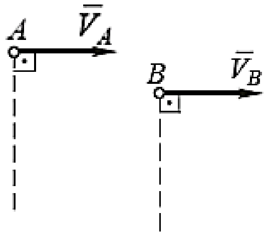


Рис. 5.3 - Схема до випадку 3

Говорять, що в цьому випадку миттєвий центр швидкостей лежать на нескінченності. Кутова швидкість обертання дорівнює нулю, а швидкості усіх точок тіла геометрично рівні, тобто в даний момент часу тіло виконує поступальний рух.

Випадок 4.

Швидкості двох точок A і B паралельні, направлені в один бік і не рівні за модулем. Крім того, $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$ перпендикулярні до відрізка AB (рис.5.4).

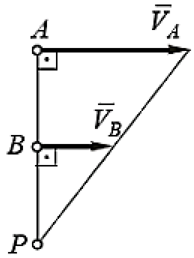


Рис.5.4 - Схема до випадку 4

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на продовженні відрізка AB тієї точки, швидкість якої менша. Відстань від точки до миттєвого центра швидкостей можна знайти з пропорції:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + BA}$$

Розв'язавши це рівняння відносно PB, отримаємо:

$$PB = \frac{V_B \cdot BA}{V_A - V_B}. \quad (5.2)$$

Таким чином, для визначення положення миттєвого центра швидкостей треба знати не тільки напрями швидкостей, а і їх величину.

Випадок 5.

Швидкості двох точок A і B тіла паралельні одна одній, перпендикулярні до відрізку AB, але направлені в різні боки (рис.5.5).

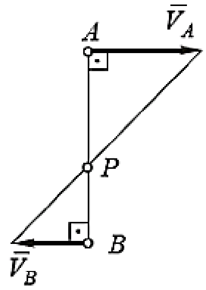


Рис.5.5 - Схема до випадку 5

Миттєвий центр швидкостей лежить на відрізку *AB* і ділить його на частини пропорційні швидкостям. Оскільки *BP* = *AB* - *AP*, то можна записати:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP} = \frac{AB}{AB + AP}$$

Розв’язавши рівняння відносно *AP*, отримаємо:

$$AP = \frac{V_A \cdot AB}{V_A + V_B}. \quad (5.3)$$

Випадок 6.

Тіло котиться без проковзування по нерухомій поверхні (рис.5.6).

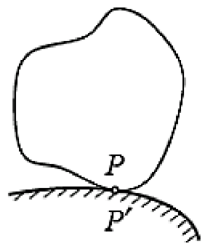


Рис.5.6 - Схема до випадку 6

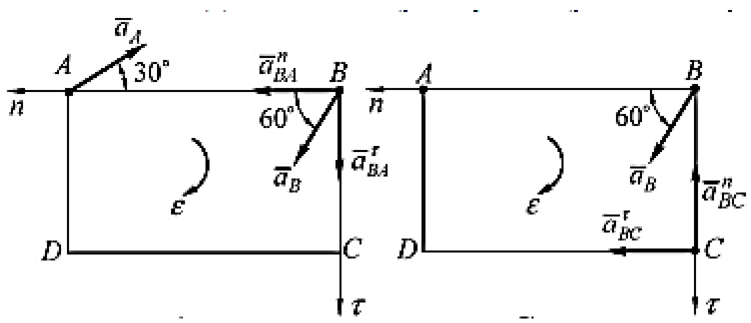
В цьому випадку миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці ***P*** дотику тіла до поверхні. Дійсно, якщо відсутнє ковзання тіла відносно поверхні, то швидкості точок дотику тіла і поверхні бути однаковими. Але швидкість точки P', що належить нерухомій поверхні, дорівнює нулю.

Тоді і швидкість точки P, якою в даний момент часу рухоме тіло дотикається до нерухомої поверхні, теж дорівнює нулю.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1

Прямокутна платина (рис.5.7,а) *ABCD* рухається в площині креслення. Прискорення точки A в даний момент часу дорівнює 2 м/с^2 і утворює з прямою *AB* кут 30^0.



а) б)

Рис.5.7 – Схема до прикладу 1

Прискорення точки B складає 6 м/с^2 і утворює кут 60^0 з прямою BA.

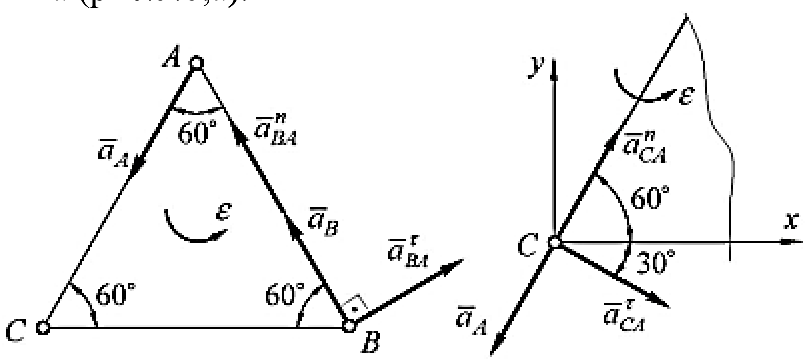
Визначити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення платини, та прискорення точки C, якщо AB = 0.1 м, BC = 0.05 м.

План розв'язку:

1. Оберемо за полюс точку A, оскільки її прискорення відоме (задано у вихідних даних).
2. Складемо векторне рівняння для прискорення точки B пластини.
3. Спроектуємо складене рівняння (2) на осі Bn і $B\tau$ (рис.5.7,б).
4. З рівняння проекцій на вісь Bn дістанемо величину нормального прискорення і визначимо миттєву кутову швидкість.
5. З рівняння проекцій на вісь $B\tau$ отримаємо величину тангенціального прискорення і визначимо кутове прискорення.
6. Визначимо прискорення точки C. Для обчислення прискорення точки C краще за полюс обрати точку B, оскільки прискорення цієї точки вже відоме і задана сторона BC прямокутника.

Приклад 2

Рівносторонній трикутник ABC рухається в площині креслення. Прискорення вершин A та B в даний момент часу дорівнюють 16 м/с^2 і направлені вздовж сторін трикутника (рис.5.8,а).



а) б)

Рис. 5.8 - Схема до прикладу 2

Визначити прискорення вершини C .

План розв'язку:

Якщо відомі прискорення двох точок плоскої фігури, наприклад A і B, то задачу рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1. Розглядаючи першу точку A як полюс поступального руху, записати векторне рівняння розподілу прискорень при плоскому русі для точки B і спроектувати це рівняння на пряму AB, що з'єднує обидві точки.

2. З рівняння проекцій визначити величину нормального прискорення a_{BA}^{n} і значення кутової швидкості фігури ω.

3. Спроектувати векторне рівняння розподілу прискорень при плоскому русі на пряму, яка перпендикулярна до AB, та визначити з рівняння проекцій величину тангенціального прискорення a_{BA}^{τ} і значення кутового прискорення фігури ε.

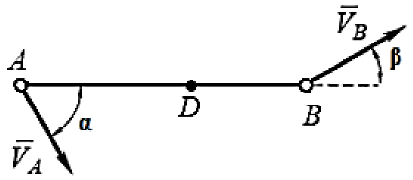
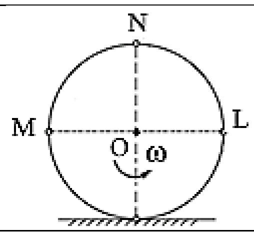
4. Якщо треба, то, використовуючи формулу розподілення прискорень при плоскому русі, визначити прискорення будь-якої іншої точки плоскої фігури (рис.5.8,б).

Варіанти для індивідуальних завдань

Номер задачі і варіант обирається наступним чином:

- Номер задачі (1 або 2) обирається у відповідності до останньої цифри номеру залікової книжки. Якщо він непарний, то 1 задача, а якщо парний – друга.
- Початкові дані обираються згідно останньої цифри номеру залікової книжки із таблиці даних.

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**)

Задача	Задача	Рисунок
1.	Стержень AB довжиною L виконує плоский рух. Вектор швидкості точки A утворює кут α з віссю стержня і в даний момент часу дорівнює V. Вектор швидкості точки B у цей же момент часу утворює кут β з віссю стержня. **Визначити** величину швидкості точки B, положення миттєвого центра швидкостей, кутову швидкість точки D, яка лежить на середині стержня.	
2.	Колесо радіусом R котиться без проковзування по горизонтальній поверхні з швидкістю центра колеса V_0. Визначити швидкості точок M, L, N.	

Таблиця даних

Варіант	α,°	β, °	L, м	V, м/с	R, м	V_0, м/с^2
1.	30	30	2.5	3.0	2.5	2.0
2.	60	30	3.0	5.0	2.4	2.2
3.	45	45	1.8	4.0	3.0	1.6
4.	45	30	1.6	2.5	3.2	3.0
5.	30	45	2.0	3.2	1.8	4.2
6.	60	45	3.2	1.8	2.6	5.0
7.	45	60	2.2	2.4	3.4	6.0
8.	90	60	1.8	4.8	4.0	4.4
9.	30	90	2.0	5.0	2.8	3.8
10.	60	60	3.0	3.0	3.0	2.8

Розділ 3. ДИНАМІКА

6 ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Мета заняття: навчитися розв’язувати задачі динаміки абсолютного руху матеріальної точки

Хід роботи

Порядок розв’язування прямої задачі динаміки невільної матеріальної точки

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку у проміжному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в’язей, які на неї діють.
3. Вибрати систему відліку.
4. Записати векторне рівняння руху точки у формі другого закону динаміки.
5. Спроектувати векторне рівняння руху точки на вибрані осі координат.
6. Із одержаних рівнянь визначити необхідні величини.

Порядок розв’язування оберненої задачі динаміки

Обернену задачу динаміки матеріальної точки рекомендується розв’язувати у наступному порядку:

1.Зобразити матеріальну точку у поточному положенні.

2.Показати активні сили і реакції в’язей, що прикладені до матеріальної точки.

3.Обрати систему координат.

4.Записати початкові умови руху матеріальної точки.

5.Записати рівняння руху у векторній формі.

6.Спроектувати рівняння руху на осі обраної системи координат (скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки).

7.Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху і, скориставшись початковими умовами руху, визначити сталі інтегрування.

8.Визначити величини, які треба відшукати за умовою задачі.

Зауваження. У випадку руху вільної матеріальної точки зручно розв’язувати задачу користуючись декартовою системою координат. При криволінійному ж русі невільної матеріальної точки простіше розв’язувати задачу в проекціях на осі природної системи координат. При цьому необхідно урахувати реакції в’язей.

Задачі, які розглядаються у цьому розділі, можна поділити на два основних типи:

1. Задачі, які відносяться до прямолінійного руху точки.
2. Задачі, які відносяться до криволінійного руху точки.

При розв’язуванні задач першого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є: ·

- сталими; ·
- залежать від часу; ·
- залежать від координат точки; ·
- залежать від швидкості точки.

При розв'язуванні задач другого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є: ·

- сталими; ·
- залежать від координат точки; ·
- залежать від швидкості точки.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

В шахту починає опускатися рівноприскорене ліфт, маса якого m=280кг. У перші 10с він проходить 35м.

Визначити натяг T канату, на якому висить ліфт

Розв'язок:

На ліфт діє сила тяжіння P, яка спрямована донизу, і натяг канату T, який спрямовано вздовж троса догори (рис.6.1).

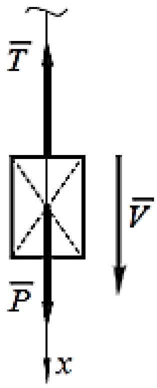


Рис. 6.1 – Схема до прикладу 1

Рух відбувається по вертикалі, тому спрямуємо вісь x вертикально донизу відповідно до напрямку швидкості та прискорення. Запишемо рівняння руху кабіни ліфту у формі другого закону Ньютона:

$$m \cdot \overline{a} = \sum \overline{F_k}$$

де a - прискорення кабіни ліфту.

З урахуванням сил, що діють на кабіну ліфту, рівняння буде мати вигляд:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P} + \overline{T}$$

Спроектуємо це рівняння на вісь x :

$$m \cdot a = P - T$$

З урахуванням того, що $P = m \cdot g$, знаходимо

$$T = P - m \cdot a = m \cdot g - m \cdot a = m(g - a) = m \cdot g\left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

У нашій задачі прискорення визначиться з виразу для шляху при рівнозмінному русі з урахуванням того, що початкова швидкість V_0 = 0:

$$S = \frac{a \cdot t^2}{2}, \quad a = \frac{2 \cdot S}{t^2}$$

Тоді

$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2 \cdot S}{t^2}\right) = 280\left(9.81 - \frac{2 \cdot 35}{10^2}\right) = 2.55 \cdot 10^3\text{Н=2.55 кН.}$$

Відповідь: натяг троса *T*= 2.55 кН.

Приклад 2

До тіла вагою *P*=3Н, яке лежить на столі, прив'язали нитку, другий кінець якої держать у руці.

Визначити, з яким прискоренням *a* треба піднімати тіло вгору вертикально, щоб нитка обірвалася, якщо вона рветься коли натяг досягає величини *T*=4,2Н

Розв'язок:

Покажемо сили, які діють на тіло: сила тяжіння P та натяг нитки T (рис.6.2). Вісь x спрямуємо вертикально вгору у додатному напрямку швидкості та прискорення.

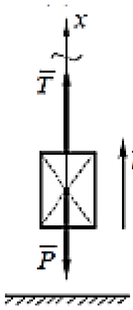


Рис. 6.2 – Схема до прикладу 2

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m \cdot \overline{a} = \sum \overline{F_k} = \overline{T} + \overline{P}.$$

Спроектуємо це рівняння на вісь x

$$m \cdot a = T - P; \qquad \frac{P}{g} a = T - P.$$

Звідки

$$a = g\left(\frac{T}{P} - 1\right).$$

Якщо врахувати числові дані, то

$$a = 9.81\left(\frac{4.2}{3} - 1\right) = 3.92 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: a=3.92 м/с^2

Приклад 3

Важке тіло ковзає по гладкій поверхні, яка нахилена під кутом α=30° до горизонту.

Визначити, за який час T тіло пройде шлях S=9.6 м, якщо у початковий момент його швидкість дорівнювала V0 = 2 м/с .

Розв'язок.

Зобразимо тіло у довільному положенні на похилій площині. Оскільки рух тіла по площині є поступальним, а при поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові, то рух такого тіла будемо розглядати як рух матеріальної точки (дане допущення буде справедливим і для наступних задач цієї теми).

Покажемо сили, що діють на тіло: силу тяжіння G і нормальну реакцію похилої площини N . Вісь Ox спрямуємо у напрямку руху тіла (рис.6.3).

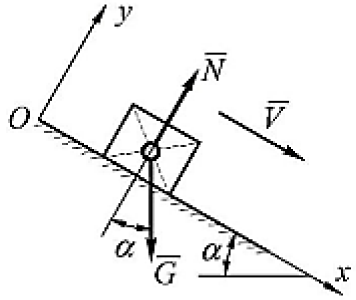


Рис. 6.3 – Схема до прикладу 3

Початкові умови при t=0 мають вигляд: x_0=0; $V_{x0} = V_0 = 2$ м/с.

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{G} + \overline{N}$$

Проектуємо це рівняння на вісь Ox :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV_x}{dt} = G \cdot \sin(\alpha).$$

Враховуючи, що $G = mg$, одержимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g \cdot \sin(\alpha).$$

Знайдемо залежність швидкості V_x від часу t. Для цього розділимо змінні в останньому рівнянні і проінтегруємо:

$$dV_x = g \cdot \sin(\alpha)\, dt,$$

$$\int dV_x = g \cdot \sin(\alpha) \int dt,$$

$$V_x = g \cdot t \cdot \sin(\alpha) + C_1.$$

Використовуючи початкові умови визначаємо сталу інтегрування Q. Для цього підставляємо їх в останнє рівняння. Оскільки при $t = 0$: $V_{x0} = 2$ м/с, то:

$$2 = g \cdot 0 \cdot \sin(\alpha) + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 2.$$

Таким чином, рівняння для зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V_x = g \cdot t \cdot \sin(\alpha) + 2.$$

Знаходимо залежність координати x від часу:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = g \cdot t \cdot \sin(\alpha) + 2;$$

$$dx = g \cdot t \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathrm{dt} + 2 \cdot \mathrm{dt};$$

$$\int dx = g \cdot \sin(\alpha) \int t \cdot dt + 2 \int dt;$$

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin(\alpha) + 2t + C_2.$$

Сталу інтегрування C_2 визначимо скориставшись початковими умовами, підставивши їх в останнє рівняння. Оскільки при $t = 0$: $x = 0$, то:

$$0 = g \cdot 0 \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot 0 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0$$

Остаточно, для координати x будемо мати залежність:

$$x = g\frac{t^2}{2}\sin(\alpha) + 2t.$$

Визначимо час T, при якому $x = S = 9{,}6$ м:

$$9.6 = 9.81\frac{T^2}{2}\sin(\alpha) + 2T$$

або

$$2.45 \cdot T^2 + 2T - 9.6 = 0.$$

Звідси:

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2.45 \cdot 9.6}}{2.45} = \frac{-1 \pm 4.95}{2.45}.$$

Оскільки час може бути тільки додатним, то:

$$T_{1,2} = \frac{-1 + 4.95}{2.45} = 1.6 \text{ с}.$$

Відповідь: $T = 1.6$ с.

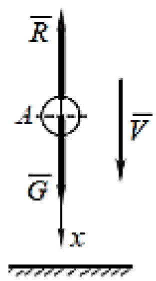
Варіанти для індивідуальних завдань

Потрібно вирішити пряму і обернену задачу. Номер варіанта обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати **10**). У варіанті вказується номер задачі і її тип – пряма, або обернена (таблиця).

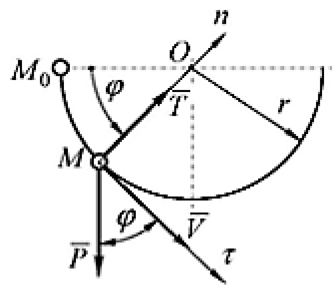
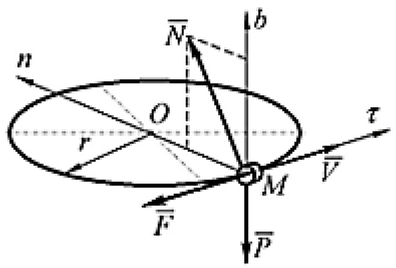
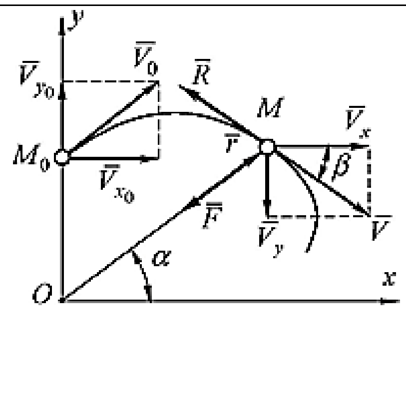
Таблиця - Варіанти завдань

Варіант	Пряма задача	Обернена задача
1.	1	4
2.	1	5
3.	1	6
4.	2	4
5.	2	5
6.	2	6
7.	3	4
8.	3	5
9.	3	3
10.	1	4

Таблиця задач

Задача	Завдання	Рисунок
1	2	3
1.	Куля вагою G=100 Н падає вертикально вниз під дією сили тяжіння і зазнає опору середовища. Закон руху кулі відповідає рівнянню $x = 327t - 109 \cdot e^{-3t}$, причому x виражається у сантиметрах, t – у секундах. ***Визначити***, силу опору середовища R у вигляді функції швидкості, тобто R = f(V)	

Продовження таблиці

1	2	3
2.	Матеріальна точка масою m=1.2 кг рухається по колу з радіусом r= 0,6 м згідно закону S= 2,4t. ***Визначити модуль*** R рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки.	
3.	Матеріальна точка масою m = 22 кг рухається по колу з радіусом R=10 м згідно закону S= 0.3t^2. ***Визначити модуль*** F рівнодіючої сил, що діють на точку, у момент часу t=5 с .	
4.	Точка M , маса якої m, рухається під дією сили тяжіння по гладенькій внутрішній поверхні жолоба. Поверхня жолоба являє собою частину бокової поверхні циліндра радіусом r. У початковий момент часу точка знаходиться в положенні M_0, а її швидкість дорівнює нулю. ***Визначити швидкість*** V точки M і реакцію T поверхні жолоба в положенні, коли центральний кут M_0OM=60°.	
5.	Важке кільце M нанизане на горизонтальне гладке дротяне коло. Кільцю надають початкову швидкість V_0, яка спрямована за дотичною до кола. Під час руху кільця на нього діє сила опору $F = k \cdot m\sqrt{V}$, де m - маса кільця, V - його швидкість, k - сталий коефіцієнт. ***Визначити через який проміжок часу*** t_1 кільце зупиниться, якщо V_0=16 м/с, k=0.5.	
6.	Точка масою m=0.1кг рухається під дією сили, яка притягує її до нерухомого центра O і пропорційна відстані від точки до цього центра, причому коефіцієнт пропорційності c=5.89 Н/м. Опір руху в середовищі є пропорційним швидкості, причому коефіцієнт пропорційності μ=4,9 Н·с/м. Початкові умови руху при t=0: x_0=0; y_0=30м; V_{x0}= $\dot{x}_0$=20м/с; V_{y0}= $\dot{y}_0$=10м/с. Силу тяжіння при розв'язуванні задачі не враховувати. ***Визначити рівняння руху*** точки: x=f$_1$(t), y=f$_2$(t).	

7 ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Мета заняття: навчитися розв'язувати задачі динаміки для різних видів коливань

Хід роботи

Порядок розв'язування задач на вільні коливання

Розв'язування задач на вільні коливання матеріальної точки рекомендується робити у наступному порядку:

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, які на неї діють.
2. Вибрати систему відліку, початок координат розмістити у положенні статичної рівноваги і спрямувати вісь у бік руху точки.
3. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на відповідну вісь.
5. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху.
6. Визначити сталі інтегрування, використовуючи початкові умови.
7. Записати остаточне рівняння руху.

Порядок розв'язування задач на затухаючі коливання

Розв'язування задач на затухаючі коливання складається із 2-х частин. У першій частині основна увага відводиться ознайомленню з найважливішими поняттями і характеристиками затухаючого коливального процесу. Друга частина присвячена складанню і розв'язуванню рівнянь затухаючих коливань.

Порядок розв'язування задач на вимушені коливання матеріальної точки без урахування опору

Задачі на вимушені коливання точки рекомендується розв'язувати у наступній послідовності:

1. Вибрати систему координат, узявши за початок положення статичної рівноваги точки;
2. Записати початкові умови руху точки;
3. Зобразити на рисунку сили, прикладені до точки;
4. Скласти диференціальне рівняння руху в проекції на відповідну вісь;
5. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху, використавши початкові умови для визначення сталих інтегрування, визначити шукані величини.

При розв'язуванні задачі матеріальну точку рекомендується зображати у проміжному положенні, де її координата на осі буде додатною.

Якщо складене диференціальне рівняння руху точки тотожне з одним із вище записаних рівнянь, то не інтегруючи це рівняння, можна зразу одержати розв'язок за наведеними формулами.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1 **(*вільні коливання*)**

Визначити максимальне видовження Δ_{max} пружини AB у сантиметрах при вільних вертикальних коливаннях вантажу, якщо він прикріплений у точці B до недеформованої пружини та відпущений зі стану спокою. Статична деформація пружини під дією вантажу дорівнює $\delta_{ст}$= 2см .

Розв'язок:

Зобразимо вантаж у довільному положенні (рис.7.1) та покажемо сили, що на нього діють: силу пружності пружини F, яка є відновлювальною силою, і силу тяжіння вантажу G.

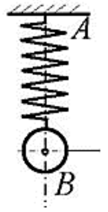


Рис. 7.1 – Схема до прикладу 1

Оскільки на вантаж крім відновлювальної сили F , діє і стала сила – сила тяжіння вантажу G, то центр коливань змістимо відносно кінця недеформованої пружини в напрямі сили тяжіння на $\delta_{ст}$(точка O). Вісь Ox спрямуємо в напрямі руху вантажу. Коли вантаж буде знаходитися у крайньому нижньому положенні (рис.7.2), то максимальне подовження пружини буде складатися з статичної деформації $\delta_{ст}$ та амплітуди a вільних коливань:

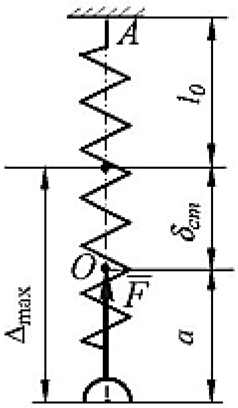


Рис. 7.2 – Дія сил і переміщення вантажу

$$\Delta_{max} = \delta_{ст} + a.$$

Величину амплітуди можна визначити з виразу:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}},$$

де x_0 - початкове положення вантажу;

$\dot{x}_0$ – початкова швидкість вантажу.

За умовою задачі при t = 0; $x_0 = \Delta_{ст}$; $\dot{x}_0 = 0$. Підставляючи значення x_0 та $\dot{x}_0$ у рівняння, отримаємо:

$$a = \sqrt{(-\delta_{ст})^2 + \frac{0}{k^2}} = \delta_{ст}.$$

Таким чином, максимальне подовження пружини дорівнює:

$$\Delta_{max} = \delta_{ст} + \delta_{ст} = 2\delta_{ст} = 2\cdot 2 = 4 \text{ см}.$$

Відповідь: Δ_{max} = 4 см.

Приклад 2 **(*затухаючі коливання*)**

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$m \cdot \ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0.$

Визначити максимальне значення маси точки, при якому рух буде аперіодичним.

Розв'язок:

Рух точки буде аперіодичним, якщо виконується умова:

$$b \geq k,$$

де $b = \frac{M}{2m}$ - коефіцієнт опору,

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - частота вільних незатухаючих коливань.

Задане диференціальне рівняння $m \cdot \ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$ приведемо до канонічного вигляду, розділивши на масу:

$$\ddot{x} + \frac{4}{m}\dot{x} + \frac{2}{m} = 0.$$

Звідси:

$$2b = \frac{4}{m}; \quad b = \frac{2}{m}; \quad k^2 = \frac{2}{m}; \quad k = \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

З урахуванням одержаних значень b і k, умова $b \geq k$ набуде вигляду:

$$\frac{2}{m} \geq \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

Вирішуємо нерівність отриману нерівність відносно маси m:

$$\frac{4}{m^2} \geq \frac{2}{m} \Rightarrow 4 \geq 2m \Rightarrow m \leq 2 \text{ кг}$$

Відповідь: максимальне значення маси m=2 *кг.*

Приклад 3

Тіло вагою P =19.6 Н, що підвішене на пружині, яку сила P_1 =10 Н розтягує на Δl = 20 см, при русі зустрічає опір, величина якого пропорційна першому ступеню швидкості. Сила опору при швидкості V =1 см/с дорівнює R=0.2 Н. У початковий момент пружина була розтягнута відносно положення рівноваги на Δ= 5 см, і тіло почало рухатися без початкової швидкості, тобто, V_0 = 0.

Визначити рівняння руху тіла x = f(t).

Розв'язок:

Перед тим, як записати загальне рівняння руху точки, необхідно з’ясувати, при якому опорі відбувається рух, тобто порівняти значення коефіцієнта b і кругової частоти k:

$$b = \frac{\mu}{2m}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

З умови задачі витікає:

$$c = \frac{P_1}{\Delta l} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ Н/см}$$

$$b = \frac{\mu}{2m} = \frac{R}{V \cdot 2m} = \frac{0.2g}{2 \cdot P} = \frac{0.2 \cdot 981}{2 \cdot 19.6} = 5 \text{ с}^{-1},$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 981}{19.6}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, $b = k$, тобто коефіцієнт опору дорівнює круговій частоті, і рух точки буде аперіодичним.

У цьому випадку закон руху точки визначається залежністю:

$$x = e^{-bt}[x_0 + (\dot{x}_0 + b \cdot x_0)t].$$

Початкові умови: $x_0 = \Delta = 5$ см; $\dot{x}_0 = V_0 = 0$.

Підставляючи їх у рівняння, одержимо:

$$x = e^{-5t}[5 + (0 + 5 \cdot 5)t] = 5e^{-5t}(5t + 1).$$

Відповідь: $x = 5e^{-5t}(5t + 1)$ см.

***Приклад 4* (*вимушені коливання*)**

На тіло, яке підвішене до пружини, діє вертикальна збуджуюча сила $Q = 30 \cdot \sin(20t)$.

Визначити коефіцієнт динамічності, якщо кругова частота вільних коливань тіла $k = 25$ с$^{-1}$.

Розв’язок:

Порівнюючи задане в умовах значення для збуджуючої сили з виразом:

$$Q = H \cdot \sin(p \cdot t + \delta),$$

отримаємо, що частота її зміни p=20 с$^{-1}$.

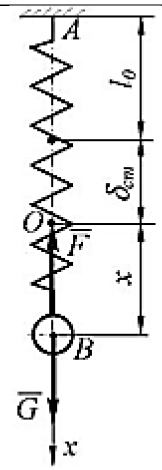
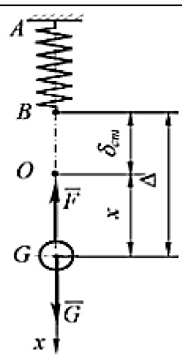
Оскільки $p < k$ то в даній задачі маємо вимушені коливання малої частоти. Коефіцієнт динамічності η у цьому випадку дорівнює:

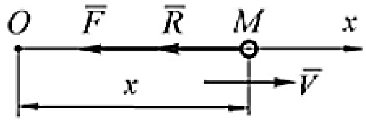
$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{20^2}{25^2}} = 2.78.$$

Відповідь: η=2.78.

Варіанти для індивідуальних завдань

Варіант обирається по останній цифрі залікової книжки (цифра **0** – обирати 1 варіант, цифра 8 – 2 варіант, цифра 9 – 3 варіант).

Варіант	Задача	Рисунок
1	2	3
1.	Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд: $3 \cdot \ddot{x} + 12\dot{x} + cx = 0$, де x в см. ***Визначити максимальне значення*** коефіцієнта жорсткості „c”, при якому рух буде аперіодичним	
2.	Вантаж масою m=25 *кг* підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості c=800 Н/м і знаходиться у вільному прямолінійному коливальному русі. ***Визначити модуль прискорення*** $a_в$ вантажу у момент часу, коли його центр тяжіння знаходиться на відстані 5 см від положення статичної рівноваги.	
3.	Пружина AB, яка закріплена одним кінцем у точці A, є такою, що для подовження її на Δl=1см необхідно прикласти у точці B при статичному навантаженні силу P=0.196 Н. У деякий момент часу до нижнього кінця B недеформованої пружини підвішують гирю G, масою 100 г і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння подальшого руху гирі і визначити амплітуду a та період T її коливань, відносячи рух гирі до осі, яка проведена униз із положення статичної рівноваги гирі. В***изначити***: x =f(t); a; T.	
4.	Тіло, вагою P=57.7 Н, яке підвішене до пружини, за відсутності сили опору коливається з періодом T=0.4π, с, а якщо діє сила опору, пропорційна швидкості, то з періодом T_1 = 0,5π, с. ***Визначити силу опору*** R при швидкості V=1 см/с, та визначити рівняння руху x=f(t) , якщо у початковий момент пружина була розтягнута із положення статичної рівноваги на x_0 = 4 см.	

1	2	3
5.	Матеріальна точка *M* здійснює прямолінійні коливання під дією відновлювальної сили, модуль якої пропорційний відстані від точки до деякого нерухомого центра *O*, і сили опору середовища, модуль якої пропорційний швидкості точки. В початковий момент часу зміщення точки $x_0 = 0$ і її швидкість V_0=1м/с. ***Визначити закон руху*** точки, якщо період коливань дорівнює $T_1 = 2$ с, а декремент загасання коливань – λ = 0.5.	
6.	Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд: $\ddot{x} + k^2 = H \cdot \sin(p \cdot t + \delta)$. ***Визначити коефіцієнт динамічності*** η	
7.	Статичне видовження пружини $\delta_{ст}$=9.81см. ***Визначити коефіцієнт динамічності***, якщо на вантаж діє вертикальна збуджуюча сила $Q=15\cdot\sin(5t)$.	

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Журило С.В. Теоретична механіка. Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт. – Умань: УНУС, 2020. – с. 77 с.
2. Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина ІІ. Динаміка матеріальної точки. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 76 с
3. Теоретична механіка. Методичні вказівки [електр]/Укл.: О.М. Алексейчук, В.Г. Савін, В.М.Федоров . К.- НТУУ «КПІ».- 36с
4. Теоретична механіка. Кінематика точки і твердого тіла [Електронний ресурс] : / Штефан Н.І., Гнатейко Н.В., Федоров В.М. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 120 с.